Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ЖАЛІЙ Олександр Юрійович

УДК 517.9

СИМЕТРІЯ ТА ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ В БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯННЯХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
ЖДАНОВ
Ренат Зуфарович
доктор фіз.–мат. наук

Київ — 2000

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми. Однією із центральних проблем класичної та сучасної математичної фізики є побудова широких класів точних розв'язків, а там, де це можливо, — загальних розв'язків багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Метод відокремлення змінних, створений Фур'є та Ейлером понад два сторіччя тому, і донині залишається одним із найбільш потужних методів інтегрування лінійних рівнянь математичної фізики. Більше цього, інтерес до нього значно зріс останнім часом, оскільки він є одним із небагатьох конструктивним методом побудови точних розв'язків багатовимірних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.

Щоб проілюструвати основні положення методу відокремлення змінних на простому прикладі, розглянемо двовимірне рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0. \tag{0.1}$$

Очевидно, що рівняння (0.1) допускає відокремлення змінних в декартових координатах. Можна також спробувати відокремити змінні в досліджуваному рівнянні в іншій системі координат, наприклад, в полярній системі координат $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. В термінах змінних r, θ рівняння (0.1) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r^{-1}\frac{\partial u}{\partial r} + r^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0. \tag{0.2}$$

Якщо подати функцію u у вигляді

$$u(r,\theta) = f(r)g(\theta), \tag{0.3}$$

де $f(r)$, $g(\theta)$ — деякі гладкі функції тотожно не рівні нулеві, то u буде розв'язком рівняння (0.2) тоді і тільки тоді, коли існує така дійсна стала λ, що функції f і g задовольняють звичайні диференціальні рівняння

$$r^2f''(r)+rf'(r)+(k^2r^2-\lambda^2)f(r)=0,$$
$$g''(\theta)+\lambda^2g(\theta)=0.$$

Постає запитання: чи існують ще координати, окрім декартових та полярних, в яких існують розв'язки рівняння (0.1) з відокремленими змінними? Зауважимо, що для рівняння (0.1) існують всього чотири системи координат (декартова, полярна, параболічна та еліптична), в яких воно допускає відокремлення змінних (див., наприклад, відому монографію Міллера [17]).

У зв'язку із цим виникає така задача: для даного конкретного диференціального рівняння з частинними похідними знайти всі системи координат, в яких це рівняння розв'язується методом відокремлення змінних — так звана *пряма задача відокремлення змінних*.

Історично першим із цих позицій досліджувалося тривимірне рівняння Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-k^2\right)\psi(x_1,x_2,x_3)=0,\quad k=\mathrm{const}. \tag{0.4}$$

Ще в 1894 році Бьохер в своїй дисертації [34] провів систематичну класифікацію систем координат, які дозволяють здійснити відокремлення змінних в рівнянні (0.4). Він показав, що це рівняння при $k^2\neq 0$ за допомогою анзацу

$$\psi(\vec{x})=\varphi_1(\omega_1(\vec{x}))\varphi_2(\omega_2(\vec{x}))\varphi_3(\omega_3(\vec{x})) \tag{0.5}$$

допускає відокремлення змінних в 11 нееквівалентних системах координат. Для $k^2=0$ рівняння (0.4) (рівняння Лапласа) допускає відокремлення змінних в 17 системах координат. В 1934 році Ейзенхарт [42] дав строге геометричне доведення цих результатів.

Олевський [19] застосував геометричну методику Ейзенхарта для відокремлення змінних в операторові Лапласа–Бельтрамі у просторах сталої кривизни (подальший розвиток цієї проблематики здійснюється в монографії Калнінса [49]).

Поряд з прямою задачею відокремлення змінних, не менш актуальною є так звана *обернена задача відокремлення змінних*: для даного диференціального рівняння з коефіцієнтами, які є довільними функціями незалежних знінних, описати всі випадки цих коефіцієнтів, для яких дане рівняння розв'язується методом відокремлення змінних хоча б в одній системі координат. Ейзенхарт [43] в 1948 році побудував 11 класів потенціалів $V(x_1, x_2, x_3)$, для яких тривимірне стаціонарне рівняння Шредінгера

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + E - V(x_1, x_2, x_3)\right)\psi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{0.6}$$

де E — спектральний параметр, допускає відокремлення змінних.

Смородінський та Вінтерлітц зі співавторами [9, 65] започаткували систематичне вивчення потенціалів, для яких стаціонарне дво– та тривимірне рівняння Шредінгера вигляду (0.6) допускає відокремлення змінних у двох та більше системах координат (так звані суперінтегровні потенціали). Класифікацію цих потенціалів було завершено Евансом [44].

В середині семидесятих років з'явилася серія робіт Калнінса, Міллера та Бойєра [35]–[39], [50]–[60], де було розвинуто симетрійний підхід до проблеми відокремлення змінних. Цей підхід грунтується на добре відомому фактові про те, що розв'язок з відокремленими змінними є спільною власною функцією диференціальних операторів першого та другого порядку, які комутують один з одним та з оператором рівняння, що розглядається. Детальний виклад результатів цих досліджень подано в монографії Міллера [17] (дивись також огляд Курнвіндера [62]). Бойєр, Калнінс та Міллер [36], в рамках симетрійного підходу, отримали повний розв'язок проблеми відокремлення змінних в нестаціонарному (1+2)–вимірному вільному рівнянні Шредінгера. Пізніше Бойер [35] описав усі координатні системи, в яких допускає відокремлення змінних (1+2)–вимірне рівняння Шредінгера, що має потенціал $V(x_1, x_2) = \alpha/x_1^2+\beta/x_2^2$. Рейд [69] повністю розв'язав проблему відокремлення змінних для тривимірного нестаціонарного рівняння Шредінгера для вільної частинки. Також слід згадати статті [41, 63], де було вивчено фізичні аспекти проблеми відокремлення змінних для деяких (1+1)– та (1+3)–вимірних рівнянь Шредінгера із залежними від часу потенціалами.

Паралельно, симетрійний підхід до проблеми відокремлення змінних в рівняннях квантової механіки, квантової теорії поля та рівняннях Фоккера–Планка розвивався також в роботах радянських математиків Шаповалова [25]–[30], Багрова [1] та Сухомліна [20]–[24] зі співавторами. Шаповалов [30] першим систематично дослідив проблему відокремлення змінних в рівнянні Дірака, використовуючи його нелієвську симетрію. Шаповалов та Сухомлін [29] отримали ряд потенціалів, для яких (1+3)–вимірне рівняння Шредінгера з вектор–потенціалом електромагнітного поля допускає відокремлення змінних, але їх результати не є повними і систематичними (відзначимо, що повністю ця задача розв'язана в підрозділі 1.2 дисертації). Далі, Сухомлін [20, 21], використовуючи ці результати, одержав деякі вектори зносів, для яких допускає відокремлення змінних (1+3)–вимірне рівняння дифузії. Пізніше Сухомлін і Барінов [22, 23, 24] дослідили можливість відокремлення змінних в рівнянні Колмогорова. Деякі аспекти відокремлення змінних в (1+1)– та (1+2)–вимірних рівняннях Фоккера–Планка було розглянуто в [32, 84].

Дана робота, головним чином, присвячена оберненій проблемі відокремлення змінних, а саме: проблемі класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними, які можуть бути розв'язані методом відокремлення змінних. Зрозуміло, що для ефективного розв'язування цієї проблеми потрібне точне алгоритмічне означення відокремлення змінних. В роботах Жданова, Ревенка та Фущича було запропоновано одне з таких можливих означень відокремлення змінних, яке застосовне як для лінійних [87, 88, 90], так і для нелінійних [82] диференціальних рівнянь з частинними похідними. На основі запропонованого означення було розвинуто ефективний підхід щодо розв'язання проблеми класифікації (1+2)–вимірного нестаціонарного рівняння Шредінгера зі скалярним потенціалом, який не залежить [82, 90] та залежить [85] від часу. Зовсім недавно [83] було отримано вичерпну класифікацію потенціалів, для яких (1+2)–вимірне рівняння Шредінгера з вектор–потенціалом електромагнітного поля допускає відокремлення змінних.

Більше того, цей метод є потужним засобом для побудови широких класів точних розв'язків деяких нелінійних рівнянь математичної фізики, таких як нелінійні рівняння Лапласа [66], Даламбера [68, 80], теплопровідності [46, 67, 81] та дифузії [40]. Галактіонов [10, 47] запропонував поняття узагальненого методу відокремлення змінних, який зводить дане нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Іншим важливим стимулом подальших досліджень інтегровності багатовимірних рівнянь математичної фізики методом відокремлення змінних є також побудова так званих суперінтегровних гамільтоніанів [44, 61]. Це пояснюється тим, що суперінтегровність даної фізичної системи тісно пов'язана з можливістю відокремлення змінних у відповідному гамільтоніані.

Ще одним фактором, який сприяє зростанню інтересу до методу відокремлення змінних, є відкриття Скляніним [73] квантового аналогу цього методу, що дозволило проінтегрувати ряд нових нелінійних моделей квантової теорії поля.

Слід зауважити, що в переважній більшості робіт, присвячених проблемі відокремлення змінних, розглядаються диференціальні рівняння з двома та трьома незалежними змінними. В той же час, реалістичні моделі фізичних явищ є чотиривимірними. Цей факт також підкреслює актуальність даної роботи.

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є розв'язання як прямої, так і оберненої задачі відокремлення змінних для таких рівнянь математичної физики параболічного типу, як нестаціонарні рівняння Шредінгера та Паулі з трьома просторовими змінними для частинки, що взаємодіє з електромагнітним полем, (1+3)–вимірне рівняння Фоккера–Планка зі сталою діагональною матрицею дифузії та (1+2)–вимірне рівняння Крамерса, яке описує броунівський рух частинки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилася згідно із загальним планом досліджень відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (науково–дослідна робота "Аналітичні та симетрійні методи дослідження диференціальних моделей математичної фізики", № держреєстрації 0198U001993).

Основна ідея методу відокремлення змінних [82], який використовується в дисертаційній роботі, є досить простою. А саме, шуканий розв'язок подається у вигляді добутку (або суми) декількох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. При цьому кожна із цих функцій має задовольняти деяке звичайне диференціальне рівняння й, окрім цього, отриманий розв'язок має залежати від декількох довільних (неперервних або дискретних) параметрів, які називають спектральними параметрами або сталими відокремлення.

Слід зазначити, що певна простота і прозорість постановки задачі зовсім не означає простоту її розв'язання. Виявляється, що повне розв'язання як прямої так і оберненої задачі відокремлення змінних вимагає побудови загального розв'язку деякої перевизначеної багатовимірної системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому коефіцієнти в цих рівняннях є, як правило, довільними функціями, які мають бути визначені в процесі інтегрування цієї системи. Отже, задача відокремлення змінних в такій постановці є істотно нелінійною навіть для лінійних рівнянь. Саме цим, в першу чергу, пояснюється той факт, що для таких класичних рівнянь, як (1+3)–вимірні рівняння Шредінгера і Паулі для частинки, що рухається в електромагнітному полі, проблема відокремлення змінних залишалася не розв'язаною.

Основним результатом першого розділу є повне розв'язання задачі класифікації (1+3)–вимірних рівнянь Шредінгера для частинки, що взаємодіє з електромагнітним полем

$$(p_0 - p_a p_a)\psi(t,\vec{x}) = 0. \tag{0.7}$$

Тут використовуються позначення

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0(t,\vec{x}), \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} - eA_a(t,\vec{x}), \quad a = 1,2,3,$$

де $A(t,\vec{x}) = (A_0(t,\vec{x}),\ A_1(t,\vec{x}),\ A_2(t,\vec{x}),\ A_3(t,\vec{x}))$ — вектор–потенціал електромагнітного поля та e — електричний заряд частинки. Тут і надалі, за індексами a, b, c, що повторюються, передбачене сумовування від 1 до 3.

У підрозділі 1.1 введено необхідні поняття, означення та алгоритми методу відокремлення змінних. Тут доведено теорему про зв'язок між можливістю відокремлення змінних та симетрійними властивостями рівняння (0.7). А саме, розв'язок з відокремленими змінними рівняння Шредінгера (0.7) є спільною власною функцією трьох лінійних диференціальних операторів симетрії другого порядку цього рівняння, які комутують між собою, при цьому сталі відокремлення є їх власними значеннями.

У підрозділі 1.2 доведено, що (0.7) допускає відокремлення змінних лише тоді, коли магнітне поле $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ є однорідним, тобто незалежним від $\vec{x}$. Більше цього доведено, що просторові компоненти вектор–потенціалу електромагнітного поля з точністю до калібровних перетворень можна звести до вигляду

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -H_3(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & 0 & -H_1(t) \\ -H_2(t) & H_1(t) & 0 \end{pmatrix}\vec{x} = \frac{1}{2}\,\vec{H}(t)\times\vec{x},$$

При цьому маємо 11 класів потенціалів $A_0(t,\vec{x})$, для яких рівняння (0.7) розв'язується методом відокремлення змінних принаймні в одній системі координат.

Далі сформульовано конструктивний алгоритм побудови всіх систем координат, в яких рівняння Шредінгера (0.7) з фіксованим вектор–потенціалом допускає відокремлення змінних. Ефективність цього алгоритму продемонстровано на прикладі вектор–потенціалу

$$2e\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}, \quad eA_0 = \frac{q}{|\vec{x}|} - \frac{c^2}{12}\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2\right), \tag{0.8}$$

де q, c — довільні ненульові сталі. Доведено, що рівняння Шредінгера (0.7) із потенціалом (0.8) допускає відокремлення змінних в сферичній, конічній системах координат, та в координатах витягнутого сфероїда, і при цьому кожна із цих систем координат обертається за допомогою залежної від часу ортогональної матриці поворотів 3×3 з кутами Ейлера $\alpha = \alpha(t) = -ct$, $\beta = \mathrm{const}$, $\gamma = \mathrm{const}$. Також, для кожної із цих систем координат побудовано відповідні трійки лінійних диференціальних операторів симетрії другого порядку, які комутують між собою.

Отримані результати використано в підрозділах 1.3 та 1.4 до задачі відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона–Якобі з вектор–потенціалом та рівнянні Паулі, що описує рух частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ в електромагнітному полі. Доведено, що ці рівняння роз'язуються методом відокремлення змінних для тих самих вектор–потенціалів і в тих самих системах координат, в яких допускає відокремлення змінних рівняння Шредінгера (0.7).

Другий розділ дисертації присвячений проблемі відокремлення змінних в багатовимірних рівняннях Фоккера–Планка, які є основними рівняннями в теорії дифузійних процесів. В підрозділі 2.1 одержано необхідну умову для відокремлення змінних в (1+3)–вимірних рівняннях Фоккера–Планка зі сталою діагональною матрицею дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \frac{\partial}{\partial x_a}(B_a(\vec{x})u) = 0,$$

де $\vec{B}(\vec{x}) = (B_1(\vec{x}), B_2(\vec{x}), B_3(\vec{x}))$ — вектор зносів. Отримано ряд нових конфігурацій вектора зносів, для яких дане рівняння допускає відокремлення змінних. Для кожного із них знайдено всі нееквівалентні координатні системи, які дозволяють здійснити відокремлення змінних, та побудовано відповідні розв'язки з відокремленими змінними в явному вигляді.

В підрозділі 2.2 досліджено проблему відокремлення змінних в (1+2)-вимірному рівнянні Крамерса, яке допускає нетривіальну групу інваріантності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial x} + (\nu y + kx)\frac{\partial u}{\partial y} + \nu u.$$

Знайдено всі системи координат, в яких рівняння Крамерса допускає відокремлення змінних. Окрім цього, побудовано розв'язки рівняння Крамерса з відокремленими змінними в явному вигляді.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Одержано повний розв'язок задачі класифікації (1+3)–вимірних рівнянь Шредінгера з вектор–потенціалом електромагнітного поля, що допускають відокремлення змінних, в результаті якого отримуються звичайні диференціальні рівняння, одне першого та три другого порядку. Запропоновано конструктивний алгоритм

побудови всіх систем координат, в яких (1+3)–вимірне рівняння Шредінгера з фіксованим вектор–потенціалом допускає таке відокремлення змінних, та відповідних розв'язків цього рівняння з відокремленими змінними.

2. Доведено, що всі вектор–потенціали і системи координат, які забезпечують відокремлення змінних для (1+3)–вимірних рівнянь Шредінгера з вектор–потенціалом (в рамках сформульованого означення), також забезпечують відокремлення змінних і для (1+3)–вимірного рівняння Гамільтона–Якобі з вектор–потенціалом.

3. Повністю розв'язано задачу класифікації (1+3)–вимірних рівнянь Паулі для частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ в електромагнітному полі, що допускають відокремлення змінних, в результаті якого отримуються матричні звичайні диференціальні рівняння спеціального вигляду, одне першого та три другого порядку за додаткової умови комутативності.

4. Одержано необхідну умову того, щоб (1+3)–вимірне рівняння Фоккера–Планка зі сталою діагональною матрицею дифузії допускало відокремлення змінних, в результаті якого отримуються звичайні диференціальні рівняння, одне першого та три другого порядку. Отримано нові конфігурації вектора зносів, для яких дане рівняння допускає таке відокремлення змінних. Для кожної із них знайдено всі нееквівалентні координатні системи, які дозволяють здійснити відокремлення змінних, та побудовано відповідні розв'язки з відокремленими змінними в явному вигляді.

5. Повністю розв'язано проблему відокремлення змінних в (1+2)–вимірному рівнянні Крамерса, яке допускає нетривіальну групу симетрій. Знайдено всі системи координат, в яких рівняння Крамерса розв'язується методом відокремлення змінних, та побудовано відповідні розв'язки рівняння Крамерса з відокремленими

змінними в явному вигляді.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використаними для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також в квантовій механіці, теорії дифузійних процесів та теорії броунівського руху.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — Р.З. Жданову. Доведення всіх результатів дисертації проведене особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на Київському семінарі з функціонального аналізу (керівник — академік НАН України Ю.М. Березанський), на III Міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1999), на XXXII симпозіумі з математичної фізики (Торунь, Польща, 2000).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в п'яти роботах [12, 78, 79, 91, 92].

Автор висловлює вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико – математичних наук

Ренату Зуфаровичу Жданову

за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України та Київського семінару з функціонального аналізу за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Відокремлення змінних в багатовимірному рівнянні Шредінгера

Даний розділ присвячений проблемі відокремлення змінних в багатовимірному рівнянні Шредінгера для частинки, що рухається в електромагнітному полі.

В підрозділі 1.1 введено поняття та сформульовано алгоритм метода відокремлення змінних. Доведено теорему про зв'язок між можливістю відокремлення змінних та симетрійними властивостями даного рівняння.

В підрозділі 1.2 одержано повний розв'язок задачі відокремлення змінних в (1+3)–вимірному рівнянні Шредінгера з вектор–потенціалом електромагнітного поля. Отримані результати використано для розгляду стаціонарного рівняння Шредінгера з потенціалом.

В підрозділі 1.3 сформульовано основну теорему про відокремлення змінних в (1+3)–вимірному рівнянні Гамільтона–Якобі.

Підрозділ 1.4 містить результати по відокремленню змінних в (1+3)–вимірному рівнянні Паулі, яке описує рух частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ в електромагнітному полі.

Основні результати розділу 1 опубліковано в роботах [12, 92].

1.1. Алгоритм методу відокремлення змінних. Основні поняття, означення та теореми

У цьому розділі розглядається рівняння Шредінгера (РШ) для безспінової частинки, що взаємодіє з електромагнітним полем (див., наприклад [15, §111])

$$(p_0 - p_a p_a)\psi(t,\vec{x}) = 0, \tag{1.1}$$

де $\psi(t,\vec{x})$ — хвильова функція, t — часова та $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — просторові змінні. Зауважимо, що $\psi(t,\vec{x})$ — комплексна функція дійсних змінних t, x_1, x_2, x_3. Тут використовуються позначення

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0(t,\vec{x}), \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} - eA_a(t,\vec{x}), \quad a = 1,2,3, \tag{1.2}$$

де $A(t,\vec{x}) = (A_0(t,\vec{x}),\ A_1(t,\vec{x}),\ A_2(t,\vec{x}),\ A_3(t,\vec{x}))$ — вектор–потенціал електромагнітного поля, e — електричний заряд частинки.

Тут і надалі, за індексами a, b, c, що повторюються, передбачено сумовування від 1 до 3. Протягом усієї дисертаційної роботи перша, друга та третя похідні функції однієї змінної позначаються відповідно однією, двома, та трьома крапками

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \dot{f}(x), \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \equiv \ddot{f}(x), \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \equiv \dddot{f}(x).$$

Символи $\vec{\nabla}$ та Δ означають відповідно тривимірні оператори набла та Лапласа

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Верхній індекс T означає транспонування відповідних вектора або матриці. Всі функції, що розглядаються в дисертації, вважатимемо достатньо гладкими.

Метод відокремлення змінних (ВЗ), в його класичному розумінні, можна умовно розбити на дві основні частини. Перша полягає у відшуканні спеціальних сімейств часткових розв'язків досліджуваного рівняння (розв'язків із відокремленими змінними). Друга частина методу — це розвинення розв'язку крайових задач в гільбертовому просторі за базисом, який складають отримані на попередньому етапі частинні розв'язки, та дослідження повноти цього базису. При цьому різним задачам відповідають різні оптимальні базиси (координатні поверхні системи координат, як правило, мають співпадати з граничними поверхнями розглядуваної крайової задачі). Тому знаходження як можна більш широких класів розв'язків з відокремленими змінними (отриманими в різних системах координат) є актуальним для аналізу багатьох крайових задач.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є перша частина методу. В подальшому, коли використовується термін "відокремлення змінних", ми розуміємо саме побудову сімейств розв'язків досліджуваного рівняння з відокремленими змінними.

При всьому різномаїтті підходів до проблеми ВЗ в диференціальних рівняннях з частинними похідними (ДРЧП), згаданих у Вступі, можна виділити три загальні принципи, які мають місце у кожному із цих підходів, а саме:

1. Подання шуканого розв'язку у вигляді добутку (або суми) декількох функцій, кожна із яких є функцією однієї змінної.

2. Вимога того, щоб кожна із вищезгаданих функцій задовольняла деяке звичайне диференціальне рівняння.

3. Залежність отриманого розв'язку від кількох довільних (неперервних або дискретних) параметрів, які називають спектральними параметрами або сталими відокремлення.

На основі цих властивостей в роботі [82] було сформульовано алгоритм ВЗ в лінійних ДРЧП. Нижче подається детальний опис цього алгоритму, формулюються основні означення і теореми, на яких він базується. Зокрема, доводиться теорема про зв'язок між ВЗ в РШ та його симетрією в класі операторів другого порядку.

Введемо у розгляд нову систему координат t, $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, де ω_a є функціонально незалежними як функції змінних x_1, x_2, x_3, тобто має місце співвідношення

$$\det \left\| \frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} \right\|_{a,b=1}^{3} \neq 0. \tag{1.3}$$

Традиційним є таке розуміння методу відокремлення змінних, згідно з яким рівняння Шредінгера (1.1) допускає відокремлення змінних в системі координат t, ω_1, ω_2, ω_3, якщо кожен розв'язок рівняння (1.1) є лінійною комбінацією частинних розв'язків вигляду $F_0(t)F_1(\omega_1)F_2(\omega_2)\times F_3(\omega_3)$. Але в рамках такого підходу до відокремлення змінних важко отримати якийсь класифікаційний результат. В дисертації за основу береться таке означення відокремлення змінних.

Означення 1.1 *Будемо казати, що рівняння Шредінгера (1.1) допускає відокремлення змінних в системі координат t, $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, якщо існують деяка ненульова функція $Q(t, \vec{x})$ і чотири звичайні диференціальні рівняння*

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_0(t) = U_0(t, \varphi_0(t);\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ &\ddot{\varphi}_a(\omega_a) = U_a(\omega_a, \varphi_a(\omega_a), \dot{\varphi}_a(\omega_a);\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1.4}$$

які одночасно аналітично залежать від трьох незалежних комплексних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (сталих відокремлення) і такі, що для кожної трійки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ та для кожної множини розв'язків $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ системи (1.4) функція

$$\psi(t, \vec{x}) = Q(t, \vec{x})\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \tag{1.5}$$

є розв'язком рівняння (1.1).

Тут $Q(t, \vec{x})$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ — комплексні функції дійсних змінних.

Означення 1.2 *Три комплексні параметри $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в системі рівнянь (1.4) називаються незалежними, якщо 4×3 – матриця*

$$\left\| \frac{\partial U_\mu}{\partial \lambda_a} \right\|_{\mu=0}^{3} \, {}_{a=1}^{3} \tag{1.6}$$

має ранг 3 скрізь, де $\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \neq 0$.

Ця умова гарантує істотну залежність розв'язків з відокремленими змінними від сталих відокремлення $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Підкреслимо, що функції Q, ω_1, ω_2, ω_3 не залежать від $\vec{\lambda}$.

Зауважимо, що формули (1.5)–(1.6) складають вхідні дані методу. Тобто кожну з цих умов можна модифікувати, узагальнюючи таким чином класичне означення ВЗ. Наприклад, якщо добуток функцій в (1.5) замінити на суму, то одержується анзац для адитивного ВЗ в нелінійному рівнянні Гамільтона–Якобі. Крім того, можна змінювати вигляд редукованих рівнянь (1.4) і зменшувати кількість суттєвих параметрів λ_a. Більш детальний аналіз цих питань можна знайти в статті [82].

Отже, коли стверджується, що отримано повний опис вектор–потенціалів та систем координат, в яких РШ допускає ВЗ, то це розуміється лише в рамках означення refoz1. Якщо ж користуватися більш загальним означенням, то можна побудувати якісь інші вектор–потенціали та системи координат, в яких РШ допускає ВЗ. Але всі відомі нам розв'язки рівняння Шредінгера з відокремленими змінними підпадають під нашу схему і можуть бути отриманими в рамках нашого підходу.

Легко перевірити прямою підстановкою, що вигляд співвідношень (1.5)–(1.6) не змінюється при заміні

$$\lambda_a \to \lambda'_a = \Lambda_a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad a = 1, 2, 3 \tag{1.7}$$

за умови

$$\det \left\| \frac{\partial \Lambda_a}{\partial \lambda_b} \right\|_{a,b=1}^{3} \neq 0. \tag{1.8}$$

Тому набори спектральних параметрів $\vec{\lambda}$ та $\vec{\lambda}'$, пов'язані співвідношенням (1.7) будемо вважати еквівалентними.

Далі введемо відношення еквівалентності на множині вектор–потенціалів $A_0(t, \vec{x})$, $\vec{A}(t, \vec{x})$, для яких РШ допускає ВЗ, а також на множині розв'язків з відокремленими змінними та множині відповідних систем координат.

Означення 1.3 *Два вектор–потенціали $A(t,\vec{x})$ і $A'(t,\vec{x})$ називаються еквівалентними, якщо вони пов'язані між собою за допомогою калібровного перетворення*

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad A_0 \to A_0' = A_0 - \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{1.9}$$

де $f = f(t,\vec{x})$ — довільна гладка функція.

При цих перетвореннях хвильова функція $\psi(t,\vec{x})$ змінюється згідно правилу

$$\psi \to \psi' = \psi \exp(ief) \tag{1.10}$$

Дійсно, послідовно виконавши в РШ (1.1) перетворення (1.9), (1.10), одержуємо це рівняння, де замість функцій $\vec{A}, A_0, \psi$ записані функції $\vec{A}', A_0', \psi'$.

Означення 1.4 *Два розв'язки з відокремленими змінними називаються еквівалентними, якщо вони пов'язані між собою перетвореннями з групи Лі інваріантності рівняння Шредінгера для вільної частинки, тобто рівняння (1.1) з нульовим вектор–потенціалом $A(t,\vec{x}) = 0$ (див., наприклад, [31, §6.1]):*

1. *Зсуви за часовою та просторовими змінними на сталу величину*

$$\begin{aligned} &\psi'(t',\vec{x}') = \psi(t,\vec{x}), \\ &t' = t + b_0, \quad x_a' = x_a + b_a, \quad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.11}$$

2. *Повороти системи координат на кут θ_a навколо осі x_a*

$$\begin{aligned} &\psi'(t',\vec{x}') = \psi(t,\vec{x}), \quad t' = t, \quad x_a' = x_a, \\ &x_b' = x_b \cos\theta_a + x_c \sin\theta_a, \\ &x_c' = x_c \cos\theta_a - x_b \sin\theta_a, \end{aligned} \tag{1.12}$$

   де трійка (a,b,c) — трійка чисел з циклу $(1,2,3)$.

