Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Ванєєва Олена Олександрівна

УДК 517.958

Групова класифікація та некласичні симетрії рівнянь реакції–дифузії

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Попович Роман Омелянович
кандидат фіз.–мат. наук,
старший науковий співробітник

Київ — 2007

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

∂_x	оператор диференціювання за змінною x
∂_i, ∂_{x_i}	оператор диференціювання за змінною x_i
D_x	оператор повного диференціювання за змінною x
D_i, D_{x_i}	оператор повного диференціювання за змінною x_i
$G^{\sim}$	звичайна група еквівалентності
$\hat{G}^{\sim}$	узагальнена група еквівалентності
$J^{(k)}$	простір джетів порядку k
$\mathcal{L}$	диференціальне рівняння
$\mathcal{L}_\theta$	клас диференціальних рівнянь з довільними елементами $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$
$\mathcal{L}_{(p)}$	многовид рівняння $\mathcal{L}$ у просторі $J^{(p)}$
$u_{(p)}$	множина всіх частинних похідних функцій u за змінними x порядків не більших за p
$A^{\max}$	максимальна алгебра ліївської інваріантності
$A^{\ker}$	ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності

Вступ

Актуальність теми. Серед усієї множини диференціальних рівнянь у частинних похідних існує порівняно небагато рівнянь, що описують природні явища. Виникає питання: чим саме з математичної точки зору ці рівняння вирізняються з множини усіх можливих? Виявляється, що переважна більшість рівнянь математичної фізики мають нетривіальні симетрійні властивості. Це означає, що многовиди їх розв'язків інваріантні відносно багатопараметричних груп перетворень. Наявність широкої групи інваріантності, таким чином, можна розглядати як критерій відбору рівнянь, що описують реальні фізичні процеси. Цей факт підтверджується наступним прикладом. "Серед множини систем лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку для двох вектор-функцій $\mathbf{E}(x_0, \mathbf{x})$ і $\mathbf{B}(x_0, \mathbf{x})$ існує тільки одна система, що є інваріантною відносно групи Пуанкаре, а саме рівняння Максвелла. Аналогічним чином можна визначити рівняння Дірака, Шрьодінгера та інші" [34]. Отже, важливою є задача виокремлення з класу диференціальних рівнянь у частинних похідних таких, що допускають групу симетрій з найбільшою кількістю параметрів, а саме, задача групової класифікації. Відкриття С. Лі полягало в тому, що складні нелінійні умови інваріантності диференціального рівняння відносно групи перетворень можна замінити у випадку неперервної групи більш простими лінійними умовами інфінітезимальної інваріантності відносно твірних групи. Цей результат має велике значення для задач групової класифікації, оскільки дозволяє шукати замість перетворень з групи симетрій базисні оператори з відповідної алгебри ліївської інваріантності рівняння.

Дослідження рівнянь дифузії та різних їх модифікацій з додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують у якості математичних моделей різноманітних процесів у природі та суспільстві [61,91,92,98,115]. Наприклад, у біології [91] розглядають клітини, бактерії, хімічні речовини, тварин тощо як частинки, кожна з яких рухається хаотично. Тоді систематичний рух їх групи вважається процесом дифузії, і зазвичай це не проста дифузія, оскільки береться до уваги взаємодія між частинками. Для простоти біологи використовують (1+1)-вимірне неперервне модельне рівняння для опису глобальної поведінки в термінах густини чи концентрації частинок. Оскільки моделі дифузії часто формулюються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, як правило, не є інтегровними та не можуть бути лінеарізованими, то симетрійні методи, в силу своєї універсальності, є важливими для їх дослідження. Тому невипадково, що сучасний розвиток групового аналізу розпочався з групової класифікації Л.В. Овсянніковим класу (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії [22]. Результатом класифікації ліївських або некласичних симетрій (умовних, потенціальних, узагальнених) є виокремлення модельних рівнянь з нетривіальними симетрійними властивостями. Методом редукції за отриманими операторами симетрії можна побудувати точні розв'язки модельного рівняння, які дозволяють вивчити розподіл концентрації частинок та характер дифузії.

Багато процесів, що є об'єктами дослідження у фізиці та біології, можна моделювати (1+1)-вимірними нелінійними рівняннями реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями та довільними елементами, що залежать від просторової змінної [83,91,92]. Наявність змінних коефіцієнтів у таких моделях ускладнює виконання групової класифікації. Розв'язання цієї задачі потребує створення нових та вдосконалення існуючих методів групового аналізу. Пошуку та застосуванню таких підходів присвячено дисертацію. Поруч із цим розв'язано нетривіальні класифікаційні задачі щодо потенціальних некласичних симетрій (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії зі сталими коефіцієнтами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках тем "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098) та "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розробка та вдосконалення сучасних методів групового аналізу та їх застосування до класу (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. Основну увагу приділено задачам групової класифікації, що не розв'язуються класичними методами, та узагальненим постановкам класифікаційних задач. Зокрема, однією з таких задач є класифікація потенціальних некласичних симетрій для рівнянь дифузії.

Об'єктом дослідження є (1+1)-вимірні нелінійні рівняння реакції–дифузії з коефіцієнтами, що залежать від просторової змінної, та нелінійні рівняння фільтрації. *Предметом дослідження* є групова класифікація, некласичні симетрії, закони збереження і точні розв'язки таких рівнянь.

Методи дослідження. Для виконання групової класифікації застосовано класичний метод Лі–Овсяннікова та різні його сучасні версії, зокрема, запропоновані в роботі А.Г. Нікітіна і Р.О. Поповича [20] та роботах [117, 119]. Точні розв'язки побудовано методами ліївської та некласичної редукції і розмноження різними типами перетворень між рівняннями. Для опису законів збереження використано модифікацію прямого методу [103].

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Використовуючи новий підхід до групової класифікації, що базується на застосуванні перетворень з узагальненої розширеної гру-

пи еквівалентності та відображень між класами рівнянь, повністю розв'язано задачу групової класифікації (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями. За знайденими симетріями методом редукції побудовано нові точні розв'язки рівнянь з досліджуваного класу.

2. Описано множини всіх допустимих перетворень у класах (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями.

3. Прокласифіковано локальні закони збереження (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями.

4. Виконано вичерпну групову класифікацію рівнянь дифузії між пластинами. Також прокласифіковано локальні закони збереження і побудовано додаткові перетворення еквівалентності та точні розв'язки рівнянь з цього класу.

5. Прокласифіковано потенціальні некласичні симетрії (1+1)-вимірного рівняння швидкої дифузії. Доведено, що деякі класи таких симетрій пов'язані зі звичайними некласичними симетріями на множині розв'язків допоміжної потенціальної системи. Знайдено нові точні неліївські розв'язки. Показано, що відомі точні розв'язки рівняння швидкої дифузії вичерпуються розв'язками, які можна побудувати за знайденими операторами потенціальної некласичної симетрії.

6. Описано нелінійності, для яких рівняння з класу (1+1)-вимірних рівнянь фільтрації допускають нетривіальні некласичні симетрії.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язання ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичної фізики, а також у математичній біології, хімії та теоретичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать науковому керівнику — Р.О. Поповичу. У роботах [106, 107, 117–119] внесок співавторів дисертанта є наступним. Р.О. Поповичу належить розробка методів дослідження, зокрема, доведення загальних тверджень щодо властивостей відображень між класами, запропонованих у роботі [119], та виокремлення з класу рівнянь дифузії між пластинами рівняння, побудові точних розв'язків якого присвячено статтю [106]. У роботі [119] ним також запропоновано ідею застосування відображення між класами диференціальних рівнянь для виконання групової класифікації, впровадження якої стало вирішальним кроком для повного розв'язання поставленої задачі.

К. Софоклеусу в роботах [117–119] належить початковий вибір класів для дослідження, а також перевірка знайдених додаткових перетворень еквівалентності, у роботі [106] — відшукання нетривіального прикладу оператора редукції з нульовим коефіцієнтом при ∂_t.

У статтях [117, 118] А.Г. Джонпіллаі виконав часткову перевірку групової класифікації досліджуваних класів.

Н.М. Івановій у роботі [107] належить опрацювання літератури, що стосується точних розв'язків рівняння швидкої дифузії, а також перевірка виконаних обчислень.

Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2005–2007, керівник семінару — професор Нікітін А.Г.), на VI та VII Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 2005, 2007), на VI Міжнародному симпозіумі "Lie Theory and Its Applications in Physics” (Варна, Болгарія, 2005), на I та II Міжнародних симпозіумах “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Нікосія, Кіпр, 2005, 2006), на науково–практичному семінарі “Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи (до 70-річчя з дня народження В.І. Фущича)” (Полтава, 2006), на конференції “Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2006).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у семи роботах [7, 106, 107, 116–119]. З них дві роботи опубліковано без співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, 6-ти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 127 найменувань, та додатку. Повний обсяг дисертації становить 190 сторінок, з них список використаних джерел займає 14 сторінок, а додаток — 20 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина роботи складається з 6 розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст даного розділу за підрозділами.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації.

У другому розділі дисертації наведено основні теоретичні відомості щодо ліївських та некласичних симетрій і законів збереження диференціальних рівнянь у частинних похідних. Особливу увагу приділено строгій постановці задач групової класифікації у класах диференціальних рівнянь та спеціальним властивостям відображень між такими класами.

У третьому розділі виконано групову класифікацію (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями загального вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m, \quad n \neq 0.$$

Спочатку знайдено звичайну, узагальнену розширену та умовні групи еквівалентності цього класу рівнянь. Використання різних типів еквівалентностей між рівняннями дозволило спростити загальний вигляд рівнянь, які необхідно прокласифікувати, та подати результат групової класифікації у замкнений формі. Знайдено всі можливі додаткові перетворення еквівалентності між випадками розширення, нееквівалентними відносно розширеної групи еквівалентності, що одразу дало групову класифікацію відносно всіх точкових перетворень. Для рівнянь з досліджуваного класу прокласифіковано також всі допустимі перетворення та локальні закони збереження. На основі отриманих результатів щодо симетрії методом ліївської редукції побудовано деякі точні розв'язки.

У четвертому розділі проведено розширений груповий аналіз класу (1+1)-вимірних квазілінійних рівнянь реакції–дифузії вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m, \quad m \neq 0, 1.$$

Для розв'язання задачі групової класифікації у цьому класі використано новий підхід, що базується на послідовному застосуванні перетворень з групи еквівалентності класу та відображення між класами, породженого сім'єю точкових перетворень. Під час класифікації виділено спеціальний підклас зі значенням $m = 2$, що вирізняється своїми трансформаційними властивостями. Групові класифікації вихідного класу, його підкласу з $m = 2$ та їх образів відносно відображень, породжених сім'ями точкових перетворень, виконано з точністю до відповідних узагальнених розширених або звичайних груп еквівалентності та множин усіх точкових перетворень. Широкі сім'ї нових точних розв'язків знайдено для досліджуваних рівнянь класичним методом ліївської редукції, а також розмноженням відомих розв'язків інших рівнянь, пов'язаних з досліджуваними різними типами точкових перетворень (такими як додаткові перетворення еквівалентності та відображення між класами). Множину допустимих перетворень класу-образу вичерпно описано у загальному випадку $m \neq 2$. Запропоновано алгоритм класифікації операторів редукції рівнянь з вихідного класу, який також ґрунтується на комбінованому використанні перетворень еквівалентності та відображень між класами диференціальних рівнянь.

П'ятий розділ дисертації присвячено вивченню класу (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії між пластинами вигляду

$$u_t = (D(u)u_x)_x + h(x)u.$$

Для цього класу виконано вичерпну групову класифікацію відносно його звичайної групи еквівалентності. Знайдено додаткові перетворення еквівалентності та умовні групи еквівалентності. Це дозволило спростити класифікаційні результати та їх подальше застосування. Отримані ліївські симетрії застосовано для побудови точних розв'язків. З досліджуваного класу рівнянь виокремлено одне, що вирізняється своїми прихованими симетрійними властивостями. Його точні розв'язки знайдено за допомогою ліївської редукції і таких сучасних технік групового аналізу як функціональне відокремлення змінних, узагальнені умовні та приховані симетрії.

У шостому розділі досліджено потенціальні некласичні симетрії рівняння швидкої дифузії вигляду

$$u_t = (u^{-1}u_x)_x,$$

які є некласичними симетріями потенціального рівняння $v_t = {v_x}^{-1}v_{xx}$. Оператори некласичної симетрії потенціального рівняння вичерпно прокласифіковано з точністю до перетворень з його групи ліївської інваріантності. У результаті знайдено широкі класи операторів потенціальної некласичної симетрії та точних розв'язків рівняння швидкої дифузії. Встановлено зв'язок між операторами некласичної та потенціальної некласичної симетрії цього рівняння. У цьому ж розділі прокласифіковано некласичні симетрії у класі нелінійних рівнянь фільтрації

$$v_t = f(v_x)v_{xx}.$$

Доведено, що рівняння фільтрації допускають нетривіальні оператори некласичної симетрії тоді і тільки тоді, коли вони належать до підкласу з довільними елементами вигляду $f(v_x) = (a{v_x}^2 + bv_x + c)^{-1}$.

У кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

У додаток А винесено доведення теорем з розділу 6 щодо результатів класифікації операторів редукції потенціального рівняння швидкої дифузії та загального класу нелінійних рівнянь фільтрації.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність своєму науковому керівнику Роману Омеляновичу Поповичу, невичерпні ентузіазм та творча наснага якого були нескінченним джерелом натхнення під час роботи над дисертацією; своїм співавторам Наталії Миколаївні Івановій та Крістодулосу Софоклеусу за плідну співпрацю. Авторка також вдячна всім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, зокрема, Анатолію Глібовичу Нікітіну та В'ячеславу Миколайовичу Бойку, за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, присвяченої дослідженню симетрій (ліївських, некласичних), а також груповій класифікації рівнянь дифузійного типу.

Огляд літератури, в якій розглядається групова класифікація рівнянь дифузійного типу, виконано у підрозділі 1.1. При цьому увага зосереджена на тих роботах, в яких вивчено ліївські симетрії рівнянь реакції–дифузії. У підрозділі 1.2 проаналізовано роботи, пов'язані з некласичними симетріями рівнянь дифузійного типу. Підрозділ 1.3 присвячено огляду робіт, в яких різними методами досліджувалось рівняння швидкої дифузії.

1.1. Групова класифікація рівнянь дифузійного типу

Математичні моделі процесів теплопровідності та дифузії є традиційними об'єктами дослідження з використанням симетрійних методів та пов'язаних з ними технік [78]. Оскільки ці моделі часто формулюють в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, як правило, не є інтегровними та не можуть бути лінеарізованими, симетрійні методи є важливими для побудови точних розв'язків таких моделей.

Дослідження нелінійних рівнянь теплопровідності (чи нелінійних рівнянь дифузії, якщо u — концентрація маси) з використанням симетрійних методів було розпочато ще в 1959 році роботою Л.В. Овсяннікова [22], де автор виконав групову класифікацію рівнянь

$$u_t = (f(u)u_x)_x. \tag{1.1}$$

Починаючи з цієї роботи, з'явилося багато інших, присвячених дослідженню лiївських симетрій рівнянь дифузійного типу, а саме груповій класифікації таких рівнянь (див., наприклад, [9, 18, 46, 58, 59, 82, 93, 102]).

