СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ЛА

Легенький В.И.

03680, Украина, Киев, проспект Глушкова, 42,

Институт проблем математических машин и систем НАНУ,

тел. (+380 44) 241-05-16, victor.lehenkyi@gmail.com

1. **Введение.** Целенаправленное воздействие на летательные аппараты (ЛА) традиционной схемы, как правило, предполагает управление как величиной тяги (расходом топлива), так и управление ориентацией ЛА (угол атаки, угол тангажа). Сила тяги входит в уравнения движения линейным образом, а углы – под знаком тригонометрических (или алгебраических) функций. Поэтому оптимальные значения тяги в классических оптимизационных задачах (минимизация времени, максимизация дальности и т.п.), как правило, представляются разрывными функциями (bang-bang control), в то время как оптимальные значения углов – непрерывными (а часто – дифференцируемыми достаточное число раз) функциями. Это позволяет для вычисления оптимальных значений углов получить замыкающие соотношения в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Вывод этих уравнений основан на технике инволютивного замыкания условий оптимальности и продемонстрирован ниже примерами решения модельных задач динамики полета.

2. **Замыкания управляемых систем.** Уравнения движения незамкнутой управляемой системы рассматриваются в виде:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, u), \quad i = \overline{1, n}. \qquad \textbf{(1)}$$

Безотносительно к тому, рассматриваем ли мы оптимизационную задачу или нет, конечные условия считаем заданными:

$$x^i(T) = x^i_k. \qquad \textbf{(2)}$$

Для замыкания системы (1) существуют различные возможности. Например, мы можем задать управляющее воздействие в виде некоторого конечно-параметрического семейства функций

$$u = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad \textbf{(3)}$$

в котором число произвольных постоянных C_i согласовано с числом краевых условий: $C_i \Longleftrightarrow x^i_k$. Если теперь продифференцировать программу (3) последовательно n раз и исключить из полученной системы произвольные постоянные C_i, можно получить дифференциальное представление программы (3) в виде:

$$u^{(n)} = \psi(t, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}). \qquad \textbf{(4)}$$

Очевидно, что теперь за попадание в конечную точку отвечают начальные условия программы (4) : $u^{(i-1)}(0) \Longleftrightarrow x_k^i$. Если же дифференцировать программу (3) меньшее число раз (например, m), то можно получить «смешанное» замыкание

$$u^{(n-m)} = \psi(t, x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-m-1)}, C_1, \ldots, C_m). \tag{5}$$

В этом случае, должно выполняться соответствие $\{u^{(s)}(0), C_j\} \Longleftrightarrow x_k^i$.

В качестве примера рассмотрим безразмерные уравнения движения ЛА с единичной тягой:

$$\frac{dH}{dt} = V_y, \quad \frac{dV_y}{dt} = \sin(\vartheta) - 1, \quad \frac{dV_x}{dt} = \cos(\vartheta). \tag{6}$$

Конечные условия имеют вид:

$$H(T) = H_k, \quad V_y(T) = V_{yk}, \quad V_x(T) = V_{xk}. \tag{7}$$

Равносильны следующие (оптимальные) замыкания системы (6) – различные представления так называемого «закона линейного тангенса»:

Конечное: $\tan(\vartheta) = C_1 t + C_2, \quad (T, C_1, C_2) \Longleftrightarrow (H_k, V_{yk}, V_{xk})$;

Смешанное: $\dot{\vartheta} = C_1 \cos^2(\vartheta), \quad (T, C_1, \vartheta(0)) \Longleftrightarrow (H_k, V_{yk}, V_{xk})$;

Дифференциальное:

$$\ddot{\vartheta} = -2\tan(\vartheta)\dot{\vartheta}^2, \quad (T, \vartheta(0), \dot{\vartheta}(0)) \Longleftrightarrow (H_k, V_{yk}, V_{xk}). \tag{8}$$

К представлению (8) мы еще вернемся в дальнейшем.

3.Условная оптимизация без множителей Лагранжа.