3. *Перехід до нової інерціальної системи відліку, яка рухається зі швидкістю v_a вздовж осі x_a (перетворення Галілея)*

$$\psi'(t',\vec{x}') = \exp\left(\frac{i}{2}v_a x_a + \frac{i}{4}v_a v_a t\right)\psi(t,\vec{x}), \tag{1.13}$$
$$t' = t, \quad x'_a = x_a + v_a t, \quad x'_b = x_b, \quad a \neq b, \quad a,b = 1,2,3,$$

4. *Калібровне перетворення*

$$\psi'(t',\vec{x}') = e^{i\zeta}\psi(t,\vec{x}), \quad t' = t, \quad x'_a = x_a, \quad a = 1,2,3. \tag{1.14}$$

5. *Масштабне перетворення*

$$\psi'(t',\vec{x}') = \exp\left(-\frac{3}{2}\eta\right)\psi(t,\vec{x}) \tag{1.15}$$
$$t' = \exp(2\eta)t, \quad x'_a = \exp(\eta)x_a, \quad a = 1,2,3.$$

6. *Проективне перетворення*

$$\psi'(t',\vec{x}') = (1+\xi t)^{3/2}\exp\left\{\frac{-i\xi x_a x_a}{4(1+\xi t)}\right\}\psi(t,\vec{x}), \tag{1.16}$$
$$t' = \frac{t}{1+\xi t}, \quad x'_a = \frac{x_a}{1+\xi t}, \quad a = 1,2,3.$$

Тут $b_0, b_a, \theta_a, v_a, \zeta, \eta, \xi$ — дійсні параметри відповідних перетворень.

Окрім цього, еквівалентними є також розв'язки з відокремленими змінними з еквівалентними наборами спектральних параметрів $\vec{\lambda}$.

Перетворення (1.11)–(1.16) складають 13-параметричну групу Лі, яку називать групою Шредінгера.

Немає сенсу розрізняти ті системи координат, які дають еквівалентні розв'язки.

Означення 1.5 *Дві системи координат t, ω_1, ω_2, ω_3 та t', ω_1', ω_2', ω_3' називаються еквівалентними, якщо в результаті відокремлення змінних в сенсі Означення 1.1 одержуються еквівалентні розв'язки з відокремленими змінними. Зокрема, еквівалентними будуть системи координат, які пов'язані між собою за допомогою оборотніх перетворень такого вигляду:*

$$t \to t' = f_0(t), \quad \omega_a \to \omega_a' = f_a(\omega_a), \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.17}$$

$$Q \to Q' = Ql_0(t)l_1(\omega_1)l_2(\omega_2)l_3(\omega_3), \tag{1.18}$$

де $f_0, \ldots, f_3, l_0, \ldots, l_3$ — деякі гладкі функції.

Дійсно перетворення (1.17) та (1.18) не змінюють структуру анзацу (1.5). А отже в результаті процедури ВЗ в цих системах координат отримаємо один і той же розв'язок з відокремленими змінними.

Ці відношення еквівалентності відбивають свободу вибору функцій $Q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ та сталих відокремлення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при якому не порушуються умови (1.5)–(1.6). Вони розбивають множину вектор–потенціалів $A(t, \vec{x})$, для яких РШ допускає ВЗ, а також множину розв'язків із відокремленими змінними та множину відповідних систем координат на класи еквівалентності. Надалі, подаючи відповідні списки, будемо наводити по одному представникові із кожного класу еквівалентності.

Якщо вхідні дані зафіксовано у вигляді (1.5)–(1.6), то алгоритм використання методу ВЗ можна подати так:

1. Підставляємо анзац (1.5) в РШ (1.1) і виражаємо похідні $\dot{\varphi}_0$, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_3$ в термінах функцій φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$, використовуючи рівняння (1.4).

2. Розглядаємо φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$, λ_1, λ_2, λ_3 як нові незалежні змінні y_1, $\ldots$, y_{10}. Оскільки функції Q, ω_1, ω_2, ω_3, A_0, A_1, A_2, A_3 не залежать від змінних $y_1, \ldots, y_{10}$, вимагаємо, щоб отримана рівність перетворювалася в тотожність для довільних y_1, $\ldots$, y_{10}.

Інакше кажучи, розщеплюємо її за цими змінними. Після розщеплення одержуємо перевизначену систему нелінійних ДРЧП для невідомих функцій Q, ω_1, ω_2, ω_3, A_0, A_1, A_2, A_3.

3. Розв'язавши цю систему, одержуємо вичерпний опис вектор–потенціалів $A(t,\vec{x})$, для яких РШ допускає ВЗ, та перелік відповідних систем координат.

Завдяки лінійності РШ (1.1) має місце таке твердження (див. [62])

Теорема 1.1 *Нехай рівняння Шредінгера (1.1) допускає відокремлення змінних в сенсі Означення 1.1. Тоді редуковані рівняння (1.4) є лінійними як за функціями* φ_0, φ_a, $\dot\varphi_a$, $a=1,2,3$, *так і за сталими відокремлення* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

Виконавши перетворення еквівалентності (1.18) з певним чином підібраними функціями $l_1(\omega_1)$, $l_2(\omega_2)$, $l_3(\omega_3)$, завжди можна вибрати редуковані рівняння (1.4) у вигляді

$$\begin{aligned} &i\dot\varphi_0=\left(T_0(t)-T_b(t)\lambda_b\right)\varphi_0,\\ &\ddot\varphi_a=\left(F_{a0}(\omega_a)+F_{ab}(\omega_a)\lambda_b\right)\varphi_a,\quad a=1,2,3, \end{aligned} \tag{1.19}$$

де T_0,T_b,F_{a0},F_{ab} — деякі гладкі функції своїх аргументів.

Тепер умова (1.6) набуває вигляду

$$\operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3\\ F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{31} & F_{32} & F_{33}\end{matrix}\right\|=3. \tag{1.20}$$

Тоді невідомі функції Q, ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють таку систему нелінійних ДРЧП

$$\frac{\partial\omega_b}{\partial x_a}\frac{\partial\omega_c}{\partial x_a}=0,\quad b\neq c,\quad b,c=1,2,3; \tag{1.21}$$

$$\sum_{a=1}^{3}F_{ab}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c}=T_b(t),\quad b=1,2,3; \tag{1.22}$$

$$2\left(\frac{\partial Q}{\partial x_b}-ieQA_b\right)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}+Q\left(i\frac{\partial\omega_a}{\partial t}+\Delta\omega_a\right)=0,\quad a=1,2,3; \tag{1.23}$$

$$Q\sum_{a=1}^{3}F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}+i\frac{\partial Q}{\partial t}+\Delta Q-2ieA_b\frac{\partial Q}{\partial x_b}+$$
$$+Q\left(T_0(t)-ie\frac{\partial A_b}{\partial x_b}-eA_0-e^2A_bA_b\right)=0. \qquad (1.24)$$

В силу рівняння (1.22) в рамках відношення еквівалентності (1.7)–(1.8) можна покласти функції $T_a, F_{ab}, a, b = 1,2,3$ дійсними функціями.

Таким чином, проблема ВЗ в РШ зводиться до інтегрування системи десяти нелінійних ДРЧП для восьми невідомих функцій Q, ω_1, ω_2, ω_3, A_0, A_1, A_2, A_3. Більше цього, коефіцієнти T_0, T_a, F_{a0}, F_{ab} є довільними функціями, які мають бути визначеними в процесі інтегрування рівнянь (1.21)–(1.24). В підрозділі 1.2 нам вдалося побудувати загальний розв'язок цієї системи, що, зокрема, дало всі можливі форми вектор–потенціалу електромагнітного поля $A(t,\vec{x}) = (A_0(t,\vec{x}),\ldots,A_3(t,\vec{x}))$, для яких рівняння (1.1) розв'язується методом ВЗ.

Зв'язок з операторами симетрії. Одним із наріжних каменів теоретико–групових методів в сучасній математичній фізиці є той факт, що майже всі конструктивні методи аналізу ДРЧП явно чи неявно використовують їх симетрійні властивості. Не є виключенням і метод ВЗ. Як доведено Курнвіндером [62] для довільних рівнянь еліптичного типу другого порядку, кожен розв'язок з відокремленими змінними є власною функцією деякого набору взаємно комутуючих операторів симетрії другого порядку цього рівняння. Нижче ми доводимо аналогічне твердження і для рівняння (1.1).

Означення 1.6 *Лінійний диференціальний оператор другого порядку*

$$L = k_{ab}(\vec{x},t)\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}+m_a(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x_a}+n(\vec{x},t),$$

де k_{ab}, m_a, n, $(a, b = 1, 2, 3)$ — деякі гладкі функції від $\vec{x}, t$, називається оператором симетрії для рівняння Шредінгера (1.1), якщо

$$[L, S] = R(\vec{x}, t)S, \tag{1.25}$$

де $S = p_0 - p_a p_a$ — оператор рівняння (1.1), $[L, S] = LS - SL$ — комутатор операторів Q і S, та $R(\vec{x}, t)$ — деяка гладка функція, вигляд якої залежить від коефіцієнтів оператора L.

Виконання рівності (1.25) означає, що застосування операторів правої і лівої частини цієї рівності до довільної гладкої функції дає один і той же результат.

Теорема 1.2 *Нехай рівняння Шредінгера (1.1) допускає відокремлення змінних в сенсі Означення 1.1. Тоді для відповідного розв'язку з відокремленими змінними завжди знайдеться три взаємно комутуючих лінійних диференціальних оператори симетрії другого порядку рівняння Шредінгера, таких, що цей розв'язок з відокремленими змінними є спільною власною функцією цих операторів. При цьому сталі відокремлення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ є власними значеннями операторів симетрії.*

Доведення. Зробимо в рівнянні (1.1) заміну змінних

$$\psi(t, \vec{x}) = Q(t, \vec{x})\Psi\left(t, \omega_1(t, \vec{x}), \omega_2(t, \vec{x}), \omega_3(t, \vec{x})\right), \tag{1.26}$$

де $Q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ — довільний розв'язок системи ДРЧП (1.21)–(1.24). Підставляючи вираз (1.26) в (1.1) та беручи до уваги рівняння (1.21)–(1.24), отримаємо

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega_a^2} - F_{a0}(\omega_a)\Psi\right)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} - T_0(t)\Psi = 0.$$

Зауважимо, що з умови (1.20) та рівняння (1.22) випливає умова

$$\det \|F_{ab}\|_{a,b=1}^{3} \neq 0. \tag{1.27}$$

Розв'язуючи рівняння (1.22) відносно

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_1}{\partial x_c}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_2}{\partial x_c}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_3}{\partial x_c},$$

отримаємо

$$\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c} = G_{ba}T_b, \quad a = 1, 2, 3,$$

де G_{ba} — елементи матриці, оберненої до матриці $\|F_{ab}\|$.

Таким чином, в нових змінних $t, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \Psi(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ рівняння (1.1) набуде вигляду

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\omega_a^2} - F_{a0}(\omega_a)\Psi\right)G_{ba}T_b(t) - T_0(t)\Psi = 0. \tag{1.28}$$

Побудуємо тепер шукану трійку операторів. Розглянемо систему трьох редукованих рівнянь (1.19) для функцій $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$. Домножимо перше з них на $\partial_0\varphi_2\varphi_3$, друге — на $\varphi_0\varphi_1\varphi_3$, а третє — на $\varphi_0\varphi_1\varphi_2$. В результаті отримуємо

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\omega_a^2} = \left(F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b\right)\Psi, \quad a = 1, 2, 3. \tag{1.29}$$

В силу умови (1.27) систему (1.29) завжди можна розв'язати відносно $\lambda_b\Psi$, $b = 1, 2, 3$

$$\sum_{a=1}^{3} G_{ba}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\omega_a^2} - F_{a0}(\omega_a)\Psi\right) = \lambda_b\Psi, \quad b = 1, 2, 3,$$

А отже, розв'язок рівняння (1.28) з відокремленими змінними

$$\Psi = \varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3)$$

є спільною власною функцією диференціальних операторів

$$P_a = \sum_{b=1}^{3} G_{ab}\left(\frac{\partial^2}{\partial\omega_b^2} - F_{b0}(\omega_b)\right), \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.30}$$

причому виконується рівність

$$P_a\Psi = \lambda_a\Psi. \tag{1.31}$$

Нагадаємо, що G_{ab} — елементи матриці, оберненої до матриці $\|F_{ab}(\omega_a)\|$.

Прямими (але дуже громіздкими) обчисленнями можна переконатися, що оператори P_1, P_2, P_3 комутують між собою при довільних функціях $F_{ab}(\omega_a)$, $F_{a0}(\omega_a)$, $a, b = 1, 2, 3$, тобто має місце рівність

$$[P_a, P_b] = P_aP_b - P_bP_a = 0, \quad a, b = 1, 2, 3. \tag{1.32}$$

Рівняння (1.28) в термінах операторів P_1, P_2, P_3 набуває вигляду

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} + T_a(t)P_a\Psi - T_0(t)\Psi = 0.$$

Оскільки виконуються рівності

$$[i\frac{\partial}{\partial t} + T_a(t)P_a - T_0(t), P_a] = 0, \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.33}$$

то оператори P_1, P_2, P_3 є взаємно комутуючими операторами симетрії рівняння (1.28).

Позначивши через P_1', P_2', P_3' оператори P_1, P_2, P_3, записані для початкових змінних $t, \vec{x}, \psi$, з рівнянь (1.31)–(1.33) маємо

$$[p_0 - p_c p_c, P_a'] = 0, \quad P_a'\psi = \lambda_a\psi, \quad [P_a', P_b'] = 0, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

де $\psi = Q(t, \vec{x})\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3)$, та $p_0 - p_c p_c$ — оператор рівняння (1.1). Теорему доведено.$\rhd$

Таким чином, існують два можливих підходи до проблеми ВЗ в лінійних ДРЧП. Перший полягає в тому, щоб знаходити взаємно комутуючі оператори симетрії даного рівняння, а потім будувати їх власні функції [17, 29]. Інший підхід, який викладено в цьому підрозділі, є ближчим до класичного розуміння ВЗ. Постулюється бажана форма (1.5) анзацу для розв'язку з відокремленими змінними, а потім доводять, що кожному отриманому розв'язку можна співставити деякий набір взаємно комутуючих операторів симетрії даного рівняння. Підкреслимо, що використання кожного з цих підходів для побудови всіх можливих систем координат, в яких дане рівняння допускає ВЗ, приводить до інтегрування системи нелінійних ДРЧП типу (1.21)–(1.24).

Обидва підходи мають свої переваги та недоліки. Використання першого підходу має сенс при ВЗ в багатокомпонентних системах диференціальних рівнянь з частинними похідними [1, 30]. При ВЗ в рівняннях із однією залежною змінною більш ефективним є другий підхід, оскільки обчислення операторів симетрії є зайвим кроком, який не є необхідним для отримання розв'язків із відокремленими змінними.

Нарешті, зв'язок методу ВЗ з операторами симетрії досліджуваного рівняння дає можливість застосовувати методи теорії зображень груп Лі для подальшого аналізу спеціальних функцій, які виникають як розв'язки редукованих рівнянь, в дусі відомого проекту Бейтмена [3]–[5].

Відокремлення змінних в тривимірному стаціонарному рівнянні Шредінгера. Під час інтегрування системи нелінійних ДРЧП (1.21)–(1.24) суттєво використовуються результати ВЗ в тривимірному стаціонарному РШ

$$(-\Delta + \lambda_1)\psi(\vec{x}) = 0, \tag{1.34}$$

де λ_1 — спектральний параметр.

Бьохер в своїй класичній роботі [34] вперше провів систематичну класифікацію координатних систем, в яких рівняння (1.34) допускає ВЗ. Він показав, що рівняння (1.34) за допомогою анзацу

$$\psi(\vec{x}) = \varphi_1(\omega_1(\vec{x}))\varphi_2(\omega_2(\vec{x}))\varphi_3(\omega_3(\vec{x})) \tag{1.35}$$

допускає ВЗ в одинадцяти нееквівалентних системах координат $\omega_1(\vec{x})$, $\omega_2(\vec{x})$, $\omega_3(\vec{x})$, які наведено нижче (див., також, [42]). Зауважимо, що координатні системи подано в неявному вигляді $x_a = z_a(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $a = 1, 2, 3$.

1. Декартові координати

   $$z_1 = \omega_1, \quad z_2 = \omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$$
   $$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbf{R}.$$

2. Циліндричні координати

   $$z_1 = e^{\omega_1}\cos\omega_2, \quad z_2 = e^{\omega_1}\sin\omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$$
   $$0 \le \omega_2 < 2\pi, \quad \omega_1, \omega_3 \in \mathbf{R}.$$

3. Координати параболічного циліндра

   $$z_1 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)/2, \quad z_2 = \omega_1\omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$$

$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2, \omega_3 \in \mathbf{R}.$$

4. Координати еліптичного циліндра

$$z_1 = a\cosh\omega_1\cos\omega_2, \quad z_2 = a\sinh\omega_1\sin\omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$$
$$\omega_1 > 0, \quad -\pi < \omega_2 \leq \pi, \quad \omega_3 \in \mathbf{R}, \quad a > 0.$$

5. Сферичні координати

$$z_1 = \omega_1^{-1}\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3,$$
$$z_2 = \omega_1^{-1}\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3,$$
$$z_3 = \omega_1^{-1}\tanh\omega_2,$$
$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 < 2\pi.$$

6. Координати витягнутого сфероїда

$$z_1 = a\operatorname{csch}\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3, \quad a > 0,$$
$$z_2 = a\operatorname{csch}\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3,$$
$$z_3 = a\coth\omega_1\tanh\omega_2, \tag{1.36}$$
$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 < 2\pi.$$

7. Координати сплющеного сфероїда

$$z_1 = a\csc\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3, \quad a > 0,$$
$$z_2 = a\csc\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3,$$
$$z_3 = a\cot\omega_1\tanh\omega_2,$$
$$0 < \omega_1 < \pi/2, \quad \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 < 2\pi.$$

8. Параболічні координати

$$z_1 = e^{\omega_1+\omega_2}\cos\omega_3, \quad z_2 = e^{\omega_1+\omega_2}\sin\omega_3,$$
$$z_3 = (e^{2\omega_1} - e^{2\omega_2})/2,$$
$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 \leq 2\pi.$$

9. Параболоїдальні координати

$$z_1 = 2a\cosh\omega_1\cos\omega_2\sinh\omega_3, \quad a > 0,$$
$$z_2 = 2a\sinh\omega_1\sin\omega_2\cosh\omega_3,$$
$$z_3 = a(\cosh 2\omega_1 + \cos 2\omega_2 - \cosh 2\omega_3)/2,$$

$$\omega_1, \omega_3 \in \mathbf{R}, \quad 0 \le \omega_2 < \pi.$$

10. Еліпсоїдальні координати

$$z_1 = a\,\frac{1}{\mathrm{sn}(\omega_1,\,k)}\,\mathrm{dn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{sn}(\omega_3,\,k), \quad a > 0,$$
$$z_2 = a\,\frac{\mathrm{dn}(\omega_1,\,k)}{\mathrm{sn}(\omega_1,\,k)}\,\mathrm{cn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{cn}(\omega_3,\,k),$$
$$z_3 = a\,\frac{\mathrm{cn}(\omega_1,\,k)}{\mathrm{sn}(\omega_1,\,k)}\,\mathrm{sn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{dn}(\omega_3,\,k),$$
$$0 < \omega_1 < K, \quad -K' \le \omega_2 \le K', \quad 0 \le \omega_3 \le 4K.$$

11. Конічні координати

$$z_1 = \omega_1^{-1}\mathrm{dn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{sn}(\omega_3,\,k),$$
$$z_2 = \omega_1^{-1}\mathrm{cn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{cn}(\omega_3,\,k),$$
$$z_3 = \omega_1^{-1}\mathrm{sn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{dn}(\omega_3,\,k),$$
$$\omega_1 > 0, \quad -K' \le \omega_2 \le K', \quad 0 \le \omega_3 \le 4K.$$

Тут використовуються стандартні позначення для тригонометричних, гіперболічних функцій та еліптичних функцій Якобі [5], при цьому $k\,(0 < k < 1)$ є модуль останніх, а $k' = (1 - k^2)^{1/2}$.

Координатні системи 1, 2–4, та 5–11 із цього переліку називаються повністю розщеплюваними, частково розщеплюваними та нерозщеплюваними, відповідно.

Зауважимо, що цей список дещо відрізняється від списку, який наведено в [42], оскільки координатні системи $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ переозначено за допомогою перетворень (1.17) так, що для всіх випадків 1–11 виконуються умови

$$\Delta\omega_a = 0, \quad a = 1, 2, 3. \tag{1.37}$$

Тепер коротко розглянемо основні кроки застосування викладеного вище підходу для ВЗ в стаціонарному РШ (1.34).

Враховуючи вигляд анзацу (1.35) та умови (1.37), редуковані рівняння завжди можна вибрати у вигляді

$$\ddot{\varphi}_a = (F_{a1}(\omega_a)\lambda_1 + F_{a2}(\omega_a)\lambda_2 + F_{a3}(\omega_a)\lambda_3)\,\varphi_a, \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.38}$$

де F_{ab}, $a, b = 1, 2, 3$ — деякі гладкі дійсні функції.

Підставляючи анзац (1.35) в рівняння (1.34) та беручи до уваги співвідношення (1.38), отримуємо систему нелінійних ДРЧП для функцій $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega_b}{\partial x_a}\frac{\partial \omega_c}{\partial x_a} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3; \\ &\sum_{a=1}^{3} F_{ab}(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} = \delta_{1b}, \quad b = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1.39}$$

де δ_{1b} — символ Кронекера.

Використовуючи класичні результати [42] ВЗ в стаціонарному РШ (1.34), робимо висновок, що загальний розв'язок $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{x})$ системи (1.39) за умови (1.3) розбивається на 11 нееквівалентних класів, представники яких подано в списку (1.36).

Система (1.39) збігається із системою рівнянь (1.21) та (1.22), де $T_1 = 1$, $T_2 = T_3 = 0$. Далі, за рахунок довільності вибору сталих відокремлення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (див. (1.7)–(1.8)) можна завжди покласти $T_1(t_0) = 1$, $T_2(t_0) = T_3(t_0) = 0$ для деякого $t_0 \in \mathbf{R}$. Отже, система (1.21), (1.22) для $t = t_0$ набуває вигляду (1.39). Це і є ключовий момент, який дозволяє нам використати результати [42] для інтегрування (1.21), (1.22).

1.2. Відокремлення змінних в нестаціонарному рівнянні Шредінгера (1.1)

Введемо такі позначення:

$\mathcal{O}(t)$ — ортогональна матриця 3×3, залежна від часової змінної t

$$\mathcal{O}(t) = \left(\begin{array}{c} \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\beta\,\sin\gamma \end{array} \right. \quad \rightarrow \tag{1.40}$$

$$\to \qquad \left. \begin{matrix} -\cos\alpha\,\sin\beta-\sin\alpha\,\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\,\sin\gamma \\ -\sin\alpha\,\sin\beta+\cos\alpha\,\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\,\sin\gamma \\ \cos\beta\,\sin\gamma & \cos\gamma \end{matrix} \right),$$

де $\alpha=\alpha(t), \beta=\beta(t), \gamma=\gamma(t)$ — довільні гладкі функції змінної t; $\mathcal{L}(t)$ — діагональна матриця 3×3, залежна від часової змінної t

$$\mathcal{L}(t)=\begin{pmatrix} l_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & l_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & l_3(t) \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

де $l_1(t), l_2(t), l_3(t)$ — довільні гладкі функції, тотожньо не рівні нулеві; $\vec{w}(t)$ — вектор–стовпчик, елементи якого $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ є довільними гладкими функціями змінної t.

Має місце таке твердження.

Лема 1.3 *Загальний розв'язок $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t,\vec{x})$ системи шести диференціальних рівнянь з частинними похідними (1.21), (1.22) за умов (1.3), (1.20) задається неявно з точністю до відношення еквівалентності (1.17) такою формулою:*

$$\vec{x}=\mathcal{O}(t)\mathcal{L}(t)\left(\vec{z}(\vec{\omega})+\vec{w}(t)\right), \tag{1.42}$$

де функції $\vec{z}=\vec{z}(\vec{\omega})$ збігаються із однією із 11 трійок зі списку (1.36), а компоненти матриці $\mathcal{L}(t)$ задовольняють такі умови

- $l_1(t)=l_2(t)$ — *для частково розщеплюваних систем координат 2–4 із (1.36),*
- $l_1(t)=l_2(t)=l_3(t)$ — *для нерозщеплюваних систем координат 5–11 із (1.36).*

З геометричної точки зору права частина формули (1.42) є результатом послідовного застосування до вектора $\vec{z}(\vec{\omega})$ таких залежних від часу t перетворень:

1. зсувів $\vec{z}\to\vec{z}'=\vec{z}+\vec{w}(t)$,

2. масштабних перетворень $\vec{z} \to \vec{z}' = \mathcal{L}(t)\vec{z}$,

3. тривимірного обертання $\vec{z} \to \vec{z}' = \mathcal{O}(t)\vec{z}$ з кутами Ейлера $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$.

Зауважимо, що для останнього із цих перетворень розглядають [14, §35] вектор $\vec{\Omega}(t)$ з такими компонентами

$$\begin{aligned} &\Omega_1(t) = \dot{\gamma}(t)\cos\alpha(t) + \dot{\beta}(t)\sin\alpha(t)\sin\gamma(t), \\ &\Omega_2(t) = \dot{\gamma}(t)\sin\alpha(t) - \dot{\beta}(t)\cos\alpha(t)\sin\gamma(t), \\ &\Omega_3(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)\cos\gamma(t), \end{aligned} \tag{1.43}$$

який направлений вздовж миттєвої осі обертання і називається *кутовою швидкістю* обертання.