У роботі [112] досліджено лiївські симетрії (1+1)-вимірних квазілінійних рівнянь реакції–дифузії

$$u_t = u_{xx} + ku^q,$$

де q — довільна стала. Симетрії (1+n)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії загального вигляду

$$u_t = \Delta\left(u^{p+1}\right) + ku^q, \quad p \neq -1,$$

знайдено в [54]. В.А. Дородніцин у роботі [8] виконав групову класифікацію нелінійних рівнянь дифузії з джерелом

$$u_t = (k(u)u_x)_x + q(u). \tag{1.2}$$

Інваріантні розв'язки рівнянь з цього класу було побудовано пізніше [9] (див. також [78, Розділ 10]).

У роботі [63] вивчено симетрії у класі (1+n)-вимірних рівнянь реакції–дифузії

$$u_t = \nabla(u^\nu \nabla u) + f(u),$$

перейшовши завдяки введенню радіальних змінних до наступного (1+1)-вимірного рівняння

$$u_t = r^{1-\lambda}\left(r^{\lambda-1}u^\nu u_r\right)_r + f(u), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ці результати узагальнили ті, що отримано в роботі [73] для останнього рівняння зі значеннями $\lambda = 2$ та $\lambda = 3$.

К. Софоклеус у роботі [113] виконав групову класифікацію рівнянь

$$u_t = r^{1-\lambda}\left(r^{\lambda-1}k(u)u_r\right)_r.$$

Виявилось, що розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності таких рівнянь має місце лише тоді, коли функція $k(u)$ є степеневою або експоненціальною.

У роботах [58, 59] Р.М. Черніга та М.І. Сєров прокласифікували найбільш загальний клас рівнянь реакції–дифузії–конвекції з довільними елементами, що залежать від змінної u, вигляду

$$u_t = [A(u)u_x]_x + B(u)u_x + C(u).$$

Наступний етап в груповій класифікації нелінійних рівнянь дифузії розпочався дослідженням таких рівнянь, довільні елементи яких залежать від незалежних змінних.

Ліївські симетрії та допустимі перетворення класу нелінійних рівнянь дифузії $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$ знайдено у [114].

Роботу [74] присвячено дослідженню ліївських симетрій класу рівнянь дифузії у пористому середовищі вигляду

$$u_t = (u^n)_{xx} + g(x)u^m + f(x)u^s u_x, \quad n \neq 0.$$

Р.О. Попович та Н.М. Іванова виконали групову класифікацію класу рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами

$$f(x)u_t = [g(x)A(u)u_x]_x + h(x)B(u)u_x, \tag{1.3}$$

де $h(x) = 1$ [102]. Нещодавно цей результат було узагальнено на випадок довільної функції $h(x)$ [82].

Більш детальний огляд літератури щодо симетрій, законів збереження та потенціальних симетрій рівнянь конвекції–дифузії наведено у роботі [12].

На відміну від класу (1.3) рівнянь дифузії з конвективним членом, групова класифікація якого вже є відомою, проблема розв'язання задачі групової класифікації рівнянь реакції–дифузії

$$f(x)u_t = [g(x)A(u)u_x]_x + h(x)B(u) \tag{1.4}$$

відносно його групи еквівалентності залишається відкритою. Хоча відомі результати групової класифікації у більш загальних класах (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь відносно ширших груп еквівалентності [46, 124–126].

На цей час вдалося розв'язати лише частинні випадки цієї задачі, а саме в дисертації виконано групову класифікацію нелінійних рівнянь (1.4), в яких довільні елементи A та B є степеневими. Цей випадок є найцікавішим з точки зору застосувань [83, 91, 92], а також, як показує практика, найбільш складним для дослідження [82].

Ще одним частинним випадком класу (1.4) є клас рівнянь дифузії між пластинами загального вигляду

$$u_t = [D(u)u_x]_x + h(x)u.$$

Нещодавно ліївські симетрії та відповідні редукції рівнянь з цього класу було досліджено в декількох статтях [53, 95, 96], але жодна з них не містить вичерпних результатів класифікації. У дисертації проведено повну групову класифікацію, а також описано закони збереження у вказаному класі рівнянь.

Зауважимо, що у роботах [20, 28, 82, 102], так само як у дисертації, для виконання групової класифікації застосовано метод, який базується на дослідженні сумісності та безпосередньому інтегруванні визначальних рівнянь. Цей метод не є ефективним для класів рівнянь, що містять в собі довільні елементи, які залежать від декількох змінних. Для класифікації більш загальних класів двовимірних диференціальних рівнянь у частинних похідних зазвичай використовується підхід, що включає в себе вивчення реалізацій алгебр Лі. Відповідні теоретичні відомості детально описано у [46, 124]. Задачі групової класифікації для широких класів $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь розв'язано в рамках цього підходу, наприклад, у роботах [1, 17, 18, 46, 124–126].

1.2. Некласичні симетрії рівнянь реакції–дифузії

Поняття некласичної симетрії (у вузькому сенсі; синоніми — Q-умовна або умовна симетрія) запропоновано Дж. Блюманом та Дж. Коулом в 1969 році [49]. Точне та строге означення цього поняття запропоновано набагато пізніше [70] (див. також [127]). Даний тип симетрії не пов'язаний з неперервними групами перетворень та, взагалі кажучи, є лише інструментом для побудови точних розв'язків досліджуваного рівняння [60, 107, 127]. Але редукцією за операторами некласичної симетрії можна отримати такі розв'язки, які не можливо знайти за допомогою ліївської симетрії [33, 37]. Ось чому дослідження некласичних симетрій є важливою та актуальною задачею, незважаючи на її більшу складність порівняно з аналогічною задачею пошуку операторів ліївської симетрії. Це твердження є справедливим і для інших типів некласичної симетрії, поняття яких було запропоновано пізніше (потенціальна симетрія — 1988 р. [51], квазі-локальна — 1989 р. [4], узагальнена умовна — 1994 р. [62], потенціальна некласична — 1997 р. [75]).

У багатьох роботах метод редукції за операторами некласичної симетрії успішно застосовано для того, щоб отримати нові точні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, що виникають у якості моделей у різних областях фізики, хімії та біології. Деякі з цих робіт присвячено дослідженню рівнянь дифузії (з додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, чи без них). Див., наприклад, [29, 33, 35, 37, 39, 44, 45, 56, 57, 60, 122, 123].

У статті [68] досліджено Q-умовні симетрії (1+1)-вимірного лінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx}. \tag{1.5}$$

Показано, що існують два суттєво різні випадки пошуку операторів редукції в залежності від того, чи дорівнює нулю коефіцієнт при ∂_t в операторах Q-умовної симетрії рівняння (1.5). Доведено, що, якщо цей коефіцієнт дорівнює нулю, задача пошуку некласичних симетрій зводиться до розв'язання вихідного рівняння.

У роботах [122, 123] останнє твердження поширено на випадок довільного (1+1)-вимірного еволюційного рівняння.

Першим класом рівнянь дифузії, некласичні симетрії якого було вичерпно досліджено [29, 35, 45, 60] (див. також [32]), є клас квазілінійних рівнянь дифузії з джерелом вигляду

$$u_t = u_{xx} + q(u).$$

У роботі [66] отримано визначальні рівняння на коефіцієнти операторів Q-умовної симетрії для класу, що є еквівалентним класу (1.2). У частинних випадках авторам вдалося знайти нетривіальні оператори редукції та відповідні точні розв'язки. Некласичні симетрії рівнянь з класу (1.2) досліджено в роботі [44].

1.3. Рівняння швидкої дифузії та його симетрії

Відомо, що процеси дифузії, які моделюються рівнянням (1.1), виникають у різних галузях фізики, а саме у фізиці плазми, кінетичній теорії газів, фізиці твердого тіла. Також ці рівняння описують процеси перенесення речовини у пористому середовищі. Для багатьох металів та керамічних матеріалів коефіцієнт дифузії $f(u)$ можна, для широкого діапазону температур, наблизити функцією $u^{-\alpha}$, де $0 < \alpha < 2$ [111]. Отже, однією з математичних моделей процесів дифузії є диференціальне рівняння

$$u_t = (u^{-\alpha} u_x)_x. \tag{1.6}$$

Рівняння (1.6) називають рівнянням швидкої дифузії у випадку $0 < \alpha < 2$, оскільки ці значення α відповідають набагато більш швидкому розповсюдженню речовини ніж у лінійному випадку ($\alpha = 0$).

Особливо цікавим є спеціальний випадок $\alpha = 1$, тобто рівняння

$$u_t = (u^{-1}u_x)_x. \tag{1.7}$$

Це рівняння виникає у фізиці плазми як модель перехресної конвективної дифузії плазми, що включає в себе ефекти віддзеркалення. Також воно зустрічається у центральному граничному наближенні для моделі Калермана рівняння Больцмана [87]. Рівняння (1.7) моделює поширення нагрітої електронної хмари, яке описується ізотермічним розподілом Максвелла. Див. [47, 111] та посилання там.

Рівняння (1.7) має багато властивостей, які виділяють його з класу (1.6). Так, наприклад, рівняння (1.7) можна записати у формі $u_t = (\ln u)_{xx}$, а для інших значень α функція під ∂_{xx} є степеневою. Рівняння швидкої дифузії допускає дискретне потенціальне перетворення симетрії. Для нього побудовано широкі класи точних розв'язків в явному вигляді, у той час як редукція інших рівнянь з класу (1.6) у загальному випадку приводить до звичайних диференціальних рівнянь, які зазвичай не можна повністю проінтегрувати. Потенціальна форма рівняння (1.7) допускає два типи розділення змінних (адитивне та мультиплікативне).

Той факт, що рівняння (1.7) записано в дивергентній формі, дозволяє використати підхід, запропонований Блюманом зі співавторами [50–52], а саме, розглянути відповідну потенціальну систему

$$v_x = u, \quad v_t = u^{-1}u_x \tag{1.8}$$

та спробувати знайти потенціальні симетрії рівняння (1.7). Будь-яка локальна симетрія системи (1.8) індукує симетрію вихідного рівняння (1.7). Якщо перетворення змінних t, x та u залежать від потенціалу v у явному вигляді, то ця симетрія є нелокальною потенціальною симетрією рівняння (1.7).

З рівняння (1.8) випливає, що потенціал v задовольняє нелінійне рівняння фільтрації

$$v_t = {v_x}^{-1} v_{xx} \tag{1.9}$$

зі значенням коефіцієнту фільтрації ${v_x}^{-1}$. Рівняння (1.9) також називають потенціальним рівнянням швидкої дифузії. Н.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов та Н.Х. Ібрагімов виконали групову класифікацію нелінійних рівнянь фільтрації загального вигляду

$$v_t = f(v_x)v_{xx}, \tag{1.10}$$

а також дослідили їх контактні та квазі-локальні симетрії [3, 4, 78].

Ліївські симетрії рівняння (1.7) добре відомі [22] (див. також [78]). Всі точні розв'язки, отримані у явному вигляді методом редукції за операторами ліївської симетрії, наведено в довіднику [25].

Деякі неліївські розв'язки (1.7) отримано в роботах [76, 110, 111]. Так, Ф. Розено [111] дослідив, що рівняння (1.9) допускає не тільки звичайне розділення змінних $v = T(t)X(x)$, але й адитивне $v = Y(x + \lambda t) + Z(x - \lambda t)$, що є потенціальним адитивним розділенням змінних для рівняння (1.7). В роботі [110] Ч. Чу знайшов оператори узагальненої умовної симетрії рівняння (1.7) вигляду $Q = (u_{xx} + H(u){u_x}^2 + F(u)u_x + G(u))\partial_u$ та побудував за ними декілька точних розв'язків, які не можна отримати ліївським методом. М.Л. Гандаріас [76] дослідила деякі сім'ї звичайних та потенціальних некласичних симетрій рівняння (1.6). Використовуючи спеціальний анзац на коефіцієнт θ, вона знайшла нетривіальні оператори редукції у так званому "no-go" випадку [26, 68, 122], тобто у випадку, коли оператори редукції рівняння (1.9) мають вигляд $Q = \partial_x + \theta(t, x, v)\partial_v$.

Нещодавно в роботі [52] представлено попередній аналіз некласичних симетрій рівнянь з класу (1.10). Більш детальний розгляд проведено для випадку $f = (v_x^2 + v_x)^{-1}$, а також наведено деякі приклади операторів редукції та відповідних точних розв'язків. У роботі [107] показано, що рівняння (1.10) з коефіцієнтом $f=(v_x^2+v_x)^{-1}$ зводиться точковим перетворенням $\tilde t=t$, $\tilde x=x+v$, $\tilde v=v$ до рівняння (1.9) з відповідним коефіцієнтом $\tilde f={\tilde v_{\tilde x}}^{-1}$, яке є більш простим та зручним для дослідження. Всі результати (симетрії та точні розв'язки) для рівняння, дослідженого в [52], можна отримати з відповідних результатів для рівняння (1.9).

В дисертаційній роботі повністю прокласифіковано потенціальні некласичні симетрії рівняння швидкої дифузії (1.7). Множину точних неліївських розв'язків, побудованих авторами робіт [76,110,111], доповнено подібними.

РОЗДІЛ 2

Основні теоретичні відомості

У даному розділі дисертації наведено основні теоретичні відомості щодо поняття лiївської симетрії диференціальних рівнянь, проведення групової класифікації в класах диференціальних рівнянь, а також класифікації локальних законів збереження та некласичних симетрій.

У підрозділі 2.1 наведено поняття симетрії диференціального рівняння, поняття інфінітезимальної інваріантності та її критерій. Підрозділ 2.2 є ключовим, у ньому описано поняття класу диференціальних рівнянь, множини допустимих перетворень в класі, алгоритм методу групової класифікації та необхідні твердження щодо трансформаційних властивостей класів після відображення їх деякими точковими перетвореннями у інші класи. У підрозділі 2.3 наведено означення векторів, що зберігаються, законів збереження, а також різних понять еквівалентності законів збереження. Необхідні відомості щодо некласичних симетрій диференціальних рівнянь, різних типів еквівалентності операторів некласичної симетрії надано у підрозділі 2.4.

2.1. Ліївські симетрії

Нехай $\mathcal{L}$ — диференціальне рівняння $L(x, u_{(p)}) = 0$ на невідому функцію u, що залежать від n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тут $u_{(p)}$ позначає множину всіх похідних функції u за змінними x порядків не більших ніж p, включаючи саму функцію u як похідну нульового порядку.

Означення 2.1. *Групою (точкових) симетрій* рівняння $\mathcal{L}$ називають будь-яку локальну групу G перетворень, що діє на відкритій підмножині $\mathcal{M}$ простору незалежних змінних x та залежної змінної u рівняння $\mathcal{L}$ та має наступну властивість. Якщо $u = f(x)$ є розв'язком рівняння $\mathcal{L}$ та $g \in G$ визначено $g \cdot f$, то $u = g \cdot f(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

Нехай G є локальною групою перетворень, що діє на відкритій підмножині $\mathcal{M}$ простору всіх змінних рівняння $\mathcal{L}$. Тоді визначена індукована локальна дія групи G на просторі джетів $J^{(p)}$, яку називають p-м продовженням дії групи G на $\mathcal{M}$. Це продовження визначається таким чином, що воно перетворює похідні функцій $u = f(x)$ у відповідні похідні функцій $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$.