Оптимизационные задачи динамики полета – это всегда «задачи со связями», где роль связей играют изучаемые уравнения движения ЛА. При использовании непрямых методов оптимизации учет связей предполагает, как правило, использование множителей Лагранжа. Дальнейшая техника – будь то классическое вариационное исчисление или принцип максимума Л.С.Понтрягина – предполагает получение дополнительных дифференциальных уравнений для этих множителей и решение соответствующей двухточечной краевой задачи. Такая алгоритмизация задачи влечет дополнительные проблемы, на что указывали многие специалисты. Так, в работе А.М. Летова «Динамика полета и управление» [1, с. 189] отмечается: «… эти множители не связаны органически с содержанием вариационной задачи и не участвуют каким-либо образом в ее постановке…». Ф. Гриффитс [2, с.13] иронически указывает: «… таинственные, подлежащие определению функции λ». Обстоятельную критику оптимизационных процедур, основанных на множителях Лагранжа, находим также у J.T.Betts [3, pp. 86-87] и у A.E.Bryson, Jr. and Y.-C. Ho [4, pp. 214].

Возникает вопрос: а нельзя ли обойтись без множителей Лагранжа? Существование подобной техники избавления от множителей в случае конечных (не дифференциальных) связей и наличие развитых средств дифференциальной геометрии придают нам определенный оптимизм в решении этого вопроса.

Напомним (см., например, [4,5]), что простейшая задача на экстремум для функции многих переменных $y = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ влечет в качестве необходимого условия обращение в нуль частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0, \tag{9}$$

которое в «сжатой» форме может быть представлено формулой: $df = 0$. При наличии дополнительных связей $g^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}$, следуя классическому рецепту, следует составить расширенную функцию $F = f + \lambda_\alpha g^\alpha$ и для нее выписать необходимые условия:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \lambda_\alpha \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Из условий (10) видно, что множители λ_α являются «избыточными» в определении точки экстремума и легко могут быть исключены из последней в силу ее линейности. К тому же результату можно прийти используя элегантное дифференциально-геометрическое условие:

$$df \wedge dg^1 \wedge dg^2 \wedge \ldots \wedge dg^m = df \wedge \left(\bigwedge_{\alpha=1}^{\alpha=m} g^\alpha \right) = 0. \tag{11}$$

В случае, когда связи являются дифференциальными, требуется несколько иная техника, для развития которой нам потребуется проанализировать основные задачи, которые возникают в связи с анализом решений систем дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) первого порядка.

3.1. Основные задачи для систем ДУЧП 1-го порядка.

Для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$X_j S = (a^i_j(x) \partial_{x^i}) S = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \tag{12}$$

ключевым свойством является то, находятся ли операторы X_j в инволюции, т.е. замкнуты ты ли указанные операторы относительно коммутатора. Последнее означает, что для любых двух операторов X_k и X_l выполняется соотношение:

$$[X_k, X_l] = \sum_{s=1}^{m} c^s_{kl}(x) X_s, \tag{13}$$

где скобки означают операцию коммутирования векторных полей (операторов), а $c^s_{kl}(x)$ - некоторые функции. Нахождение системы в инволюции гарантирует нам, в соответствии с теоремой Фробениуса (Frobenius G., 1877), что система

(12) – интегрируема, причем количество функционально-независимых решений – функций $S(x)$ - в точности равно $(n-m)$. Для систем (12) возможны различные постановки задач. Прямая задача предполагает задание операторов X_j (т.е. их коэффициентов $a_j^i(x)$) и нахождение по ним всех решений $S(x)$. Обратная задача напротив, по системе заданных решений $< S_1(x), S_2(x), \ldots, S_{n-m}(x) >$ требует восстановления коэффициентов операторов. Особый интерес в настоящем контексте представляет смешанная задача, когда часть коэффициентов операторов задана, а некоторые являются произвольными функциями. Тогда, предъявляя некоторые дополнительные требования к решению (например, требование единственности $S_1(x)$), требуется получить условия на указанные произвольные функции. Эти условия, получаемые в результате инволютивного замыкания исходной системы, как правило, приводят к дифференциальным уравнениям для искомых произвольных функций и представляют собой отдельную задачу. Смешанная задача практически не нашла достаточного освещения в классической литературе. Автору известна только работа [6], в которой обсуждается алгоритм ее решения.