Доведення леми 1.3. Спочатку виконаємо перетворення годографу в системі ДРЧП (1.21), (1.22)

$$t = t, \quad x_a = u_a(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad a = 1, 2, 3. \tag{1.44}$$

Прямим обчисленням встановлюємо, що виконуються такі тотожності:

$$\begin{aligned} &1. \ \ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_a}\frac{\partial \omega_j}{\partial x_a} \equiv \frac{1}{\delta^2}(\Upsilon_{ik}\Upsilon_{jk} - \Upsilon_{ij}\Upsilon_{kk}), \quad (i,j,k) = \mathrm{cycle}\,(1,2,3), \\ &2. \ \ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_a}\frac{\partial \omega_i}{\partial x_a} \equiv \frac{1}{\delta^2}(\Upsilon_{jj}\Upsilon_{kk} - \Upsilon_{jk}^2), \quad (i,j,k) = \mathrm{cycle}\,(1,2,3), \end{aligned} \tag{1.45}$$

де

$$\Upsilon_{ij} = \frac{\partial u_a}{\partial \omega_i}\frac{\partial u_a}{\partial \omega_j}, \quad \delta = \det \left\| \frac{\partial u_a}{\partial \omega_b} \right\|_{a,b=1}^{3} \neq 0.$$

З урахуванням цих тотожностей початкова система (1.21), (1.22) в нових координатах набуває вигляду

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_a}{\partial \omega_b}\frac{\partial u_a}{\partial \omega_c} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3; \\ \sum_{(i,j,k)=\mathrm{cycle}\,(1,2,3)} F_{ia}(\omega_i)\frac{\partial u_b}{\partial \omega_j}\frac{\partial u_b}{\partial \omega_j}\frac{\partial u_c}{\partial \omega_k}\frac{\partial u_c}{\partial \omega_k} = \delta^2 T_a(t), \quad a = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{1.46}$$

Якщо ввести три вектори

$$\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \omega_1}, \quad \vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \omega_2}, \quad \vec{v}_3 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \omega_3},$$

тоді перші три рівняння системи (1.46) набудуть вигляду

$$\vec{v}_a \vec{v}_b = 0, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad a \neq b.$$

Отже, вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ складаіть ортогональну систему векторів в просторі $\mathbf{R}^3$. З аналітичної геометрії добре відомо, що найбільш загальний вигляд системи таких векторів може бути виражений через кути Ейлера

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \omega_1} &= R_1 \left\{ \begin{array}{c} \cos f_1 \cos f_2 - \sin f_1 \sin f_2 \cos f_3 \\ \sin f_1 \cos f_2 + \cos f_1 \sin f_2 \cos f_3 \\ \sin f_2 \sin f_3 \end{array} \right\}, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \omega_2} &= R_2 \left\{ \begin{array}{c} -\cos f_1 \sin f_2 - \sin f_1 \cos f_2 \cos f_3 \\ -\sin f_1 \sin f_2 + \cos f_1 \cos f_2 \cos f_3 \\ \cos f_2 \sin f_3 \end{array} \right\}, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \omega_3} &= R_3 \left\{ \begin{array}{c} \sin f_1 \sin f_3 \\ -\cos f_1 \sin f_3 \\ \cos f_3 \end{array} \right\},
\end{aligned} \tag{1.47}$$

де $f_1, \ldots, R_3$ — довільні гладкі функції від $t, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ці формули дають найбільш загальну форму функцій $\partial u_a / \partial \omega_b$, $a, b = 1, 2, 3$, що задовольняють перші три рівняння з (1.46). Далі, підставивши (1.47) в рівняння (1.46), які залишилися, маємо

$$\sum_{a=1}^{3} F_{ab}(\omega_a) R_a^{-2} = T_b(t), \quad b = 1, 2, 3. \tag{1.48}$$

Отже, систему (1.46) зведено до еквівалентного вигляду (1.47), (1.48), причому мають бути враховані умови сумісності для системи ДРЧП (1.47)

$$\frac{\partial}{\partial \omega_c} \left(\frac{\partial u_a}{\partial \omega_b} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega_b} \left(\frac{\partial u_a}{\partial \omega_c} \right), \quad b \neq c, \quad a, b, c = 1, 2, 3.$$

Ці умови дають перевизначену систему нелінійних ДРЧП для функцій f_1, f_2, f_3

$$\cos f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega_1} = -R_2^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial \omega_2},$$
$$\cos f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_2} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega_2} = R_1^{-1} \frac{\partial R_2}{\partial \omega_1},$$
$$\cos f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega_3} = 0,$$
$$\cos f_2 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_1} + \sin f_2 \sin f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} = 0,$$
$$\cos f_2 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_2} + \sin f_2 \sin f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_2} = -R_3^{-1} \frac{\partial R_2}{\partial \omega_3},$$
$$\cos f_2 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_3} + \sin f_2 \sin f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_3} = R_2^{-1} \frac{\partial R_3}{\partial \omega_2},$$
$$\sin f_2 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_1} - \cos f_2 \sin f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} = -R_3^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial \omega_3},$$
$$\sin f_2 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_2} - \cos f_2 \sin f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_2} = 0,$$
$$\sin f_2 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_3} - \cos f_2 \sin f_3 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_3} = R_1^{-1} \frac{\partial R_3}{\partial \omega_1}.$$

При інтегруванні цієї системи необхідно розглянути окремо два випадки:

$$(1)\ \sin f_3 \neq 0, \quad (2)\ \sin f_3 = 0.$$

Випадок 1. Нехай виконується умова $\sin f_3 \neq 0$. Тоді одержану систему можна розв'язати відносно $\partial f_a / \partial \omega_b$, $(a, b = 1, 2, 3)$. Маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \omega_1} &= R_3^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial \omega_3} \cos f_2 \csc f_3, \\
\frac{\partial f_1}{\partial \omega_2} &= -R_3^{-1} \frac{\partial R_2}{\partial \omega_3} \sin f_2 \csc f_3, \\
\frac{\partial f_1}{\partial \omega_3} &= R_2^{-1} \frac{\partial R_3}{\partial \omega_2} \sin f_2 \csc f_3 - R_1^{-1} \frac{\partial R_3}{\partial \omega_1} \cos f_2 \csc f_3, \\
\frac{\partial f_2}{\partial \omega_1} &= -R_2^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial \omega_2} - R_3^{-1} \frac{\partial R_1}{\partial \omega_3} \cos f_2 \cot f_3, \\
\frac{\partial f_2}{\partial \omega_2} &= R_1^{-1} \frac{\partial R_2}{\partial \omega_1} + R_3^{-1} \frac{\partial R_2}{\partial \omega_3} \sin f_2 \cot f_3,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial \omega_3} &= -R_2^{-1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_2}\,\sin f_2\,\cot f_3 + R_1^{-1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_1}\,\cos f_2\,\cot f_3,\\
\frac{\partial f_3}{\partial \omega_1} &= -R_3^{-1}\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}\,\sin f_2,\\
\frac{\partial f_3}{\partial \omega_2} &= -R_3^{-1}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_3}\,\cos f_2,\\
\frac{\partial f_3}{\partial \omega_3} &= R_2^{-1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_2}\,\cos f_2 + R_1^{-1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_1}\,\sin f_2.
\end{aligned}
$$

Умовою сумісності для цієї системи ДРЧП є така система нелінійних ДРЧП для функцій R_1, R_2, R_3:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad R_1R_2\frac{\partial^2 R_3}{\partial\omega_1\partial\omega_2} - R_1\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_2} - R_2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_2}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_1} = 0,\\
&2.\quad R_2R_3\frac{\partial^2 R_1}{\partial\omega_2\partial\omega_3} - R_2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_2} - R_3\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_2}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_3} = 0,\\
&3.\quad R_1R_3\frac{\partial^2 R_2}{\partial\omega_1\partial\omega_3} - R_3\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_1} - R_1\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_3}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_1} = 0,\\
&4.\quad R_1^2\,R_2^2\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_3}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_3} + R_1^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_2}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_2} - R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_1} - \\
&\qquad -R_1^2\,R_2^2\,R_3\,\frac{\partial^2 R_2}{\partial\omega_3\partial\omega_3} - R_1^2\,R_2\,R_3^2\,\frac{\partial^2 R_3}{\partial\omega_2\partial\omega_2} = 0,\\
&5.\quad R_1^2\,R_2^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_3} - R_1^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_2}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_2} + R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_1}\,\frac{\partial R_3}{\partial \omega_1} - \\
&\qquad -R_1^2\,R_2^2\,R_3\,\frac{\partial^2 R_1}{\partial\omega_3\partial\omega_3} - R_1\,R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial^2 R_3}{\partial\omega_1\partial\omega_1} = 0,\\
&6.\quad -R_1^2\,R_2^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_3} + R_1^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_2}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_2} + R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_1}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_1} - \\
&\qquad -R_1^2\,R_2\,R_3^2\,\frac{\partial^2 R_1}{\partial\omega_2\partial\omega_2} - R_1\,R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial^2 R_2}{\partial\omega_1\partial\omega_1} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

Немає потреби в прямому інтегруванні системи нелінійних ДРЧП (1.50), оскільки вона вже була розв'язана Ейзенхартом [42] в припущенні, що R_1, R_2, R_3 не залежать від t. Залишилось зробити тільки одну річ: визначити, яким чином часова змінна t входить в загальний розв'язок системи (1.47)–(1.50) в досліджуваному нестаціонарному випадку.

Як показано в попередньому підрозділі, проблема ВЗ в стаціонарному РШ (1.34) зводиться до інтегрування системи (1.39) і, більше того, її загальний розв'язок визначається з точністю до відношення еквівалентності (1.17) формулами зі списку (1.36). Отже, якщо зафіксувати часову змінну t рівною $t_0 \in \mathbf{R}$, то після інтегрування рівнянь (1.47)–(1.50) ми отримаємо з точністю до відношення еквівалентності (1.17) формули (1.36).

Враховуючи цей факт, розв'яжемо співвідношення (1.46) при $t = t_0$ відносно $F_{ab}(\omega_a)$ (зауважимо, що F_{ab} не залежать від t) для кожного класу функцій $\vec{x} = \vec{z}(\vec{\omega})$ зі списку (1.36). Це завжди можна зробити в силу (1.27). Результати цих обчислень подано нижче в формі 3×3 — матриць Штеккеля $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{11}$, в яких (a, b)–та компонента є відповідною функцією $F_{ab}(\omega_a)$. Матриці такого вигляду вперше розглядав Штеккель [74]. Ми подаємо канонічний вигляд цих матриць $\mathcal{F}_1, \ldots$, $\mathcal{F}_{11}$ з точністю до вибору (1.7) сталих відокремлення λ_a, $a = 1, 2, 3$.

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} e^{2\omega_1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_3 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -1 & 0 \\ \omega_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_4 = \begin{pmatrix} a^2 \cosh^2 \omega_1 & 1 & 0 \\ -a^2 \cos^2 \omega_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_5 = \begin{pmatrix} \omega_1^{-4} & -\omega_1^{-2} & 0 \\ 0 & \cosh^{-2} \omega_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_6 = \begin{pmatrix} a^2 \sinh^{-4} \omega_1 & -\sinh^{-2} \omega_1 & -1 \\ a^2 \cosh^{-4} \omega_2 & \cosh^{-2} \omega_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_7 = \begin{pmatrix} a^2 \sin^{-4}\omega_1 & -\sin^{-2}\omega_1 & 1 \\ -a^2\cosh^{-4}\omega_2 & \cosh^{-2}\omega_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

$$\mathcal{F}_8 = \begin{pmatrix} e^{4\omega_1} & -e^{2\omega_1} & -1 \\ e^{4\omega_2} & e^{2\omega_2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_9 = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 2\omega_1 & -a\cosh 2\omega_1 & -1 \\ -a^2\cos^2 2\omega_2 & a\cos 2\omega_2 & 1 \\ a^2\cosh^2 2\omega_3 & a\cosh 2\omega_3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{10} = \begin{pmatrix} a^2\dfrac{\mathrm{dn}^4(\omega_1,k)}{\mathrm{sn}^4(\omega_1,k)} & -\dfrac{\mathrm{dn}^2(\omega_1,k)}{\mathrm{sn}^2(\omega_1,k)} & 1 \\ -a^2k'^4\,\mathrm{cn}^4(\omega_2,k') & k'^2\,\mathrm{cn}^2(\omega_2,k') & -1 \\ a^2k^4\,\mathrm{cn}^4(\omega_3,k) & k^2\,\mathrm{cn}^2(\omega_3,k) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{11} = \begin{pmatrix} \omega_1^{-4} & -\omega_1^{-2} & 0 \\ 0 & k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2,k') & -1 \\ 0 & k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3,k) & 1 \end{pmatrix}.$$

Маючи явний вигляд функцій F_{ab}, $(a,b=1,2,3)$, можемо розв'язати (1.48) відносно R_1, R_2, R_3. Підставивши результати цих обчислень в (1.50) та розщепивши отримані рівності за $\omega_1,\omega_2,\omega_3$, одержуємо кінцевий вигляд функцій R_1, R_2, R_3:

1. $R_a^2 = T_a^{-1}, \quad a=1,2,3;$
2. $R_1^2 = R_2^2 = T_1^{-1}e^{2\omega_1}, \quad R_3^2 = T_3^{-1};$
3. $R_1^2 = R_2^2 = T_1^{-1}(\omega_1^2+\omega_2^2), \quad R_3^2 = T_3^{-1};$
4. $R_1^2 = R_2^2 = T_1^{-1}a^2(\cosh^2\omega_1 - \cos^2\omega_2), \quad R_3^2 = T_3^{-1};$
5. $R_1^2 = T_1^{-1}\omega_1^{-4}, \quad R_2^2 = R_3^2 = T_1^{-1}\omega_1^{-2}\cosh^{-2}\omega_2;$
6. $R_1^2 = T_1^{-1}a^2\sinh^{-2}\omega_1(\sinh^{-2}\omega_1 + \cosh^{-2}\omega_2),$

   $R_2^2 = T_1^{-1}a^2\cosh^{-2}\omega_2(\sinh^{-2}\omega_1 + \cosh^{-2}\omega_2),$

$$
\begin{aligned}
&\quad R_3^2 = T_1^{-1}a^2\sinh^{-2}\omega_1\cosh^{-2}\omega_2;\\
&7.\quad R_1^2 = T_1^{-1}a^2\sin^{-2}\omega_1(\sin^{-2}\omega_1-\cosh^{-2}\omega_2),\\
&\quad R_2^2 = T_1^{-1}a^2\cosh^{-2}\omega_2(\sin^{-2}\omega_1-\cosh^{-2}\omega_2),\\
&\quad R_3^2 = T_1^{-1}a^2\sin^{-2}\omega_1\cosh^{-2}\omega_2;\\
&8.\quad R_1^2 = T_1^{-1}e^{2\omega_1}(e^{2\omega_1}+e^{2\omega_2}),\\
&\quad R_2^2 = T_1^{-1}e^{2\omega_2}(e^{2\omega_1}+e^{2\omega_2}),\qquad R_3^2 = T_1^{-1}e^{2(\omega_1+\omega_2)};\\
&9.\quad R_1^2 = T_1^{-1}a^2(\cosh 2\omega_1-\cos 2\omega_2)(\cosh 2\omega_1+\cosh 2\omega_3),\\
&\quad R_2^2 = T_1^{-1}a^2(\cosh 2\omega_1-\cos 2\omega_2)(\cos 2\omega_2+\cosh 2\omega_3),\\
&\quad R_3^2 = T_1^{-1}a^2(\cosh 2\omega_1+\cosh 2\omega_3)(\cos 2\omega_2+\cosh 2\omega_3);\\
&10.\quad R_1^2 = T_1^{-1}a^2\left(\frac{\mathrm{dn}^2(\omega_1,k)}{\mathrm{sn}^2(\omega_1,k)}-k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2,k')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(\frac{\mathrm{dn}^2(\omega_1,k)}{\mathrm{sn}^2(\omega_1,k)}+k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3,k)\right),\\
&\quad R_2^2 = T_1^{-1}a^2\left(\frac{\mathrm{dn}^2(\omega_1,k)}{\mathrm{sn}^2(\omega_1,k)}-k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2,k')\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2,k')+k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3,k)\right),\\
&\quad R_3^2 = T_1^{-1}a^2\left(\frac{\mathrm{dn}^2(\omega_1,k)}{\mathrm{sn}^2(\omega_1,k)}+k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3,k)\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\left(k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2,k')+k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3,k)\right);\\
&11.\quad R_1^2 = T_1^{-1}\omega_1^{-4},\\
&\quad R_2^2 = R_3^2 = T_1^{-1}\omega_1^{-2}\left(k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2,k')+k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3,k)\right).
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

Підставивши ці вирази в (1.49), бачимо, що отримана система (тимчасово позначимо її як $\mathcal{S}$) не залежить явно від t. Вона є в інволюції, а тому її загальний розв'язок залежить від трьох довільних функцій змінної t. Як показує пряме обчислення, функції

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \operatorname{arccot}\left(\cos\gamma\cot(\tilde f_1+\beta)+\sin\gamma\cot\tilde f_3\csc(\tilde f_1+\beta)\right)+\alpha,\\
f_2 &= \operatorname{arccot}\left(\cos\tilde f_3\cot(\tilde f_1+\beta)+\sin\tilde f_3\cot\gamma\csc(\tilde f_1+\beta)\right)+\tilde f_2,
\end{aligned}
$$

$$f_3 = \arccos\left(\cos\gamma\cos\tilde{f}_3 - \sin\gamma\sin\tilde{f}_3\cos(\tilde{f}_1+\beta)\right), \qquad (1.53)$$

де α, β, γ — довільні функції від t та $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ — (незалежні від часової змінної) розв'язки системи $\mathcal{S}$ при $t = t_0$, тотожньо задовільняють систему $\mathcal{S}$. Оскільки формули (1.53) містять три довільні функції змінної t, то вони складають загальний розв'язок системи $\mathcal{S}$. Підставивши (1.53) в (1.47), маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{u}}{\partial\omega_1} &= R_1\mathcal{O}(t)\left\{\begin{array}{c}\cos\tilde{f}_1\,\cos\tilde{f}_2 - \sin\tilde{f}_1\,\sin\tilde{f}_2\cos\tilde{f}_3\\ \sin\tilde{f}_1\,\cos\tilde{f}_2 + \cos\tilde{f}_1\,\sin\tilde{f}_2\cos\tilde{f}_3\\ \sin\tilde{f}_2\,\sin\tilde{f}_3\end{array}\right\},\\
\frac{\partial\vec{u}}{\partial\omega_2} &= R_2\mathcal{O}(t)\left\{\begin{array}{c}-\cos\tilde{f}_1\,\sin\tilde{f}_2 - \sin\tilde{f}_1\,\cos\tilde{f}_2\cos\tilde{f}_3\\ -\sin\tilde{f}_1\,\sin\tilde{f}_2 + \cos\tilde{f}_1\,\cos\tilde{f}_2\cos\tilde{f}_3\\ \cos\tilde{f}_2\,\sin\tilde{f}_3\end{array}\right\}, \qquad (1.54)\\
\frac{\partial\vec{u}}{\partial\omega_3} &= R_3\mathcal{O}(t)\left\{\begin{array}{c}\sin\tilde{f}_1\,\sin\tilde{f}_3\\ -\cos\tilde{f}_1\,\sin\tilde{f}_3\\ \cos\tilde{f}_3\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

де матриця $\mathcal{O}(t)$ визначається формулою (1.40).

Якщо тепер вибрати в отриманій системі $t = t_0$, то її загальний розв'язок визначається з точністю до відношення еквівалентності (1.17) формулами зі списку (1.36). Враховуючи цей факт, а також умову (1.3), інтегруємо систему (1.54), внаслідок чого отримуємо формули (1.42), де $l_1(t), l_2(t), l_3(t)$ — ненульові функції, що пов'язані з $T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_3(t)$ такими співвідношеннями

$$\begin{array}{rl}
1. & T_a = l_a^{-2}, \quad a = 1,2,3;\\
2-4. & T_1 = l_1^{-2}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = l_3^{-2};\\
5-11. & T_1 = l_1^{-2}, \quad T_2 = T_3 = 0.
\end{array} \qquad (1.55)$$

Випадок 2. Нехай має місце співвідношення $\sin f_3 = 0$. У цьому випадку маємо аналог системи (1.49)

$$\frac{\partial g}{\partial\omega_1} = -R_2^{-1}\frac{\partial R_1}{\partial\omega_2}, \quad \frac{\partial g}{\partial\omega_2} = R_1^{-1}\frac{\partial R_2}{\partial\omega_1},$$

$$\frac{\partial g}{\partial \omega_3}=0,\quad \frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}=0,\quad \frac{\partial R_2}{\partial \omega_3}=0,\quad \frac{\partial R_3}{\partial \omega_1}=0,\quad \frac{\partial R_3}{\partial \omega_2}=0, \qquad (1.56)$$

де $g=\pm f_1+f_2$ та аналог системи (1.50)

$$R_1^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_2}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_2}+R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial R_1}{\partial \omega_1}\,\frac{\partial R_2}{\partial \omega_1}-R_1^2\,R_2\,R_3^2\,\frac{\partial^2 R_1}{\partial \omega_2\partial \omega_2}-$$
$$-R_1\,R_2^2\,R_3^2\,\frac{\partial^2 R_2}{\partial \omega_1\partial \omega_1}=0, \qquad (1.57)$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial \omega_3}=0,\quad \frac{\partial R_2}{\partial \omega_3}=0,\quad \frac{\partial R_3}{\partial \omega_1}=0,\quad \frac{\partial R_3}{\partial \omega_2}=0.$$

Система ДРЧП (1.56), (1.57) достатньо проста, а тому легко інтегрується. В результаті одержуємо частинний випадок (1.42) за умови $\sin\gamma=0$. Лему доведено. $\triangleright$

Враховуючи цей результат, неважко проінтегрувати ДРЧП (1.23) та (1.24), оскільки їх можна розглядати як алгебраїчні рівняння відносно функцій $A_b(t,\vec{x})$, $b=1,2,3$ та $A_0(t,\vec{x})$, відповідно.

Класифікація вектор–потенціалів, для яких рівняння Шредінгера (1.1) розв'язується методом відокремлення змінних. Запишемо комплексну функцію Q в (1.5) у вигляді

$$Q=\exp(S_1+iS), \qquad (1.58)$$

де S_1, S — дійсні функції. Тоді, якщо взяти до уваги, що компоненти вектор–потенціалу $A(t,\vec{x})$ та функції $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ є дійсними функціями, після підстановки Q в (1.23) з використанням (1.37) можна розщепити отримані рівняння на дійсну та уявну складові:

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_b}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b}=0,\quad a=1,2,3; \qquad (1.59)$$
$$2\left(\frac{\partial S}{\partial x_b}-eA_b\right)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b}+\frac{\partial \omega_a}{\partial t}=0,\quad a=1,2,3. \qquad (1.60)$$

Взявши до уваги співвідношення (1.3), з (1.59) одержуємо рівність $\partial S_1/\partial x_b=0,\ b=1,2,3$. Звідси випливає, що $S_1=S_1(t)$.

В рамках відношення еквівалентності (1.10) покласти функцію T_0 дійсною функцією. А отже, в силу рівняння (1.24, всі функції F_{a0},

$a = 1, 2, 3$ будуть дійсними. Тоді, після підстановки (1.58) в (1.24) з наступним розщепленням отриманого рівняння на дійсну та уявну складові одержимо

$$\sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x_b}\frac{\partial S}{\partial x_b} + \\ + 2eA_b\frac{\partial S}{\partial x_b} + T_0(t) - eA_0 - e^2A_bA_b = 0, \tag{1.61}$$

$$\dot{S}_1 + \Delta S - e\frac{\partial A_b}{\partial x_b} = 0. \tag{1.62}$$

Позначивши $e\vec{\mathcal{A}} = e\vec{A} - \vec{\nabla}S$, переписуємо систему (1.60) у вигляді системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь для функцій $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$

$$\frac{\partial\omega_a}{\partial t} = 2e\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\mathcal{A}_b, \quad a = 1, 2, 3.$$

Згідно (1.3) детермінант цієї системи не рівний нулеві. Отже вона має єдиний розв'язок. Зробивши в цьому розв'язкові перетворення годографу (1.44), отримаємо такі вирази для $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$:

$$\vec{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2e}\frac{\partial\vec{u}(t,\vec{\omega})}{\partial t}.$$

Підставивши в цю формулу вираз для $\vec{u}(t,\vec{\omega})$ з (1.42), та повернувшись до змінних t, x_1, x_2, x_3, одержуємо таку систему

$$2(-e\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}S) = \mathcal{M}(t)\vec{x} + \mathcal{O}(t)\mathcal{L}(t)\dot{\vec{w}}. \tag{1.63}$$

Тут використано позначення

$$\mathcal{M}(t) = \dot{\mathcal{O}}(t)\mathcal{O}^{-1}(t) + \mathcal{O}(t)\dot{\mathcal{L}}(t)\mathcal{L}^{-1}(t)\mathcal{O}^{-1}(t), \tag{1.64}$$

де $\mathcal{O}(t)$, $\mathcal{L}(t)$ — це 3×3 матриці, які визначаються формулами (1.40) і (1.41), відповідно, $\vec{w} = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))^T$. Зауважимо, що $\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1}$ — антисиметрична, а $\mathcal{O}\dot{\mathcal{L}}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{O}^{-1}$ — симетрична частини матриці $\mathcal{M}$.

Прямим обчисленням легко переконатися, що рівняння (1.61) і (1.63) інваріантні відносно калібровних перетворень (1.9), при цьому, яке випливає з (1.10), функція S перетворюється за правилом

$$S \to S' = S + ef, . \tag{1.65}$$

Тобто, послідовно виконавши в рівняннях (1.61) та (1.63) перетворення (1.9) і (1.65), одержуємо початкові рівняння, де замість функцій $\vec{A}$, A_0, S слід записати функції $\vec{A}'$, A_0', S'. Отже, якщо РШ (1.1) з потенціалом $\vec{A}, A_0$ допускає ВЗ в деякій системі координат, то в цій же системі координат допускає ВЗ також і РШ (1.1) з потенціалом $\vec{A}', A_0'$ (зміниться лише множник Q (1.58)). Тому варто зафіксувати певну калібровку, і надалі працювати лише з представниками класів еквівалентності, на які розбиває множину вектор–потенціалів $A(t, \vec{x})$ відношення еквівалентності (1.9).

Виберемо калібровку таким чином, щоб виконувалась рівність

$$2\vec{\nabla} S = \mathcal{O}(t)\dot{\mathcal{L}}(t)\mathcal{L}^{-1}(t)\mathcal{O}^{-1}(t)\vec{x} + \mathcal{O}(t)\mathcal{L}(t)\dot{\vec{w}}. \tag{1.66}$$

Інтегрування цієї системи ДРЧП дає вираз для S:

$$S = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\dot{l}_a}{l_a}{x'}_a^2 + 2l_a\dot{w}_a x'_a\right), \tag{1.67}$$

де використовується позначення

$$\vec{x}' = \mathcal{O}^{-1}\vec{x}. \tag{1.68}$$

Далі, з рівняння (1.63) одержуємо явний вигляд для просторових компонент вектор–потенціалу електромагнітного поля

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{2e}\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1}\vec{x}, \tag{1.69}$$

при цьому явний вигляд матриці $\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1}$ задається формулою

$$\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\cos\gamma) & \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta}\cos\gamma & 0 & \to \\ -(\dot{\gamma}\sin\alpha - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\gamma) & \dot{\gamma}\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha\sin\gamma & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cc} & \dot{\gamma}\sin\alpha - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\gamma \\ \to & -(\dot{\gamma}\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha\sin\gamma) \\ & 0 \end{array}\left.\right), \tag{1.70}$$

де α, β, γ — довільні функції від t.

Отже, як випливає з (1.69), просторові компоненти вектор–потенціалу електромагнітного поля $A(t,\vec{x})$ є лінійними за просторовими змінними. Тому магнітне поле $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ має бути однорідним, тобто незалежним від $\vec{x}$. З (1.69), (1.70) неважко отримати явний вигляд його компонент

$$\begin{aligned} eH_1 &= -\dot{\gamma}(t)\cos\alpha(t) - \dot{\beta}(t)\sin\alpha(t)\sin\gamma(t), \\ eH_2 &= -\dot{\gamma}(t)\sin\alpha(t) + \dot{\beta}(t)\cos\alpha(t)\sin\gamma(t), \\ eH_3 &= -\dot{\alpha}(t) - \dot{\beta}(t)\cos\gamma(t). \end{aligned} \tag{1.71}$$

Тепер просторові компоненти вектор–потенціалу електромагнітного поля набувають остаточного вигляду

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -H_3(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & 0 & -H_1(t) \\ -H_2(t) & H_1(t) & 0 \end{pmatrix}\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{H}(t)\times\vec{x}, \tag{1.72}$$

де символ $\times$ позначає векторний добуток.

Підставляючи в рівняння (1.61) вирази для S (1.67) та A_1, A_2, A_3 (1.72), отримаємо явний вигляд для A_0:

$$eA_0(t,\vec{x}) = \sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + T_0(t) - e^2A_bA_b - \frac{1}{4}P. \tag{1.73}$$

Тут A_bA_b визначається з (1.72), (1.70):

$$4A_bA_b = (H_2x_3 - H_3x_2)^2 + (H_3x_1 - H_1x_3)^2 + (H_2x_1 - H_1x_2)^2, \tag{1.74}$$

де H_1, H_2, H_3 — компоненти магнітного поля (1.71); функція P має вигляд

$$P = \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\ddot{l}_a}{l_a}{x'}_a^2 + 2(l_a\ddot{w}_a + 2\dot{l}_a\dot{w}_a)x'_a + l_a^2\dot{w}_a^2\right), \tag{1.75}$$

де x'_1, x'_2, x'_3 задані формулою (1.68) та $l_a = l_a(t)$, $w_a = w_a(t)$, $a = 1,2,3$ — довільні гладкі функції, що визначаються за допомогою леми 1.3.

Підкреслимо, що вираз для A_0 містить довільні гладкі функції $F_{10}(\omega_1)$, $F_{20}(\omega_2)$, $F_{30}(\omega_3), T_0(t)$, де функції $\omega_a = \omega_a(t,\vec{x})$, $a = 1,2,3$ згідно лемі

1.3 належать одному із 11 класів, представники яких визначаються неявно за допомогою формул (1.42)–(1.41) та списку (1.36).

Підстановка (1.47) в (1.45) дає

$$\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} = R_a^{-2}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.76}$$

звідки за допомогою формул (1.52) та (1.55) отримаємо явний вигляд виразів $\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_b}$, $a = 1, 2, 3$ для кожного із класів ω_a.

Нарешті, знайдемо множник Q. Підстановка формул (1.67) та (1.72) в рівняння (1.62) дає

$$\dot{S}_1 = -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\frac{\dot{l}_a}{l_a},$$

звідки

$$S_1 = -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\ln l_a. \tag{1.77}$$

Врахувавши вираз (1.67) для S, із формули (1.58) отримуємо явний вигляд для Q

$$Q = \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}}\exp\sum_{a=1}^{3}\frac{i}{4}\left(\frac{\dot{l}_a}{l_a}{x'}_a^2 + 2l_a\dot{w}_a x'_a\right), \tag{1.78}$$

де x'_1, x'_2, x'_3 задані формулою (1.68).

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 1.4 *Рівняння Шредінгера (1.1) розв'язується методом відокремлення змінних, в результаті чого отримуються одне звичайне диференціальне рівняння першого та три звичайні диференціальні рівняння другого порядку, тоді і тільки тоді, коли воно калібровно еквівалентне рівнянню Шредінгера, в якому просторові компоненти A_1, A_2, A_3 вектор–потенціалу електромагнітного поля є лінійними за просторовими змінними та мають вигляд (1.72), і, окрім цього, часова компонента A_0 має вигляд (1.73).*

Підсумуємо вищесказане. РШ (1.1) допускає ВЗ в сенсі означення 1.1 лише тоді, коли магнітне поле $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ є однорідним, тобто незалежним від $\vec{x}$. При цьому є 11 класів потенціалів $A_0(t, \vec{x})$, які відповідають 11 класам систем координат $t, \omega_a = \omega_a(t, \vec{x}),\ a = 1, 2, 3$, де функції $\omega_1(t, \vec{x}), \omega_2(t, \vec{x}), \omega_3(t, \vec{x})$ неявно задані формулами (1.42)–(1.41) і (1.36). РШ (1.1) для кожного класу вектор–потенціалів $A(t, \vec{x})$, що визначаються формулами (1.72) і (1.73) при довільних $T_0(t), F_{a0}(\omega_a)$ та фіксованих функціях $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $w_a(t)$, $l_a(t)$, $a = 1, 2, 3$, допускає ВЗ точно в одній системі координат. Редуковані рівняння мають вигляд (1.19), де коефіцієнти $F_{ab},\ a, b = 1, 2, 3$ є елементами відповідних матриць Штеккеля (1.51), функції T_a, $a = 1, 2, 3$ подано в списку (1.55); $T_0, F_{a0}, a = 1, 2, 3$ — довільні гладкі функції, що визначають форму часової компоненти вектор–потенціалу $A(t, \vec{x})$ (див. (1.73)). Нарешті, розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (1.5), де Q задано формулою (1.78).