В рамках локального підходу рівняння $\mathcal{L}$ розглядають як алгебраїчне рівняння в просторі джетів $J^{(p)}$ порядку p та ототожнюють з многовидом його розв'язків в просторі $J^{(p)}$:

$$\mathcal{L} = \{(x, u_{(p)}) \in J^{(p)} \,|\, L(x, u_{(p)}) = 0\}.$$

Тоді, якщо p-те продовження дії групи G на $\mathcal{M}$ залишає відповідний многовид розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ інваріантним, то група G є групою симетрій рівняння $\mathcal{L}$ у сенсі означення 2.1.

Розглядаючи продовження однопараметричних груп перетворень також можна визначити продовження їх інфінітезимальних твірних та сформулювати критерій інфінітезимальної інваріантності диференціальних рівнянь.

Теорема 2.1. *Нехай $\mathcal{L}$ є диференціальним рівнянням максимального рангу, визначеним на $\mathcal{M}$. Якщо G — локальна група перетворень, що діє на $\mathcal{M}$, та виконується умова*

$$\Gamma^{(p)} L(x, u_{(p)}) = 0$$

на всіх розв'язках рівняння $\mathcal{L}$ для кожної інфінітезимальної твірної Γ групи G, то G є групою симетрій рівняння $\mathcal{L}$.

Кажуть, що рівняння має максимальний ранг, якщо матриця–рядок Якобі $J_L(x,u_{(p)}) = \big(L_{x^i}, L_{u_{(p)}}\big)$ $(i=1,...,n)$ рівняння $\mathcal{L}$ має ранг 1 скрізь, де $L(x,u_{(p)})=0$. Умова максимальності рангу не є великим обмеженням, оскільки диференціальне рівняння, що не має такої властивості, можна замінити алгебраїчно еквівалентним, для якого ця умова виконується.

Інфінітезимальні твірні групи G є диференціальними операторами першого порядку на просторі змінних x, u, тобто вони мають вигляд $\Gamma = \xi^i\partial_{x_i} + \eta\partial_u$, де $\xi^i = \xi^i(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$, $i=1,\ldots,n$. Тут і надалі вважаємо, що за всіма індексами, які повторюються, іде підсумовування.

p-ті продовження інфінітезимальних твірних групи G визначаються за спеціальними формулами [18, 21]. Оскільки рівняння, що досліджуються в дисертації, є (1+1)-вимірними диференціальними рівняннями у частинних похідних другого порядку, для застосування критерію інфінітезимальної інваріантності знадобиться друге продовження інфінітезимального оператора Γ

$$\Gamma^{(2)} = \xi^t\partial_t + \xi^x\partial_x + \eta\partial_u + \zeta^t\partial_{u_t} + \zeta^x\partial_{u_x} + \zeta^{tt}\partial_{u_{tt}} + \zeta^{tx}\partial_{u_{tx}} + \zeta^{xx}\partial_{u_{xx}},$$

де

$$\begin{aligned}
\zeta^t &= D_t\eta - u_tD_t\xi^t - u_xD_t\xi^x,\\
\zeta^x &= D_x\eta - u_tD_x\xi^t - u_xD_x\xi^x,\\
\zeta^{tt} &= D_t\zeta^t - u_{tt}D_t\xi^t - u_{tx}D_t\xi^x,\\
\zeta^{tx} &= D_x\zeta^t - u_{tt}D_x\xi^t - u_{tx}D_x\xi^x,\\
\zeta^{xx} &= D_x\zeta^x - u_{tx}D_x\xi^t - u_{xx}D_x\xi^x.
\end{aligned}$$

Тут D_t і D_x — оператори повного диференціювання, які визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
D_t &= \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x} + \ldots,\\
D_x &= \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \ldots.
\end{aligned}$$

Застосувавши критерій інфінітезимальної інваріантності, наведений у теоремі 2.1, до рівняння $\mathcal{L}$, після розщеплення за незв'язними змінними отримуємо перевизначену систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних для знаходження коефіцієнтів $\xi^i = \xi^i(x,u)$ та $\eta = \eta(x,u)$. Загальний розв'язок цієї системи задає максимальну алгебру ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}$. За побудованими інфінітезимальними твірними можна однозначно відновити групу G неперервних перетворень симетрії рівняння $\mathcal{L}$. Див., наприклад, [11, 18, 21, 23, 48].

2.2. Групова класифікація класів диференціальних рівнянь

У цьому підрозділі наведено основні поняття та твердження щодо групової класифікації у класах диференціальних рівнянь, відображень між такими класами рівнянь, породжених точковими перетвореннями, та поведінки трансформаційних властивостей класів під час таких перетворень [100, 105]. Ці результати складають основи запропонованого підходу групової класифікації, виконаної у розділі 4.

Нехай $\mathcal{L}_\theta$ — диференціальне рівняння $L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})) = 0$ p-го порядку на невідому функцію u, що залежить від n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тут $u_{(p)}$ позначає множину всіх похідних функції u за змінними x порядків не вищих за p, включаючи саму функцію u як похідну нульового порядку. L є фіксованою функцією, що залежить від x, $u_{(p)}$ та θ. Символ θ позначає кортеж довільних (параметричних) функцій $\theta(x, u_{(p)}) = (\theta^1(x, u_{(p)}), \dots, \theta^k(x, u_{(p)}))$. Ці функції, які називають довільними елементами класу $\mathcal{L}_\theta$, пробігають множину $\mathcal{S}$ розв'язків допоміжної системи

$$S(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) = 0, \quad \Sigma(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) \neq 0.$$

Наведена система складається з диференціальних рівнянь та нерівностей на функції θ, де x та $u_{(p)}$ грають ролі незалежних змінних та $\theta_{(q)}$ позначає множину всіх частинних похідних θ порядків не вищих за q за змінними x та $u_{(p)}$. (Знак нерівності в допоміжній системі означає, що жодний компонент Σ не дорівнює нулю. Для простоти набір нерівностей Σ можна замінити однією диференціальною функцією, що співпадає з добутком його компонентів та має не дорівнювати нулю.) Набори умов S або Σ можуть бути порожніми. *Клас* диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_\theta$ з довільними елементами θ, що пробігають множину $\mathcal{S}$, позначають $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Нехай $\mathcal{L}^i_\theta$ є множиною всіх алгебраїчно незалежних диференціальних наслідків $\mathcal{L}_\theta$, що мають, як диференціальні рівняння, порядки не вище за i. Будемо ототожнювати $\mathcal{L}^i_\theta$ з многовидом, визначеним в просторі джетів $J^{(i)}$. Зокрема, рівняння $\mathcal{L}_\theta$ ототожнюють з многовидом, визначеним $\mathcal{L}^p_\theta$ в просторі $J^{(p)}$. Тоді можна розглядати $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ як сім'ю многовидів в $J^{(p)}$, параметризованих довільними елементами $\theta \in \mathcal{S}$.

Додатковими допоміжними системами рівнянь та/або нерівностей, приєднаними до головної допоміжної системи, в класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ виділяють *підкласи*.

Для того, щоб наведене означення класу диференціальних рівнянь було повним, потрібно також урахувати калібрувальну еквівалентність та інші нюанси. Див. деталі в роботах [100, 105].

2.2.1. Допустимі перетворення та група еквівалентності. Нехай є два набори довільних елементів $\theta, \tilde\theta \in \mathcal{S}$. Множину точкових перетворень, кожне з яких відображає рівняння $\mathcal{L}_\theta$ в рівняння $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$, називають *множиною допустимих перетворень з* $\mathcal{L}_\theta$ *в* $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ і позначають $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)$. Максимальна група точкових симетрій G_θ рівняння $\mathcal{L}_\theta$ співпадає з $\mathrm{T}(\theta,\theta)$. Якщо рівняння $\mathcal{L}_\theta$ та $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ еквівалентні відносно точкових перетворень, то $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta) = \varphi^0\circ G_\theta = G_{\tilde\theta}\circ\varphi^0$, де φ^0 — фіксоване перетворення з $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)$. Інакше $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta) = \varnothing$. Аналогічно, множину $\mathrm{T}(\theta,\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{\,(\tilde\theta,\varphi) \mid \tilde\theta\in\mathcal{S},\, \varphi\in\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\,\}$ називають *множиною допустимих перетворень рівняння* $\mathcal{L}_\theta$ *у класі* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Означення 2.2. Множину $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{(\theta,\tilde\theta,\varphi) \mid \theta,\tilde\theta\in\mathcal{S},\, \varphi\in\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\}$ називають *множиною допустимих перетворень у класі* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Зауваження 2.1. Вперше множину допустимих перетворень описали Дж. Кінгстон та К. Софоклеус для класу узагальнених рівнянь Бюргерса [84]. Ці автори називають перетворення такого типу *перетвореннями, що зберігають форму* [84–86]. Поняття допустимих перетворень можна розглядати як формалізацію їх підходу.

У термінах допустимих перетворень групу еквівалентності $G^{\sim} = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна визначити як множину допустимих перетворень, що визначені для будь-яких значень довільних елементів $\theta \in \mathcal{S}$. Узагальнену групу еквівалентності складають перетворення, параметризовані довільними елементами.

Поняття нормалізованого класу також ґрунтується на означенні 2.2 множини допустимих перетворень у класі диференціальних рівнянь. А саме, клас диференціальних рівнянь називають *нормалізованим*, якщо будь-яке допустиме перетворення у цьому класі належить до його групи еквівалентності. Множину допустимих перетворень *напівнормалізованого* класу породжують перетворення з груп точкових симетрій відповідних вихідних рівнянь та перетворення з групи еквівалентності всього класу. Будь-який нормалізований клас є напівнормалізованим. Два диференціальних рівняння з напівнормалізованого класу перетворюються одне в одне точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні відносно групи еквівалентності цього класу. Точні означення наведено у роботах [100, 101, 105].

2.2.2. Постановка задачі групової класифікації. Введемо позначення та поняття, необхідні для представлення класичного формулювання задачі групової класифікації. Нехай A_θ позначає максимальну алгебру ліївської інваріантності (чи основну алгебру [23]) інфінітезимальних операторів симетрії рівняння $\mathcal{L}_\theta$ для фіксованого $\theta \in \mathcal{S}$. Спільну частину $A^{\rm ker} = A^{\rm ker}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} A_\theta$ всіх алгебр A_θ, $\theta \in \mathcal{S}$, називають *ядром максимальних алгебр ліївської інваріантності* рівнянь класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

У рамках інфінітезимального підходу, задачу групової класифікації можна переформулювати як знаходження всіх можливих нееквівалентних випадків розширень для A_θ, тобто скласти перелік всіх $G^\sim$-нееквівалентних значень довільних елементів θ разом з базисами алгебр A_θ, що задовольняють умову $A_\theta \neq A^{\mathrm{ker}}$ [4, 23]. Більш точно, розв'язком задачі групової класифікації є перелік пар $(\mathcal{S}_\gamma, \{A_\theta, \theta \in \mathcal{S}_\gamma\})$, $\gamma \in \Gamma$. Тут $\{\mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — це сім'я підмножин $\mathcal{S}$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ містить тільки $G^\sim$-нееквівалентні значення θ разом з $A_\theta \neq A^{\mathrm{ker}}$ та для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$ з $A_\theta \neq A^{\mathrm{ker}}$ існує таке $\gamma \in \Gamma$, що $\theta \in \mathcal{S}_\gamma \bmod G^\sim$. Структури A_θ є подібними для різних значень $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$ з фіксованим γ. Зокрема, всі A_θ, $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, мають однакову розмірність чи виявляють однакову довільність параметрів алгебри в нескінченновимірному випадку.

2.2.3. Відображення між класами. Поняття подібних диференціальних рівнянь [23] можна поширити на класи диференціальних рівнянь багатьма способами. Найбільш пряме та очевидне узагальнення надано в наступному означенні.

Означення 2.3. Два класи $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ та $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ називають *подібними*, якщо $n = n'$, $p = p'$, $k = k'$ та існує таке точкове перетворення $\Psi\colon (x, u_{(p)}, \theta) \to (x', u'_{(p)}, \theta')$, що проектується на простір $(x, u_{(q)})$ для будь-якого $0 \leq q \leq p$, та перетворення $\Psi|_{(x,u_{(q)})}$, яке є q-м продовженням $\Psi|_{(x,u)}$, що $\Psi\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ і $\Psi|_{(x,u_{(p)})}\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}'_{\Psi\theta}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$.

Тут і надалі дія точкового перетворення Ψ в просторі $(x, u_{(p)}, \theta)$ на довільні елементи з множини $\mathcal{S}$ як на диференціальні функції p-го порядку дається формулою:

$$\tilde{\theta} = \Psi\theta, \quad \text{якщо} \quad \tilde{\theta}(x, u_{(p)}) = \Psi^\theta\Big(\Theta(x, u_{(p)}), \theta\big(\Theta(x, u_{(p)})\big)\Big),$$

де $\Theta = (\mathrm{pr}_p\Psi|_{(x,u)})^{-1}$ та pr_p позначає стандартну операцію продовження точкових перетворень на похідні, що мають порядки не більші за p.

З точки зору групового аналізу подібні класи диференціальних рівнянь мають подібні властивості.

Твердження 2.1. *Подібні класи мають подібні множини допустимих перетворень. А саме, перетворення подібності* Ψ *класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *в клас* $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ *породжує взаємоднозначне відображення* Ψ^{T} *з* $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ *в* $\mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ *за правилом* $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') = \Psi^{\mathrm{T}}(\theta, \tilde{\theta}, \varphi)$, *якщо* $\theta' = \Psi\theta$, $\tilde{\theta}' = \Psi\tilde{\theta}$ *та* $\varphi' = \Psi|_{(x,u)} \circ \varphi \circ \Psi|_{(x,u)}{}^{-1}$. *Тут* $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') \in \mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$.

Подібні класи диференціальних рівнянь також мають подібні групи еквівалентності. Тобто, якщо класи є подібними відносно деякого точкового перетворення, то їх групи еквівалентності також є подібними відносно цього перетворення.

Очевидно, що переліки ліївських симетрій подібних класів, що виникають в результаті групової класифікації, є подібними відносно будь-якого з вищенаведених відношень еквівалентності. А саме, якщо Ψ є перетворенням подібності для класів $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ та $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ (див. означення 2.3) та множина $\{\{(\theta, A_\theta), \theta \in \mathcal{S}_\gamma\}, \mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}, \gamma \in \Gamma\}$ є класифікаційним переліком для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, то множина $\{\{(\Psi\theta, (\Psi|_{(x,u)})_* A_\theta), \Psi\theta \in \Psi\mathcal{S}_\gamma\}, \Psi\mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}', \gamma \in \Gamma\}$ є класифікаційним переліком для класу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$. Тут $(\Psi|_{(x,u)})_*$ є відображенням, індукованим перетворенням Ψ в множині векторних полів на просторі (x, u). A_θ є максимальною алгеброю ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_\theta$.