3.2. Задача оптимального замыкания как смешанная задача для систем ДУЧП 1-го порядка.

Рассматривается классическая задача оптимизации (например, задача оптимального быстродействия)

$$\mathrm{I}=\int_0^T dt \longrightarrow \min_{u \subset U} \qquad \textbf{(14)}$$

для управляемого объекта, описываемого системой дифференциальных уравнений вида (со скалярным управлением)

$$\dot{x}^i = f^i(t,x,u), \quad i=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(15)}$$

Необходимые условия оптимальности, при условии, когда оптимальные значения управления являются внутренней точкой множества допустимых управлений, могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \subset intU} H(t,x,u) = 0. \qquad \textbf{(16)}$$

Раскрывая процедуру минимизации, последнее условие может быть представлено в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^i(t,x,u)\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i(t,x,u)}{\partial u}\frac{\partial S}{\partial x^i} = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(17)}$$

В условиях (16), (17) функция $H(t,x,u)$ - гамильтониан системы, функция $S(t,x)$ - функция оптимального качества, а ее производные по координатам – те самые множители (функции) Лагранжа. Заметим, что на систему (17) можно смотреть как на систему с двумя неизвестными функциями - $S(t,x)$ и $u(t,x)$, где последняя – синтезирующая функция (оптимальное управление с обратной связью). Важно также, что если функция $S(t,x)$ входит в указанную систему только дифференциальным образом (функции f^i не зависят от $S(t,x)$), то функция $u(t,x)$ входит функциональным образом (в системе отсутствуют ее производные). Это обстоятельство решающим образом предопределило классический путь в решении системы (17), а, именно, было решено, что проще на первом шаге исключить из системы (17) управление $u(t,x)$ и получить классическое уравнение типа Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t,x,\frac{\partial S}{\partial x}) = 0. \tag{18}$$

Уравнения характеристик для (18) – это система дифференциальных уравнений для множителей Лагранжа (сопряженных переменных в случае формализма Л.С. Понтрягина). Как уже отмечалось во введении, подобная алгоритмизация, сводящая исходную оптимизационную задачу к двухточечной краевой задаче, подвергается критике со стороны прикладников.

Постараемся взглянуть на систему (17) с точки зрения рассмотренных выше основных задач для систем ДУЧП 1-го порядка. Тогда возможна следующая формулировка задачи оптимального замыкания как смешанной задачи для системы (17): при каких управлениях $u(t,x)$ система (17) имеет единственное решение (корень, инвариант) $S(t,x)$? Ответ формулируется автором в виде теоремы (следствие теоремы Фробениуса):

Теорема: Система (17) имеет единственный инвариант $S(t,x)$, если и только если система векторных полей

$$\langle X_0, X_1 = [U, X_0], X_2 = [X_1, X_0], \ldots, X_n = [X_{n-1}, X_0] \rangle \tag{19}$$

находится в инволюции.

Практическое следствие из этой теоремы (эквивалентное условие) может быть представлено в виде:

$$\det A = X_n \rfloor (X_{n-1}(\rfloor \ldots X_1 \rfloor (X_0 \rfloor \Omega))) = 0, \tag{20}$$

где A - матрица коэффициентов операторов $\langle X_0, X_1, \ldots, X_n \rangle$, $\rfloor$ - знак внутреннего произведения, $\Omega = dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ - элемент объема.

Результатом выполнения условий (19), (20) является дифференциальное уравнение на управляющее воздействие вида

$$u^{(n-1)} = \Phi(t,x,u,\dot{u},\ldots,u^{(n-2)}), \tag{21}$$

которое и представляет собой оптимальное дифференциальное замыкание для данной задачи.

4.Примеры. Ниже рассмотрены примеры решения оптимальных задач предложенным методом.

4.1 Классика: уравнения Эйлера-Лагранжа.