Порівнюючи компоненти магнітного поля (1.71) з компонентами кутової швидкості обертання (1.43), маємо $e\vec{H} = -\vec{\Omega}$. Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1.5 *Нехай рівняння Шредінгера (1.1) допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1.1 в деякій нестаціонарній системі координат* t*,* $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x}),\ a = 1, 2, 3$*, при цьому функції* $\omega_1(t, \vec{x})$*,* $\omega_2(t, \vec{x})$*,* $\omega_3(t, \vec{x})$ *неявно задаються формулами (1.42). Тоді кутова швидкість обертання (1.43) цієї системи координат дорівнює* $-e\vec{H}$*, де* $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ *— магнітне поле.*

Тепер розглянемо особливості ВЗ в РШ (1.1) при ненульовому та нульовому магнітному полі $\vec{H} = \mathrm{rot}\, \vec{A}$.

Умова ненульового магнітного поля $\vec{H}$ означає, що принаймні одна з його компонент (1.71) не перетворюється на нуль. Звідси, враховуючи тотожність (1.70), робимо висновок, що $\mathcal{O} \neq \mathrm{const}$. Еквівалентною умовою є $|\vec{H}|^2 > 0$. З (1.71) маємо

$$\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 > 0. \tag{1.79}$$

Таким чином доведено таке твердження.

Теорема 1.6 *Якщо рівняння Шредінгера (1.1) при ненульовому магнітному полі $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1.1 в деякій системі координат t, $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, то функції $\omega_1(t, \vec{x})$, $\omega_2(t, \vec{x})$, $\omega_3(t, \vec{x})$ неявно задаються формулами (1.42) при деяких фіксованих функціях $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $w_a(t)$, $l_a(t)$, $a = 1, 2, 3$, причому виконується умова $\mathcal{O} \neq \mathrm{const}$, або, що еквівалентно, умова (1.79).*

Якщо ж магнітне поле $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ дорівнює нулеві, то з рівностей (1.71) і (1.70) випливає, що $\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1} = 0$. Звідси робимо висновок, що матриця $\mathcal{O}$ є сталою. Використовуючи інваріантність РШ (1.1) відносно групи поворотів (1.12), можна вибрати $\mathcal{O} = I$, де I — одинична матриця 3×3. З урахуванням цього факту, з формул (1.72) і (1.73) знаходимо явний вигляд вектор–потенціалів, при яких можливе ВЗ в РШ (1.1) у випадку нульового магнітного поля

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{0}, \\ eA_0(t, \vec{x}) &= \sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + T_0(t) - \\ &- \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\ddot{l}_a}{l_a}x_a^2 + 2(l_a\ddot{w}_a + 2\dot{l}_a\dot{w}_a)x_a + l_a^2\dot{w}_a^2\right). \end{aligned} \tag{1.80}$$

Більш того, формула (1.42) дає вигляд відповідних систем координат

$$\vec{x} = \mathcal{L}(t)\left(\vec{z}(\vec{\omega}) + \vec{w}(t)\right), \tag{1.81}$$

а формула (1.78) — явний вигляд множника Q:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \exp\sum_{a=1}^{3}\frac{i}{4}\left(\frac{\dot{l}_a}{l_a}x_a^2 + 2l_a\dot{w}_a x_a\right), \tag{1.82}$$

Таким чином доведено таке твердження.

Теорема 1.7 *Рівняння Шредінгера (1.1) з нульовим магнітним полем* $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ *допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1.1 тоді і тільки тоді, коли воно калібровно еквівалентне рівнянню Шредінгера при* $\vec{A} = \vec{0}$ *та* A_0 *в формі (1.80).*

Наприкінці цього пункту зазначимо таку річ. Як випливає з теореми 1.4, вибір магнітного поля $\vec{H}$, при якому відповідне РШ допускає ВЗ в сенсі означення 1.1, дуже обмежений. А саме, магнітне поле має бути незалежним від просторових змінних x_1, x_2, x_3, щоб за допомогою методу ВЗ забезпечувати можливість редукції РШ (1.1) до трьох ЗДР другого порядку на функції від $\omega_a,\ a = 1, 2, 3$ (ЗДР на функцію від t завжди матиме перший порядок). Проте, якщо розглянути редукцію до ЗДР першого порядку, тоді з'являються додаткові можливості для ВЗ в РШ. Як приклад, наведемо вектор–потенціал

$$A(t, \vec{x}) = \left(A_0\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right), 0, 0, A_3\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\right),$$

де A_0, A_3 — довільні гладкі функції. РШ (1.1) з цим вектор–потенціалом допускає ВЗ в циліндричних координатах

$$t, \quad \omega_1 = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \omega_2 = \arctan\frac{x_1}{x_2}, \quad \omega_3 = x_3,$$

за допомогою підстановки

$$\psi = \varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3),$$

при цьому редуковані рівняння на функції $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$, є два ЗДР другого порядку та одне першого

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 = \big(\big(\lambda_1 - \lambda_3^2 + 2ieA_3(\omega_1)\lambda_3 + \\ + eA_0(\omega_1) + e^2A_3^2(\omega_1)\big)\exp 2\omega_1 - \lambda_2\big)\,\varphi_1,\\ \ddot{\varphi}_2 = \lambda_2\varphi_2, \quad \dot{\varphi}_3 = \lambda_3\varphi_3, \quad i\dot{\varphi}_0 = -\lambda_1\varphi_0.\end{aligned}$$

Відповідне магнітне поле $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, очевидно, неоднорідне.

Пряма задача відокремлення змінних в рівнянні Шредінгера (1.1). Теорема 1.4 дає розв'язок оберненої задачі ВЗ в рівнянні (1.1), а саме задачі класифікації ДРЧП в формі (1.1), які можуть бути розв'язані методом ВЗ у нашому підході.

Перейдемо тепер до прямої задачі ВЗ в рівнянні (1.1). Нехай задано деякий фіксований вектор–потенціал $\vec{A}(t,\vec{x}), A_0(t,\vec{x})$. Схема знаходження всіх систем координат, в яких відповідне РШ (1.1) допускає ВЗ в сенсі означення 1.1, є такою:

1. За допомогою калібровних перетворень (1.9) зводимо просторову компоненту $\vec{A}(t,\vec{x})$ даного вектор–потенціалу до вигляду (1.72). Якщо це неможливо, то РШ (1.1) з даним потенціалом не розв'язується методом ВЗ в цьому підході.

2. Розв'язуємо систему ЗДР (1.71) для даного магнітного поля $\vec{H}(t)$. Це дає явний вигляд функцій $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$.

3. Для кожного із 11 класів систем координат t, $\omega_a = \omega_a(t,\vec{x})$, $a = 1,2,3$, які визначаються за допомогою формул (1.42)–(1.41) та переліку (1.36) з врахуванням обмежень, знайдених на попередньому кроці цього алгоритму, знаходимо явний вигляд таких величин

   (a) часової компоненти A_0 даного вектор–потенціалу;

   (b) функції P, підставляючи для цього в (1.75) вираз для $\vec{x}'$ в термінах $\vec{\omega}$ (див., також, (1.68) та (1.42))

   $$\vec{x}' = \mathcal{L}(t)\left(\vec{z}(\vec{\omega}) + \vec{w}(t)\right); \tag{1.83}$$

   (c) величини $e^2A_bA_b$ за формулою

   $$4e^2A_bA_b = (n_2x_3' - n_3x_2')^2 + (n_3x_1' - n_1x_3')^2 + (n_2x_1' - n_1x_2')^2$$

   де x_1', x_2', x_3' задані формулою (1.83), а функції n_1, n_2, n_3 визначаються із рівностей

   $$n_1 = \dot{\gamma}(t)\cos\beta(t) + \dot{\alpha}(t)\sin\beta(t)\sin\gamma(t),$$

$$n_2 = -\dot{\gamma}(t)\sin\beta(t) + \dot{\alpha}(t)\cos\beta(t)\sin\gamma(t), \tag{1.84}$$
$$n_3 = \dot{\beta}(t) + \dot{\alpha}(t)\cos\gamma(t);$$

(d) ейконалів $\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_b} = R_a^{-2}$, $a = 1, 2, 3$, які визначається зі списків (1.52) та (1.55) для вибраного класу координат.

4. Підставляючи одержані вирази в рівняння (1.73), отримуємо 11 рівностей для кожного із 11 класів систем координат t, ω_1, ω_2, ω_3. Для кожної із цих рівностей знаходимо всі можливі функції $F_{a0}(\omega_a)$, $a = 1, 2, 3$, $T_0(t)$, при яких вона перетворюється на тотожність за незалежними змінними t, ω_1, ω_2, ω_3 (інакше кажучи, треба розщепити її за цими змінними). Це, в свою чергу, дає явний вигляд функцій $w_a(t)$, $l_a(t)$, $a = 1, 2, 3$ та додаткові обмеження на $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, тим самим конкретизуючи вигляд шуканої системи координат. Всі отримані таким чином системи координат, для яких вказані функції $F_{a0}(\omega_a)$, $a = 1, 2, 3$, $T_0(t)$ існують, вичерпують собою множину систем координат, в яких РШ з даним вектор–потенціалом розв'язується методом ВЗ.

Приклад. Як ілюстрацію цього алгоритму розглянемо проблему ВЗ в РШ (1.1) для частинки, що рухається в сталому магнітному полі. Без обмеження загальності це поле завжди можна вибрати направленим вздовж вісі OZ: $e\vec{H} = (0, 0, c)^T$, де c — ненульова дійсна стала. Вектор–потенціал електромагнітного поля візьмемо в такому вигляді

$$2e\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad eA_0 = \frac{q}{|\vec{x}|} - \frac{c^2}{12}\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2\right), \tag{1.85}$$

де q — ненульова дійсна стала та $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Прямою перевіркою неважко переконатись, що цей вектор–потенціал задовольняє рівняння Максвелла без струмів для вакууму

$$\Box A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right) = 0, \tag{1.86}$$

$$\Box\vec{A} + \vec{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A}\right) = \vec{0},$$

де $\Box = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ — оператор Даламбера. Тому він є природним узагальненням стандартного потенціалу Кулона, що одержується з (1.85) при $c \to 0$.

Теорема 1.8 *Рівняння Шредінгера (1.1) з вектор–потенціалом електромагнітного поля (1.85) допускає відокремлення змінних, в результаті чого отримуються одне звичайне диференціальне рівняння першого та три звичайні диференціальні рівняння другого порядку, лише в системах координат, які еквівалентні системам координат такого вигляду*

$$\vec{x} = \mathcal{O}(t)\vec{z}, \tag{1.87}$$

де $\mathcal{O}$ — залежна від часу ортогональна 3×3–матриця (1.40) з кутами Ейлера

$$\alpha(t) = -ct, \quad \beta = \mathrm{const}, \quad \gamma = \mathrm{const} \tag{1.88}$$

і $\vec{z}$ — одна з таких систем координат:

1. *сферична (формула 5 з (1.36)),*
2. *витягнутого сфероїда II (формула 6 з (1.36), де треба замінити z_3 на $z_3 = a(\coth\omega_1 \tanh\omega_2 \pm 1)$),*
3. *конічна (формула 11 з (1.36)).*

Більш того, відповідні розв'язки з відокремленими змінними матимуть вигляд

$$\psi = \varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3), \tag{1.89}$$

де функції $\varphi_0(t), \varphi_1(\omega_1), \varphi_2(\omega_2), \varphi_3(\omega_3)$ задовільняють такі звичайні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} 1.\quad & i\dot{\varphi}_0 = -\lambda_1\varphi_0, \\ & \ddot{\varphi}_1 = \left(\lambda_1\omega_1^{-4} - \lambda_2\omega_1^{-2} + q\omega_1^{-3} + \frac{c^2}{6}\omega_1^{-6}\right)\varphi_1, \\ & \ddot{\varphi}_2 = \left(\lambda_2\,\mathrm{sech}^2\omega_2 - \lambda_3\right)\varphi_2, \\ & \ddot{\varphi}_3 = \lambda_3\varphi_3. \end{aligned} \tag{1.90}$$

2. $i\dot\varphi_0 = -\lambda_1\varphi_0,$

$$\ddot\varphi_1 = \Big(\lambda_1 a^2 \sinh^{-4}\omega_1 - \lambda_2 \sinh^{-2}\omega_1 - \lambda_3 + \\ + qa\cosh\omega_1 \sinh^{-3}\omega_1 + \frac{c^2}{6}a^4 \sinh^{-6}\omega_1\Big)\varphi_1,$$

$$\ddot\varphi_2 = \Big(\lambda_1 a^2 \cosh^{-4}\omega_2 + \lambda_2 \cosh^{-2}\omega_2 - \lambda_3 \mp \\ \mp qa\sinh\omega_2 \cosh^{-3}\omega_2 - \frac{c^2}{6}a^4 \cosh^{-6}\omega_2\Big)\varphi_2,$$

$$\ddot\varphi_3 = \lambda_3\varphi_3.$$

3. $i\dot\varphi_0 = -\lambda_1\varphi_0,$

$$\ddot\varphi_1 = \left(\lambda_1\omega_1^{-4} - \lambda_2\omega_1^{-2} + q\omega_1^{-3} + \frac{c^2}{6}\omega_1^{-6}\right)\varphi_1,$$

$$\ddot\varphi_2 = \big(\lambda_2 k'^2 \operatorname{cn}^2(\omega_2, k') - \lambda_3\big)\varphi_2,$$

$$\ddot\varphi_3 = \big(\lambda_2 k^2 \operatorname{cn}^2(\omega_3, k) + \lambda_3\big)\varphi_3.$$

Доведення. Просторова компонента $\vec{A}(t,\vec{x})$ даного вектор–потенціалу (1.85) вже зведена до вигляду (1.72).

Система ЗДР (1.71) для даного магнітного поля має вигляд

$$\dot\gamma\cos\alpha + \dot\beta\sin\alpha\sin\gamma = 0,$$
$$\dot\gamma\sin\alpha - \dot\beta\cos\alpha\sin\gamma = 0, \quad \dot\alpha + \dot\beta\cos\gamma = -c.$$

Звідси маємо еквівалентну систему

$$\dot\gamma = 0, \quad \dot\beta\sin\gamma = 0, \quad \dot\alpha + \dot\beta\cos\gamma = -c.$$

Її загальний розв’язок з точністю до зсувів за t (1.11) задається формулами (1.88) (розв’язок $\alpha \pm \beta = -ct$ для випадку $\sin\gamma = 0$ входить в (1.88) як частинний випадок після переозначення $\alpha \pm \beta \to \alpha$).

Виконання кроків 3 і 4 вищеописаного алгоритму проілюструємо на прикладі сферичної системи координат 5 з (1.36) (для всіх інших систем координат ця процедура є аналогічною). Для цього випадку рівність (1.73) в термінах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ набуде вигляду

$$l^{-2}\big(F_{10}(\omega_1)\omega_1^4 + (F_{20}(\omega_2) + F_{30}(\omega_3))\omega_1^2\cosh^2\omega_2\big) + T_0(t) =$$

$$= \frac{q}{|\vec{x}'|} + \left(\frac{c^2}{6} + \frac{1}{4}\frac{\ddot{l}}{l}\right)|\vec{x}'|^2 + \sum_{a=1}^{3}\Big(2(l\ddot{w}_a + 2\dot{l}\dot{w}_a)x'_a + l^2\dot{w}_a^2\Big)\,, \quad (1.91)$$

де $l = l_1 = l_2 = l_3$, $l \neq 0$ (оскільки сферична система координат є нерозщеплюваною), та

$$x'_1 = l(\omega_1^{-1}\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3 + w_1(t)),$$
$$x'_2 = l(\omega_1^{-1}\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3 + w_2(t)),$$
$$x'_3 = l(\omega_1^{-1}\tanh\omega_2 + w_3(t)).$$

Далі послідовно виконуємо над обома частини рівності (1.91) такі дії:

1. множення на ω_1,
2. диференціювання за ω_1,
3. ділення на ω_1^2,
4. диференціювання за ω_1,
5. диференціювання за ω_2,
6. множення на $l\omega_1^7|\vec{x}'|^7$,
7. диференціювання двічи за ω_1.

В результаті отримуємо

$$-24q\operatorname{sech}^3\omega_2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)(w_1\cos\omega_3 + w_2\sin\omega_3 + w_3\sinh\omega_2)\times$$
$$\times(-w_3 + (w_1\cos\omega_3 + w_2\sin\omega_3)\sinh\omega_2) = 0.$$

Одержана рівність перетворюється в тотожність за незалежними змінними ω_1, ω_2, ω_3 тоді і лише тоді, коли $w_1 = w_2 = w_3 = 0$. Тепер рівність (1.91) набуває вигляду

$$l^{-2}\left(F_{10}(\omega_1)\omega_1^4 + (F_{20}(\omega_2) + F_{30}(\omega_3))\omega_1^2\cosh^2\omega_2\right) + T_0(t) =$$
$$= \frac{q}{l}\omega_1 + \left(\frac{c^2}{6} + \frac{1}{4}\frac{\ddot{l}}{l}\right)\frac{l^2}{\omega_1^2}. \quad (1.92)$$

Послідовно виконавши над обома частини рівності (1.92) такі дії:

1. диференціювання за ω_1,

2. множення на l^2,

3. диференціювання за t,

4. множення на ω_1^3,

5. диференціювання за ω_1,

отримуємо рівність $3q\dot{l}\omega_1^2 = 0$. Звідси $l = \mathrm{const}$ і за допомогою масштабних перетворень (1.15) можна без обмеження загальності покласти $l = 1$. Отже система координат набуває вигляду (1.87). Крім того, з (1.67) отримуємо $S = 0$, а отже $Q = 1$, і розв'язок з відокремленими змінними набуває вигляду (1.89).

З рівняння (1.92) маємо

$$F_{10}(\omega_1)\omega_1^4 + (F_{20}(\omega_2) + F_{30}(\omega_3))\omega_1^2 \cosh^2 \omega_2 + T_0(t) = q\omega_1 + \frac{c^2}{6}\omega_1^{-2}.$$

Отримана рівність очевидним чином розщеплюється за незалежними змінними ω_1, ω_2, ω_3. В результаті одержимо

$$F_{10} = q\omega_1^{-3} + \frac{c^2}{6}\omega_1^{-6} + k_1\omega_1^{-4} - k_2\omega_1^{-2},$$
$$F_{20} = k_2 \,\mathrm{sech}^2\omega_2 - k_3, \quad F_{30} = k_3, \quad T_0 = -k_1.$$

Редуковані рівняння мають вигляд (1.19), причому коефіцієнти F_{ab}, $a, b = 1, 2, 3$ є елементами матриці Штеккеля F_5 з (1.51), а функції T_a, $a = 1, 2, 3$ дано в списку (1.55). Враховуючи цей факт, переозначимо за допомогою (1.7) сталі відокремлення λ_1, λ_2, λ_3 таким чином, що $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Тоді остаточно маємо

$$F_{10} = q\omega_1^{-3} + \frac{c^2}{6}\omega_1^{-6}, \quad F_{20} = 0, \quad F_{30} = 0, \quad T_0 = 0,$$

і редуковані рівняння набувають вигляду (1.90). Теорему доведено.$\rhd$

Побудуємо для цього прикладу набори операторів симетрії, що згідно теоремі 1.2 відповідають знайденим системам координат (див. формулу (1.30)). Тут скрізь використовуються позначення

$$\partial_{\omega_a}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \omega_a^2}, \quad a = 1, 2, 3.$$

Сферична система координат

$$P_1 = \omega_1^4\partial_{\omega_1}^2 + \omega_1^2\cosh^2\omega_2\left(\partial_{\omega_2}^2 + \partial_{\omega_3}^2\right) - q\omega_1 - \frac{c^2}{6}\omega_1^{-2},$$
$$P_2 = \cosh^2\omega_2\left(\partial_{\omega_2}^2 + \partial_{\omega_3}^2\right), \quad P_3 = \partial_{\omega_3}^2.$$

Система координат витягнутого сфероїда

$$P_1 = \frac{\sinh^2\omega_1\partial_{\omega_1}^2 + \cosh^2\omega_2\partial_{\omega_2}^2}{a^2\left(\sinh^{-2}\omega_1 + \cosh^{-2}\omega_2\right)} + a^{-2}\sinh^2\omega_1\cosh^2\omega_2\partial_{\omega_3}^2 -$$
$$-q\frac{\sinh\omega_1\cosh\omega_2}{a\cosh(\omega_1 \pm \omega_2)} - \frac{c^2}{6}a^2\left(\sinh^{-2}\omega_1 - \cosh^{-2}\omega_2\right),$$
$$P_2 = \frac{-\sinh^4\omega_1\partial_{\omega_1}^2 + \cosh^4\omega_2\partial_{\omega_2}^2}{\sinh^2\omega_1 + \cosh^2\omega_2} - \left(\sinh^2\omega_1 - \cosh^2\omega_2\right)\partial_{\omega_3}^2 +$$
$$+qa\tanh(\omega_1 \pm \omega_2) + \frac{c^2}{6}a^4\sinh^{-2}\omega_1\cosh^{-2}\omega_2, \quad P_3 = \partial_{\omega_3}^2.$$

Конічна система координат

$$P_1 = \omega_1^4\partial_{\omega_1}^2 + \frac{\omega_1^2\left(\partial_{\omega_2}^2 + \partial_{\omega_3}^2\right)}{k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2, k') + k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3, k)} - q\omega_1 - \frac{c^2}{6}\omega_1^{-2},$$
$$P_2 = \frac{\partial_{\omega_2}^2 + \partial_{\omega_3}^2}{k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2, k') + k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3, k)},$$
$$P_3 = \frac{-k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3, k)\partial_{\omega_2}^2 + k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2, k')\partial_{\omega_3}^2}{k'^2\mathrm{cn}^2(\omega_2, k') + k^2\mathrm{cn}^2(\omega_3, k)}.$$

Відокремлення змінних в тривимірному стаціонарному рівнянні Шредінгера з потенціалом. Розглянемо тепер задачу класифікації стаціонарних РШ для частинки, що взаємодіє з електромагнітним полем $A(\vec{x}) = (A_0(\vec{x}), \vec{A}(\vec{x}))$, які допускають ВЗ

$$\left(p_a p_a + eA_0 + \lambda_1\right)\psi(\vec{x}) = 0, \tag{1.93}$$

де $p_a = -i\partial/\partial x_a - eA_a$, $a = 1, 2, 3$, $e = \mathrm{const}$, та λ_1 — спектральний параметр.

Означення 1.7 *Будемо казати, що рівняння Шредінгера (1.93) допускає відокремлення змінних в системі координат* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$*, якщо* *існують деяка ненульова функція $Q(x_1, x_2, x_3)$ і три звичайні диференціальні рівняння*

$$\ddot{\varphi}_a(\omega_a) = U_a(\omega_a, \varphi_a(\omega_a), \dot{\varphi}_a(\omega_a);\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.94}$$

які одночасно залежать від трьох незалежних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (сталих відокремлення) і такі, що для кожної трійки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ та для кожної множини розв'язків $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ системи (1.94) функція

$$\psi(\vec{x}) = Q(\vec{x})\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \tag{1.95}$$

є розв'язком рівняння (1.93).

Відношення еквівалентності на множинах вектор–потенціалів A, для яких РШ (1.93) допускає ВЗ, а також на множині розв'язків із відокремленими змінними та множині відповідних систем координат вводяться аналогічно тому, як це робилося для РШ (1.1). Алгоритм ВЗ для РШ (1.93) є також аналогічним вже описаному вище алгоритму для РШ (1.1). В результаті виконання його перших двох кроків приходимо до висновку, що редуковані рівняння (1.94) мають вигляд:

$$\ddot{\varphi}_a = \left(F_{a0}(\omega_a) + F_{a1}(\omega_a)\lambda_1 + F_{a2}(\omega_a)\lambda_2 + F_{a3}(\omega_3)\lambda_3\right)\varphi_a, \tag{1.96}$$

де $a = 1, 2, 3$. Тоді система нелінійних ДРЧП для невідомих функцій Q, ω_1, ω_2, ω_3 має вигляд:

$$\frac{\partial\omega_b}{\partial x_a}\frac{\partial\omega_c}{\partial x_a} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3; \tag{1.97}$$

$$\sum_{a=1}^{3} F_{ab}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c} = \delta_{1b}, \quad b = 1, 2, 3; \tag{1.98}$$

$$2\left(\frac{\partial Q}{\partial x_b} - ieQA_b\right)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + Q\Delta\omega_a \;= 0, \quad a = 1, 2, 3; \tag{1.99}$$

$$Q\sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + \Delta Q - 2ieA_b\frac{\partial Q}{\partial x_b} - $$

$$- Q\left(ie\frac{\partial A_b}{\partial x_b} + eA_0 + e^2A_bA_b\right) = 0, \tag{1.100}$$

де δ_{1b} — символи Кронекера.

Система рівнянь (1.97)–(1.98) збігається із системою рівнянь (1.39), а отже її загальний розв'язок $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{x})$ за умови (1.3) розбивається на 11 нееквівалентних класів, представники яких подано в списку (1.36).

Враховуючи умови (1.3) та (1.37) з рівняння (1.99) маємо

$$eA_b = i\frac{\partial \ln Q}{\partial x_b}, \quad b = 1, 2, 3,$$

а отже з точністю до калібровних перетворень (1.9)–(1.10) можна покласти $\vec{A}(\vec{x}) = 0, \quad Q = \text{const}$. Тоді останнє рівняння (1.100) дає нам вираз для A_0:

$$A_0(\vec{x}) = \frac{1}{e}\left(\sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b}\right), \tag{1.101}$$

Таким чином доведено таке твердження:

Теорема 1.9 *Стаціонарне рівняння Шредінгера (1.93) допускає відокремлення змінних, в результаті чого отримуються три звичайні диференціальні рівняння другого порядку тоді і тільки тоді, коли воно калібровно еквівалентне рівнянню Шредінгера, в якому $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$ та $A_0(\vec{x})$ задається формулою (1.101), де F_{10}, F_{20}, F_{30} — довільні гладкі функції.*

Нові координати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задаються з точністю до відношення еквівалентності (1.17) неявним чином $x_a = z_a(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \ a = 1, 2, 3$, причому z_1, z_2, z_3 визначені формулами зі списку (1.36).

Більше того, розв'язки (1.93) з відокремленими змінними мають вигляд

$$\psi(\vec{x}) = \varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3),$$

де $\varphi_a(\omega_a), \ a = 1, 2, 3$ задовільняють звичайні диференціальні рівняння другого порядку (1.96), де коефіцієнти $F_{ab}(\omega_a), \ a, b = 1, 2, 3$ — компоненти відповідних матриць Штеккеля (1.51), а коефіцієнти $F_{a0}(\omega_a), \ a = 1, 2, 3$ — довільні гладкі функції, що визначають форму потенціалу $A_0(\vec{x})$.

Отже існує 11 класів стаціонарних РШ (1.93) для частинки, що взаємодіє з електромагнітним полем, які допускають ВЗ. Тим самим ми одержали альтернативне доведення відомого результату Ейзенхарта [43] при більш слабких обмеженнях на функції $A_0(\vec{x})$, $\vec{A}(\vec{x})$ (в роботі [43] формулу для $A_0(\vec{x})$ було одержано за припущення $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$).

1.3. Відокремлення змінних в рівнянні Гамільтона–Якобі

Добре відомо, що існує тісний зв'язок між ВЗ в рівняннях Шредінгера та Гамільтона–Якобі (дивись, наприклад, [71]). Рівняння Гамільтона–Якобі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + eA_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - eA_a\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - eA_a\right) = 0, \tag{1.102}$$

допускає ВЗ в будь-якій системі координат, в якій РШ (1.1) допускає ВЗ, але обернене твердження не має місця. Використаємо цей зв'язок, щоб прокласифікувати рівняння Гамільтона–Якобі, які допускають ВЗ.

Зафіксуємо стандартну форму анзацу для ВЗ у рівнянні Гамільтона–Якобі

$$u(t, \vec{x}) = S(t, \vec{x}) + \varphi_0(t) + \sum_{a=1}^{3} \varphi_a(\omega_a(t, \vec{x})), \tag{1.103}$$

й, окрім цього, зафіксуємо форму ЗДР для функцій φ_0, φ_1, φ_2, φ_3,

$$\dot{\varphi}_0 = -T_0(t) - T_b(t)\lambda_b, \quad \dot{\varphi}_a = \left(-F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b\right)^{1/2}, \tag{1.104}$$

причому виконуються умови (1.3), (1.20).