Множину перетворень з означення 2.3 можна розширити, як і у випадку з групами еквівалентності, розглянувши перетворення, які залежать від довільних елементів класу. Як правило, такі подібні класи диференціальних рівнянь мають подібні властивості з точки зору групового аналізу. У випадку точкових перетворень подібності ці властивості дійсно однакові з точністю до відношення подібності. Якщо ж перетворення Ψ з означення 2.3 є точковим перетворенням в просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$, то ці класи мають практично однакові трансформаційні властивості.

Подібність класів передбачає наявність взаємоднозначної відповідності між відповідними множинами довільних елементів. Якщо ж припустити, що перетворення Ψ залежить від довільних елементів класу, то в результаті буде отримане більш складне поняття відображення між класами диференціальних рівнянь.

Означення 2.4. Клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ називають *образом* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відносно деякого точкового перетворення, якщо $n = n'$, $p = p'$, $k = k'$ та існує сім'я $\bar{\varphi}$ точкових перетворень $\varphi_\theta\colon (x, u) \to (x', u')$ параметризованих $\theta \in \mathcal{S}$, що задовольняють наступним умовам. Для будь-якого параметра $\theta \in \mathcal{S}$ існує параметр $\theta' \in \mathcal{S}'$ і, навпаки, для будь-якого $\theta' \in \mathcal{S}'$ існує такий $\theta \in \mathcal{S}$, що $\mathrm{pr}_p\varphi_\theta\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}'_{\theta'}$.

Будемо казати, що сім'я точкових перетворень $\bar{\varphi}$ породжує відображення класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$. Таку сім'ю ототожнимо з відображенням класів та з відповідним відображенням множин довільних елементів. Таким чином, формулу $\mathrm{pr}_p\varphi_\theta\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}'_{\theta'}$ можна скоротити до наступної $\bar{\varphi}\theta = \theta'$.

У випадку подібних класів сім'я точкових перетворень, що реалізує відповідне відображення, фактично складається з одного елемента, тобто в цьому випадку $\bar{\varphi}$ не залежить від довільних елементів цих класів.

Клас-образ відносно деякого точкового перетворення успадковує певні трансформаційні властивості від свого класу-прообразу. Також існує і обернений зв'язок. Наприклад, рівняння з класу-прообразу є еквівалентними, якщо їх образи є такими.

Твердження 2.2. *Відображення між класами диференціальних рівнянь, породжене деяким точковим перетворенням, індукує відображення між відповідними множинами допустимих перетворень. А саме, якщо клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ є образом класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відносно сім'ї точкових перетворень $\varphi_\theta\colon (x, u) \to (x', u')$, $\theta \in \mathcal{S}$, тоді образом допустимого перетворення $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ є допустиме перетворення $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') \in \mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$, де $\mathcal{L}'_{\theta'} = \mathrm{pr}_p\varphi_\theta\mathcal{L}_\theta$, $\mathcal{L}'_{\tilde{\theta}'} = \mathrm{pr}_p\varphi_{\tilde{\theta}}\mathcal{L}_\theta$ та $\varphi' = \varphi_{\tilde{\theta}} \circ \varphi \circ (\varphi_\theta)^{-1}$.*

Більш того, подібне твердження є вірним і у зворотному напрямку.

Твердження 2.3. *Множину допустимих перетворень вихідного класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна побудувати з аналогічної множини його класу-образу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$.*

Якщо клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ є образом класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у сенсі означення 2.4, але ці класи не є подібними у сенсі означення 2.3, то подібність їх класифікацій може порушуватись. Тільки у випадку виконання групової класифікації відносно множини всіх допустимих перетворень завжди існує взаємно однозначна відповідність між класифікаційними переліками класу-образу та класу-прообразу. Для того, щоб така відповідність зберігалась у випадку класифікації відносно груп еквівалентності, треба додатково вимагати, щоб образ кожної орбіти групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ в $\mathcal{S}$ співпадав з орбітою групи $G^{\sim}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ в $\mathcal{S}'$. Ці факти можна використати для спрощення процесу розв'язання задач групової класифікації. Якщо клас-образ можна прокласифікувати простішим способом, у зв'язку з тим, що він має, наприклад, множину довільних елементів (або групу еквівалентності, або множину допустимих перетворень) більш простої структури, тоді краще виконати групову класифікацію для цього класу, а потім використати її для того, щоб отримати групову класифікацію класу-прообразу. Саме цей підхід використовується у розділі 4 для виконання групової класифікації.

Специфічним типом відображень між класами диференціальних рівнянь є відображення класів на свої підкласи. Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відображається на свій підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ сім'єю перетворень $\bar{\varphi} = \{\varphi_\theta, \theta \in \mathcal{S}\}$, тоді впорядкована трійка $(\theta, \bar{\varphi}\theta, \varphi_\theta)$ є допустимим перетворенням в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. У частинному випадку, відображення $\bar{\varphi}$ асоціюється з підгрупою H групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. А саме, таке відображення будують наступним чином. Виберемо такий підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, для якого кожна орбіта дії підгрупи H в $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}'$ точно по одному елементу. Тоді покладемо $\bar{\varphi}\theta = \theta'$, де $\{\theta'\} = \mathcal{S}' \cap H\theta$, тобто будь-який елемент орбіти відображається в один елемент перетину орбіти з $\mathcal{S}'$. В якості реалізації перетворення φ_θ вибираємо $h|^{\theta}_{(x,u)}$, де h елемент підгрупи H, що відображає θ в θ'. При цьому φ_θ ототожнюють з h. Систему додаткових допоміжних умов $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$, що виділяє підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, називають *калібру-*

ванням довільних елементів, породженим підгрупою H. Очевидно, що прообрази кожного довільного елементу з $\mathcal{S}'$ відносно відображення $\bar{\varphi}$, асоційованого з H, є $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$-еквівалентними. Відображення $\bar{\varphi}$ також встановлює зв'язок між узагальненими розширеними групами еквівалентності вихідного класу та його класів-образів за виконання певних умов на H.

Твердження 2.4. *Припустимо, що H є нормальною підгрупою узагальненої розширеної групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і кожна орбіта підгрупи H в $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ точно по одному елементу. Нехай $\bar{\varphi}$ є відображенням з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ в $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, асоційованим з H та $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ позначає узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$. Тоді рівняння з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх образи відносно відображення $\bar{\varphi}$ є $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$-еквівалентними.*

Це означає, що групова класифікація класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, виконана з точністю до $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$-еквівалентності, зводиться до групової класифікації підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ відносно його групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$.

Останнє твердження можна поширити на випадок калібрування довільних елементів за підгрупою, що не є нормальною.

Твердження 2.5. *Нехай $\{H_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ є сім'єю підгруп узагальненої розширеної групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$; кожне перетворення з групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ породжує відношення подібності на цій сім'ї; для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ кожна орбіта підгрупи H_γ в $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ точно по одному елементу. Нехай $\bar{\varphi}$ є відображенням класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ в підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, пов'язане з підгрупою H_{γ_0} для фіксованого значення $\gamma_0 \in \Gamma$ та $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ позначає узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$. Тоді рівняння з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх образи відносно відображення $\bar{\varphi}$ є $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$- еквівалентними.*

Доведення тверджень, наведених у цьому підрозділі, можна знайти у роботах [100, 105, 119].

2.3. Основні означення та твердження щодо законів збереження

У цьому підрозділі наведено основні означення та твердження, що стосуються законів збереження диференціальних рівнянь [6, 10, 21]. Після цього сформульовано означення еквівалентності законів збереження відносно груп еквівалентності, запропоноване у роботі [103]. Це означення утворює основу для модифікації прямого методу побудови законів збереження, застосованого у розділі 3.5 для вичерпної класифікації локальних законів збереження рівнянь (3.1).

Нехай $\mathcal{L}$ є диференціальним рівнянням $L(x, u_{(p)}) = 0$ на невідому функцію u, що залежить від n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. $\mathcal{L}_{(k)}$ позначає множину всіх алгебраїчно незалежних диференціальних наслідків рівняння $\mathcal{L}$, що мають, як диференціальні рівняння, порядки не більші за k. Множину $\mathcal{L}_{(k)}$ ототожнюють з многовидом визначеним $\mathcal{L}_{(k)}$ у просторі джетів $J^{(k)}$.

Означення 2.5. *Вектором, що зберігається*, рівняння $\mathcal{L}$ називають n-кортеж $F = (F^1(x, u_{(r)}), \dots, F^n(x, u_{(r)}))$, для якого дивергентний вираз $\operatorname{Div} F := D_i F^i$ тотожно дорівнює нулю на множині всіх розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ (тобто $\operatorname{Div} F\big|_{\mathcal{L}} = 0$).

Тут та нижче $D_i = D_{x_i}$ позначає оператор повного диференціювання за змінними x_i, тобто $D_i = \partial_{x_i} + u_{\alpha,i}\partial_{u_\alpha}$, де u_α та $u_{\alpha,i}$ позначають змінні в просторі джетів, що відповідають похідним $\partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ та $\partial u_\alpha/\partial x_i$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Також вважаємо, що по індексах, які повторюються, іде підсумовування та будь-яка функція є своєю похідною нульового порядку. Символ $V\big|_{\mathcal{L}}$ означає, що величину V розглядають тільки на розв'язках рівняння $\mathcal{L}$.

Означення 2.6. Вектор F, що зберігається, називається *тривіальним*, якщо $F^i = \hat{F}^i + \check{F}^i$, $i = \overline{1, n}$, де $\hat{F}^i$ та $\check{F}^i$ подібно до F^i є функціями змінної x та похідних u (тобто диференціальними функціями), $\hat{F}^i$ тотожно дорівнює нулю на розв'язках рівняння $\mathcal{L}$ та n-кортеж $\check{F} = (\check{F}^1, \ldots, \check{F}^n)$ є нульовим дивергентним виразом (тобто його дивергенція тотожно дорівнює нулю).

Тривіальності, пов'язаної з тим, що вектори, які зберігаються, дорівнюють нулю на многовиді рівняння, можна легко позбутися, якщо перейти на многовид рівняння, врахувавши при цьому всі його диференціальні наслідки. Будь-яку нуль-дивергенцію можна задати наступним чином [21].

Лема 2.1. *n-кортеж $F = (F^1, \ldots, F^n)$, $n \geq 2$, є нуль-дивергенцією ($\mathrm{Div}\, F \equiv 0$) тоді і тільки тоді, коли існують такі гладкі функції v^{ij} ($i, j = \overline{1,n}$) змінної x та похідних u, що $v^{ij} = -v^{ji}$ та $F^i = D_j v^{ij}$.*

Функції v^{ij} називаються *потенціалами*, що відповідають нуль-дивергенції F. Якщо $n = 1$, то будь-яка дивергенція є сталою.

Означення 2.7. Два вектора F та F', що зберігаються, називаються *еквівалентними*, якщо вектор-функція $F' - F$ є тривіальним вектором, що зберігається.

Вищенаведені означення тривіальності та еквівалентності векторів, що зберігаються, є природними, зважаючи на 'емпіричне' означення законів збереження диференціальних рівнянь як дивергенцій їх векторів, що зберігаються, тобто дивергентних виразів, які тотожно дорівнюють нулю для всіх розв'язків вихідного рівняння. Наприклад, еквівалентні вектори, що зберігаються, відповідають тому самому закону збереження. Це дозволяє сформулювати строге означення закону збереження (див., наприклад, [10]). А саме, для будь-якого рівняння $\mathcal{L}$ множина $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ векторів, що зберігаються, є лінійним простором, а підмножина $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ тривіальних векторів, що зберігаються, є лінійним підпростором простору $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Фактор-простір $\mathrm{CL}(\mathcal{L}) = \mathrm{CV}(\mathcal{L})/\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ збігається з множиною класів еквівалентності $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ відносно відношення еквівалентності, наведеного в означенні 2.7.

Означення 2.8. Елементи простору $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ називають *законами збереження* рівняння $\mathcal{L}$, а весь фактор-простір $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ називають *простором законів збереження* рівняння $\mathcal{L}$.

Тому для того, щоб отримати опис множини законів збереження рівняння $\mathcal{L}$, треба знайти простір $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$, що еквівалентно побудові або базису цього простору, якщо $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) < \infty$, або системи твірних в нескінченновимірному випадку. Елементи простору $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$, які належать до одного класу еквівалентності, що відповідає закону збереження $\mathcal{F}$, називають векторами густини цього закону збереження. Додатково елементи з $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ ототожнюють з їх представниками в $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Для $F \in \mathrm{CV}(\mathcal{L})$ та $\mathcal{F} \in \mathrm{CL}(\mathcal{L})$ позначення $F \in \mathcal{F}$ означає, що F є вектором густини закону збереження $\mathcal{F}$. На відміну від порядка r_F вектора F, що зберігається, як максимального порядку похідних, що виникають у F, *порядком закону збереження* $\mathcal{F}$ називають $\min\{r_F \,|\, F \in \mathcal{F}\}$. Під лінійною залежністю законів збереження розуміють їх лінійну залежність як елементів простору $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$. Отже, в рамках підходу, що грунтується на "представниках", закони збереження системи $\mathcal{L}$ вважають *лінійно залежними*, якщо існує лінійна комбінація їх представників, яка є тривіальним вектором, що зберігається.

Застосовуючи лему Адамара до означення вектора, що зберігається, та інтегруючи отриманий вираз за частинами, маємо, що дивергенцію будь-якого вектора, що зберігається, рівняння $\mathcal{L}$ завжди можна зобразити, з точністю до відношення еквівалентності таких векторів, як добуток лівої частини рівняння $\mathcal{L}$ та коефіцієнту λ, що є функцією на просторі джетів $J^{(k)}$ [21]:

$$\mathrm{Div}\, F = \lambda L. \tag{2.1}$$

Тут порядок k визначається рівнянням $\mathcal{L}$ та допустимим порядком законів збереження.

Означення 2.9. Формулу (2.1) та функцію λ називають *характеристичною формою* та *характеристикою* закону збереження $\operatorname{Div} F = 0$, відповідно.

Характеристика λ є *тривіальною*, якщо вона тотожно дорівнює нулю для всіх розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Дві характеристики λ та $\tilde{\lambda}$ задовольняють рівняння (2.1) для того ж самого F та, отже, є *еквівалентними* тоді і тільки тоді, коли $\lambda - \tilde{\lambda}$ є тривіальною характеристикою. Подібно до векторів, що зберігаються, множина $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$ характеристик, які відповідають законам збереження рівняння $\mathcal{L}$, є лінійним простором та підмножина $\mathrm{Ch}_0(\mathcal{L})$ тривіальних характеристик є лінійним підпростором в $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$. Фактор-простір $\mathrm{Ch}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ch}(\mathcal{L})/\mathrm{Ch}_0(\mathcal{L})$ співпадає з множиною класів еквівалентності $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$ відносно цього відношення еквівалентності характеристик.

Можна істотно спростити та впорядкувати класифікацію законів збереження, додатково беручи до уваги перетворення симетрії рівняння або перетворення еквівалентності в цілому класі рівнянь. Тоді задача стає подібною до задачі групової класифікації диференціальних рівнянь.

Означення 2.10. Нехай G є групою симетрій рівняння $\mathcal{L}$. Два закони збереження з відповідними векторами F та F', що зберігаються, називають *G-еквівалентними*, якщо існує перетворення $g \in G$ таке, що вектори F_g та F', що зберігаються, є еквівалентними у сенсі означення 2.7.