Рассматривается классическая задача о минимизации функционала

$$I = \int_0^T L(t, q, \dot{q}) dt \longrightarrow \min_{\dot{q}}. \quad \textbf{(22)}$$

Отметим, что основная сложность при традиционном выводе уравнений Эйлера-Лагранжа – утомительная процедура вариации функционала с последующим интегрированием по частям. Неприятность здесь состоит в том, что хотя в исходной постановке дифференциальная связь не сразу видна ($\frac{dq}{dt} = \dot{q}$), она все же есть. Последующие манипуляции с дифференциальной формой Ldt (подынтегральным выражением) призваны учесть эту связь для получения окончательно результата, но эти манипуляции перестают быть очевидными при более сложных связях. Подробно эта ситуация проанализирована в работе W. Burke [7, pp. 225-229].

Если же записать исходную задачу как оптимизационную для системы

$$\frac{dI}{dt} = L(t, q, \dot{q}), \quad \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \textbf{(23)}$$

где роль управления играет величина $\dot{q}$, то с системой можно ассоциировать дифференциальный оператор (оператор полного дифференцирования по времени)

$$X_0 = \frac{d}{dt} = \partial_t + L(t, q, \dot{q})\partial_I + \dot{q}\partial_q. \quad \textbf{(24)}$$

Второй оператор системы (17) получается, если продифференцировать оператор X_0 по $\dot{q}$. Имеем:

$$X_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\partial_I + \partial_q \quad \textbf{(25)}$$

Наконец, последний, третий оператор получаем путем коммутирования первых двух:

$$X_2 = [X_0, X_1] = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right]\partial_I. \quad \textbf{(26)}$$

Теперь оптимальное замыкание (собственно уравнения Эйлера-Лагранжа) возникают в результате приравнивания к нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов всех полученных операторов:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & L & \dot q \\ 0 & \frac{\partial L}{\partial \dot q} & 1 \\ 0 & \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right] & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = 0. \qquad \textbf{(27)}$$

4.2 Классика: брахистохрона.

Классическая задача о брахистохроне рассматривается здесь в постановке и обозначениях, принятых в A.E.Bryson, Jr. and Y.-C. Ho [4]. Цель – демонстрация получения замыкающих соотношений с использованием предлагаемой техники.

Итак, требуется оптимизировать функционал

$$I = \int_0^T dt \longrightarrow \min_\theta \qquad \textbf{(28)}$$

при наличии дифференциальных связей (уравнений движения)

$$\dot V = g \sin\theta; \qquad \dot x = -V\cos\theta. \qquad \textbf{(29)}$$

Управлением является угол θ. По предложенному алгоритму составляем операторы:

$$X_0 = g\sin\theta \frac{\partial}{\partial V} - V\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_1 = [\partial_\theta, X_0] = g\cos\theta\frac{\partial}{\partial V} + V\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_2 = [X_1, X_0] = g\sin\theta\cdot\dot\theta\frac{\partial}{\partial V} - (V\cos\theta\cdot\dot\theta + g)\frac{\partial}{\partial x}$$

Приравнивая определитель, составленный из коэффициентов операторов, к нулю, получаем замыкающее уравнение.

$$\det A = \begin{vmatrix} g\sin\theta & -V\cos\theta & 1 \\ g\cos\theta & V\sin\theta & 0 \\ g\sin\theta\cdot\dot\theta & -(V\cos\theta\cdot\dot\theta + g) & 0 \end{vmatrix} = -g(V\dot\theta + g\cos\theta) = 0.$$

Разрешая относительно $\dot\theta$, окончательно имеем:

$$\dot\theta = -\frac{g}{V}\cos\theta. \qquad \textbf{(30)}$$

Система (29), (30) – замкнутая оптимальная система, полученная в цитируемой работе весьма рутинными преобразованиями.

4.3. Модельная задача оптимального выведения ЛА на орбиту.

Изучается классическая задача оптимального по времени выведения ЛА на орбиту. Функционал имеет вид

$$I = \int_0^T dt \longrightarrow \min_{\vartheta} \tag{31}$$

при дифференциальных связях

$$\dot{H} = V_y, \quad \dot{V}_y = p\sin(\vartheta) - 1, \quad \dot{V}_x = p\cos(\vartheta). \tag{32}$$