Підставляючи анзац (1.103) в рівняння (1.102), виключаючи перші похідні функцій φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 з використанням рівнянь (1.104) та розщеплюючи отриманий вираз за змінними φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, λ_1, λ_2, λ_3, одержуємо таку систему нелінійних ДРЧП для функцій S, ω_1, ω_2, ω_3:

$$\frac{\partial \omega_b}{\partial x_a}\frac{\partial \omega_c}{\partial x_a} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3; \tag{1.105}$$

$$\sum_{a=1}^{3} F_{ab}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_c} = T_b(t), \quad b = 1,2,3; \tag{1.106}$$

$$2\left(\frac{\partial S}{\partial x_b} - eA_b\right)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + \frac{\partial\omega_a}{\partial t} = 0, \quad a = 1,2,3; \tag{1.107}$$

$$-\sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + \frac{\partial S}{\partial t} - 2eA_b\frac{\partial S}{\partial x_b} + \frac{\partial S}{\partial x_b}\frac{\partial S}{\partial x_b} -$$
$$-T_0(t) + eA_0 + e^2A_bA_b = 0. \tag{1.108}$$

Загальний розв'язок $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t,\vec{x})$ системи рівнянь (1.105), (1.106) (які збігаються з рівняннями (1.21) та (1.22)) знайдено в лемі 1.3. Система рівнянь (1.107), (1.108) збігається з системою рівнянь (1.60), (1.61), яка була повністю розв'язана в попередньому підрозділі (нагадаємо, що остання була отримана в результаті розщеплення рівнянь (1.23) та (1.24) на дійсну та уявну складові після підстановки (1.58)).

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 1.10 *Рівняння Гамільтона–Якобі (1.102) розв'язується методом відокремлення змінних, якщо воно калібровно еквівалентне рівнянню Гамільтона–Якобі, в якому просторові компоненти A_1, A_2, A_3 вектор–потенціалу електромагнітного поля є лінійними за просторовими змінними та мають вигляд (1.72), й, крім цього, часова компонента A_0 має вигляд (1.73).*

Отже рівняння Гамільтона–Якобі допускає ВЗ для тих самих вектор–потенціалів і в тих самих системах координат, в яких допускає ВЗ рівняння Шредінгера (1.1). Як і для (1.1), маємо 11 класів потенціалів $A_0(t,\vec{x})$, що відповідають 11 класам систем координат $t, \omega_a = \omega_a(t,\vec{x})$, $a = 1,2,3$, де функції $\omega_1(t,\vec{x}), \omega_2(t,\vec{x}), \omega_3(t,\vec{x})$ неявно задані формулами (1.42)–(1.41) і (1.36).

Змінюються лише редуковані рівняння та вигляд розв'язків з відокремленими змінними. А саме, редуковані рівняння мають вигляд (1.104), де коефіцієнти F_{ab}, $a,b = 1,2,3$ є елементами відповідних матриць Штеккеля (1.51), функції T_a, $a = 1,2,3$ дано в списку (1.55);

$T_0, F_{a0}, a = 1, 2, 3$ — довільні гладкі функції, які визначають форму часової компоненти вектор–потенціалу $A(t, \vec{x})$ (див. (1.73)). Розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (1.103), де S задано формулою (1.67).

Зауважимо також, що алгоритм розв'язання прямої задачі ВЗ для рівняння Шредінгера (1.1), який було сформульовано в підрозділі 1.2, є ефективним і для рівняння Гамільтона–Якобі (1.102).

1.4. Відокремлення змінних в рівнянні Паулі

Рух частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ і зарядом e в електромагнітному полі описується в першому нерелятивістському наближенні рівнянням Паулі (див., наприклад [16, §33])

$$(p_0 - p_a p_a + e\vec{\sigma}\vec{H})\psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{1.109}$$

де $\psi(t, \vec{x})$ — двокомпонентний спінор.

Тут використовуються позначення (1.2), при цьому $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ — вектор–потенціал електромагнітного поля, $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ — магнітне поле та $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матриці Паулі

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.110}$$

Оскільки рівняння Паулі (1.109) відрізняється від рівняння Шредінгера (1.1) лише доданком $e\vec{\sigma}\vec{H}$, то природно було б застосувати результати попередніх підрозділів до проблеми ВЗ в системі ДРЧП вигляду (1.109).

Анзац для ВЗ в рівнянні Паулі зафіксуємо в такому вигляді:

$$\psi(t, \vec{x}) = Q(t, \vec{x})\varphi_0(t) \prod_{a=1}^{3} \varphi_a \left(\omega_a(t, \vec{x}), \vec{\lambda}\right) \chi, \tag{1.111}$$

де $Q, \ \varphi_\mu, \ (\mu = 0, 1, 2, 3)$ — невироджені 2×2–матричні функції вказаних аргументів, χ — двокомпонентний сталий стовпчик. Крім цього, матриці φ_μ задовольняють таку додаткову умову

$$[\varphi_\mu, \ \varphi_\nu] = \varphi_\mu\varphi_\nu - \varphi_\nu\varphi_\mu = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.112}$$

Зауважимо, що це обмеження звужує клас рівнянь Паулі, які допускають ВЗ за допомогою анзацу (1.111). Однак без цієї умови ефективне застосування анзацу (1.111) для розв'язування рівняння Паулі методом ВЗ є малоімовірним. Так, у відомих нам статтях, присвячених проблемі ВЗ в рівнянні Паулі, ця умова (явно чи неявно) накладається.

Означення 1.8 *Будемо казати, що рівняння Паулі (1.109) допускає відокремлення змінних в системі координат* t, $\omega_a = \omega_a(t,\vec{x})$, $a = 1,2,3$, *якщо існують деяка ненульова* 2×2*–матрична функція* $Q(t,\vec{x})$ *і чотири матричні звичайні диференціальні рівняння*

$$\begin{aligned} &i\dot{\varphi}_0 = -\left(P_{00}(t) + P_{0b}(t)\lambda_b\right)\varphi_0, \\ &\ddot{\varphi}_a = \left(P_{a0}(\omega_a) + P_{ab}(\omega_a)\lambda_b\right)\varphi_a, \quad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.113}$$

які одночасно аналітично залежать від трьох незалежних комплексних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *(сталих відокремлення) і такі, що для кожної трійки* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *та для кожної множини розв'язків* $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ *системи (1.113) функція (1.112) є розв'язком рівняння (1.109).*

Тут $P_{\mu\nu}, \mu,\nu = 0,1,2,3$ — деякі гладкі 2×2–матричні функції вказаних аргументів.

Означення 1.9 *Три комплексні параметри* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *в системі рівнянь (1.113) називаються незалежними, якщо* 8×6 *– матриця*

$$\operatorname{rank} \|P_{\mu a}\|_{\mu=0}^{3}{}_{a=1}^{3} \tag{1.114}$$

має ранг 6 *скрізь, де* $\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \neq 0$.

Ця умова гарантує істотну залежність розв'язків з відокремленими змінними від сталих відокремлення $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Відношення еквівалентності на множині вектор–потенціалів $A_0(t,\vec{x})$, $\vec{A}(t,\vec{x})$, для яких рівняння Паулі допускає ВЗ, а також на множиних спектральних параметрів $\vec{\lambda}$, розв'язків з відокремленими змінними та відповідних систем координат вводяться за аналогією з тим, як це робилося для рівняння Шредінгера (1.1) за формулами (1.7)–(1.18). Лише як хвильову функцію $\psi(t,\vec{x})$ в цих формулах треба розуміти двокомпонентний спінор, а відношення еквівалентності (1.18) для множника Q набуває вигляду

$$Q \to Q' = Ql_0(t)l_1(\omega_1)l_2(\omega_2)l_3(\omega_3), \tag{1.115}$$

де $l_0,\dots,l_3$ — деякі невироджені 2×2–матричні функції вказаних аргументів.

В силу відношення еквівалентності (1.7)–(1.8) можна обмежитися випадком, коли всі матриці $P_{\mu\nu}$ є ермітовими, тобто $P_{\mu\nu}=P^*_{\mu\nu}$, $\mu,\nu=0,1,2,3$.

З рівностей (1.113) та (1.112) маємо

$$[P_{\mu0}+P_{\mu a}\lambda_a, P_{\nu0}+P_{\nu a}\lambda_a]=0.$$

Розщеплюючи цей вираз за λ_a, отримуємо

$$[P_{\mu\alpha},P_{\nu\beta}]+[P_{\mu\beta},P_{\nu\alpha}]=0. \tag{1.116}$$

Тут та надалі в цьому підрозділі $\mu,\nu,\alpha,\beta=0,1,2,3$ та за грецькими індексами, що повторюються, сумовування не передбачається.

Поклавши $\alpha=\beta$ в (1.116), одержуємо рівність

$$[P_{\mu\alpha},P_{\nu\alpha}]=0.$$

Беручи до уваги цю рівність, а також той факт, що будь-яку ермітову (2×2) матрицю можна подати як лінійну комбінацію одиничної матриці та матриць Паулі (1.110) з дійсними коефіцієнтами, одержимо таку форму для матриць $P_{\mu\alpha}$:

$$P_{\mu\alpha}=F_{\mu\alpha}(\omega_\mu)I+G_{\mu\alpha}(\omega_\mu)\vec{s}_\alpha\vec{\sigma}, \tag{1.117}$$

де $F_{\mu\alpha},G_{\mu\alpha}$ — деякі гладкі дійсні функції вказаних аргументів, $\omega_0=t$ та $\vec{s}_\alpha$ — сталий трьохкомпонентний вектор.

Підставляючи вираз (1.117) в рівняння (1.116), одержимо

$$(G_{\mu\alpha}G_{\nu\beta}-G_{\mu\beta}G_{\nu\alpha})[\vec{s}_\alpha\vec{\sigma},\vec{s}_\beta\vec{\sigma}]=0.$$

З цієї рівності випливає, що мають місце два суттєво різних випадки: або $\vec{s}_\alpha \sim \vec{s}_\beta$, або $G_{\mu\alpha} \sim G_{\mu\beta}$.

Це приводить до двох можливих форм для рівнянь (1.113):

$$
\begin{aligned}
&i\dot{\varphi}_0 = -\left(F_{00}(t) + F_{0b}(t)\lambda_b + (G_{00}(t) + G_{0b}(t)\lambda_b)\vec{s}\vec{\sigma}\right)\varphi_0, \\
&\ddot{\varphi}_a = \left(F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b + (G_{a0}(\omega_a) + G_{ab}(\omega_a)\lambda_b)\vec{s}\vec{\sigma}\right)\varphi_a
\end{aligned}
\tag{1.118}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&i\dot{\varphi}_0 = -\left(F_{00}(t) + F_{0b}(t)\lambda_b + G_0(t)(\vec{s}_0 + \vec{s}_b\lambda_b)\vec{\sigma}\right)\varphi_0, \\
&\ddot{\varphi}_a = \left(F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b + G_a(\omega_a)(\vec{s}_0 + \vec{s}_b\lambda_b)\vec{\sigma}\right)\varphi_a,
\end{aligned}
\tag{1.119}
$$

де $a = 1, 2, 3$.

Формули (1.111), (1.118)–(1.119) складають вхідні дані методу ВЗ для рівняння (1.109).

Сам алгоритм методу ВЗ для рівняння Паулі є повністю аналогічним алогоритму ВЗ для рівняння Шредінгера (1.1). Підставивши анзац (1.112) в рівняння (1.109), виключивши похідні $\dot{\varphi}_0$, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_3$ з використанням рівнянь (1.118)–(1.119) та розщепивши отриманий вираз за змінними φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$, λ_1, λ_2, λ_3, ми, використовуючи рівність (1.112), одержуємо таку систему нелінійних ДРЧП для функцій Q, ω_1, ω_2, ω_3:

(i) $$\frac{\partial \omega_b}{\partial x_a}\frac{\partial \omega_c}{\partial x_a} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3;$$

(ii) $$\sum_{a=1}^{3} F_{ab}(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} = F_{0b}(t), \quad b = 1, 2, 3;$$

$(iiia)$ Для випадку редукованих рівнянь (1.118)

$$\sum_{a=1}^{3} G_{a\mu}(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} = G_{0\mu}(t), \quad \mu = 0, 1, 2, 3;$$

$(iiib)$ Для випадку редукованих рівнянь (1.119)

$$\sum_{a=1}^{3} G_a(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} = G_0(t),$$

(iv) $$2\left(\frac{\partial Q}{\partial x_b} - ieQA_b\right)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} + Q\left(i\frac{\partial \omega_a}{\partial t} + \Delta\omega_a\right) = 0, \quad a = 1, 2, 3;$$

$$(v)\qquad Q\sum_{a=1}^{3}F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}+i\frac{\partial Q}{\partial t}+\Delta Q-2ieA_b\frac{\partial Q}{\partial x_b}+$$
$$+\left(-F_{00}(t)-ie\frac{\partial A_b}{\partial x_b}-eA_0-e^2A_bA_b+e\vec{\sigma}\vec{H}\right)Q=0.$$

Врахувавши умову (1.114), завжди можна вибрати з множини рівнянь (ii) – (iii) такі три рівняння, що матриця коефіцієнтів біля $\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_c}\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_c}$, $a=1,2,3$ (матриця Штеккеля [74]) в цих рівняннях буде невиродженою. Загальний розв'язок системи, що складається з цих рівнянь та рівнянь (i), було побудовано в лемі 1.3. А саме, мають місце 11 класів функцій $\omega_1(t,\vec{x})$, $\omega_2(t,\vec{x})$, $\omega_3(t,\vec{x})$, які визначаються неявно за допомогою формули (1.42).

Домножимо рівняння (iv) справа на Q^{-1}. В результаті одержимо для кожної із компонент матриць $\dfrac{\partial Q}{\partial x_b}Q^{-1}$, $b=1,2,3$ систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь. Згідно (1.3) детермінант цих систем не рівний нулеві. Отже вони мають єдиний розв'язок:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_b}Q^{-1}=f_b(t,\vec{x})I,\quad b=1,2,3, \tag{1.120}$$

де $f_b(t,\vec{x})$ — скалярні гладкі функції, I — одинична 2×2 матриця. Із умов сумісності для цієї системи рівнянь

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_b}=\frac{\partial f_b}{\partial x_a},\quad a,b=1,2,3$$

випливає, що існує функція $g(t,\vec{x})$ така, що $f_a=\partial g/\partial x_a$, $a=1,2,3$. Тоді (1.120) набуває вигляду

$$\frac{\partial Q}{\partial x_b}=\frac{\partial g}{\partial x_b}Q,\quad b=1,2,3.$$

Ця система матричних ДРЧП має такий загальний розв'язок

$$Q=\mathcal{U}(t)\exp g(t,\vec{x}), \tag{1.121}$$

де $\mathcal{U}(t)$ — довільна 2×2–матрична функція змінної t.

Покладемо $g(t,\vec{x})=S_1+iS$. Підставивши рівність (1.121) в рівняння (iv) з наступним розщепленням отриманого рівняння на дійсну та уявну складові, отримаємо систему рівнянь (1.59)–(1.60), яка була розв'язана в підрозділі 1.2. А саме, загальний вигляд просторової компоненти вектор–потенціалу електромагнітного поля визначається формулою (1.72), а магнітне поле $\vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ є однорідним, тобто залежить лише від часової змінної t і задається формулою (1.71). Окрім цього, S має вигляд (1.67) та $S_1 = S_1(t)$.

В рамках відношення еквівалентності (1.115) виберемо функцію $\mathcal{U}(t)$ як розв'язок матричного ЗДР

$$i\dot{\mathcal{U}} = (-e\vec{\sigma}\vec{H}(t))\mathcal{U} \tag{1.122}$$

з початковими умовами $\mathcal{U}(0) = I$. Згідно теоремі існування та єдиності розв'язку задачі Коші для систем ЗДР, така функція $\mathcal{U}(t)$ існує і є єдиною для кожної конкретної конфігурації магнітного поля $\vec{H}(t)$. Більше цього, матриця $\mathcal{U}(t)$ є унітарною. Дійсно, з врахуванням (1.122), маємо

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{U}^*\mathcal{U}) = \mathcal{U}^*(ie\vec{\sigma}\vec{H})\mathcal{U} + \mathcal{U}^*(-ie\vec{\sigma}\vec{H})\mathcal{U} = 0,$$

тобто $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathrm{const}$. Враховуючи початкові умови одержуємо $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = I$.

Таким чином, можна розглядати заміну змінних в рівнянні Паулі (1.109) такого вигляду

$$\psi = \mathcal{U}(t)\tilde{\psi}. \tag{1.123}$$

Завдяки унітарності матриці $\mathcal{U}$ залишається незмінним квадрат хвильової функції $\psi^*\psi$, тому ця заміна є коректною. В результаті цієї заміни в рівнянні Паулі (1.109) член $e\vec{\sigma}\vec{H}$ зникне, і отримаємо систему двох рівнянь Шредінгера вигляду (1.1) для функції $\tilde{\psi}$.

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1.11 *Рівняння Паулі (1.109) розв'язується методом відокремлення змінних в сенсі означення 1.8 тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне (в сенсі перетворення еквівалентності (1.123)) системі двох рівнянь Шредінгера (1.1).*

Підставимо рівність (1.121) в рівняння (v), врахувавши рівняння (1.122) та $S_1 = S_1(t)$. Розщепивши отримане рівняння на дійсну та уявну складові, отримаємо систему рівнянь (1.61)–(1.62), яка була розв'язана в підрозділі 1.2. А саме, загальний вигляд часової компоненти вектор–потенціалу електромагнітного поля визначається формулою (1.73), де $T_0(t) = -F_{00}(t)$, та, окрім цього, S_1 має вигляд (1.77). Враховуючи вираз для S (1.67), з формули (1.121) отримуємо явний вигляд для Q

$$Q = \mathcal{U}(t)\frac{1}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \exp\sum_{a=1}^{3}\frac{i}{4}\left(\frac{\dot{l}_a}{l_a}x'^2_a + 2l_a\dot{w}_a x'_a\right), \tag{1.124}$$

де $\mathcal{U}(t)$ є розв'язком рівняння (1.122).

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 1.12 *Рівняння Паулі (1.1) розв'язується методом відокремлення змінних в сенсі означення 1.8 тоді і тільки тоді, коли воно калібровно еквівалентне рівнянню Паулі, в якому просторові компоненти A_1, A_2, A_3 вектор–потенціалу електромагнітного поля є лінійними за просторовими змінними та мають вигляд (1.72), й, окрім цього, часова компонента A_0 має вигляд (1.73).*

Отже рівняння Паулі допускає ВЗ для тих самих вектор–потенціалів і в тих самих системах координат, в яких допускає ВЗ рівняння Шредінгера (1.1). Як і для (1.1), маємо 11 класів потенціалів $A_0(t,\vec{x})$, що відповідають 11 класам систем координат $t, \omega_a = \omega_a(t,\vec{x}),\ a = 1,2,3$, де функції $\omega_1(t,\vec{x}), \omega_2(t,\vec{x}), \omega_3(t,\vec{x})$ неявно задані формулами (1.42)–(1.41) і (1.36).

Змінюється лише вигляд розв'язків з відокремленими змінними та редуковані рівняння. А саме розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (1.111), де Q задано формулою (1.124). Редуковані рівняння мають вигляд (1.118) та (1.119), при цьому $F_{\mu 0}, \mu = 0,1,2,3$ — довільні гладкі функції, які визначають форму часової компоненти вектор–потенціалу $A(t,\vec{x})$. Явний вигляд коефіцієнтів редукованих рівнянь $F_{\mu a}, G_{\mu\nu}, G_\mu$ одержується в результаті розщеплення рівностей (ii) та (iii) за незалежними змінними $\omega_1, \omega_2, \omega_3, t$ для кожного з 11 класів систем координат ω_1, ω_2, ω_3, які задані лемою 1.3. Нагадаємо, що явний вигляд ейконалів $\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\dfrac{\partial\omega_a}{\partial x_b} = R_a^{-2}$, $a = 1, 2, 3$ в термінах $\omega_1, \omega_2, \omega_3, t$, які фігурують в рівностях (ii) та (iii), визначається зі списків (1.52) та (1.55). Нижче наведено явний вигляд коефіцієнтів $F_{\mu a}, G_{\mu\nu}, G_\mu$.

Введемо такі позначення

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.125}$$

де функції $P_{ab}(\omega_a)$, $(a, b = 1, 2, 3)$ задано у вигляді компонент матриць Штеккеля (1.51) для кожного із 11 класів систем координат, а функції $T_1(t), T_2(t), T_3(t)$ задані за допомогою формул (1.55). Далі, нехай K і M — сталі дійсні матриці 3×3.

Розглянемо редуковані рівняння, які задані формулами (1.118). Коефіцієнти цих рівнянь $F_{\mu a}, G_{\mu\nu}$ є елементами матриць

$$F = \|F_{\mu a}\|_{\mu=0}^{3}\,{}_{a=1}^{3}, \quad G = \|G_{\mu a}\|_{\mu=0}^{3}\,{}_{a=1}^{3},$$

які є блочними 6×8 матрицями, де $F_{\mu a}$ та $G_{\mu a}$ — 2×2 матриці, які рівні добуткам відповідних компонент матриць $\mathcal{P}K$ та $\mathcal{P}M$ на одиничну матрицю (у випадку матриці F) або на $\vec{s}\vec{\sigma}$ (у випадку матриці G). У цьому випадкові рівняння (1.114) набуває вигляду

$$\operatorname{rank}(F + G) = 6. \tag{1.126}$$

Якщо матриця K є невиродженою, завжди можна за допомогою відношення еквівалентності (1.7) переозначити λ_a, $a = 1, 2, 3$ в (1.118) так, щоб $K = I$. Аналогічно, можна покласти $M = I$, коли матриця M невироджена та виконується умова $\vec{s}^2 \neq 0$.

Якщо rank $M = 0$, то стовпчик $\|G_{\mu 0}\|_{\mu=0}^{3}$ з необхідністю набуває вигляду $\mathcal{P}\vec{g}$, де $\vec{g}$ — сталий трьохкомпонентний стовпчик. Якщо ж виконується умова rank $M \neq 0$, то завжди можна позбутися цього стовпчика за допомогою відношення еквівалентності (1.7).

Розглянемо тепер редуковані рівняння, які задані формулами (1.119). Матриця F визначається так само, як і для попереднього випадку. Окрім цього

$$G = \|G_\mu \vec{s}_a \vec{\sigma}\|_{\mu=0}^{3} {}_{a=1}^{3}$$

— блочна (6×8) матриця, де G_μ — трьохкомпонентний стовпчик $\mathcal{P}\vec{g}_\mu$ ($\vec{g}_\mu$ — сталий трьохкомпонентний стовпчик). Для цього випадку також виконується рівність (1.126), а тому можна покласти $K = I$, якщо матриця K невироджена. Якщо $\vec{s}_a$, $a = 1, 2, 3$ — трійка лінійно незалежних векторів, то можна покласти $\vec{s}_0 = 0$.

На завершення зауважимо, що алгоритм розв'язання прямої задачі ВЗ для рівняння Шредінгера (1.1), який було сформульовано в підрозділі 1.2, може бути ефективно застосований і для рівняння Паулі (1.109).

РОЗДІЛ 2

Відокремлення змінних в багатовимірних рівняннях Фоккера–Планка

Даний розділ присвячений дослідженню проблеми відокремлення змінних в багатовимірному рівнянні Фоккера–Планка, яке є основним рівнянням в теорії дифузійних процесів.

В підрозділі 2.1 одержано необхідну умову для відокремлення змінних в (1+3)–вимірних рівняннях Фоккера–Планка зі сталою діагональною матрицею дифузії. Отримано ряд нових конфігурацій вектора зносів, для яких дане рівняння допускає відокремлення змінних. Для кожного із них знайдено всі нееквівалентні координатні системи, які дозволяють здійснити відокремлення змінних та побудовано відповідні розв'язки з відокремленими змінними в явному вигляді.

В підрозділі 2.2 повністю розв'язано проблему відокремлення змінних в (1+2)–вимірному рівнянні Крамерса, яке допускає нетривіальну групу симетрій. Знайдено всі системи координат, в яких рівняння Крамерса розв'язується методом відокремлення змінних. Окрім цього, побудовано розв'язки рівняння Крамерса з відокремленими змінними в явному вигляді.

Основні результати підрозділу 2.1 опубліковано в роботах [78, 79].

Основні результати підрозділу 2.2 опубліковано в роботі [91].

2.1. Відокремлення змінних в (1+3)–вимірному рівнянні Фоккера–Планка зі сталою діагональною матрицею дифузії

Математичною моделлю явища дифузії — руху частинки внаслідок взаємодії з молекулами середовища, які перебувають в хаотичному тепловому русі, є дифузійні процеси — спеціальний клас неперервних марківських процесів. Дифузійні процеси відіграють важливе значення в тих областях фізики, хімії, біології [7, 11] та економіки [72], де під час математичного моделювання відповідних явищ необхідно враховувати дію випадкових факторів.

У зв'язку із цим природнім є інтерес до інтегрування ДРЧП, які моделюють дифузійні процеси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_a}[B_a(\vec{x},t)u] + \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}[D_{ab}(\vec{x},t)u], \tag{2.1}$$

де $u = u(t,\vec{x})$ — функція розподілу густини імовірностей, t — часова та $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$ — просторові координати у фазовому просторі даного процесу.

Коефіцієнти зносу $B_a(\vec{x},t)$ визначені як компоненти вектора

$$\vec{B}(\vec{x},t) = (B_1(\vec{x},t),...,B_n(\vec{x},t)),$$

який називається вектором зносів і вказує на наявність певної "течії" в рідині або "вітру" в газі: частинка з деякої точки $\vec{x}$ фазового простору в момент t за час τ в середньому зміщується на $\vec{B}(\vec{x},t)\tau$.

Коефіцієнти дифузії $D_{ab}(\vec{x},t)$ задані як компоненти матриці

$$D(\vec{x},t) = \|D_{ab}(\vec{x},t)\|_{a,b=1}^{n},$$

яка називається матрицею дифузії і визначає середнє квадратичне відхилення частинки від її положення $\vec{x}$ у фазовому просторі в момент t, до якого призводить випадковий вплив середовища (навіть при відсутності "течії"). Зауважимо, що матриця дифузії є невід'ємно визначеною, тобто всі її власні значення є невід'ємними.

В літературі рівняння типу (2.1) називають рівняннями дифузії, прямими рівняннями Колмогорова або рівняннями Фоккера–Планка. В цій роботі будемо називати їх рівняннями Фоккера–Планка (РФП) [11, 70].

Оскільки в більшості випадків обмежуються сталими коефіцієнтами дифузії, то основним об'єктом дослідження в цьому підрозділі є проблема ВЗ в тривимірному РФП (2.1) з невиродженою сталою матрицею дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \frac{\partial}{\partial x_a}(B_a(\vec{x})u) = 0, \tag{2.2}$$

де $u = u(t, \vec{x})$ — функція розподілу густини імовірностей, $\vec{B}(\vec{x}) = (B_1(\vec{x}),\ B_2(\vec{x}),\ B_3(\vec{x}))$ — вектор зносів. Тут $u(t, \vec{x})$ і $B_a(\vec{x})$, $a = 1, 2, 3$ — довільні дійсні функції. Матрицю сталих коефіцієнтів дифузії вважаємо зведеною до одиничної відповідним лінійним перетворенням просторових змінних.

За аналогією з означенням 1.1 введемо поняття ВЗ для РФП. Нехай маємо деяку систему координат t, $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, і при цьому виконується нерівність (1.3).

Означення 2.1 *Будемо казати, що рівняння Фоккера–Планка (2.2) допускає відокремлення змінних в системі координат* t, $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, *якщо існують деяка гладка функція* $R(t, \vec{x})$ *і чотири звичайні диференціальні рівняння вигляду*

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_0(t) = U_0(t, \varphi_0(t);\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ &\ddot{\varphi}_a(\omega_a) = U_a(\omega_a, \varphi_a(\omega_a), \dot{\varphi}_a(\omega_a);\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{2.3}$$

які одночасно залежать від трьох незалежних дійсних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *(сталих відокремлення) і такі, що для кожної трійки* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *та для кожної множини розв'язків* $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ *системи (2.3) функція*

$$u(t, \vec{x}) = e^{R(t,\vec{x})}\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \tag{2.4}$$

є розв'язком рівняння (2.2).

Означення 2.2 *Три дійсні параметри* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *в системі рівнянь (2.3) називаються незалежними, якщо* 4×3 *– матриця*

$$\left\| \frac{\partial U_\mu}{\partial \lambda_a} \right\|_{\mu=0}^{3} \,{}_{a=1}^{3}$$

має ранг 3 *скрізь, де* $\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \neq 0.$

Ця умова гарантує істотну залежність розв'язків з відокремленими змінними від сталих відокремлення $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Основним результатом даного підрозділу є класифікація можливих конфігурацій вектора зносів $\vec{B}(\vec{x})$, для яких рівняння (2.2) допускає ВЗ.

Введемо відношення еквівалентності для систем координат, в яких РФП (2.2) допускає ВЗ.

