Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова

С. Я. Янченко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Sergiy.Yan@rambler.ru

У доповіді мова буде йти про точні за порядком оцінки наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних. Дані класи були розглянуті Т. І. Амановим [1], при значенні параметра $\theta = \infty$ вони співпадають з класами $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)$. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу.

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою.

Розглянемо вектор $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$. Для $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, позначимо

$$Q^*_{2^s} := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^d : \ \eta(s_j)2^{s_j-1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\right\}, \text{де } \eta(0) = 0 \ \text{ и } \ \eta(t) = 1, \ t > 0.$$

Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, покладемо

$$S_{Q^{\gamma}_n}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} \delta^*_s(f, \boldsymbol{x}), \tag{1}$$

де $\delta^*_s(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q_{2^s}} \cdot \mathfrak{F}f)$, $\mathfrak{F}f$ и $\mathfrak{F}^{-1}f$ — відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функції f, а $\chi_{Q^*_{2^s}}$ — характеристична функція множини $Q^*_{2^s}$. Рівність (1) визначає цілу функцію $S_{Q^{\gamma}_n}(f, \boldsymbol{x})$, яка належать простору $L_q(\mathbb{R}^d)$, носій перетворення Фур'є якої зосереджений, відповідно, на множині $Q^{\gamma}_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} Q^*_{2^s}$, яка називається «східчастим гіперболічним хрестом» і при цьому mes $Q^{\gamma}_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо таку апроксимативну харатеристику:

$$\mathcal{E}_{Q^{\gamma}_n}\big(f\big)_\infty = \|f(\cdot) - S_{Q^{\gamma}_n}(f, \cdot)\|_\infty, \ \ e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_q = \inf_{\Theta\colon \mathrm{mes}\,\mathfrak{M} \leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q \,.$$

Теорема. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\big)_\infty = \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \|f(\cdot) - S_{Q^{\gamma}_n}(f, \cdot)\|_\infty \asymp 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Зауваження. Результат теореми новий і у випадку $d = 1$.

Робота виконана за часткової підтримки FP7-People-2011-IRSES, проект №295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

1. Аманов Т. И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, \ j = 1, ..., n)$. Тр. Мат. ин-та АН СССР., 1965, **77**, С. 5–34.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969, 480 с.