Вектор F_g, що зберігається, в матричних позначеннях визначається за формулою

$$F_g(\tilde{x}, \tilde{u}_{(r)}) = \frac{1}{|D_x\tilde{x}|}(D_x\tilde{x})F(x, u_{(r)}).$$

Тут $|D_x\tilde{x}|$ — визначник матриці $D_x\tilde{x} = (D_{x_j}\tilde{x}_i)$.

Розглянемо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ рівнянь $\mathcal{L}_\theta$: $L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})) = 0$ з довільними елементами $\theta(x, u_{(p)}) = (\theta^1(x, u_{(p)}), \ldots, \theta^k(x, u_{(p)}))$, що має групу еквівалентності $G^{\sim}$. Нехай $\mathcal{P}$ позначає множину всіх пар, кожна з яких складається з рівняння $\mathcal{L}_\theta$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ та закону збереження $\mathcal{F}$ цього рівняння. На множині $\mathcal{P}$ існує наступне відношення еквівалентності.

Означення 2.11. Нехай $\theta, \theta' \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F} \in \mathrm{CL}(\mathcal{L}_\theta)$, $\mathcal{F}' \in \mathrm{CL}(\mathcal{L}_{\theta'})$, $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, \mathcal{F})$ та $(\mathcal{L}_{\theta'}, \mathcal{F}')$ називають $G^{\sim}$-*еквівалентними*, якщо існує перетворення $g \in G^{\sim}$, яке перетворює рівняння $\mathcal{L}_\theta$ в рівняння $\mathcal{L}_{\theta'}$ та таке, що вектори F_g та F', які зберігаються, еквівалентні у сенсі означення 2.7.

Класифікацію законів збереження відносно групи $G^{\sim}$ розуміють як класифікацію в $\mathcal{P}$ відносно вищенаведеного відношення еквівалентності. Цю задачу можна досліджувати аналогічно до задачі групової класифікації в класах диференціальних рівнянь, особливо, якщо вона сформульована у термінах характеристик. А саме, спочатку будуються закони збереження, що визначені для всіх значень довільних елементів. (Відповідні вектори, що зберігаються, можуть залежати від довільних елементів.) Потім відносно групи еквівалентності класифікуються довільні елементи, для кожного з яких рівняння допускає додаткові закони збереження.

Аналогічним чином можна ввести відношення еквівалентності на P, які утворюються або узагальненнями звичайних груп еквівалентності або всіма допустимими точковими або контактними перетвореннями в парах рівнянь з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Додаткові відомості щодо законів збереження можна знайти в роботах [21, 38, 42, 43, 80, 103]. Зауважимо, що наведене означення 2.11 запропоновано в [103].

2.4. Некласичні симетрії та еквівалентність операторів редукції

Поняття некласичної симетрії (також використовують терміни “умовна симетрія” та “Q-умовна симетрія”) введено Дж. Блюманом та Дж. Коулом у 1969 році [49]. Точне та строге означення цього поняття запропоновано набагато пізніше [70] (див. також [127]).

У цьому розділі наведено необхідні означення та твердження щодо некласичної симетрії для випадку (1+1)-вимірного диференціального рівняння. Теоретичні відомості, щодо некласичних симетрій рівнянь з довільною кількістю незалежних змінних наведено, наприклад, в [71, 127].

Нехай $\mathcal{L}$ є диференціальним рівнянням p-го порядку на функцію u, що залежить від змінних t та x, тобто воно має вигляд $L(t,x,u_{(p)})=0$.

Множину диференціальних операторів першого порядку загального вигляду

$$Q=\tau(t,x,u)\partial_t+\xi(t,x,u)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u,\quad (\tau,\xi)\neq(0,0),$$

позначимо через $\mathcal{Q}$. Тут і надалі $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_x=\partial/\partial x$ та $\partial_u=\partial/\partial u$. Нижні індекси позначають диференціювання за відповідними змінними.

Означення 2.12. Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ називається *умовно інваріантним* відносно оператора Q, якщо виконується умова

$$Q_{(p)}L(t,x,u_{(p)})\big|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}^{(p)}}=0, \tag{2.2}$$

яка називається *критерієм умовної (або некласичної) інваріантності*. Тоді Q називається оператором *умовної симетрії* (або некласичної симетрії, Q-умовної симетрії, або оператором редукції) рівняння $\mathcal{L}$.

В означенні 2.12 символ $Q_{(p)}$ позначає p-те продовження оператора Q, тобто $Q_{(p)}=Q+\sum_{0<\alpha+\beta\leqslant p}\eta^{\alpha\beta}\partial_{u_{\alpha\beta}}$, де $\eta^{\alpha\beta}=D_t^\alpha D_x^\beta Q[u]+\tau u_{\alpha+1,\beta}+\xi u_{\alpha,\beta+1}$ [21, 23]. Символ $\mathcal{Q}^{(p)}$ позначає многовид, визначений на просторі джетів $J^{(p)}$ множиною диференціальних наслідків $(p-1)$-го порядку характеристичного рівняння $\eta(t,x,u)-\tau(t,x,u)u_t-\xi(t,x,u)u_x=0$, тобто таких наслідків, що мають, як диференціальні рівняння, порядки не більші за p.

Позначимо множину операторів некласичної симетрії рівняння $\mathcal{L}$ через $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$. Будь-який оператор ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}$ належить до множини $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$, тобто він є некласичним оператором симетрії того ж рівняння, оскільки його коефіцієнти задовольняють критерій умовної інваріантності (2.2). Іноді $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$ вичерпується операторами, що є еквівалентними операторам ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}$ у сенсі наступного означення.

Означення 2.13. Два оператора некласичної симетрії $\widetilde{Q}$ та Q рівняння $\mathcal{L}$ називаються еквівалентними, якщо вони відрізняються на множник, що є функцією змінних t, x та u: $\widetilde{Q} = \lambda Q$, де $\lambda = \lambda(t, x, u)$, $\lambda \neq 0$. *Позначення:* $\widetilde{Q} \sim Q$.

Позначимо результат факторизації множини $\mathcal{Q}$ за цим відношенням еквівалентності $\mathcal{Q}_\mathrm{f}$. Елементи $\mathcal{Q}_\mathrm{f}$ будемо ототожнювати з їх представниками в $\mathcal{Q}$. Якщо рівняння $\mathcal{L}$ є умовно інваріантним відносно оператора Q, тоді воно є умовно інваріантним відносно будь-якого оператора еквівалентного оператору Q [71, 127]. Отже, відношення еквівалентності на $\mathcal{Q}$ індукує цілком визначене відношення еквівалентності на $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$; факторизацію множини $\mathcal{Q}$ за цим відношенням еквівалентності можна обмежити на $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$, результатом чого є підмножина $\mathcal{Q}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ множини $\mathcal{Q}_\mathrm{f}$. Як і в усій множині $\mathcal{Q}_\mathrm{f}$, елементи $\mathcal{Q}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ ототожнюють з їх представниками в $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$. Фактично, треба вивчати некласичні симетрії з точністю цього відношення еквівалентності.

Для будь-якого $(1+1)$-вимірного еволюційного рівняння існують два принципово різних випадки некласичних симетрій в залежності від того чи дорівнює нулю коефіцієнт τ операторів редукції. У випадку $\tau = 0$ маємо $\xi \neq 0$, та, з точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції, можна покласти $\xi = 1$. Тоді оператор редукції має вигляд $Q = \partial_x + \eta\partial_u$. З критерію умовної інваріантності отримуємо тільки одне визначальне рівняння на коефіцієнт η, яке зводиться неточковим перетворенням до вихідного рівняння, в якому η стає параметром. З цієї причини випадок $\tau = 0$ називається “no-go” випадком [123]. Вперше “no-go” випадок було повністю досліджено для одномірного лінійного рівняння теплопровідності [68]. В роботі [122] це доведення було поширено для класу $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь. У зв’язку з тим, що у “no-go” випадку не можливо отримати вичерпний перелік операторів редукції, його прийнято виключати під час проведення класифікації некласичних симетрій. Однак, використовуючи анзаци на коефіцієнт η (часто припускають, шо η є поліномом від u), можна побудувати деякі оператори редукції вигляду $Q = \partial_x + \eta\partial_u$ (див., наприклад, [60, 68, 76]).

Можна істотно спростити та впорядкувати класифікацію операторів редукції, додатково приймаючи до уваги ліївські симетрії рівняння.

Лема 2.2. *Будь-яке перетворення змінних t, x та u індукує взаємооднозначне відображення множини $\mathcal{Q}$ в себе. А саме, перетворення g: $\tilde{t} = T(t,x,u)$, $\tilde{x} = X(t,x,u)$, $\tilde{u} = U(t,x,u)$ породжує таке відображення $g_*\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, що оператор Q відображається в оператор $g_*Q = \tilde{\tau}\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\xi}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{\eta}\partial_{\tilde{u}}$, де $\tilde{\tau}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u}) = QT(t,x,u)$, $\tilde{\xi}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u}) = QX(t,x,u)$, $\tilde{\eta}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u}) = QU(t,x,u)$. Якщо $Q' \sim Q$, то $g_*Q' \sim g_*Q$. Отже, відповідне факторизоване відображення $g_{\mathrm{f}}\colon \mathcal{Q}_{\mathrm{f}} \to \mathcal{Q}_{\mathrm{f}}$ також є цілком визначеним та взаємно однозначним.*

З цього твердження випливає поява відношення еквівалентності, що відрізняється від звичайного, описаного в означенні 2.13 [27, 99].

Означення 2.14. Два оператора некласичної симетрії $\widetilde{Q}$ та Q рівняння $\mathcal{L}$ називаються еквівалентними відносно групи G точкових перетворень, якщо існує таке перетворення $g \in G$, для якого оператори $\widetilde{Q}$ та g_*Q є еквівалентними у сенсі означення 2.13.
Позначення: $\widetilde{Q} \sim Q \bmod G$.

Відомо, що задача відшукання операторів некласичної симетрії є більш складною, ніж подібна задача у випадку класичної симетрії, оскільки перша задача зводиться до інтегрування перевизначеної системи нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, тоді як у випадку ліївської симетрії маємо більш перевизначену систему лінійних рівнянь. Виникає питання, чи можна використати відображення між класами та перетворення еквівалентності класу під час дослідження некласичних симетрій так само як це можна робити для того, щоб знайти ліївські симетрії? Наступні твердження дають позитивну відповідь.

Лема 2.3. *Нехай є деяке точкове перетворення* g*, що зводить рівняння* $\mathcal{L}$ *до рівняння* $\tilde{\mathcal{L}}$*, тоді* g_* *відображає* $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$ *на* $\mathcal{Q}(\tilde{\mathcal{L}})$ *взаємно однозначним чином. Аналогічне твердження є справедливим для факторизованого відображення* g_f *з* $\mathcal{Q}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ *на* $\mathcal{Q}_\mathrm{f}(\tilde{\mathcal{L}})$.

Наслідок 2.1. *Нехай* G *є групою ліївської симетрії рівняння* $\mathcal{L}$*. Тоді еквівалентність операторів з множини* $\mathcal{Q}$ *відносно групи* G *є відношенням еквівалентності на множинах* $\mathcal{Q}(\mathcal{L})$ *та* $\mathcal{Q}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$.

Нехай $G^\sim = G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ є групою еквівалентності класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ диференціальних рівнянь та $P = P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ позначає множину пар, кожна з яких складається з довільного елемента θ з множини $\mathcal{S}$ та оператора Q з $\mathcal{Q}(\mathcal{L}_\theta)$. Будемо називати $P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ *множиною некласичних симетрій* (або множиною операторів редукції) класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Наслідок 2.2. *Дія перетворень з групи еквівалентності* $G^\sim$ *на* $\mathcal{S}$ *та* $\{\mathcal{Q}(\mathcal{L}_\theta)\,|\,\theta\in\mathcal{S}\}$ *разом з відношенням еквівалентності диференціальних операторів природно породжує відношення еквівалентності на* P.

Означення 2.15. Нехай $\mathcal{L}_\theta, \mathcal{L}_{\theta'} \in \mathcal{L}|_\mathcal{S}$, $Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{L}_\theta)$, $Q' \in \mathcal{Q}(\mathcal{L}_{\theta'})$. Пари (θ, Q) та (θ', Q') називаються $G^\sim$-*еквівалентними*, якщо існує перетворення $g \in G^\sim$, яке перетворює рівняння $\mathcal{L}_\theta$ в рівняння $\mathcal{L}_{\theta'}$, та $Q' \sim g_*Q$.

Класифікацію операторів редукції відносно групи $G^\sim$ розуміємо як класифікацію в множині P відносно наведеного відношення еквівалентності. Цю задачу можна розв'язувати подібно до задачі групової класифікації в класах диференціальних рівнянь. А саме, спочатку будуємо оператори редукції, що є визначеними для всіх значень довільних елементів. Потім відносно групи еквівалентності класифікуємо значення довільних елементів, для кожного з яких рівняння $\mathcal{L}_\theta$ допускає додаткові оператори редукції.

Аналогічним чином вводяться відношення еквівалентності на P, породжені або узагальненнями звичайних груп еквівалентності, або всіма допустимими точковими перетвореннями в парах рівнянь з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Наслідок 2.3. *Подібні класи мають подібні множини операторів редукції. А саме, перетворення подібності* Ψ *з класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *на клас* $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ *породжує взаємно однозначне відображення* $\bar{\Psi}$ *з* $P(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ *в* $P(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ *за правилом* $(\theta', Q') = \bar{\Psi}(\theta, Q)$*, якщо* $\theta' = \Psi\theta$ *та* $Q' = (\Psi|_{(x,u)})_* Q$*. Тут* $(\theta, Q) \in P(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$*,* $(\theta', Q') \in P(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$*.*

Наслідок 2.4. *Відображення між класами диференціальних рівнянь, породжене деяким точковим перетворенням, індукує відображення між відповідними множинами операторів редукції. А саме, якщо клас* $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ *є образом класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *відносно сім'ї точкових перетворень* $\varphi_\theta\colon (x, u) \to (x', u')$*,* $\theta \in \mathcal{S}$*, тоді образом* $(\theta, Q) \in P(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ *є* $(\theta', Q') \in P(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$*, де* $\mathcal{L}'_{\theta'} = \mathrm{pr}_p \varphi_\theta \mathcal{L}_\theta$ *та* $Q' = (\varphi_{\tilde{\theta}})_* Q$*.*

Обернене твердження також є вірним.

Твердження 2.6. *Множину операторів редукції вихідного класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *можна відновити з відповідної множини його класу-образу* $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$*.*

2.5. Висновки до розділу 2

У розділі 2 наведено основні теоретичні відомості щодо обчислення ліївських симетрій диференціальних рівнянь, постановки і розв'язання задачі групової класифікації, знаходження локальних законів збереження, а також некласичних симетрій. Серед загальновідомих фактів у цьому розділі містяться нові оригінальні результати з наступних джерел [100, 105, 119].

РОЗДІЛ 3

Групова класифікація та закони збереження нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями

У цьому розділі клас (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь у частинних похідних загального вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m \tag{3.1}$$

досліджено методами симетрійного аналізу. Тут $f = f(x)$, $g = g(x)$ та $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x, $f(x)g(x) \neq 0$, n та m — довільні сталі. Лінійний випадок виключено з розгляду, оскільки він добре досліджений [23,88]. Додатково припускаємо, що коефіцієнт дифузії є нелінійним, тобто $n \neq 0$. Випадок $n = 0$ є особливим, тому його досліджено окремо в розділі 4.