Означення 2.3 *Дві системи координат* t, ω_1, ω_2, ω_3 *та* t', ω_1', ω_2', ω_3' *називаються еквівалентними, якщо вони пов'язані між собою за допомогою оборотніх перетворень вигляду (1.17) та (1.18).*

Алгоритм ВЗ для РФП (2.2) є аналогічним алгоритму ВЗ для РШ (1.1), який описаний в підрозділі 1.1. В результаті виконання двох перших кроків цього алгоритму робимо висновок, що редуковані рівняння (1.4) завжди можна вибрати у вигляді

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}_0 = (T_0(t) - T_b(t)\lambda_b)\,\varphi_0, \\ &\ddot{\varphi}_a = (F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b)\,\varphi_a, \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{2.5}$$

де T_0, T_b, F_{a0}, F_{ab} — деякі гладкі функції відповідних аргументів. Окрім цього, невідомі функції R, ω_1, ω_2, ω_3 задовольняють таку систему нелінійних ДРЧП

$$\frac{\partial \omega_b}{\partial x_a}\frac{\partial \omega_c}{\partial x_a} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3; \tag{2.6}$$

$$\sum_{a=1}^{3} F_{ab}(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} = T_b(t), \quad b = 1, 2, 3; \tag{2.7}$$

$$\left(2\frac{\partial R}{\partial x_b} + B_b\right)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \omega_a}{\partial t} + \Delta\omega_a = 0, \quad a = 1, 2, 3; \tag{2.8}$$

$$\sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} + \frac{\partial R}{\partial t} + \Delta R + B_b\frac{\partial R}{\partial x_b} +$$
$$+\frac{\partial R}{\partial x_b}\frac{\partial R}{\partial x_b} + T_0(t) + \frac{\partial B_b}{\partial x_b} = 0. \tag{2.9}$$

Отже, як і для РШ (1.1), проблема ВЗ в РФП (2.2) зводиться до інтегрування системи десяти нелінійних ДРЧП для семи невідомих функцій R, ω_1, ω_2, ω_3, B_1, B_2, B_3.

Загальний розв'язок системи рівнянь (2.6), (2.7) побудовано в лемі 1.3. А саме, маємо 11 класів функцій $\omega_1(t,\vec{x})$, $\omega_2(t,\vec{x})$, $\omega_3(t,\vec{x})$, які задані неявно за допомогою формули (1.42). При цьому функції $F_{ab},\ a,b = 1,2,3$ та $T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_3(t)$ для кожного із цих класів подано у переліках (1.51) та (1.55), відповідно.

Система рівнянь (2.8) з урахуванням (1.37) розв'язується аналогічно тому, як це робилося для такої ж системи рівнянь (1.60). В результаті отримуємо вигляд вектора зносів $\vec{B}(\vec{x})$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathcal{M}(t)\vec{x} + \mathcal{O}(t)\mathcal{L}(t)\dot{\vec{w}} - 2\vec{\nabla}R, \tag{2.10}$$

де $\mathcal{O}(t)$, $\mathcal{L}(t)$, $\mathcal{M}(t)$ — 3×3 матриці, які визначаються формулами (1.40), (1.41) і (1.64), відповідно, й, окрім того, $\vec{w} = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))^T$.

З (2.10) неважко одержати вираз для ротора вектора $\vec{B}(\vec{x})$

$$\text{rot}\ \vec{B} = 2\begin{pmatrix} \dot{\gamma}\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha\sin\gamma \\ \dot{\gamma}\sin\alpha - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\gamma \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta}\cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Оскільки вектор зносів $\vec{B}(\vec{x})$ не залежить від часової змінної t, а функції α, β, γ залежать лише від t, то з рівності (2.11) випливає, що rot $\vec{B} = \vec{\text{const}}$.

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 2.1 *Для того, щоб рівняння Фоккера–Планка (2.2) допускало відокремлення змінних, в результаті якого отримуються одне звичайне диференціальне рівняння першого та три звичайні* *диференціальні рівняння другого порядку, необхідно, щоб ротор вектора зносів $\vec{B}(\vec{x})$ був сталим.*

Розглянемо більш докладно частинний випадок вектора $\vec{B}(\vec{x})$ для $R = 0$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathcal{M}(t)\vec{x} + \mathcal{O}(t)\mathcal{L}(t)\dot{\vec{w}} \tag{2.12}$$

де використано позначення (1.40), (1.41) і (1.64). Оскільки функції B_1, B_2, B_3 не залежать від часової змінної t, то з (2.12) випливає, що

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathcal{M}\vec{x} + \vec{v}, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{M} = \dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1} + \mathcal{O}\dot{\mathcal{L}}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{O}^{-1} = \mathrm{const}, \tag{2.14}$$

$$\vec{v} = \mathcal{O}\mathcal{L}\dot{\vec{w}} = \mathrm{const}. \tag{2.15}$$

Беручи до уваги, що $\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1}$ — антисиметрична, а $\mathcal{O}\dot{\mathcal{L}}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{O}^{-1}$ — симетрична частини матриці $\mathcal{M}$, відповідно, отримуємо з (2.14), що

$$\dot{\mathcal{O}}(t)\mathcal{O}^{-1}(t) = \mathrm{const}, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{O}(t)\dot{\mathcal{L}}(t)\mathcal{L}^{-1}(t)\mathcal{O}^{-1}(t) = \mathrm{const}. \tag{2.17}$$

Зі співвідношення (2.16) випливає система трьох ЗДР для функцій $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma}\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha\sin\gamma = C_1, \\ &\dot{\gamma}\sin\alpha - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\gamma = C_2, \\ &\dot{\alpha} + \dot{\beta}\cos\gamma = C_3, \end{aligned} \tag{2.18}$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні дійсні сталі. Інтегруючи цю систему, одержуємо таку форму матриці $\mathcal{O}(t)$:

$$\mathcal{O}(t) = \mathcal{C}\tilde{\mathcal{O}}, \tag{2.19}$$

де $\mathcal{C}$ — довільна стала ортогональна 3×3 матриця та

$$\tilde{\mathcal{O}}(t) = \left(\begin{array}{l} \cos st\,\cos\beta - \sin st\,\sin\beta\cos\gamma \\ \sin st\,\cos\beta + \cos st\,\sin\beta\cos\gamma \\ \qquad\sin\beta\,\sin\gamma \end{array} \right. \rightarrow \tag{2.20}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{cc} -\cos st\,\sin\beta - \sin st\,\cos\beta\cos\gamma & \sin st\,\sin\gamma \\ -\sin st\,\sin\beta + \cos st\,\cos\beta\cos\gamma & -\cos st\,\sin\gamma \\ \cos\beta\,\sin\gamma & \cos\gamma \end{array} \right).$$

Тут s, β, γ — довільні сталі.

Підстановка правої частини рівності (2.19) в (2.17) із наступним диференціюванням отриманого рівняння за t приводить до рівності

$$\tilde{\mathcal{O}}^{-1}\dot{\tilde{\mathcal{O}}}\mathcal{H} + \dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}\,(\dot{\tilde{\mathcal{O}}^{-1}})\tilde{\mathcal{O}} = 0, \tag{2.21}$$

де $\mathcal{H} = \dot{\mathcal{L}}\mathcal{L}^{-1}$, тобто $h_a = \dot{l}_a/l_a,\ a = 1, 2, 3$, звідки випливає, що

$$\begin{aligned} & h_a = \mathrm{const}, \quad a = 1, 2, 3; \\ & s\,(h_1 - h_2)\cos\gamma = 0, \\ & s\,(h_1 - h_3)\cos\beta\sin\gamma = 0, \\ & s\,(h_2 - h_3)\sin\beta\sin\gamma = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Отже, функції l_a мають такий вигляд:

$$l_a = c_a \exp(h_a t), \quad c_a = \mathrm{const}, \quad h_a = \mathrm{const}, \quad a = 1, 2, 3. \tag{2.23}$$

Із (2.22) отримуємо всі можливі значення для h_a та матриці $\tilde{\mathcal{O}}$ (2.20):

$$\begin{aligned} & (i) \quad s = 0, \quad h_1, h_2, h_3, \gamma, \beta \text{ — довільні сталі;} \\ & (ii) \quad s \neq 0, \quad h_1 = h_2 = h_3, \quad h_1, \gamma, \beta \text{ — довільні сталі;} \\ & (iii) \quad s \neq 0, \quad h_1 = h_2 \neq h_3, \\ & \qquad \tilde{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \cos st & -\sin st & 0 \\ \sin st & \cos st & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Тут не наведено випадки $s \neq 0,\ h_1 \neq h_2 = h_3$ та $s \neq 0,\ h_2 \neq h_1 = h_3$, оскільки вони є еквівалентними до випадку (iii).

Тепер рівняння (2.9) набуває вигляду

$$\sum_{a=1}^{3} F_{a0}(\omega_a)\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b}\frac{\partial\omega_a}{\partial x_b} + T_0(t) + \sum_{a=1}^{3} h_a = 0.$$

Розщепивши це співвідношення за незалежними змінними $\omega_1, \omega_2, \omega_3, t$ для кожного класу функцій $\vec{z} = \vec{z}(\vec{\omega})$ зі списку (1.36), одержуємо явний вигляд функцій $F_{01}(\omega_1), F_{02}(\omega_2), F_{03}(\omega_3)$ та $T_0(t)$ з точністю до вибору сталих відокремлення λ_a, $a = 1, 2, 3$ в рівняннях (2.5)

$$T_0 = -\sum_{a=1}^{3} h_a, \quad F_{a0} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \tag{2.25}$$

Підсумуємо результати, отримані в цьому пункті, у вигляді такого твердження.

Теорема 2.2 *Рівняння Фоккера–Планка (2.2) допускає відокремлення змінних в сенсі означення ozf.1, якщо компоненти вектора зносів $\vec{B}(\vec{x})$ є лінійними і задаються формулою (2.13), де матриця $\mathcal{M}$ визначається з формул (2.14), (2.19), (2.20), (2.23) та (2.24).*

Системи координат, в яких відповідне РФП допускає ВЗ, визначаються неявно формулами (1.42), (1.36) і (1.41), де $\mathcal{O}(t)$ має вигляд (2.19), (2.20) і (2.24), функції $l_a(t),\ a = 1, 2, 3$ дано в (2.23), а функції $w_a(t),\ a = 1, 2, 3$ — розв'язки системи ЗДР (2.15).

Точні розв'язки. Покажемо, що для розглядуваного випадку РФП (2.2) можливо дати повний перелік розв'язків з відокремленими змінним. Вони мають вигляд (2.4), а редуковані рівняння для функцій $\varphi_\mu,\ (\mu = 0, 1, 2, 3)$ мають вигляд (2.5), де коефіцієнти $F_{ab},\ a, b = 1, 2, 3$ — компоненти відповідних матриць Штеккеля (1.51) (функції $T_a,\ a = 1, 2, 3$ наведені в (1.55), а функції $T_0, F_{a0}, a = 1, 2, 3$ подано в (2.25)).

Редуковані рівняння для функції $\varphi_0(t)$ інтегруються очевидним чином. Редуковані рівняння для функцій $\varphi_a(\omega_a),\ a = 1, 2, 3$ подібні до тих ЗДР, які виникають при ВЗ в тривимірному рівнянні Гельмгольца $(\Delta + k^2)\Psi = 0$. Розв'язки цих рівнянь добре відомі (див., наприклад, [17, 18]). Нижче наводимо розв'язки РФП (2.2) для кожного із класів функції $\vec{z} = \vec{z}(\vec{\omega})$ поданих в списку (1.36).

1. Декартові координати

$$u(t, \vec{\omega}) = \exp \sum_{a=1}^{3} \left(\lambda_a \frac{c_a^{-2}}{2h_a} e^{-2h_a t} - h_a t \right) \exp(i(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3)),$$

де $\lambda_1 = -\alpha^2, \lambda_2 = -\beta^2, \lambda_3 = -\gamma^2$.

2. Циліндричні координати

$$
\begin{aligned}
u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} + \lambda_3 \frac{c_3^{-2}}{2h_3} e^{-2h_3 t} - (2h_1 + h_3)t\right\} \times \\
\times J_n(\alpha e^{\omega_1}) \exp(i(n\omega_2 + \gamma\omega_3)),
\end{aligned}
$$

де J_n — функція Бесселя [8], $\lambda_1 = -\alpha^2, \lambda_2 = -n^2, \lambda_3 = -\gamma^2$.

3. Координати параболічного циліндру

$$
\begin{aligned}
u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} + \lambda_3 \frac{c_3^{-2}}{2h_3} e^{-2h_3 t} - (2h_1 + h_3)t\right\} \times \\
\times D_{i\mu-1/2}(\pm\sigma\omega_1)\, D_{-i\mu-1/2}(\pm\sigma\omega_2)\, e^{i\omega_3\gamma},
\end{aligned}
$$

де D_ν — функція параболічного циліндру [4], $\sigma = e^{i\pi/4}(2\alpha)^{1/2}$; $\lambda_1 = -\alpha^2$, $\lambda_2 = -2\alpha\mu$, $\lambda_3 = -\gamma^2$.

4. Для випадку координат еліптичного циліндру маємо два типи розв'язків

$$
\begin{aligned}
a) \quad & u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} + \lambda_3 \frac{c_3^{-2}}{2h_3} e^{-2h_3 t} - (2h_1 + h_3)t\right\} \times \\
& \quad \times \mathrm{Ce}_n(\omega_1, q)\, \mathrm{ce}_n(\omega_2, q)\, e^{i\omega_3\gamma}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b) \quad & u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} + \lambda_3 \frac{c_3^{-2}}{2h_3} e^{-2h_3 t} - (2h_1 + h_3)t\right\} \times \\
& \quad \times \mathrm{Se}_n(\omega_1, q)\, \mathrm{se}_n(\omega_2, q)\, e^{i\omega_3\gamma}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,
\end{aligned}
$$

де $\mathrm{ce}_n, \mathrm{se}_n$ — парні та непарні функції Матьє, $\mathrm{Ce}_n, \mathrm{Se}_n$ — парні та непарні модифіковані функції Матьє [5, 33]; $\lambda_1 = -4qa^2, \lambda_2 = 2q + c_n, \lambda_3 = -\gamma^2$, де c_n — власні значення функцій Матьє.

5. Сферичні координати

$$
\begin{aligned}
u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \times \\
\times \omega_1^{1/2} J_{\pm(n+1/2)}(\alpha/\omega_1)\, P_n^{\pm m}(\tanh\omega_2) e^{i\omega_3 m},
\end{aligned}
$$

де J_ν — функція Бесселя, P_n^m — функція Лежандра [3], $\lambda_1 = -\alpha^2, \lambda_2 = -n(n+1), \lambda_3 = -m^2$.

6. Координати витягнутого сфероїда

$$u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \times$$
$$\times \mathrm{Ps}_n^{|m|}(\coth\omega_1, -a^2\lambda_1)\,\mathrm{Ps}_n^{|m|}(\tanh\omega_2, -a^2\lambda_1)\,e^{im\omega_3},$$

де m — ціле, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при цьому $-n \le m \le n$. Окрім цього Ps_n^m — функція сфероїдальної хвилі [33] (див. також [13]), $\lambda_2 = \lambda_n^{|m|}, \lambda_3 = -m^2$.

7. Координати сплющеного сфероїда

$$u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \times$$
$$\times \mathrm{Ps}_n^{|m|}(-i\tan\omega_1, -a^2\lambda_1)\,\mathrm{Ps}_n^{|m|}(\tanh\omega_2, a^2\lambda_1)\,e^{im\omega_3},$$

де m — ціле, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при цьому $-n \le m \le n$. Окрім цього Ps_n^m — функція сфероїдальної хвилі та $\lambda_2 = \lambda_n^{|m|}, \lambda_3 = -m^2$.

8. Параболічні координати

$$u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \exp(m(\omega_1 + \omega_2 + i\omega_3)) \times$$
$$\times \exp\left(\pm i\frac{\alpha}{2} e^{2\omega_1}\right) {}_1F_1\left(-i\frac{\lambda_2}{4\alpha} + \frac{m+1}{2}, m+1, \mp i\alpha e^{2\omega_1}\right) \times$$
$$\times \exp\left(\pm i\frac{\alpha}{2} e^{2\omega_2}\right) {}_1F_1\left(i\frac{\lambda_2}{4\alpha} + \frac{m+1}{2}, m+1, \mp i\alpha e^{2\omega_2}\right),$$

де ${}_1F_1$ — конфлюентна гіпергеометрична функція [3] та $\lambda_1 = -\alpha^2$, $\lambda_3 = -m^2$.

9. Параболоїдальні координати

$$u(t,\vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \mathrm{gc}_n(i\omega_1; 2a\alpha, \lambda_2/2\alpha) \times$$
$$\times \mathrm{gc}_n(\omega_2; 2a\alpha, \lambda_2/2\alpha)\,\mathrm{gc}_n(i\omega_3 + \pi/2; 2a\alpha, \lambda_2/2\alpha)$$

або та ж сама форма, де замість функцій gc_n слід записати функції gs_n. Тут gc_n та gs_n — парні та непарні неполіноміальні розв'язки рівняння Уіттекера–Хілла [77], при цьому $n = 0, 1, 2, \ldots$. Окрім цього, $\lambda_1 = -\alpha^2, \lambda_3 = \mu_n$.

10. Еліпсоїдальні координати

$$u(t, \vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \mathrm{el}_n^m(\omega_1)\, \mathrm{el}_n^m(\omega_2)\, \mathrm{el}_n^m(\omega_3),$$

де m — ціле, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $-n \le m \le n$. Окрім цього, el_n^m — функція еліпсоїдальної хвилі [33], $\lambda_1 = \nu_{nm}, \lambda_2 = \lambda_{nm}, \lambda_3 = \mu_{nm}$.

11. Для випадку конічних координат маємо два типи розв'язків

$$\begin{aligned}
&a) \quad u(t, \vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \omega_1^{\frac{1}{2}} J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(\alpha/\omega_1) \times \\
&\qquad \times \mathrm{Ec}_n^m(\omega_2)\, \mathrm{Ec}_n^m(\omega_3), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots, n, \\
&b) \quad u(t, \vec{\omega}) = \exp\left\{\lambda_1 \frac{c_1^{-2}}{2h_1} e^{-2h_1 t} - 3h_1 t\right\} \omega_1^{\frac{1}{2}} J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(\alpha/\omega_1) \times \\
&\qquad \times \mathrm{Es}_n^m(\omega_2)\, \mathrm{Es}_n^m(\omega_3), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

де J_ν — функція Бесселя, Ec_n^m та Es_n^m — парні та непарні функції Ламе [5, 33], $\lambda_1 = -\alpha^2, \lambda_2 = -n(n+1), \lambda_3 = -c_n^m$, де c_n^m — власні значення функцій Ламе.

Ці розв'язки наведено за припущення $h_a \neq 0$, $a = 1, 2, 3$. При виконанні умови $h_a = 0$ відповідний вираз $\exp(-2h_a t)/2h_a$ має бути замінений на $-t$.

Нарешті, подамо список векторів зносів $\vec{B}(\vec{x})$, при яких відповідне РФП допускає ВЗ. Вони мають таку форму:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathcal{M}\vec{x} + \vec{v},$$

де $\vec{v}$ — довільний сталий вектор, $\mathcal{M}$ – стала матриця, яка збігається із однією із поданих нижче матриць:

1. $$\mathcal{M} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1},$$

де h_1, h_2, h_3 — довільні константи, $\mathcal{C}$ — довільна стала 3×3 ортогональна матриця, тобто $\mathcal{M}$ — дійсна симетрична матриця з власними значеннями h_1, h_2, h_3.

(a) $h_1 \neq h_2$, $h_1 \neq h_3$, $h_2 \neq h_3$. Відповідне РФП має лише розв'язок 1 з наведеного вище списку. Нові координати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задані неявним чином за формулою

$$\vec{x} = \mathcal{C}\mathcal{L}(t) \left(\vec{z}(\vec{\omega}) + \vec{w}(t) \right), \tag{2.26}$$

де $\vec{z}(\vec{\omega})$ задано формулою 1 зі списку (1.36), $\vec{w}(t)$ — розв'язок системи ЗДР (2.15) та

$$\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{h_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 e^{h_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & c_3 e^{h_3 t} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі.

(b) $h_1 = h_2 \neq h_3$. Відповідні РФП мають розв'язки 1–4 із наведеного вище списку. Нові координати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задано неявним чином формулою (2.26), де $\vec{z}(\vec{\omega})$ визначаються однією з формул 1–4 зі списку (1.36), $\mathcal{L}(t)$ задається формулою (2.27) для довільних сталих c_1, c_2, c_3, які задовольняють умову $c_1 = c_2$ для частково розщеплюваних координат 2–4 із (1.36).

(c) $h_1 = h_2 = h_3$, тобто $M = h_1 I$, де I — одинична матриця. Відповідні РФП мають всі 11 розв'язків з наведеного вище списку. Нові координати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задані неявним чином за формулою (2.26), де $\vec{z}(\vec{\omega})$ визначаються однією із одинадцяти формул (1.36), $\mathcal{L}(t)$ задається формулою (2.27) з довільними константами c_1, c_2, c_3, які задовольняють умову $c_1 = c_2$ для частково розщеплюваних координат 2–4 з (1.36) та умову $c_1 = c_2 = c_3$ для нерозщеплюваних координат 5–11 зі списку (1.36).

2. $$\mathcal{M} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} h_1 & -s & 0 \\ s & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1},$$

де $\mathcal{C}$ — довільна стала ортогональна 3×3 матриця; s, h_1, h_3 — довільні сталі, і при цьому $s \neq 0$.

(a) $h_1 \neq h_3$. Відповідне РФП має лише розв'язки 1–4 з наведеного вище списку, в якому треба покласти $h_1 = h_2 \neq h_3$. Нові координати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задаються неявним чином формулою (1.42), де $\vec{z}(\vec{\omega})$ визначаються однією із формул 1–4 зі списку (1.36), $\mathcal{O}(t)$ має вигляд (2.19) за умови (iii) з (2.24), $\vec{w}(t)$ — розв'язок системи ЗДР (2.15),

$$\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{h_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 e^{h_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & c_3 e^{h_3 t} \end{pmatrix}$$

з довільними константами c_1, c_2, c_3, які задовольняють умову $c_1 = c_2$ для частково розщеплюваних координат 2–4 з (1.36).

(b) $h_1 = h_3$. Відповідне РФП має всі 11 розв'язків з наведеного вище списку, в якому треба покласти $h_1 = h_2 = h_3$. Нові координати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ визначаються неявним чином формулою (1.42), де $\vec{z}(\vec{\omega})$ задані однією з одинадцяти формул (1.36), $\mathcal{O}(t)$ задано формулами (2.19), (2.20); $\vec{w}(t)$ — розв'язок системи ЗДР (2.15),

$$\mathcal{L}(t) = \exp(h_1 t) \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

з довільними константами c_1, c_2, c_3, які задовольняють умову $c_1 = c_2$ для частково розщеплюваних координат 2–4 з (1.36) та умову $c_1 = c_2 = c_3$ для нерозщеплюваних координат 5–11 зі списку (1.36).

Зауважимо, що розв'язки з наведеного вище переліку можуть бути використані як базисні функції для розкладу довільного достатньо гладкого розв'язку даної крайової задачі в певному гільбертовому просторі (для цього вибирають розв'язки із відокремленими змінними, що отримані в тій системі координат, координатні поверхні якої співпадають з граничними поверхнями розглядуваної крайової задачі). Більш детально див., наприклад, [17, 18].

2.2. Відокремлення змінних в рівнянні Крамерса

Розглянемо одновимірний броунівський рух частинки, яка знаходиться під впливом зовнішнього силового поля з потенціалом $V(x)$ [11]. Відповідне пряме рівняння Колмогорова (рівняння Фоккера–Планка) для цього дифузійного процесу має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu y + \dot{V}(x)) \frac{\partial u}{\partial y} + \nu u, \tag{2.28}$$

де t, x — часова та просторова змінні, y — швидкість частинки, $u(t,x,y)$ — функція розподілу густини імовірностей — достатньо гладка дійснозначна функція, ν — дійсна стала, яка характеризує в'язкість середовища.

Ця фізична задача називається проблемою Крамерса [45, 64], а тому і досліджуване рівняння (2.28) називається рівнянням Крамерса (РК) (див., більш докладно [7, 70]).

Рівняння (2.28) є частинним випадком двовимірного рівняння Фоккера–Планка (2.1), де коефіцієнти зносу та дифузії мають вигляд

$$\vec{B}(t,x,y) = (y, -\dot{V}(x) - \gamma y), \quad D(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

За аналогією з означенням 1.1 введемо поняття ВЗ для РК (2.28). Нехай маємо деяку систему координат t, $\omega_1(t,x,y)$, $\omega_2(t,x,y)$, при цьому має місце умова

$$\det \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega_2}{\partial y} \end{array} \right\| \neq 0. \tag{2.29}$$

Означення 2.4 *Будемо казати, що рівняння Крамерса (2.28) допускає відокремлення змінних в системі координат t, ω_1, ω_2, якщо існують деяка ненульова функція $Q(t,x,y)$ і три звичайні диференціальні рівняння*

$$\begin{aligned} &U_0(t,\varphi_0,\dot{\varphi}_0;\lambda_1,\lambda_2)=0, \\ &U_i(\omega_i,\varphi_i,\dot{\varphi}_i,\ddot{\varphi}_i;\lambda_1,\lambda_2)=0, \quad i=1,2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

які одночасно залежать від двох незалежних дійсних параметрів λ_1,λ_2 (сталих відокремлення) і такі, що для кожної пари λ_1,λ_2 та для кожної множини розв'язків $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$ системи (2.30) функція

$$u(t,x,y)=Q(t,x,y)\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2) \tag{2.31}$$

є розв'язком рівняння (2.28).

Тут U_0, U_1, U_2 — деякі гладкі функції вказаних аргументів.

Означення 2.5 *Два дійсні параметри λ_1,λ_2 в системі рівнянь (2.30) називаються незалежними, якщо 3×2 – матриця*

$$\left\| \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_j} \right\|_{i=0}^{2}\,{}_{j=1}^{2} \tag{2.32}$$

має ранг 2 скрізь, де $\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\neq 0$.

Ця умова гарантує істотну залежність розв'язків з відокремленими змінними від сталих відокремлення λ_1,λ_2.

Очевидно, що форма співвідношень (2.31)–(2.32) не змінюється в результаті заміни

$$\lambda_1 \to \lambda_1' = \Lambda_1(\lambda_1,\lambda_2), \quad \lambda_2 \to \lambda_2' = \Lambda_2(\lambda_1,\lambda_2) \tag{2.33}$$

де

$$\det \left\| \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \lambda_j} \right\|^2_{i,j=1} \neq 0. \tag{2.34}$$

Тому відповідні набори спектральних параметрів λ_1, λ_2 та λ_1', λ_2' будемо вважати еквівалентними.

Далі введемо відношення еквівалентності на множині розв'язків з відокремленими змінними, а також на множині відповідних систем координат.

Означення 2.6 *Два розв'язки рівняння Крамерса (2.28) з відокремленими змінними називаються еквівалентними, якщо вони пов'язані між собою перетвореннями з групи Лі інваріантності рівняння Крамерса (2.28). Окрім цього, еквівалентними ми називаємо також розв'язки з відокремленими змінними з еквівалентними наборами спектральних параметрів* λ_1, λ_2.

Зауважимо, що симетрійну класифікацію класу ДРЧП (2.28) було проведено зовсім недавно в статтях [75, 76].

Означення 2.7 *Дві системи координат* t, ω_1, ω_2 *та* t', ω_1', ω_2' *називаються еквівалентними, якщо в результаті відокремлення змінних в сенсі означення 2.4 одержуються еквівалентні розв'язки з відокремленими змінними. Зокрема, еквівалентними будуть системи координат, які пов'язані між собою за допомогою оборотніх перетворень такого вигляду*

$$t \to t' = f_0(t), \quad \omega_i \to \omega_i' = f_i(\omega_i), \quad i = 1, 2, \tag{2.35}$$

$$Q \to Q' = Q h_0(t) h_1(\omega_1) h_2(\omega_2), \tag{2.36}$$

де f_0, f_i, h_0, h_i *— деякі гладкі функції.*

Відношення еквівалентності (2.35), (2.36) розбивають множину розв'язків з відокремленими змінними, а також множину відповідних систем координат на класи еквівалентності. Надалі, подаючи відповідні списки, будемо наводити по одному представникові із кожного класу еквівалентності.

Оскільки досліджуване рівняння (2.28) лінійне, то і редуковані рівняння (2.30) також мають бути лінійними [62]. Тоді система рівнянь (2.30) може набувати одного з таких виглядів.

Випадок 1.

$$\begin{aligned}
\dot\varphi_0 &= A_0(t;\lambda_1,\lambda_2)\varphi_0,\\
\dot\varphi_1 &= A_1(\omega_1;\lambda_1,\lambda_2)\varphi_1,\\
\ddot\varphi_2 &= A_2(\omega_2;\lambda_1,\lambda_2)\dot\varphi_2 + A_3(\omega_2;\lambda_1,\lambda_2)\varphi_2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Випадок 2.

$$\begin{aligned}
\dot\varphi_0 &= A_0(t;\lambda_1,\lambda_2)\varphi_0,\\
\dot\varphi_1 &= A_1(\omega_1;\lambda_1,\lambda_2)\varphi_1,\\
\dot\varphi_2 &= A_2(\omega_2;\lambda_1,\lambda_2)\varphi_2.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

В цих формулах $A_0,\ldots,A_3$ — деякі гладкі функції вказаних аргументів. Випадки, при яких РК зводиться до двох або трьох ЗДР другого порядку, неможливі, оскільки воно містить похідну другого порядку лише за однією змінною.