Считаем приведенную тягу p фиксированной, а управлением является угол тангажа ϑ. Опуская рутинные вычисления операторов, приведем окончательное выражение для матрицы коэффициентов:

$$A = \begin{array}{c} \\ X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \partial_t & \partial_H & \partial_{V_y} & \partial_{V_x} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & V_y & (p\sin\vartheta - 1) & p\cos\vartheta \\ 0 & 0 & p\cos\vartheta & -p\sin\vartheta \\ 0 & -p\cos\vartheta & -p\dot{\vartheta}\sin\vartheta & -p\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ 0 & 2p\dot{\vartheta}\sin\vartheta & -p(\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + \dot{\vartheta}^2\cos\vartheta) & -p(\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta) \end{pmatrix} \end{array} \tag{33}$$

Приравнивая определитель матрицы к нулю, окончательно получим:

$$\det A = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{\vartheta} = -2\tan(\vartheta)\dot{\vartheta}^2} \tag{34}$$

Как следует из формулы (34), мы получили оптимальное дифференциальное представление известного закона «линейного тангенса», который мы проанализировали в первом параграфе. Из него, в частности, следует, что оптимальные значения угла тангажа не зависят от располагаемой тяги. Если же предположить зависимость тяги от высоты полета $p = p(H)$, то окончательное выражение для оптимального дифференциального замыкания будет другим. Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательное выражение:

$$\det A^1_{p=p(H)} = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{\partial}\mathbf{p}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{H}}\cos\vartheta - 2\tan(\vartheta)\dot{\vartheta}^2} \tag{35}$$

Как видим, учет зависимости тяги от высоты существенно изменил оптимальную дифференциальную программу – в ней появился дополнительный член и уравнение (35) уже не так просто проинтегрировать для получения конечного представления оптимальной программы. Тем не менее, система уравнений (32) и (35) представляют собой замкнутую систему. Краевая задача сохранилась, однако теперь вместо определения начальных значений сопряженных переменных следует определять начальные значения управления и его производных – в нашем случае начальные значения угла тангажа и угловой скорости. Это не только «более физично», но и не создает известной проблемы неустойчивости решения сопряженной системы. Кроме того, анализ правой части уравнения (35) позволяет принимать решения о тех или иных приближениях в каждом конкретном случае.

Заключение.

Предложенный алгоритм получения оптимальных замыкающих дифференциальных уравнений может быть эффективно использован для задач, в которых в качестве управляющего воздействия выступают угловые величины (угол наклона траектории, угол тангажа, угол атаки), которые изменяются со временем непрерывно. В ряде простейших случаев такое представление позволяет получить решение задачи в виде оптимального синтеза. Алгоритм без труда реализуется в современных системах аналитических вычислений. Он удобно сочетается с методами решения краевых задач, основанных на методе дифференцирования по параметру. Дальнейшего анализа требует вопрос о чувствительности алгоритма к представлению исходных данных (аэродинамических характеристик, высотно-скоростных характеристик двигателя и т.д.) в аналитической форме. Дополнительные детали обсуждаемой проблемы можно найти в работах автора [8 - 10].

Автор выражает признательность проф. А.С.Филатьеву за обсуждение результатов работы.

Литература:

1. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 360 с.

2. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. – М.: Мир, 1986. – 360 с.

3. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming, SIAM, 2001. – 190 p.

4. A.E.Bryson, Jr. and Y.-C. Ho, Applied Optimal Control, John Willey& Sons, New York, 1975.

5. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета / Под ред. Дж. Лейтмана. – М.: Наука, 1965. – 538 с.

6. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.

7. Burke W. Applied Differential Geometry, Cambridge University Press, 1985. – 410 p.

8. Легенький В.И. Синтез оптимального управления гладкими динамическими системами как задача группового анализа // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики: Сб. науч. тр. / АН УССР. Ин - т математики. - Киев, 1990, с. 40 - 43.

9. Легенький В.И. Теоретико-групповой алгоритм решения задач синтеза оптимального управления // Кибернетика и вычислительная техника: Респуб. межведомсв. сборник научных трудов. Вып.91: Сложные системы управления / АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова. - Киев, 1991, с. 41- 48.

10. Lehenkyi V., Rudolph J. On a characteristic vector field for systems reducible to order two, in: Prepr. “16th IFAC World Congress”, Prague, Czech Republic, July 3-8, 2005, CDROM (6 pages).