У підрозділі 3.1 побудовано різні типи груп еквівалентності для досліджуваного класу.

Групову класифікацію рівнянь з класу (3.1) виконано у підрозділі 3.2. Показано, що використання *узагальненої розширеної* групи еквівалентності та *умовних* груп еквівалентності відіграє визначну роль в розв'язанні цієї задачі. Важливість вірного вибору калібрування довільних елементів за допомогою перетворень еквівалентності обговорюється та ілюструється прикладами. Вперше дослідження щодо узагальнень групи еквівалентності та різних можливостей вибору калібрувань проводилося у роботах [80, 81] для класу (1.3).

Підрозділ 3.3 присвячено пошуку додаткових перетворень еквівалентності між отриманими випадками симетрійного розширення, які є нееквівалентними відносно перетворень з наведених груп еквівалентності. В результаті, розв'язано задачу групової класифікації в класі (3.1) відносно множини всіх точкових перетворень.

У підрозділі 3.4 вичерпно описано множини допустимих перетворень у класі (3.1). Підрозділ 3.5 присвячено класифікації локальних законів збереження рівнянь з класу (3.1).

Дослідження рівнянь (3.1) в рамках ліївського групового аналізу завершено в підрозділі 3.6 побудовою точних розв'язків для деяких рівнянь з цього класу. При цьому використано отримані результати групової класифікації та класичний метод ліївської редукції.

3.1. Групи еквівалентності та вибір класу для дослідження

Для групової класифікації є суттєвим відшукати перетворення, які зберігають загальний вигляд рівнянь з досліджуваного класу та перетворюють лише довільні елементи. Такі перетворення називаються *перетвореннями еквівалентності* і складають групу [23]. Див. підрозділ 2.2.

Зауваження 3.1. Довільний елемент m не є визначеним, якщо $h = 0$. В цьому випадку, більш зручно вважати, що $m = n + 1$ або $m = 1$.

Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (3.1) складається з невироджених точкових перетворень в просторі змінних (t, x, u, f, g, h, n, m), які проектуються на простір (t, x, u), тобто вони мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\tilde{t} = T^t(t, x, u), && \tilde{f} = T^f(t, x, u, f, g, h, n, m),\\
&\tilde{x} = T^x(t, x, u), && \tilde{g} = T^g(t, x, u, f, g, h, n, m),\\
&\tilde{u} = T^u(t, x, u), && \tilde{h} = T^h(t, x, u, f, g, h, n, m)
\end{aligned}$$

та трансформують будь-яке рівняння з класу (3.1) на функцію $u = u(t, x)$ з довільними елементами (f, g, h, n, m) в рівняння з того ж класу на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x})$ з новими довільними елементами $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{n}, \tilde{m})$.

Групу еквівалентності класу (3.1) побудовано, використовуючи прямий метод [85].

Теорема 3.1. *Група $G^{\sim}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u,$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0 \delta_1}{\delta_3 \varphi_x} f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0 \varphi_x}{\delta_3^{n+1}}\, g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_3^m \varphi_x} h, \quad \tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j $(j = \overline{0,3})$ — довільні сталі, $\delta_0\delta_1\delta_3 \neq 0$, φ — довільна гладка функція змінної x, $\varphi_x \neq 0$.

Виявляється, що клас (3.1) допускає перетворення еквівалентності, що не належать групі $G^{\sim}$ та утворюють, разом зі звичайними перетвореннями еквівалентності, *узагальнену розширену групу еквівалентності*. Обмеження на перетворення з групи еквівалентності можуть бути послаблені в двох напрямках. По-перше, допускається, що перетворення змінних t, x, u залежать від довільних елементів f, g, h, n та m (префікс “узагальнена” [19]). Ця залежність не є обов’язково точковою і стає точковою після фіксування довільних елементів. По-друге, явна форма нових довільних елементів $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{n}, \tilde{m})$ визначається через (t, x, u, f, g, h, n, m) деяким нелокальним способом (префікс “розширена”).

Теорема 3.2. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу (3.1) складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \psi(x) u,$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0 \delta_1}{\varphi_x \psi^{n+2}} f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0 \varphi_x}{\psi^{2n+2}}\, g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\varphi_x \psi^{m+n+1}} h, \quad \tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j $(j = 0, 1, 2)$ — довільні сталі, $\delta_0\delta_1 \neq 0$, φ — довільна гладка функція змінної x, $\varphi_x \neq 0$. Функція $\psi(x)$ визначається за формулою

$$\psi(x) = \begin{cases} \big(1 - (n+1)F(x)\big)^{-\frac{1}{n+1}}, & n \neq -1 \\ e^{F(x)}, & n = -1 \end{cases}, \quad F(x) = \delta_3 \int \frac{dx}{g(x)} + \delta_4.$$

Зауваження 3.2. Наведене представлення функції $\psi(x)$ гарантує, що ця сім'я перетворень неперервно параметризована параметром n.

З теореми 3.1 випливає, що перетворення

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = \int \frac{dx}{g(x)}, \quad \tilde u = u \tag{3.2}$$

зводить рівняння (3.1) до наступного рівняння

$$\tilde f(\tilde x)\tilde u_{\tilde t} = (\tilde u^n \tilde u_{\tilde x})_{\tilde x} + \tilde h(\tilde x)\tilde u^m,$$

де $\tilde f(\tilde x) = g(x)f(x)$, $\tilde g(\tilde x) = 1$ та $\tilde h(\tilde x) = g(x)h(x)$. (Так само будь-яке рівняння з класу (3.1) можна звести до подібного рівняння зі значенням $\tilde f(\tilde x) = 1$.) Це дозволяє, не втрачаючи загальності, обмежитись дослідженням рівнянь загального вигляду

$$f(x)u_t = (u^n u_x)_x + h(x)u^m. \tag{3.3}$$

Всі результати, а саме, симетрії, розв'язки та закони збереження класу (3.3), можна розмножити для класу (3.1) перетвореннями (3.2).

Групу еквівалентності класу (3.3) можна отримати з теорем 3.1 та 3.2, покладаючи в формулах перетворень $\tilde g = g = 1$. Отримані результати сформульовано у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.3. *Узагальнена група еквівалентності $\hat G_1^{\sim}$ класу (3.3), де $n \neq -1$, складається з перетворень*

$$\tilde t = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde x = \frac{\delta_3 x + \delta_4}{\delta_5 x + \delta_6} =: \varphi(x), \quad \tilde u = \delta_7 {\varphi_x}^{\frac{1}{2n+2}} u,$$

$$\tilde f = \delta_1 {\delta_7}^n {\varphi_x}^{-\frac{3n+4}{2n+2}} f, \quad \tilde h = {\delta_7}^{-m+n+1} {\varphi_x}^{-\frac{m+3n+3}{2n+2}} h, \quad \tilde n = n, \quad \tilde m = m,$$

де δ_j $(j = \overline{1,7})$ — довільні сталі, $\delta_1\delta_7 \neq 0$ та $\delta_3\delta_6 - \delta_4\delta_5 = \pm 1$.

Для $n = -1$ перетворення з групи $\hat G_1^{\sim}$ набувають вигляду

$$\tilde t = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde x = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde u = \delta_5 e^{\delta_6 x} u,$$

$$\tilde f = \frac{\delta_1}{{\delta_3}^2 \delta_5 e^{\delta_6 x}} f, \quad \tilde h = \frac{1}{{\delta_3}^2 {\delta_5}^m e^{m\delta_6 x}} h, \quad \tilde n = n, \quad \tilde m = m,$$

де δ_j $(j = \overline{1,6})$ — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\delta_5 \neq 0$.

У наступному підрозділі знайдені перетворення еквівалентності застосовано для спрощення вигляду функцій $f(x)$ та $h(x)$ під час дослідження ліївських симетрій рівняння (3.3).

Зауваження 3.3. Теорему 3.3 можна переформулювати наступним чином. Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ класу (3.3) для значень $n \neq -1$ складається з перетворень

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2,\\
&\tilde{x} = \frac{1}{\varepsilon(n+1)\delta_3(1-(n+1)(\delta_3 x+\delta_4))} - \frac{1}{\varepsilon(n+1)\delta_3} =: \varphi(x),\\
&\tilde{u} = (1-(n+1)(\delta_3 x+\delta_4))^{-\frac{1}{n+1}} u = \varepsilon^{\frac{1}{2n+2}} {\varphi_x}^{\frac{1}{2n+2}} u =: \psi(x) u,\\
&\tilde{f} = \delta_1 \varepsilon^{\frac{n}{2n+2}} {\varphi_x}^{-\frac{3n+4}{2n+2}} f, \quad \tilde{h} = \varepsilon^{\frac{-m+n+1}{2n+2}} {\varphi_x}^{-\frac{m+3n+3}{2n+2}} h, \quad \tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m,
\end{aligned}
$$

де δ_j $(j = \overline{1,4})$ та ε — довільні сталі, $\varepsilon\delta_1\delta_3 \neq 0$.

Таке представлення перетворень з групи $\hat{G}_1^{\sim}$ є більш громіздким ніж в попередній теоремі, але показує, що сім'я цих перетворень неперервно параметризована параметром n, включаючи значення $n = -1$. Дійсно,

$$
\lim_{n\to -1} \varphi(x) = \frac{x}{\varepsilon} + \frac{\delta_4}{\varepsilon\delta_3}, \quad \lim_{n\to -1} \psi(x) = e^{\delta_3 x + \delta_4}.
$$

Оскільки параметри n та m є інваріантними відносно всіх вищезазначених перетворень еквівалентності, то клас (3.1) (або клас (3.3)) можна представити як об'єднання підкласів, що не перетинаються. Кожен з таких підкласів відповідає фіксованим значенням n та m. Таке зображення дозволяє надати іншу інтерпретацію наведених вище результатів. Наприклад, узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ з теореми 3.3 можна розглядати як сім'ю звичайних груп еквівалентності підкласів класу (3.3), параметризованих n та m.

Виникає питання, чи можна отримати більш широкі групи еквівалентності для деяких з таких підкласів, апріорно вважаючи, що параметри n та m задовольняють деякі умови? Відповідь є позитивною у випадку $m = n + 1$. А саме, має місце наступне твердження.

Теорема 3.4. *Клас рівнянь*

$$f(x)u_t=(g(x)u^nu_x)_x+h(x)u^{n+1} \tag{3.4}$$

допускає групу еквівалентності $G^{\sim}_{m=n+1}$*, що складається з перетворень*

$$\begin{aligned}&\tilde t=\delta_1t+\delta_2,\quad \tilde x=\varphi(x),\quad \tilde u=\psi(x)u,\\&\tilde f=\frac{\delta_0\delta_1}{\psi^{n+2}\varphi_x}f,\quad \tilde g=\frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^{2n+2}}g,\\&\tilde h=\delta_0\frac{h-\psi^{n+1}(\psi^{-(n+2)}\psi_xg)_x}{\psi^{2n+2}\varphi_x},\quad (\tilde n=n),\end{aligned}$$

де φ *та* ψ *— довільні функції змінної* x*,* δ_j $(j=0,1,2)$ *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1\varphi_x\psi\neq0$.

Треба підкреслити, що група $G^{\sim}_{m=n+1}$ є звичайною групою еквівалентності класу (3.4) навіть якщо вважати n довільним елементом. Більш того, вона є ширшою ніж узагальнена розширена група еквівалентності $\hat G^{\sim}$ всього класу (3.1), в перетвореннях з якої покладено $m=n+1$ (позначення: $\hat G^{\sim}|_{m=n+1}$). Групу $G^{\sim}_{m=n+1}$ називають *умовною групою еквівалентності* класу (3.1) з умовою $m=n+1$ на довільні елементи. Вона є нетривіальною умовною групою еквівалентності класу (3.1), оскільки група $\hat G^{\sim}|_{m=n+1}$ є її підгрупою, тобто $\hat G^{\sim}|_{m=n+1}\subsetneq G^{\sim}_{m=n+1}$. Зауважимо, що поняття умовної групи еквівалентності вперше використано при розв'язанні задачі групової класифікації для системи двох нелінійних рівнянь Лапласа [28] (див. також [101]).

Після виконання калібрування $g=1$ на параметри групи $G^{\sim}_{m=n+1}$ накладається обмеження $\delta_0\varphi_x=\psi^{2n+2}$, враховуючи яке, отримуємо узагальнену групу еквівалентності $\hat G^{\sim}_{1,m=n+1}$ класу рівнянь

$$f(x)u_t=(u^nu_x)_x+h(x)u^{n+1}. \tag{3.5}$$

Наслідок 3.1. *Узагальнена група еквівалентності* $\hat G^{\sim}_{1,m=n+1}$ *класу* (3.5) *складається з перетворень*

$$\tilde t=\delta_1t+\delta_2,\quad \tilde x=\varphi(x),\quad \tilde u=\psi(x)u,$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0^2\delta_1}{\psi^{3n+4}}f, \quad \tilde{h} = \delta_0^2\frac{h - \psi^{n+1}[\psi^{-(n+2)}\psi_x]_x}{\psi^{4n+4}}, \quad (\tilde{n} = n),$$

де φ та ψ — функції, що задовольняють умови $\varphi_x\psi \neq 0$ та $\delta_0\varphi_x = \psi^{2n+2}$, δ_j $(j = 0, 1, 2)$ — довільні сталі, $\delta_0\delta_1\psi \neq 0$.

Зауважимо, що група $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$ стає звичайною групою еквівалентності для будь-якого свого підкласу з фіксованим значенням n.

Одночасне використання перетворень з груп еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_1$ та $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$ для калібрування довільних елементів призводить до вирішального спрощення розв'язання задачі групової класифікації та представлення отриманих результатів. Див. зауваження 3.6 та приклад 3.3.

Існує ще одна умова на довільні елементи, що призводить до появи нетривіальної умовної групи еквівалентності. Всі такі умови та відповідні умовні групи еквівалентності систематично вивчено під час класифікації всіх допустимих перетворень у підрозділі 3.4

Зауваження 3.4. Зважаючи на фізичний сенс рівняння (3.1), функція u має задовольняти умову $u \geq 0$. В цьому випадку потрібно вимагати, щоб коефіцієнти біля u були додатними в усіх перетвореннях. Якщо ми нехтуємо додатністю u, то треба використовувати $|u|$ для основ тих степенів, які не є визначеними для від'ємних значень основ. Аналогічне твердження є вірним для подібних виразів в перетвореннях та інших місцях. Необхідні зміни в формулах є очевидними.

3.2. Групова класифікація

В цьому підрозділі виконано вичерпну групову класифікацію рівнянь з класу (3.3). Шукаємо оператори вигляду $\Gamma = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$, де $\tau = \tau(t, x, u)$, $\xi = \xi(t, x, u)$, $\eta = \eta(t, x, u)$, які генерують однопараметричні групи неперервних точкових перетворень симетрії рівнянь з класу (3.3). З критерію інфінітезимальної інваріантності випливає, що оператор Γ

повинен задовольняти наступну умову

$$\Gamma^{(2)}\{f(x)u_t - u^n u_{xx} - nu^{n-1}u_x^2 - h(x)u^m\} = 0 \tag{3.6}$$

для всіх розв'язків рівняння (3.3).