Таким чином, при ВЗ в РК (2.28) існують дві різні можливості: або РК зводиться до двох ЗДР першого та одного ЗДР другого порядку, або ж всі три редуковані ЗДР матимуть перший порядок.

Якщо система редукованих рівнянь має вигляд (2.37), то алгоритм ВЗ в РК (2.28) можна сформулювати таким чином:

1. Підставляємо анзац (2.31) в РК (2.28) і виражаємо похідні $\dot\varphi_0$, $\dot\varphi_1$, $\ddot\varphi_1$, $\ddot\varphi_2$ в термінах функцій $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\dot\varphi_2$, використовуючи рівняння (2.37) та, при потребі, їх диференціальні наслідки.

2. Вважаючи величини $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\dot\varphi_2,\lambda_1,\lambda_2$ незалежними змінними, розщеплюємо за ними рівність, одержану на попередньому кроці алгоритму. В результаті отримуємо перевизначену систему нелінійних ДРЧП для невідомих функцій Q, ω_1, ω_2.

3. Розв'язавши цю систему, одержуємо вичерпний опис систем координат, при яких РК (2.28) допускає ВЗ.

Для випадку, коли система редукованих рівнянь має вигляд (2.38), алгоритм ВЗ в РК формулюється аналогічним чином.

Як було доведено в підрозділі 1.1, можливість ВЗ в ДРЧП тісно пов'язана з його симетрією в класі диференціальних операторів другого порядку [17, 62]. Тому цілком природнім є такий результат.

Теорема 2.3 *Нехай рівняння Крамерса (2.28) допускає відокремлення змінних, в результаті якого отримуються два звичайні диференціальні рівняння першого та одне звичайне диференціальне рівняння другого порядку. Тоді для відповідного розв'язку з відокремленими змінними завжди знайдеться два взаємно комутуючих лінійних диференціальних оператора симетрії рівняння Крамерса, один з яких є оператором першого, а інший — другого порядку, таких, що цей розв'язок з відокремленими змінними є спільною власною функцією цих операторів, причому сталі відокремлення* λ_1, λ_2 *є їх власними значеннями.*

Теорема 2.4 *Нехай рівняння Крамерса (2.28) допускає відокремлення змінних, в результаті якого отримуються три звичайні диференціальні рівняння першого порядку. Тоді для відповідного розв'язку з відокремленими змінними завжди знайдеться два взаємно комутуючих лінійних диференціальних оператора симетрії першого порядку рівняння Крамерса, таких, що цей розв'язок з відокремленими змінними є спільною власною функцією цих операторів, причому сталі відокремлення* λ_1, λ_2 *є їх власними значеннями.*

Доведення цих теорем є повністю аналогічним доведенню теореми 1.2.

Вище вже було відзначено, що в [75, 76] проведена симетрійна класифікація ДРЧП (2.28). Основний результат цих робіт полягає в тому, що РК (2.28) має групу симетрії, більш широку, ніж тривіальна однопараметрична група зсувів за часовою змінною t, тоді і тільки тоді, коли $\ddot{V}(x) = 0$. Тому сконцентруємо увагу на випадкові $\dot{V}(x) = kx$, $k = \mathrm{constant}$, тобто будемо розглядати РК (2.28) для лінійного гармонійного осцилятора

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu y + kx) \frac{\partial u}{\partial y} + \nu u. \tag{2.39}$$

Тут стала k характеризує динамічне тертя в системі.

Основні результати. Подамо повний перелік результатів з ВЗ в РК (2.39), отриманих в рамках сформульованого вище підходу. Нижче виписано явний вигляд систем координат $\omega_1(t, x, y)$, $\omega_2(t, x, y)$ та множника $Q(t, x, y)$, при яких можливе ВЗ в РК, та відповідні редуковані ЗДР для функцій $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$.

Теорема 2.5 *Рівняння (2.39) допускає відокремлення змінних до двох звичайних диференціальних рівнянь першого та одного звичайного диференціального рівняння другого порядку тоді і тільки тоді, коли параметр k набуває одного з трьох значень 0, $3\nu^2/16$, $-3\nu^2/4$. Крім того, рівняння (2.39) для довільного k допускає відокремлення змінних до трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.*

Теорема 2.5 дає повний опис РК (2.39), що допускають ВЗ. Повний розв'язок проблеми ВЗ у відповідних РК дається теоремами 2.6–2.10.

Теорема 2.6 *Множина нееквівалентних систем координат, в яких рівняння (2.39) при $k = \nu^2/4$ допускає відокремлення змінних, вичерпується такими системами координат:*

$$\omega_1 = \frac{f_1 y - \dot{f}_1 x}{\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2}, \quad \omega_2 = \frac{f_2 y - \dot{f}_2 x}{\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2}, \tag{2.40}$$

де

$$\begin{aligned} f_1 &= t\left(A_1 \sinh \frac{\nu}{2} t + A_2 \cosh \frac{\nu}{2} t\right) + A_3 \sinh \frac{\nu}{2} t + A_4 \cosh \frac{\nu}{2} t, \\ f_2 &= t\left(B_1 \sinh \frac{\nu}{2} t + B_2 \cosh \frac{\nu}{2} t\right) + B_3 \sinh \frac{\nu}{2} t + B_4 \cosh \frac{\nu}{2} t, \end{aligned}$$

причому $A_1, \ldots, B_4$ *— довільні дійсні сталі, що задовільняють умови*

$$2C_{12} + \nu(C_{13} - C_{24}) = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{4} C_{ij}^2 > 0.$$

Тут та надалі використовуються позначення

$$C_{ij} = B_i A_j - A_i B_j, \quad i, j = 1, \ldots, 4.$$

Більше цього, відповідні розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (2.31), а множник Q *задається формулою*

$$Q = \exp\left\{ \left(-\frac{1}{4\nu} \frac{\ddot{f}_2 f_1 - \ddot{f}_1 f_2}{\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2} - \frac{1}{4} \right) y^2 + \frac{1}{2\nu} \left(\frac{\ddot{f}_2 \dot{f}_1 - \ddot{f}_1 \dot{f}_2}{\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2} - k \right) xy + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{4\nu} \frac{\dddot{f}_2\, \dot{f}_1 - \dddot{f}_1\, \dot{f}_2}{\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2} - \frac{k}{4} \right) x^2 - \frac{1}{2} \ln |\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2| + \frac{\nu}{2} t \right\}. \tag{2.41}$$

Редуковані рівняння для функцій $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ *мають вигляд*

$$\dot{\varphi}_0 = \nu \left(\frac{f_1 \lambda_1 + f_2 \lambda_2}{\dot{f}_2 f_1 - \dot{f}_1 f_2} \right)^2 \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1 = \lambda_1 \varphi_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \lambda_2 \varphi_2. \tag{2.42}$$

Теорема 2.7 *Множина нееквівалентних систем координат, в яких рівняння (2.39) при* $k > \nu^2/4$ *допускає відокремлення змінних, вичерпується системами координат (2.40), в яких*

$$f_1 = \sin qt(A_1 \sinh pt + A_2 \cosh pt) + \cos qt(A_3 \sinh pt + A_4 \cosh pt),$$

$$f_2 = \sin qt(B_1 \sinh pt + B_2 \cosh pt) + \cos qt(B_3 \sinh pt + B_4 \cosh pt),$$

де $p = \nu/2, q = \sqrt{k - \nu^2/4}$ *та* $A_1, \ldots, B_4$ *– сталі, що задовольняють умови*

$$(C_{12} + C_{34})q + (C_{13} - C_{24})p = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{4} C_{ij}^2 > 0.$$

Крім цього, відповідні розв'язки з відокремленими змінними матимуть вигляд (2.31), причому множник Q *задається формулою (2.41), а редуковані рівняння для функцій* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ *матимуть вигляд (2.42).*

Теорема 2.8 *Множина нееквівалентних систем координат, в яких рівняння (2.39) де* $k < \nu^2/4$ *(при цьому* $k \neq 0,\ 3\nu^2/16,\ -3\nu^2/4$*), допускає відокремлення змінних, вичерпується системами координат (2.40), в яких*

$$f_1 = \sinh qt(A_1 \sinh pt + A_2 \cosh pt) + \cosh qt(A_3 \sinh pt + A_4 \cosh pt),$$

$$f_2 = \sinh qt(B_1 \sinh pt + B_2 \cosh pt) + \cosh qt(B_3 \sinh pt + B_4 \cosh pt),$$

де $p = \nu/2, q = \sqrt{\nu^2/4 - k}$ *та* $A_1, \ldots, B_4$ *– сталі, що задовільняють умови*

$$(C_{12} - C_{34})q + (C_{13} - C_{24})p = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{4} C_{ij}^2 > 0.$$

Окрім цього, відповідні розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (2.31), при цьому множник Q *задається формулою (2.41), а редуковані рівняння для функцій* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ *матимуть вигляд (2.42).*

Теорема 2.9 *Множина нееквівалентних систем координат, в яких вільне рівняння Крамерса, тобто рівняння (2.39) при* $k = 0$*, допускає відокремлення змінних, вичерпується такими системами координат*

1) *системи координат вигляду (2.40) при*

$$f_1 = A_1 \sinh \nu t + A_2 \cosh \nu t + A_3 t + A_4,$$

$$f_2 = B_1 \sinh \nu t + B_2 \cosh \nu t + B_3 t + B_4,$$

де $A_1, \ldots, B_4$ *— сталі, що задовільняють умови*

$$\nu C_{12} - C_{34} = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{4} C_{ij}^2 > 0.$$

Відповідні розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (2.31), при цьому множник Q *задається формулою (2.41), а редуковані рівняння для функцій* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ *мають вигляд (2.42);*

2) *декартова система координат* $\omega_1 = x,\ \omega_2 = y$. *Відповідні розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (2.31), при цьому множник* Q *задається формулою* $Q = \exp\left(-y^2/4\right)$, *а редуковані рівняння для функцій* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ *мають вигляд*

$$\dot\varphi_0 = \nu\lambda_1\varphi_0, \quad \dot\varphi_1 = \nu\lambda_2\varphi_1, \quad \ddot\varphi_2 = \left(\frac{y^2}{4} + \lambda_2 y + \lambda_1 - \frac{1}{2}\right)\varphi_2.$$

Теорема 2.10 *Множина нееквівалентних систем координат, в яких рівняння (2.39) при* $k = 3\nu^2/16$ *або* $k = -3\nu^2/4$ *допускає відокремлення змінних, вичерпується такими системами координат*

1) *тими, які наведено в теоремі 2.8 при* $k = 3\nu^2/16$ *або* $k = -3\nu^2/4$, *відповідно. Відповідні розв'язки з відокремленими змінними також визначаються згідно теоремі 2.8;*

2) *такими системами координат:*

$$\omega_1 = R^3 x, \quad \omega_2 = Ry + 3\dot R x,$$

де

$$R(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cosh at}, \\ \dfrac{1}{\sinh at}, \\ \exp\{\pm at\}, \end{cases} \qquad a = \begin{cases} \dfrac{\nu}{4}, & \text{при } k = \dfrac{3\nu^2}{16}, \\ \dfrac{\nu}{2}, & \text{при } k = -\dfrac{3\nu^2}{4}. \end{cases}$$

Відповідні розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд (2.31), при цьому множник Q *задається формулою*

$$Q = \exp\left\{\left(\frac{\dot R}{\nu R} - \frac{1}{4}\right)y^2 + \frac{1}{2\nu}\left(3\frac{\ddot R}{R} - k\right)xy + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{3\ \dddot R}{4\nu R} + \frac{15\dot R\ddot R}{4\nu R^2} - \frac{k}{4}\right)x^2 + \frac{\nu}{2}t + 2\ln R\right\},$$

а редуковані рівняння для функцій $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ *мають вигляд*

$$\dot\varphi_0 = \nu\lambda_1 R^2\varphi_0, \quad \dot\varphi_1 = \nu\lambda_2\varphi_1, \quad \ddot\varphi_2 = (\lambda_2\omega_2 + \lambda_1)\varphi_2.$$

Доведення теорем 2.5–2.10. Протягом всього доведення нижні індекси означають частинні похідні за відповідними змінними

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv F_x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \equiv F_{xy}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \equiv F_{xyz}.$$

Для того, щоб довести теореми 2.5–2.10, необхідно застосувати алгоритм ВЗ в РК, описаний вище, до рівняння (2.39).

Подамо детальне доведення для випадку, коли система редукованих ЗДР має вигляд (2.37). Підставимо анзац (2.31) в РК (2.39) та виразимо похідні $\dot\varphi_0$, $\dot\varphi_1$, $\ddot\varphi_1$, $\ddot\varphi_2$ в термінах функцій $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_2$ з використанням рівнянь (2.37) та їх диференціальних наслідків. Розщеплюючи отримане рівняння за змінними $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_2$, одержуємо систему двох нелінійних ДРЧП

$$\begin{aligned} &Q\omega_{2t} + yQ\omega_{2x} = \nu(yQ\omega_{2y} + 2Q_y\omega_{2y} + 2QA_1\omega_{1y}\omega_{2y} + \\ &\quad +QA_2\omega_{2y}^2 + Q\omega_{2yy}) + kxQ\omega_{2y}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} &Q_t + QA_0 + QA_1\omega_{1t} + yQ_x + yQA_1\omega_{1x} = \nu(Q + yQ_y + \\ &\quad +yQA_1\omega_{1y} + Q_{yy} + 2Q_yA_1\omega_{1y} + Q(A_1^2 + A_{1\omega_1})\omega_{1y}^2 + \\ &\quad +QA_1\omega_{1yy} + QA_3\omega_{2y}^2) + kx(Q_y + QA_1\omega_{1y}). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Цю систему необхідно розщепити за змінними λ_1, λ_2 (нагадаємо, що функції ω_1, ω_2 не залежать від λ_1, λ_2). Для цього продиференціюємо (2.43) за λ_i. В результаті отримаємо такі співвідношення

$$(2A_{1\lambda_i}\omega_{1y} + A_{2\lambda_i}\omega_{2y})\omega_{2y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Оскільки $\omega_{2y} \neq 0$ (інакше з формули (2.43) випливає, що $\omega_2 = \mathrm{const}$), мають місце рівняння

$$2A_{1\lambda_i}\omega_{1y} + A_{2\lambda_i}\omega_{2y} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.45}$$

Покажемо спочатку, що без обмеження загальності можна покласти $\omega_{1y} = 0$. Припустимо, що це не так, тобто виконується умова $\omega_{1y} \neq 0$. З другого рівняння системи (2.37) та умови (2.32) випливає, що $A_{1\lambda_1}^2 + A_{1\lambda_2}^2 \neq 0$. Нехай функція $A_{1\lambda_1}$ є ненульовою, тоді за рахунок (2.45) маємо $A_{2\lambda_1} \neq 0$. Позначивши

$$A_{1\lambda_1} = g(\omega_1, \lambda_1, \lambda_2), \quad -2A_{2\lambda_1} = f(\omega_2, \lambda_1, \lambda_2),$$

перепишемо (2.45) так

$$\frac{\omega_{1y}}{\omega_{2y}} = \frac{f(\omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{g(\omega_1, \lambda_1, \lambda_2)}. \tag{2.46}$$

Продиференціювавши (2.46) за λ_1, маємо

$$\frac{f_{\lambda_1}}{f} = \frac{g_{\lambda_1}}{g}.$$

Звідки робимо висновок, що існує така функція $k = k(\lambda_1, \lambda_2)$, що

$$\frac{f_{\lambda_1}}{f} = \frac{g_{\lambda_1}}{g} = k(\lambda_1, \lambda_2).$$

Після інтегрування цих рівнянь маємо

$$f = k_1(\lambda_1, \lambda_2) f_1(\omega_2, \lambda_2), \quad g = k_1(\lambda_1, \lambda_2) g_1(\omega_1, \lambda_2),$$

а отже (2.46) зводиться до рівності

$$\frac{\omega_{1y}}{\omega_{2y}} = \frac{f_1(\omega_2, \lambda_2)}{g_1(\omega_1, \lambda_2)}.$$

Аналогічно встановлюємо, що f, g не залежать від λ_2, звідки випливає, що останнє співвідношення еквівалентне такому рівнянню

$$g_2(\omega_1)\omega_{1y} = f_2(\omega_2)\omega_{2y}.$$

Беручи до уваги відношення еквівалентності (2.35), можемо покласти в цій рівності $g_2 = 1$ та $f_2 = 1$, тим самим отримуючи $\omega_{1y} = \omega_{2y}$. Інтегруючи це ДРЧП, маємо

$$\omega_1 = \omega_2 + h(t, x),$$

де h — довільна гладка функція. З урахуванням цього факту рівняння (2.45) набувають вигляду

$$2A_{1\lambda_i} + A_{2\lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Звідси робимо висновок, що існує функція $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ така, що

$$A_1 = \Lambda(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{A}_1(\omega_1), \quad A_2 = -2\Lambda(\lambda_1, \lambda_2) + \tilde{A}_2(\omega_2). \tag{2.47}$$

З точністю до перетворення еквівалентності (2.36) підібравши певним чином функції h_1, h_2, можна покласти $\tilde{A}_1(\omega_1) = 0, \tilde{A}_2(\omega_2) = 0$. Більше цього, позначивши нові сталі відокремлення як

$$\lambda_1' = \Lambda(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_2' = \lambda_2$$

та опускаючи штрихи, подамо (2.47) у вигляді

$$A_1 = \lambda_1, \quad A_2 = -2\lambda_1.$$

Отже, система (2.37) зводиться до системи

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0(t) &= A_0(t)\varphi_0(t), \\ \dot{\varphi}_1(\omega_1) &= \lambda_1\varphi_1(\omega_1), \\ \ddot{\varphi}_2(\omega_2) &= -2\lambda_1\dot{\varphi}_2(\omega_2) + A_3(\omega_2, \lambda_1, \lambda_2)\varphi_2(\omega_2). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Заміна змінних $\varphi_2 = \phi \exp\{-\lambda_1\omega_2\}$ зводить третє рівняння системи (2.48) до рівняння

$$\ddot{\phi} = (\lambda_1^2 + A_3)\phi.$$

Нехай $\phi = \phi(\omega_2, \lambda_1, \lambda_2)$ — розв'язок цього рівняння. Тоді відповідний розв'язок з відокремленими змінними матиме вигляд

$$u = Q(t, x, y)\phi(\omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \exp\left\{\int A_0(t)dt + \lambda_1(\omega_1 - \omega_2)\right\}.$$

Структура цього розв'язку така, що залежність ω_1 від y є неістотною. Дійсно, функція ω_1 входить в розв'язок лише у вигляді комбінації $\omega_1 - \omega_2$, а остання рівна $h(t, x)$. Отже без обмеження загальності можна покласти $\omega_{1y} = 0$.

За умови $\omega_{1y} = 0$ рівняння (2.45) зводяться до рівностей $A_{2\lambda_i} = 0$, $i = 1, 2$, звідки випливає, що $A_2 = A_2(\omega_2)$. Підібравши відповідним чином функцію h_2 в (2.36), можна покласти $A_2 = 0$. Далі, продиференціювавши (2.44) за λ_i, приходимо до рівнянь

$$A_{0\lambda_i} + A_{1\lambda_i}(\omega_{1t} + y\omega_{1x}) = \nu A_{3\lambda_i}\omega_{2y}^2, \quad i = 1, 2. \tag{2.49}$$

Подвійне диференціювання цих рівнянь за y дає

$$A_{3\omega_2\omega_2\lambda_i}\omega_{2y}^4 + 5A_{3\omega_2\lambda_i}\omega_{2y}^2\omega_{2yy} + 2A_{3\lambda_i}(\omega_{2yy}^2 + \omega_{2y}\omega_{2yyy}) = 0, \tag{2.50}$$

де $i = 1, 2$.

Зауважимо, що згідно рівнянню (2.49) та умові (2.32) має місце нерівність $A_{3\lambda_i} \neq 0$. Поділивши (2.50) на $A_{3\lambda_i}$ та продиференціювавши отримані рівності за $\lambda_j, j = 1, 2$, маємо

$$\left(\frac{A_{3\omega_2\omega_2\lambda_i}}{A_{3\lambda_i}}\right)_{\lambda_j}\omega_{2y}^2 + 5\left(\frac{A_{3\omega_2\lambda_i}}{A_{3\lambda_i}}\right)_{\lambda_j}\omega_{2yy} = 0, \quad i, j = 1, 2. \tag{2.51}$$

Випадок 1. Принаймні один із чотирьох виразів $\left(\dfrac{A_{3\omega_2\lambda_i}}{A_{3\lambda_i}}\right)_{\lambda_j}$ тотожньо не дорівнює нулеві. Тоді не важко переконатися у тому, що має місце рівність

$$\frac{\omega_{2yy}}{\omega_{2y}^2} = f(\omega_2).$$

Інтегрування цього рівняння дає

$$\omega_{2y} = g_1(t,x)\exp\left\{\int f(\omega_2)d\omega_2\right\},$$

де $g_1(t,x)$ — довільна гладка функція, тотожно не рівна нулеві.

Далі, використовуючи відношення еквівалентності (2.35), зводимо це рівняння до такого вигляду

$$\omega_{2y} = g_1(t,x),$$

звідки

$$\omega_2 = yg_1(t,x) + g_2(t,x), \tag{2.52}$$

де $g_2(t,x)$ — довільна гладка функція.

З врахуванням цього результату, (2.50) набуває вигляду $A_{3\omega_2\omega_2\lambda_i} = 0$, $i = 1,2$, а тому

$$A_3 = \Lambda_1(\lambda_1,\lambda_2)\omega_2 + \Lambda_2(\lambda_1,\lambda_2) + F(\omega_2), \tag{2.53}$$

де Λ_1, Λ_2, F — довільні гладкі функції вказаних змінних. Більше цього, неважко довести, що Λ_1, Λ_2 функціонально незалежні (інакше порушується умова (2.32)). А отже, ввівши нові сталі відокремлення λ_1, λ_2 згідно (2.33), вираз (2.53) можна подати в формі

$$A_3 = \lambda_1\omega_2 + \lambda_2 + F(\omega_2). \tag{2.54}$$

Випадок 2. Припустимо, що

$$\left(\frac{A_{3\omega_2\lambda_i}}{A_{3\lambda_i}}\right)_{\lambda_j} \equiv 0, \quad i,j = 1,2.$$

Інтегрування цієї системи ДРЧП приводить до співвідношення

$$A_{3\lambda_i} = B_i(\omega_2)L_i(\lambda_1,\lambda_2), \quad i = 1,2, \tag{2.55}$$

де B_i, L_i — довільні гладкі функції Й $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$.

Умова сумісності для системи (2.55) має вигляд

$$B_1 L_{1\lambda_2} = B_2 L_{2\lambda_1}. \tag{2.56}$$

Підвипадок 2.1. $L_{1\lambda_2} \neq 0, \quad L_{2\lambda_1} \neq 0$. При цих обмеженнях умова сумісності (2.56) перетвориться на таку умову

$$\frac{B_1(\omega_2)}{B_2(\omega_2)} = \frac{L_{2\lambda_1}}{L_{1\lambda_2}} = \text{const}. \tag{2.57}$$

Інтегрування системи (2.55) з урахуванням (2.57) дає вираз для A_3

$$A_3 = \Lambda(\lambda_1, \lambda_2) F_1(\omega_2) + F_2(\omega_2),$$

де Λ, F_i — довільні гладкі функції вказаних змінних.

Після перепозначення сталих відокремлення λ_1, λ_2 згідно (2.33), це співвідношення набуває такого вигляду

$$A_3 = \lambda_1 F_1(\omega_2) + F_2(\omega_2). \tag{2.58}$$

Підвипадок 2.2 $L_{1\lambda_2} = 0, \quad L_{2\lambda_1} = 0$. Інтегрування системи (2.55) та перепозначення сталих відокремлення λ_1, λ_2 згідно (2.33), дає вираз для A_3

$$A_3 = \lambda_1 S_1(\omega_2) + \lambda_2 S_2(\omega_2) + S_0(\omega_2), \tag{2.59}$$

де S_1, S_2, S_0 — довільні гладкі функції. Аналіз формул (2.54), (2.58) та (2.59) показує, що перші дві з них є частинними випадками останньої. Отже функція A_3 має найбільш загальний вигляд (2.59).

Підставляючи (2.59) в (2.49) та диференціюючи отриману рівність за y та λ_j, одержимо $A_{1\lambda_i\lambda_j} = 0$, $i, j = 1, 2$. Звідси випливає, що

$$A_1 = \lambda_1 L_1(\omega_1) + \lambda_2 L_2(\omega_1) + L_0(\omega_1), \tag{2.60}$$

де L_1, L_2, L_0 — довільні гладкі функції.

Далі, підставивши (2.59), (2.60) в (2.49) та продиференціювавши отриману рівність за λ_j, маємо $A_{0\lambda_i\lambda_j} = 0$, $i, j = 1, 2$, звідки

$$A_0 = \lambda_1 R_1(t) + \lambda_2 R_2(t) + R_0(t), \tag{2.61}$$

де R_1, R_2, R_0 — довільні гладкі функції.

Враховуючи ці результати, рівняння (2.43) та (2.44) можна розщепити за λ_1, λ_2. В результаті приходимо до системи чотирьох нелінійних ДРЧП для трьох функцій ω_1, ω_2, Q

$$Q\omega_{2t} + yQ\omega_{2x} = (\nu y + kx)Q\omega_{2y} + 2\nu Q_y\omega_{2y} + \nu Q\omega_{2yy}, \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} &Q_t + QR_0 + QL_0(\omega_{1t} + y\omega_{1x}) + yQ_x = \nu Q + (\nu y + kx)Q_y + \\ &\quad +\nu Q_{yy} + \nu QS_0\omega_{2y}^2, \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$R_1 + L_1(\omega_{1t} + y\omega_{1x}) = \nu S_1\omega_{2y}^2, \tag{2.64}$$

$$R_2 + L_2(\omega_{1t} + y\omega_{1x}) = \nu S_2\omega_{2y}^2. \tag{2.65}$$

Виконавши перетворення еквівалентності (2.36) з відповідним чином підібраними функціями $h_0(t), h_1(\omega_1)$, можна покласти $L_0 = 0, R_0 = 0$. Далі, згідно вимоги (2.32) $S_1S_2 \neq 0$.

Існує два нееквівалентних випадки системи (2.62)–(2.65), а саме, коли $L_2 = 0$ та $L_2 \neq 0$. Оскільки відповідні системи ДРЧП розв'язуються аналогічним чином, детально розглянемо тільки випадок $L_2 = 0$. Згідно вимоги (2.32), L_1 не може тотожньо дорівнювати нулеві. Вибравши певним чином функції f_1, f_2 в (2.35), можна покласти $L_1 = 1, S_2 = \pm 1$ в формулах (2.62)–(2.65). Інтегруючи (2.65), з урахуванням (2.64), отримуємо вираз для ω_2

$$\omega_2 = R(t)y + F(t,x), \quad R(t) \neq 0, \tag{2.66}$$

де R, F — довільні гладкі функції та $R_2 = \pm\nu R^2$.

Двічи продиференціювавши вираз (2.64) за y та беручи до уваги (2.66), приходимо до рівняння $S_{1\omega_2\omega_2} = 0$, звідки випливає, що

$$S_1 = C_1\omega_2 + C_2,$$

де $C_1 \neq 0, C_2$ — довільні сталі. Далі, інтегруючи (2.64), отримуємо вирази для $\omega_1, F(t,x)$

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \nu C_1(R^3x + P(t)) - \textstyle\int R_1(t)dt, \\ &F(t,x) = 3\dot{R} + R^{-2}\dot{P}(t) - C_1^{-1}C_2, \end{aligned} \tag{2.67}$$

де $P(t)$ — довільна гладка функція.

Відповідний розв'язок з відокремленими змінними має вигляд

$$\begin{aligned} u &= Q\exp\left\{\lambda_1\int R_1(t)dt + \lambda_2\int R_2(t)dt\right\}\exp\{\lambda_1\omega_1\}\varphi_2(\omega_2) = \\ &= Q\exp\left\{\lambda_2\int R_2(t)dt\right\}\exp\{\lambda_1(\nu C_1(R^3x + P(t)))\}\varphi_2(\omega_2). \end{aligned}$$

Отже, функція $R_1(t)$ не входить в розв'язок з відокремленими змінними, а тому можна покласти $R_1 = 0$ в (2.67). Окрім цього, з точністю до відношення еквівалентності (2.35), можемо взяти $C_1 = \nu^{-1}, C_2 = 0$. В результаті маємо

$$\omega_1 = R(t)^3x + P(t), \tag{2.68}$$

$$\omega_2 = R(t)y + 3\dot{R}(t)x + \dot{P}R(t)^{-2}. \tag{2.69}$$

За умови $L_2 \neq 0$, функції ω_1, ω_2 також мають вигляд (2.68), (2.69).