З урахуванням рівняння (3.3) рівняння (3.6) стає тотожністю, що залежить від змінних t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}. Розщеплюючи рівняння (3.6) за незв'язаними змінними u_x, u_{xx} та u_{tx}, знаходимо визначальні рівняння на коефіцієнти τ, ξ та η. Оскільки рівняння (3.3) є квазілінійними еволюційними рівняннями, вигляд коефіцієнтів можна одразу спростити. А саме, можна вважати, що $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t, x)$ [85] і, більш того, $\eta = \zeta(t, x)u$ та $\xi = \xi(x)$ (див. підрозділ 3.4). Для того, щоб отримати останню умову, треба частково розщепити за змінною u. В результаті побудуємо *класифікуючі* рівняння, які містять в собі невідомі функції з виразів для коефіцієнтів оператора та довільні елементи розглядуваного класу:

$$f_x\xi = f(n\zeta + \tau_t - 2\xi_x), \qquad 2(n+1)\zeta_x = \xi_{xx},$$

$$uf^2\zeta_t - u^{n+1}f\zeta_{xx} + u^m(hf_x\xi - fh_x\xi + (1-m)fh\zeta - fh\tau_t) = 0.$$

Останнє з цих рівнянь треба розщепити за змінною u для всіх значень параметрів n та m, що відповідають нелінійному випадку $n \neq 0$. Розщеплення призводить до суттєво різних результатів у наступних випадках: 1. $m \neq 1, n+1$; 2. $m = 1$; 3. $m = n+1$. Отримані рівняння дозволяють визначити вигляд $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\zeta(t, x)$, $f(x)$ та $h(x)$ в залежності від значень параметрів n, m та знайти бажані випадки розширення ліївської симетрії.

У таблиці 3.1 наведено значення функцій $f(x)$, $h(x)$, сталих параметрів m, n та базиси відповідних алгебр інваріантності в усіх нееквівалентних випадках розширення ліївської симетрії. Оператори з табл. 3.1 складають базиси максимальних алгебр ліївської інваріантності тоді і тільки тоді, коли відповідні значення параметрів є нееквівалентними тим параметрам, які відповідають більш широкій алгебрі інваріантності.

Таблиця 3.1

Результати групової класифікації рівнянь
$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m$, $n \neq 0$

№	n	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
Загальний випадок				
1	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_t
2	$\forall$	$f_1(x)$	$h_1(x)$	$\partial_t, (d+2b-pn)t\partial_t + ((n+1)ax^2+bx+c)\partial x + (ax+p)u\partial_u$
3	$\forall$	1	ε	$\partial_t, \partial_x, 2(1-m)t\partial_t + (1+n-m)x\partial_x + 2u\partial_u$
$m=1, \quad h\neq 0, \quad (h/f)_x = 0$				
4	$\forall$	$\forall$	εf	$\partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u)$
5	$\forall$	$f_1(x)$	εf	$\partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t+\varepsilon u\partial_u), n((n+1)ax^2+bx+c)\partial x+(nax+2b+d)u\partial_u$
6	$\neq -\frac{4}{3}$	1	ε	$\partial_t, \partial_x, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t+\varepsilon u\partial_u), nx\partial x + 2u\partial_u$
7	$-\frac{4}{3}$	1	ε	$\partial_t, \partial_x, e^{\frac{4}{3}\varepsilon t}(\partial_t+\varepsilon u\partial_u), -\frac{4}{3}x\partial x + 2u\partial_u, -\frac{1}{3}x^2\partial_x + xu\partial_u$
$m=n+1 \quad$ або $\quad h=0$				
8	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\partial_t, nt\partial_t - u\partial_u$
9	$\neq -\frac{4}{3}$	1	αx^{-2}	$\partial_t, nt\partial_t - u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x$
10	$\neq -\frac{4}{3}$	1	ε	$\partial_t, nt\partial_t - u\partial_u, \partial_x$
11	$\neq -\frac{4}{3}$	1	0	$\partial_t, \partial_x, nt\partial_t - u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x$
12	$-\frac{4}{3}$	e^x	α	$\partial_t, t\partial_t + \frac{3}{4}u\partial_u, \partial_x - \frac{3}{4}u\partial_u$
13	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\partial_t, \partial_x, \frac{4}{3}t\partial t + u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x, -\frac{1}{3}x^2\partial_x + xu\partial_u$

Тут α — довільна стала, $\alpha \neq 0$ у випадку 9, $\varepsilon = \pm 1$,

$$f_1(x) = \exp\left[\int \frac{-(3n+4)ax+d}{(n+1)ax^2+bx+c}dx\right],$$

$$h_1(x) = \exp\left[\int \frac{-(3(n+1)+m)ax+(1+m-n)p-2b}{(n+1)ax^2+bx+c}dx\right].$$

Можна вважати з точністю до еквівалентності відносно групи $\hat{G}_1^{\sim}$, що набір параметрів (a, b, c, d) приймає тільки наступні нееквівалентні значення: $(\varepsilon, 0, 1, 0)$, якщо $n = -1$, або $(1, 0, 1, d')$, якщо $n \neq -1$; $(0, 1, 0, d')$, $(0, 0, 1, 1)$, де d' — довільна стала. В усіх випадках покладено $g(x) = 1$.

У випадку 8 функції f та h можна додатково відкалібрувати перетвореннями еквівалентності з групи $\hat{G}_{1,m=n+1}^{\sim}$. Наприклад, можна вважати $f = 1$, якщо $n \neq -4/3$, та $f = e^x$ — в інших випадках.

У випадках 2 та 5 перетворення еквівалентності не застосовувались там, де це можливо, оскільки їх використання призвело б до виникнення багатьох більш простих подібних випадків (див. зауваження 3.5).

Зауваження 3.5. Треба підкреслити, що в таблиці наведено лише ті випадки розширення максимальної алгебри інваріантності, які є нееквівалентними відносно групи $\hat{G}_1^{\sim}$, якщо $m \neq n + 1$, та відносно групи $\hat{G}_{1,m=n+1}^{\sim}$, якщо $m = n + 1$ або $h = 0$. Під час розв'язання задачі групової класифікації одержано деякі випадки розширення, які зводяться перетвореннями еквівалентності до випадків наведених у таблиці нетривіальним способом. Нижче наведено деякі приклади таких перетворень.

Приклад 3.1. Рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$|x|^{-\frac{3n+4}{n+1}} u_t = (u^n u_x)_x + \varepsilon |x|^{-\frac{3n+3+m}{n+1}} u^m, \quad n \neq -1, \quad m \neq n + 1, \qquad (3.7)$$

зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{u}^n \tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \varepsilon \tilde{u}^m \qquad (3.8)$$

(випадок 3 табл. 3.1, якщо $m \neq 1$, та випадок 6, якщо $m = 1$) наступним перетворенням

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \frac{1}{x} =: \varphi(x), \quad \tilde{u} = |x|^{-\frac{1}{n+1}} u = |\varphi_x|^{\frac{1}{2n+2}} u,$$

що належить до групи еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ класу (3.3). Отже, використовуючи базис максимальної алгебри ліївської інваріантності, наведений у випадку 3, отримуємо базисні елементи максимальної алгебри інваріантності рівняння (3.7):

$$\partial_t,\ (n+1)x^2\partial_x + xu\partial_u,\ 2t\partial_t - \frac{n+1-m}{1-m}x\partial_x + \frac{n+1+m}{(1-m)(n+1)}u\partial_u,$$

якщо $m \neq 1$ та

$$\partial_t,\ \ e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \lambda u\partial_u),\ \ (n+1)x^2\partial_x + xu\partial_u,\ \ nx\partial x - \frac{n+2}{n+1}u\partial_u,$$

якщо $m = 1$. В останньому випадку додатково вважаємо, що $n \neq -4/3$ для того, щоб алгебра інваріантності була дійсно максимальною.

Приклад 3.2. Аналогічно до попереднього прикладу, рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$e^x u_t = \left(\frac{u_x}{u}\right)_x + \varepsilon e^x u \tag{3.9}$$

зводиться перетворенням $\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = x,\ \tilde{u} = e^x u$ з групи $\hat{G}_1^{\sim}$ до рівняння (3.8) з $n = -1$ та $m = 1$ (випадок 6 з $n = -1$). Базис максимальної алгебри ліївської інваріантності рівняння (3.9) має вигляд

$$\partial_t, \quad e^{\varepsilon t}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u), \quad \partial_x - u\partial_u, \quad x\partial_x - (x+2)u\partial_u.$$

Зауваження 3.6. Правильний вибір калібрування трійки параметрів (f, g, h) є вирішальним моментом у проведеному дослідженні. Важливий вибір зроблено на початку класифікації, коли покладено калібрування $g = 1$. Саме це калібрування призводить до максимального спрощення як процесу класифікації, так і остаточних результатів. Хоча всі калібрування теоретично є еквівалентними, тільки калібрування $g = 1$ дозволяє вичерпно розв'язати задачу групової класифікації для класу (3.1) за помірної кількості обчислень. Навіть якщо обрати інше калібрування $f = 1$, яке також здається достатньо простим, обчислення стають занадто громіздкими.

Вирази перетворень з умовної групи еквівалентності $G^{\sim}_{m=n+1}$, тобто групи еквівалентності підкласу (3.4), виокремленого з класу (3.1) додатковою умовою $m = n + 1$, містять в собі на одну довільну функцію змінної x більше, ніж група еквівалентності всього класу. Це дає можливість додатково відкалібрувати набір параметрів (f, g, h). Різні способи додаткового калібрування у випадку $m = n+1$ перетвореннями з умовної групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$ розглянемо в наступному прикладі.

Приклад 3.3. Нехай $m = n + 1$ та калібрування $g = 1$ вже є фіксованим. Ядро $A^{\rm ker}_{1,m=n+1}$ максимальних алгебр інваріантності рівнянь з підкласу (3.5) утворено операторами ∂_t та $nt\partial_t - u\partial_u$ (випадок 8 табл. 3.1).

На перший погляд здається, що оптимальним вибором додаткового калібрування є $h = 0$. Це калібрування призводить до суттєвого спрощення як загальної форми вихідних рівнянь, так і визначальних рівнянь. Дійсно, якщо $h = 0$, система визначальних рівнянь зводиться до наступної:

$$\xi f_x = (n\zeta - 2\xi_x + \tau_t)f, \quad \xi_{xx} = 2(n+1)\zeta_x, \quad \zeta_{xx} = 0, \quad \zeta_t = 0.$$

Інтегруючи останні три рівняння, отримуємо $\xi = C_1(n+1)x^2 + C_3x + C_4$, $\zeta = C_1x + C_2$. Тоді з першого рівняння випливає, що $\tau = C_5t + C_6$. Головна складність виникає під час інтегрування першого рівняння. Розширення алгебри $A^{\rm ker}_{m=n+1}$ є можливим тоді і тільки тоді, коли

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)f_x = \delta f,$$

де α, β, γ та δ — довільні сталі, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Крім того, група еквівалентності відкаліброваного класу '$g = 1$, $h = 0$' складається з перетворень, що належать до групи $G^{\sim}_{m=n+1}$ та додатково задовольняють умови $\delta_0\varphi_x = \psi^{2n+2}$, $(\psi^{-(n+1)}\psi_x)_x = 0$. Незважаючи на те, що класифікацію можливо провести таким способом, складність як виразу для f в деяких випадках розширення, так і перетворень еквівалентності, які потрібно застосовувати, призводить до необхідності ретельного та складного дослідження звідності між різними випадками.

Іншим способом є калібрування функції f. А саме калібрування $f = 1$, якщо $n \neq -\frac{4}{3}$, та або $f = e^x$, або $(f, h) = (1, 0)$ в інших випадках. Хоча воно здається більш складним ніж $h = 0$, саме це калібрування безпосередньо веде до вичерпної класифікації та формулювання результатів у найпростішому вигляді (випадки 8–13 табл. 3.1).

Зауваження 3.7. Після тестування різних способів класифікації зроблено наступний висновок. Застосування перетворень еквівалентності є більш ефективним на початкових стадіях класифікації. Доцільним способом є калібрування довільних елементів наскільки це можливо на попередньому етапі класифікації та додаткове калібрування елементів під час виконання класифікації кожного разу, коли виникають умови для цього. Найгіршим вибором є повна відмова від використання калібрувань довільних елементів.

На основі результатів класифікації, наведених в табл. 3.1, сформулюємо наступну теорему.

Теорема 3.5. *Якщо рівняння вигляду (3.1) є інваріантним відносно алгебри Лі розмірності не менше ніж чотири, то точковими перетвореннями воно зводиться до рівняння з цього ж класу зі сталими значеннями параметрів f, g та h. Якщо $m \neq 1, n+1$, то подібне твердження справедливе вже для тривимірних алгебр ліївської інваріантності.*

3.3. Додаткові перетворення еквівалентності

Нехай ліївські симетрії класу диференціальних рівнянь прокласифіковано відносно його групи еквівалентності $G^{\sim}$ та проекція групи $G^{\sim}$ на простір змінних рівняння є вужчою, ніж уся псевдогрупа точкових перетворень у цьому просторі. Тоді можуть існувати точкові перетворення між $G^{\sim}$-нееквівалентними випадками розширення симетрії, які називають *додатковими перетвореннями еквівалентності*. Знання таких перетворень є важливим, оскільки вони спрощують подальше застосування результатів групової класифікації.

Вперше нетривіальний та цікавий приклад таких перетворень наведено в [16] (див. також [78, Розліл 10]). Під час класифікації нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі сталими коефіцієнтами (1.2) рівняння вигляду

$$u_t = (u^{-4/3}u_x)_x + bu^{-1/3}, \tag{3.10}$$

де b — довільна стала, виникають як випадки розширення симетрії, які не є еквівалентними відносно відповідної групи еквівалентності [8, 9]. У роботі [16] показано, що перетворення

$$t' = t, \quad x' = \begin{cases} e^{-2\beta x}, & b > 0 \\ \mathrm{tg}(\beta x), & b < 0 \end{cases}, \quad u' = \begin{cases} e^{3\beta x}u, & b > 0 \\ \cos^3(\beta x)u, & b < 0 \end{cases},$$

де $\beta = \sqrt{|b/3|}$, відображає будь-яке рівняння (3.10) до рівняння

$$u'_{t'} = (u'^{-4/3}u'_{x'})_{x'},$$

що є рівнянням такого ж вигляду з $b' = 0$. Отже, це перетворення є додатковим перетворенням еквівалентності в класі (1.2). Також воно є додатковим перетворенням еквівалентності в класах (3.1) та (3.3) і, в той самий час, воно належить до узагальненої групи еквівалентності $G^{\sim}_{1,m=n+1}$ класу (3.5). Ось чому випадок $b \neq 0$ не виникає в табл. 3.1.