Підставляючи (2.68) і (2.69) в (2.62) та інтегруючи отриманий вираз за y, одержуємо множник $Q(t,x,y)$

$$\begin{aligned} Q = \exp\Bigg\{&\left(\frac{\dot{R}}{\nu R} - \frac{1}{4}\right)y^2 + \frac{1}{2\nu}\left(3\frac{\ddot{R}}{R} - k\right)xy + \\ &+ \frac{y}{2\nu R}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{P}}{R^2}\right) + M(t,x)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Підставивши (2.70) в (2.63), приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\nu}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)y^2 + \frac{3}{2\nu}\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)xy + \frac{1}{2\nu}\left(3\frac{\ddot{R}}{R} - k\right)y^2 + \\ &+ y\frac{1}{2\nu}\dot{Z} + yM_x + M_t = \frac{\nu}{2} + 2\frac{\dot{R}}{R} + \nu S_0R^2 + \\ &+ (\nu y + kx)\left(\left(\frac{2\dot{R}}{\nu R} - \frac{1}{2}\right)y + \frac{1}{2\nu}\left(3\frac{\ddot{R}}{R} - k\right)x + \frac{1}{2\nu}Z\right) + \\ &+ \nu\left(\left(\frac{2\dot{R}}{\nu R} - \frac{1}{2}\right)y + \frac{1}{2\nu}\left(3\frac{\ddot{R}}{R} - k\right)x + \frac{1}{2\nu}Z\right)^2, \end{aligned} \tag{2.71}$$

де використовується позначення

$$Z(t)=R^{-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot P}{R^2}\right).$$

Тричи продиференціювавши рівняння (2.71) за y, маємо $S_{0\omega_2\omega_2\omega_2}=0$, звідки випливає, що

$$S_0=C_1\omega_2^2+C_2\omega_2+C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. Далі, продиференціювавши рівняння (2.71) двічі за y та один раз за x, отримуємо $M_{xxx}=0$, або

$$M=M_1(t)x^2+M_2(t)x+M_3(t),$$

де M_1, M_2, M_3 — довільні гладкі функції.

Нарешті, підставляючи вирази для S_0, M в (2.71) та розщеплюючи отриману рівність відносно x, y, приходимо до такої системи ЗДР:

$$\frac{\ddot R}{R}=2\frac{\dot R^2}{R^2}+\frac{2\nu^2}{5}C_1R^4-\frac{\nu^2}{10}+\frac{k}{5}, \tag{2.72}$$

$$M_1=-\frac{3\dddot R}{4\nu R}+\frac{15}{4\nu}\frac{\dot R\ddot R}{R^2}+3\nu C_1\dot R R^3-\frac{k}{4}, \tag{2.73}$$

$$\dot M_1=\frac{9\ddot R^2}{4\nu R^2}+9\nu C_1R^2\dot R^2-\frac{k^2}{4\nu}, \tag{2.74}$$

$$M_2=-\frac{1}{2\nu}\dot Z+\frac{2\dot R}{\nu R}Z+\nu C_2R^3+2\nu R\dot P C_1, \tag{2.75}$$

$$\dot M_2=\frac{3\ddot R}{2\nu R}Z+3\nu R^2\dot R C_2+6\nu\dot R\dot P C_1, \tag{2.76}$$

$$\dot M_3=\frac{\nu}{2}+2\frac{\dot R}{R}+\frac{1}{4\nu}Z^2+\nu C_1\frac{\dot P^2}{R^2}+\nu C_2\dot P+\nu C_3R^2. \tag{2.77}$$

Продиференціювавши (2.73) за t та віднявши отримане рівняння від (2.74), одержуємо ЗДР четвертого порядку для визначення функції R

$$-\frac{R^{(IV)}}{R}+6\frac{\dot R\dddot R}{R^3}+2\frac{\ddot R^2}{R^2}-10\frac{\dot R^2\ddot R}{R^3}+4\nu^2C_1\ddot R R^3+\frac{k^3}{3}=0.$$

Знижуючи порядок цього ЗДР з використанням рівності (2.72) та її диференціальних наслідків першого й другого порядків, приходимо до такого співвідношення:

$$\frac{4\nu^2}{25}C_1^2R^8=\frac{\nu^4}{100}+\frac{k^2}{25}-\frac{\nu^2k}{25}-\frac{k^2}{9}. \tag{2.78}$$

Якщо в (2.78) $C_1 \neq 0$, то за рахунок (2.72) $k = 0$. Якщо ж $C_1 = 0$, то k є коренем квадратного рівняння

$$64k^2 + 36\nu^2 k - 9\nu^4 = 0,$$

звідки $k = 3\nu^2/16$ або $k = -3\nu^2/4$.

Отже система ЗДР (2.72)–(2.77) сумісна тоді і лише тоді, коли параметр k набуває одного з трьох значень $0,\ 3\nu^2/16,\ -3\nu^2/4$. Отже, РК (2.39) має розв'язки з відокремленими змінними в розглядуваному випадку (тобто, коли система (2.30) має вигляд (2.37)) тільки для вказаних значень параметру k. Тим самим доведено першу частину теореми 2.5.

Далі окремо розглядаємо три можливі випадки $0,\ 3\nu^2/16,\ -3\nu^2/4$.

Випадок 1. Нехай $k = 0$. Тоді має місце рівність $R(t) = \pm 2^{-1/2} S_1^{-1/4} = \mathrm{const}$. Позначимо цю константу через r. Далі, з (2.76) випливає, що $M_2 = m = \mathrm{constant}$. Використовуючи це, з (2.75) отримаємо ЗДР для визначення $P(t)$

$$-\dddot{P} + \nu^2 \dot{P} + 2\nu r^3(\nu S_2 r^3 - m) = 0,$$

загальним розв'язком якого буде

$$P(t) = C_4 \mathrm{e}^{\nu t} + C_5 \mathrm{e}^{-\nu t} + 2r^3(m\nu^{-1} - S_2 r^3)t + C_6, \tag{2.79}$$

де C_4, C_5, C_6 — довільні сталі.

Пряма перевірка показує, що застосовуючи скінчені перетворення з групи симетрій, яку допускає РК при $k = 0$ (див. [76]) до отриманого розв'язку з відокремленими змінними (2.31), (2.68), (2.69), (2.79), можна покласти $P(t)$ рівним нулеві.

Використовуючи перетворення еквівалентності (2.35), завжди можна вибрати $r = 1$. Звідси отримуємо рівність $C_1 = 1/4$. Підсумовуючи вищесказане, робимо висновок, що виконуються такі рівності:

$$Q = \exp\left(-\frac{y^2}{4} + \nu C_2 x + \nu\left(C_3 + \frac{1}{2}\right)t\right), \quad \omega_1 = x, \quad \omega_2 = y;$$

$$\dot{\varphi}_0 = \nu\left(\lambda_1 - \left(C_3 + \frac{1}{2}\right)\right)\varphi_0,$$
$$\dot{\varphi}_1 = \nu(\lambda_2 - C_2)\varphi_1, \quad \ddot{\varphi}_2 = \left(\frac{\omega_2^2}{4} + \lambda_2\omega_2 + \lambda_1 - \frac{1}{2}\right)\varphi_2.$$

Тоді відповідним розв'язком з відокремленими змінними буде

$$u = \varphi_2 \exp\left(-\frac{y^2}{4} + \nu(\lambda_1 t + \lambda_2 x)\right).$$

Отже, сталі C_2 та $C_3 + 1/2$ не входять в остаточний вигляд цього розв'язку з відокремленими змінними. А це означає, що можна покласти $C_2 = 0$ та $C_3 = -1/2$.

Тим симим доведено справедливість другої частини теореми 2.9.

Випадки 2,3. Нехай $k = 3\nu^2/16$ або $k = -3\nu^2/4$. В цих випадках з (2.72) маємо

$$\frac{\ddot{R}}{R} - 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -a^2,$$

де

$$a = \begin{cases} \dfrac{\nu}{4}, & \text{при } k = \dfrac{3\nu^2}{16}, \\ \dfrac{\nu}{2}, & \text{при } k = -\dfrac{3\nu^2}{4}. \end{cases}$$

Інтегрування цього ЗДР дає вираз для $R(t)$

$$R(t) = (C_1 \sinh at + C_2 \cosh at)^{-1},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Використовуючи зсуви за t та перетворення еквівалентності (2.35), одержуємо чотири нееквівалентні форми для $R(t)$

$$R(t) = \frac{1}{\cosh at}, \quad R(t) = \frac{1}{\sinh at}, \quad R(t) = \exp\{\pm at\}.$$

Порівнюючи (2.76) та диференціальний наслідок (2.75), маємо ЗДР другого порядку для $Z(t) = R^{-1}(d/dt)(\dot{P}/R^2)$

$$-\ddot{Z} + 4\frac{\dot{R}}{R}\dot{Z} + \left(\frac{\ddot{R}}{R} - 4\frac{\dot{R}}{R}\right)Z = 0. \tag{2.80}$$

Загальний розв'язок цього рівняння має таку структуру

$$Z(t) = C_1 Z_1(t) + C_2 Z_2(t),$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування. Звідки можна зробити висновок, що функція $P(t)$ має вигляд

$$P(t) = C_1 P_1(t) + C_2 P_2(t) + C_3 P_3(t) + C_4 P_4(t), \tag{2.81}$$

де C_3, C_4 — сталі інтегрування.

З іншого боку, якщо застосувати до розв'язку з відокремленими змінними (2.31), (2.68), (2.69) при $P(t) = 0$ скінчені перетворення з групи симетрій, яку допускає РК при $k = 3\nu^2/16$ або $k = -3\nu^2/4$ (див. [76]), то отримаємо еквівалентний йому розв'язок з відокремленими змінними, такий, що $P(t)$ матиме вигляд

$$P(t) = C'_1 P'_1(t) + C'_2 P'_2(t) + C'_3 P'_3(t) + C'_4 P'_4(t). \tag{2.82}$$

Тут $C'_1, \ldots, C'_4$ — довільні сталі та $P'_1(t), \ldots, P'_4(t)$ — лінійно незалежні функції. Звідки робимо висновок, що згідно теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для ЗДР четвертого порядку (2.80) (розглядуваного як рівняння для функції $P(t)$) вирази для правих частин рівностей (2.81) та (2.82) збігаються між собою з точністю до вибору сталих $C_i, C'_i, i = 1, \ldots, 4$. Отже, без обмеження загальності можна покласти $P(t) = 0$ у формулах (2.68), (2.69).

На основі міркувань, аналогічним тим, що були використані у випадку 1, можна покласти $r = 1, C_2 = 0, C_3 = 0$. Другу частину теореми 2.10 доведено.

Провівши подібний аналіз можливості ВЗ в РК (2.39) до трьох ЗДР першого порядку (2.38), одержуємо доведення інших тверджень з теорем 2.5–2.10.

Точні розв'язки. Подамо повний перелік розв'язків досліджуваного рівняння з відокремленими змінними. Для випадку, коли РК (2.39) допускає ВЗ до трьох ЗДР першого порядку (2.38), маємо таку сім'ю його точних розв'язків:

$$\begin{aligned} u \;=\; \exp\Bigg\{&\nu\int\left(\frac{f_1\lambda_1+f_2\lambda_2}{\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2}\right)^2 dt+\lambda_1\frac{f_1y-\dot f_1 x}{\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2}+\lambda_2\frac{f_2y-\dot f_2 x}{\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2}+\\ &+\left(-\frac{1}{4\nu}\frac{\ddot f_2 f_1-\ddot f_1 f_2}{\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2}-\frac{1}{4}\right)y^2+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\ddot f_2\dot f_1-\ddot f_1\dot f_2}{\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2}-k\right)xy+\\ &+\left(\frac{1}{4\nu}\frac{\dddot f_2\,\dot f_1-\dddot f_1\,\dot f_2}{\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2}-\frac{k}{4}\right)x^2-\frac{1}{2}\ln|\dot f_2 f_1-\dot f_1 f_2|+\frac{\nu}{2}t\Bigg\},\end{aligned}$$

де $k, f_1(t), f_2(t)$ задано відповідними формулами з теорем 2.6–2.10.

Далі, для випадку, коли РК (2.39) допускає ВЗ до трьох ЗДР у формі (2.37) маємо такі сім'ї його точних розв'язків:

1. $k=0$, вільне рівняння Крамерса (цей випадок розглянуто в теоремі 2.9)

   $$u=\exp\left(-\frac{y^2}{4}+\nu(\lambda_1 t+\lambda_2 x)\right)\, D_{\lambda_2^2-\lambda_1}(y+2\lambda_2),$$

   де D_ν — функція параболічного циліндру [4].

2. $k=3\nu^2/16$ або $k=-3\nu^2/4$

   $$\begin{aligned} u \;=\; \exp\Bigg\{&\nu\lambda_1\int R^2dt+\nu\lambda_2R^3x+\left(-\frac{3\,\dddot R}{4\nu R}+\frac{15\dot R\ddot R}{4\nu R^2}-\frac{k}{4}\right)x^2+\\ &+\frac{1}{2\nu}\left(3\frac{\ddot R}{R}-k\right)xy+\left(\frac{\dot R}{\nu R}-\frac{1}{4}\right)y^2+\frac{\nu}{2}t+2\ln R\Bigg\}\times\\ &\times\{\lambda_2(Ry+3\dot Rx)+\lambda_1\}^{\frac12}Z_{\frac13}\left(\frac{2}{3\lambda_2}(\lambda_2(Ry+3\dot Rx)+\lambda_1)^{\frac32}\right),\end{aligned}$$

де R задано відповідними формулами з теореми 2.10 та $Z_{\frac13}$ — циліндрична функція [8].

Підкреслимо, що отримані сім'ї точних розв'язків РК містять два довільні параметри відокремлення λ_1, λ_2. При накладанні певних початкових та граничних умов ці параметри стають дискретними, і таким чином отримується базис для розкладу достатньо гладких розв'язків РК в ряди.

Зауважимо також, що отримані результати знаходяться у повній відповідності з результатами симетрійної класифікації РК в формі (2.39). Як випливає з [75, 76], випадки $k = 3\nu^2/16$, $k = -3\nu^2/4$ вирізняються тим, що відповідні РК (2.39) допускають більш широкі групи симетрій. РК (2.39) для цих значень k інваріантні відносно восьмипараметричної групи перетворень Лі, тоді як для інших значень параметру k максимальна група є шестипараметричною.

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Одержано повний розв'язок задачі класифікації (1+3)–вимірних рівнянь Шредінгера з вектор–потенціалом електромагнітного поля, що допускають відокремлення змінних, в результаті якого отримуються звичайні диференціальні рівняння, одне першого та три другого порядку. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови всіх систем координат, в яких (1+3)–вимірне рівняння Шредінгера з фіксованим вектор–потенціалом допускає таке відокремлення змінних та відповідних розв'язків цього рівняння з відокремленими змінними.

2. Доведено, що всі вектор–потенціали і системи координат, які забезпечують відокремлення змінних (в рамках сформульованого означення) для (1+3)–вимірних рівнянь Шредінгера з вектор–потенціалом, також забезпечують відокремлення змінних і для (1+3)–вимірного рівняння Гамільтона–Якобі з вектор–потенціалом.

3. Повністю розв'язано задачу класифікації (1+3)–вимірних рівнянь Паулі для частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ в електромагнітному полі, що допускають відокремлення змінних, в результаті якого отримуються матричні звичайні диференціальні рівняння спеціального вигляду, одне першого та три другого порядку, за додаткової умови комутативності.

4. Одержано необхідну умову того, щоб (1+3)–вимірне рівняння Фоккера–Планка зі сталою діагональною матрицею дифузії допускало відокремлення змінних, в результаті якого отримуються

звичайні диференціальні рівняння, одне першого та три другого порядку. Отримано нові конфігурації вектора зносів, для яких дане рівняння допускає таке відокремлення змінних. Для кожної із них знайдено всі нееквівалентні координатні системи, які дозволяють здійснити відокремлення змінних, та побудовано відповідні розв'язки з відокремленими змінними в явному вигляді.

5. Повністю розв'язано проблему відокремлення змінних в (1+2)–вимірному рівнянні Крамерса, що допускає нетривіальну групу симетрій. Знайдено всі системи координат, в яких рівняння Крамерса розв'язується методом відокремлення змінних, та побудовано відповідні розв'язки рівняння Крамерса з відокремленими змінними в явному вигляді.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. — Новосибирск: Наука, 1982. — 142 с.

[2] Багров В.Г., Обухов В.В. Полное разделение переменных в свободном уравнении Гамильтона–Якоби. // *Теор. Мат. Физ.* — 1993. —**97**, No. 2. — С. 250–269.

[3] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцедентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 294 с.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцедентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974. — 295 с.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцедентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967. — 299 с.

[6] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжённих операторов. — К.: Наукова думка, 1965. — 798 с.

[7] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М.: Высшая шк., 1990. — 376 с.

[8] Ватсон Д.Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 799 с.

[9] Винтерницт П., Смородинский Я.А., Углирж М., Фриш И. О группах симметрии в классической и квантовой механике //*Ядер. физика.* — 1966. — **4**, No. 3. — С. 625—635.

[10] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщённое разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями // *Дифференциальные уравнения* — 1995. —**31**, No. 2. — С. 253—261.

[11] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 526 с.

[12] Жданов Р.З., Жалій О.Ю. Відокремлення змінних в рівнянні Шредінгера //*Доп. НАН України.* — 2000. — No. 5. — С. 21—25.

[13] Комаров И.В., Пономарёв Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальние и кулоновские сфероидальние функции. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

[14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. I. Механика. — М.: Наука, 1988. — 216 с.

[15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 1989. — 768 с.

[16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. IV./ Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989. — 728 с.

[17] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981. — 344 с.

[18] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 932 с.

[19] Олевский М.Н. Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ допускает

полное разделение переменных //*Матем. сб.* — 1950. — **27 (69)**, вып. 3. — С. 379—426.

[20] Сухомлин Н.Б. Разделение переменных в уравнении диффузии. I // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1976. — No. 11. — С. 46—53.

[21] Сухомлин Н.Б. Разделение переменных в уравнении диффузии. II // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1976. — No. 12. — С. 40—45.

[22] Сухомлин Н.Б. Разделение переменных в уравнении Колмогорова. II // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1979. — No. 3. — С. 27—32.

[23] Сухомлин Н.Б., Баринов Н.П. Разделение переменных в уравнении Колмогорова. I // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1977. — No. 8. — С. 16—20.

[24] Сухомлин Н.Б., Баринов Н.П. Разделение переменных в уравнении Колмогорова. III // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1979. — No. 3. — С. 33—35.

[25] Шаповалов В.Н. Симметрия и разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. I // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1978. — No. 9. — С. 18—24.

[26] Шаповалов В.Н. Симметрия и разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. II // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1978. — No. 9. — С. 25—27.

[27] Шаповалов В.Н. Разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка // *Дифференциальные уравнения* — 1980. —**16**, No. 10. — С. 1864—1874.

[28] Шаповалов В.Н., Багров В.Г., Мешков А.Г. Разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1972. — No. 8. — С. 45—50.

[29] Шаповалов В.Н., Сухомлин Н.Б. Разделение переменных в нестационарном уравнении Шредингера // *Изв. вузов СССР, Физика.* — 1974. — No. 12. — C. 100—105.

[30] Шаповалов В.Н., Экле Г.Г. Алгебраические свойства уравнения Дирака. — Элиста: Изд-во Калм. ун-та, 1972. — 90 с.

[31] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1989. — 400 с.

[32] Andreitsev A. To separation of variables in a $(1+2)$–dimensional Fokker–Planck equation. // Proc. of the Second Intern. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — Kyiv, 1997.— P. 211—213.

[33] Arscott F.M. Periodic Differential Equations: an Introduction to Mathieu, Lamé, and Allied Functions. — New York: Macmillan, 1964. — 283 p

[34] Böcher M. Die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. — Leipzig: Teübner, 1894, (диссертація).

[35] Boyer C.P. Lie theory and separation of variables for the equation $iU_t + \Delta_2 U - (\alpha/x_1^2 + \beta/x_2^2)U = 0$ // *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Math. Anal.* — 1976. — **7**, No. 3. — P. 230—263.

[36] Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. VI. The equation $iU_t + \Delta_2 U = 0$ // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, No. 3. — P. 499—511.

[37] Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. VII. The harmonic oscillator in elliptic coordinates and Ince polynomials // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, No. 3. — P. 512—517.

[38] Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., Jr. Symmetry and separation of variables for the Helmholtz and Laplace equations // *Nagoya Math. J.* — 1976. — **60** — P. 35—80.

[39] Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., Jr. Symmetry and separation of variables for the Hamilton–Jacobi equation $W_t^2 - W_x^2 - W_y^2 = 0$ // *J. Math. Phys.* — 1978. — **19**, No. 1. — P. 200—211.

[40] Doyle P.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1–dimensional non–linear diffusion equation // *Int. J. Non—Linear Mech.* — 1998. — **33**, No. 2. — P. 315—326.

[41] Efthimiou C.J., Spector D. Separation of variables and exactly soluble time–dependent potentials in quantum mechanics // *Phys. Rev. A* — 1994. — **49**, No. 4. — P. 2301—2311.

[42] Eisenhart L.P. Separable Systems of Stäckel // *Ann. Math.* — 1934. — **35**, No. 2 — P. 284—305.

[43] Eisenhart L.P. Enumeration of potentials for which one–particle Schroedinger equations are separable // *Phys. Rev.* — 1948. — **74**, No. 1 — P. 87—89.

[44] Evans N.W. Superintegrability in classical mechanics // *Phys. Rev. A* — 1990. — **41**, No. 10 — P. 5666—5676.

[45] Ferrando R., Spadacini R. Tommei G.E. Kramers problem in periodic potentials: Jump rate and jump lengths // *Phys. Rev. E* — 1993. — **48** — P. 2437—2451.

[46] Galaktionov V.A. On new exact blow–up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications // *Diff. Int. Eq.* — 1990. — **3** — P. 863—874.

[47] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* — 1995. — **125A** — P. 225—246.

[48] Havas P. Separation of variables in the Hamilton–Jacobi, Schrödinger, and related equations. I. Complete separation // *J. Math. Phys.* — 1975. — **7**, No. 12. — P. 1461—1468.

[49] Kalnins E.G. Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature. — New York: John Wiley and Sons, Inc., 1986. — 172 p.

[50] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. III. The equation $f_{tt} - f_{ss} = \gamma^2 f$ // *J. Math. Phys.* — 1974. — **15** — P. 1025—1032.

[51] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. V. The equations $iU_t - U_{xx} = 0$ and $iU_t + U_{xx} - (c/x^2)U = 0$ // *J. Math. Phys.* — 1974. — **15** — P. 1728—1737.

[52] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. VIII. Semisubgroup coordinates for $\psi_{tt} - \Delta_2\psi = 0$ // *J. Math. Phys.* — 1975. — **16**, No. 12. — P. 2507—2516.

[53] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. IX. Orthogonal R–separable coordinate systems for the wave equation $\psi_{tt} - \Delta_2\psi = 0$ // *J. Math. Phys.* — 1976. — **17**, No. 3. — P. 331—355.

[54] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. X. Nonorthogonal R-separable solutions of the wave equation $\partial_{tt}\psi = \Delta_2\psi$ // *J. Math. Phys.* — 1976. — **17**, No. 3. — P. 356—368.

[55] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Lie theory and separation of variables. XI. The EPD equation // *J. Math. Phys.* — 1976. — **17**, No. 3. — P. 369—377.

[56] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Some remarkable R–separable coordinate systems for the Helmholtz equation // *Lett. Math. Phys.* — 1980. — **4**, No. 6. — P. 469—474.

[57] Kalnins E.G., Miller W., Jr. Intrinsic characterisation of orthogonal R–separation for Laplace equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1982. — **15**, No. 9. — P. 2699—2709.

[58] Kalnins E.G., Miller W., Jr. The general theory of R–separation for Helmholtz equations // *J. Math. Phys.* — 1983. — **24**, No. 5. — P. 1047—1053.

[59] Kalnins E.G., Miller W., Jr. R–separation of variables for the time–dependent Hamilton–Jacobi and Schrödinger equations // *J. Math. Phys.* — 1987. — **28**, No. 5. — P. 1005—1015.

[60] Kalnins E.G., Reid G.J. R–separation for the Hamilton–Jacobi equation // *Lett. Math. Phys.* — 1982. — **6**, No. 2. — P. 97—100.

[61] Kalnins E.G., Miller W., Jr., Pogosyan G.S., Williams G.C. Superintegrability in the three–dimensional Euclidean space // *J. Math. Phys.* — 1999. — **40**, No. 2. — P. 708—725.

[62] Koornwinder T.H. A precise definition of separation of variables // *Lecture Notes in Math.* — 1980. — **810** — P. 240—263.

[63] Kostelecký V.A., Man'ko V.I., Nieto M.M., Truax D.R. Supersymmetry and a time–dependent Landau system // *Phys. Rev. A* — 1993. — **48**, No. 2. — P. 951—963.

[64] Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // *Physica* — 1940. — **7**, No. 4. — P. 284—304.

[65] Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries // *Nuovo Cimento A* — 1967. — **52**. — P. 1061—1084.

[66] Miller W., Jr., Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1993. — **26**, No. 8. — P. 1901—1913.

[67] Olver P.J. Direct reduction and differential consraints // *Proc. R. Soc. Lond. A* — 1994. — **444**. — P. 509—523.

[68] Osborne A., Stuart A.E.G. On the separability of the sine—Gordon equation and similar quasilinear partial differential equations // *J. Math. Phys.* — 1978. — **19** — P. 1573—1579.

[69] Reid G.J. R–separation for heat and Schrödinger equations I // *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Math. Anal.* — 1986. — **17**, No. 3. — P. 646—687.

[70] Risken H. The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications. — New York: Springer–Verlag, 1996. — 472 p.

[71] Robertson H.P. Bemerkung über separierbare Systeme in der Wellenmechanik // *Math. Ann.* — 1928. — **98** — P. 749—752.

[72] Sharp K.P. Stochastic differential equations in finance // *Appl. Math. and Comp.* — 1990. — **39** — P. 207—224.

[73] Sklyanin E.K. Separation of variables — new trends. // *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* — 1995. — **118** — P. 35—60.

[74] Stäckel P.G. Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differentialgleichung mittels Separation der Variabelen. — Halle, 1891, (дисертація).

[75] Spichak S. and Stogny V. Symmetry analysis of the Kramers equation // *Rep. Math. Phys.* — 1997. — **40**, No. 1. — P. 125—129.

[76] Spichak S. and Stognii V. Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation // *J. Math. Phys.* — 1998. — **39**, No. 6. — P. 3505—3510.

[77] Urwin K., Arscott F. Theory of the Whittaker–Hill equation // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* — 1970. — **69A** — P. 28—44.

[78] Zhalij A. On separable Fokker–Planck equations with a constant diagonal diffusion matrix // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1999. — **32**, No. 42. — P. 7393—7404.

[79] Zhalij A. On some new classes of separable Fokker–Planck equations /Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics// *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, — 2000. — **30**. — P. 249—254.

[80] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the nonlinear wave equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — **27**, No. 9. — P. L291—L297.

[81] Zhdanov R.Z. Conditional Lie–Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1995. — **28**, No. 13. — P. 3841—3850.

[82] Zhdanov R.Z. Separation of variables in (1+2)–dimensional Schrödinger equations // *J. Math. Phys.* — 1997. — **38**, No. 2. — P. 1197—1217.

[83] Zhdanov R. On separation of variables in the Schrödinger equation for a particle interacting with external field. — Vienna: 1998. — 8 p.

(Preprint / Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Austria; No. 591)

[84] Zhdanov R.Z., Lagno V.I. On separability criteria for a time–invariant Fokker–Planck equation //*Доп. НАН України*. — 1993. — No. 2. — С. 18—21.

[85] Zhdanov R., Lutfullin M. On separable Schrödinger–Maxwell equations // *J. Math. Phys.* — 1998. — **39**, No. 12. — P. 6454—6458.

[86] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. On the new approach to variable separation in the wave equation with potential, //*Доп. НАН України*. — 1993. — No. 1. — С. 27—32.

[87] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. Orthogonal and non-orthogonal separation of variables in the wave equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1993. — **26**, No. 21. — P. 5959—5972.

[88] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. Separation of variables in the two–dimensional wave equation with potential // *Укр. мат. журн.* — 1994. — **46**, No. 10. — P. 1343—1361.

[89] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. On the new approach to variable separation in the two–dimensional Schrödinger equation, //*Доп. НАН України*. — 1994. — No. 11. — С. 38—44.

[90] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I. On the new approach to variable separation in the time–dependent Schrödinger equation with two space dimensions // *J. Math. Phys.* — 1995. — **36**, No. 10. — P. 5506—5521.

[91] Zhdanov R., Zhalij A. Separation of variables in the Kramers equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1999. — **32**, No. 20. — P. 3851—3863.

[92] Zhdanov R., Zhalij A. On separable Schrödinger equations // *J. Math. Phys.* — 1999. — **40**, No. 12. — P. 6319—6338.