Іншим додатковим перетворенням еквівалентності в класі (1.2) [78, Розділ 10] є перетворення

$$t' = \frac{1}{\varepsilon n}e^{\varepsilon n t}, \quad x' = x, \quad u' = e^{-\varepsilon t}u, \tag{3.11}$$

що пов'язує рівняння

$$u_t = (u^n u_x)_x + \varepsilon u \quad \text{та} \quad u'_{t'} = (u'^n u'_{x'})_{x'}. \tag{3.12}$$

Це перетворення не належить до жодної з груп еквівалентності, знайдених у підрозділі 3.1 Очевидно, що його можна поширити на більш широкий підклас класу (3.1). А саме, воно пов'язує рівняння

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + \varepsilon f(x)u \quad \text{та} \quad f(x')u'_{t'} = (g(x')u'^n u'_{x'})_{x'}$$

та, тому зводить випадки 4–7 табл. 3.1 в набір випадків 8–13, тобто це додаткове перетворення еквівалентності в класі (3.1). Будь яке інше додаткове перетворення еквівалентності є композицією перетворень вигляду (3.11) та перетворень з групи $G^{\sim}_{1,m=n+1}$. (Цей факт доведено в наступному підрозділі під час дослідження допустимих перетворень.) Наприклад, якщо $n=-\frac{4}{3}$, рівняння (3.12) також зводяться одне до одного перетворенням

$$t'=\frac{1}{\varepsilon n}e^{\varepsilon nt},\quad x'=\frac{\delta}{x},\quad u'=e^{-\varepsilon t}x^3u,\qquad \delta=\pm1.$$

Гадана нестача додаткових перетворень еквівалентності в класі (3.1), у порівнянні, наприклад, з класом (1.3), який допускає велику кількість таких перетворень [82, 102], пов'язана з використанням умовних груп еквівалентності під час класифікації. У підрозділі 3.4. доведено, що перетворення вигляду (3.11) також можна включити в рамки умовної еквівалентності.

В результаті отримуємо таке твердження.

Теорема 3.6. *З точністю до точкових перетворень повний перелік розширень максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу* (3.1) *вичерпується випадками 1–3 та 8–13 таблиці 3.1.*

3.4. Класифікація допустимих перетворень

Завдяки спеціальній структурі рівнянь з класу (3.1), наступна задача може бути розв'язана повністю. Описати всі допустимі перетворення в класі (3.1). Ці перетворення можна природно проінтерпретувати в термінах теорії категорій [108]. Зауважимо, що існує інфінітезимальний еквівалент цього означення [5].

Оскільки існує відображення, породжене перетвореннями з групи $G^{\sim}$, класу (3.1) на свій підклас (3.3), то достатньо розв'язати цю задачу для останнього класу. Для цього розглянемо рівняння (3.3) і рівняння

$$\tilde f(\tilde x)\tilde u_{\tilde t}=(\tilde u^{\tilde n}\tilde u_{\tilde x})_{\tilde x}+\tilde h(\tilde x)\tilde u^{\tilde m}\qquad(3.13)$$

та будемо вважати, що вони пов'язані між собою точковими перетвореннями загального вигляду

$$\tilde{t} = T(t,x,u), \quad \tilde{x} = X(t,x,u), \quad \tilde{u} = U(t,x,u). \tag{3.14}$$

Наступним етапом є виведення визначальних рівнянь на функції T, X, U та розв'язання їх в залежності від значень довільних елементів в (3.3) та (3.13).

Виконавши заміну змінних (3.14) в рівнянні (3.13), отримаємо рівняння, що має тотожно дорівнювати нулю на многовиді, визначеному рівнянням (3.3) в просторі джетів другого порядку змінних (t,x,u). Розщеплюючи цю тотожність за незв'язаними змінними, одержуємо спочатку рівняння

$$T_u = T_x = X_u = U_{uu} = 0, \tag{3.15}$$

що узгоджується з відомими результатами, доведеними для більш загальних класів еволюційних рівнянь [85, 102, 108]. Враховуючи рівняння (3.15) та частково розщеплюючи за змінною u, додатково отримуємо умови:

$$\begin{gathered}
\tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m \quad \text{або} \quad (m,\tilde{m}) \in \{(1,n+1),(n+1,1)\}, \\
T = T(t), \quad X = X(x), \quad U = V(t,x)u, \quad T_tX_xV \neq 0, \\
2(n+1)X_xV_x = X_{xx}V, \quad V^n = \frac{\tilde{f}}{f}\frac{{X_x}^2}{T_t}, \\
\frac{\tilde{f}}{f}\frac{V}{T_t}hu^m + \tilde{f}\frac{V_t}{T_t}u = \frac{1}{X_x}\left(V^n\frac{V_x}{X_x}\right)_x u^{n+1} + \tilde{h}V^{\tilde{m}}u^{\tilde{m}}.
\end{gathered} \tag{3.16}$$

Подальше розщеплення рівняння (3.16) за змінною u та інтегрування побудованих визначальних рівнянь залежить від значень параметрів m та $\tilde{m}$. Розглянемо різні випадки окремо.

Якщо $\tilde{m} = m \neq 1$, з рівняння (3.16) отримуємо $V_t = 0$. Звідси випливає, що $T_{tt} = 0$, тобто $V = V(x)$ та $T = \delta_1 t + \delta_2$. Інші умови мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\tilde m = m \neq 1, n+1\colon \quad \frac{\tilde f}{f} = \delta_1 \frac{V^n}{X_x}, \quad \frac{\tilde h}{h} = \frac{V^{n+1-m}}{{X_x}^2},\\
&\qquad n=-1\colon \quad X_{xx}=0, \quad (\ln V)_{xx}=0,\\
&\qquad n\neq -1\colon \quad \bigl(|X_x|^{-1/2}\bigr)_{xx}=0, \quad V^{2n+2}=\delta_0 X_x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde m = m = n+1\colon \quad \frac{\tilde f}{f} = \delta_1 \frac{V^n}{X_x},\\
&\tilde h = \frac{1}{{X_x}^2} h - \frac{1}{X_x V^{n+1}} \left(V^n \frac{V_x}{X_x}\right)_x, \quad V^{2n+2}=\delta_0 X_x.
\end{aligned}$$

Отже, у випадку $m\neq 1, n+1$ (випадку $m=n+1$) будь-яке допустиме перетворення визначається перетворенням з групи еквівалентності $\hat G_1^{\sim}$ (умовної групи еквівалентності $G^{\sim}_{1,m=n+1}$).

Якщо $\tilde m = m = 1$, то функцію V зручно зобразити у вигляді $V = |T_t|^{-1/n}\psi(x)$. Значення $n=-1$ є особливим випадком інтегрування:

$$\begin{aligned}
&n=-1\colon \quad X_{xx}=0,\ (\ln\psi)_{xx}=0 \quad \Longrightarrow \quad X=\delta_3 x+\delta_4,\ \psi=\delta_5 e^{\delta_6 x},\\
&n\neq -1\colon \quad \bigl(|X_x|^{-1/2}\bigr)_{xx}=0, \quad 2(n+1)\frac{\psi_x}{\psi} = \frac{X_{xx}}{X_x} \quad \Longrightarrow\\
&\qquad\qquad X=\frac{\delta_3 x+\delta_4}{\delta_5 x+\delta_6},\ \psi=\delta_7 |X_x|^{\frac{1}{2n+2}},
\end{aligned}$$

де $\delta_3\delta_6-\delta_4\delta_5$ має фіксоване значення, яке можна вважати рівним ± 1. Довільні елементи f та h перетворюються за формулами

$$\frac{\tilde f}{f} = \frac{\psi^n}{{X_x}^2}\operatorname{sign} T_t, \quad \frac{\tilde h}{\tilde f} = \frac{1}{T_t}\frac{h}{f} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{T_t}\right)_t \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\tilde h}{\tilde f}\right)_x = \frac{1}{T_t}\left(\frac{h}{f}\right)_x.$$

З останньої умови випливає, що $(\tilde h/\tilde f)_x\neq 0$ та $T_{tt}=0$, якщо $(h/f)_x\neq 0$. Отже, будь-яке допустиме перетворення е цьому випадку є перетворенням з групи еквівалентності $\hat G_1^{\sim}$.

Інша ситуація виникає, якщо $(h/f)_x=0$. Тоді $(\tilde h/\tilde f)_x=0$, тобто умова $(h/f)_x=0$ є інваріантом групи $\hat G_1^{\sim}$. Позначимо сталі h/f та $\tilde h/\tilde f$ через α

та $\tilde{\alpha}$, відповідно. Тоді отримаємо наступне рівняння на функцію $T(t)$:

$$\left(\frac{1}{T_t}\right)_t = -n\alpha\frac{1}{T_t} + n\tilde{\alpha}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння подано у такому вигляді, щоб його неперервна залежність від параметрів α та $\tilde{\alpha}$ стала очевидною:

$$\begin{aligned}
&\alpha\tilde{\alpha} \neq 0: && \frac{e^{n\tilde{\alpha}T}-1}{n\tilde{\alpha}} = \delta_1\frac{e^{n\alpha t}-1}{n\alpha} + \delta_2,\\
&\alpha = 0,\ \tilde{\alpha} \neq 0: && \frac{e^{n\tilde{\alpha}T}-1}{n\tilde{\alpha}} = \delta_1 t + \delta_2,\\
&\alpha \neq 0,\ \tilde{\alpha} = 0: && T = \delta_1\frac{e^{n\alpha t}-1}{n\alpha} + \delta_2,\\
&\alpha = \tilde{\alpha} = 0: && T = \delta_1 t + \delta_2.
\end{aligned}$$

Знайдені перетворення складають групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$ підкласу класу (3.1), який виділено додатковими умовами $g = 1$, $m = 1$, $(h/f)_x = 0$. Ця група є узагальненою навіть якщо вважати n фіксованим, оскільки вона містить перетворення змінної t, яке залежить від довільних елементів h та f. На відміну від $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$, група $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$ не використовувалась під час виконання групової класифікації рівнянь (3.3), оскільки застосування цієї умовної групи еквівалентності не має помітного впливу на класифікацію та відповідні умови на довільні елементи є менш очевидними. В той же час, перетворення з групи $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$ грають роль додаткових перетворень еквівалентності після завершення класифікації (див. підрозділ 3.3).

Якщо $h\tilde{h} \neq 0$, $m = 1$ та $\tilde{m} = n+1$, з визначальних рівнянь випливає

$$\frac{h}{f} = \frac{1}{n}\frac{T_{tt}}{T_t}, \quad \text{тобто} \quad \left(\frac{h}{f}\right)_x = 0, \qquad \tilde{h} = -\frac{1}{X_x V^{n+1}}\left(V^n\frac{V_x}{X_x}\right)_x.$$

Отже обидва рівняння (3.3) та (3.13) відображуються в підклас '$h = 0$' розглядуваного класу. Ці відображення породжуються перетвореннями з відповідних умовних груп еквівалентності. Будемо вважати, що їх образи співпадають. Отже, допустиме перетворення є композицією перетворення $\mathcal{T}_1$ рівняння (3.3) в рівняння $f(x)u_t = (u^n u_x)_x$ та перетворення $\mathcal{T}_2$ рівняння $f(x)u_t = (u^n u_x)_x$ в рівняння (3.13). Перетворення $\mathcal{T}_1$ належить до групи $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$, а перетворення $\mathcal{T}_2$ — до групи $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$. В перетворенні $\mathcal{T}_1$ можна покласти $X = x$, $\psi = 1$.

Випадок $h\tilde{h} \neq 0$, $m = n+1$ та $\tilde{m} = 1$ розглядається аналогічно.

Отже, всі можливі випадки вичерпано. Підсумуємо дослідження допустимих перетворень в класі (3.3) наступною теоремою.

Теорема 3.7. *Нехай рівняння $f(x)u_t = (u^n u_x)_x + h(x)u^m$ та рівняння $\tilde{f}(\tilde{x})\tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{u}^{\tilde{n}}\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{h}(\tilde{x})\tilde{u}^{\tilde{m}}$ пов'язані точковими перетвореннями змінних t, x, u. Тоді $\tilde{n} = n$ та*

$$\text{або}\quad \tilde{m} = m, \quad \text{або}\quad (m, \tilde{m}) = (1, n+1), \quad \text{або}\quad (m, \tilde{m}) = (n+1, 1).$$

Перетворення, що пов'язують рівняння, визначаються перетвореннями з узагальненої групи еквівалентності

a) $\hat{G}^{\sim}_1$, якщо або $m \neq 1, n+1$, або $m = 1$, $(h/f)_x \neq 0$;
b) $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$, якщо $m = \tilde{m} = n+1$;
c) $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$, якщо $m = \tilde{m} = 1$, $(h/f)_x = 0$; тоді і $(\tilde{h}/\tilde{f})_x = 0$.

Якщо $m = 1$ та $\tilde{m} = n+1$, тоді $(h/f)_x = 0$ та перетворення є композицією двох перетворень з групи $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$ та групи $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$ через проміжне рівняння, в якому $h = 0$.

Випадок з $m = n+1$ та $\tilde{m} = 1$ є подібним.

Наслідок 3.2. *Клас (3.3) з $n \neq 0$ можна зобразити як об'єднання нормалізованих підкласів з відповідними умовами*

$$h \neq 0,\ m \neq 1, n+1; \qquad m = 1,\ (h/f)_x \neq 0;$$
$$m = 1,\ (h/f)_x = 0; \qquad m = n+1.$$

Тільки два останніх підкласи мають непорожній перетин і цим перетином є нормалізований підклас '$h = 0$'.

3.5. Локальні закони збереження

Закони збереження рівнянь з класу (3.1) шукатимемо, використовуючи модифікацію прямого методу, запропоновану в роботі [103]. Цей метод ґрунтується на використанні означення законів збереження, поняття еквівалентності законів збереження відносно групи перетворень та класифікації відносно групи еквівалентності класу рівнянь. Згідно з результатами підрозділу 2.3., для вичерпного дослідження законів збереження рівнянь з вихідного класу достатньо прокласифікувати закони збереження рівнянь з класу (3.3). Зауважимо, що існують інші різновиди прямого методу, основані на характеристичній формі законів збереження [42, 43].

В розглядуваних рівнянннях є дві незалежних змінних — t та x, часова та просторова змінні, відповідно. Закон збереження ототожнюємо з його представником з фактор-простору $\mathrm{CV}(\mathcal{L})/\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$. Отже, закони збереження рівнянь (3.3) мають загальний вигляд

$$D_tF(t,x,u_{(r)})+D_xG(t,x,u_{(r)})=0, \tag{3.17}$$

де D_t та D_x — оператори повного диференціювання за змінними t та x. Компоненти F та G вектора (F,G), що зберігається, називають *густиною* та *потоком* закону збереження. Два вектори (F,G) та (F',G'), що зберігаються, є еквівалентними, якщо існує такі функції $\hat F$, $\hat G$ та H змінних t, x та похідних u, що $\hat F$ та $\hat G$ тотожно дорівнюють нулю для всіх розв'язків рівняння (3.3) та $F'=F+\hat F+D_xH$, $G'=G+\hat G-D_tH$.

Використаємо наступну лему [81] про порядок законів збереження для більш загального класу еволюційних рівнянь другого порядку, до якого належить клас (3.3).

Лема 3.1. *Будь-який закон збереження довільного $(1+1)$-вимірного квазілінійного еволюційного рівняння другого порядку має перший порядок та, більше того, існує такий його вектор, що зберігається, густина якого залежить тільки від змінних t, x, u, а потік — від змінних t, x, u та u_x.*

Теорема 3.8. *Перелік рівнянь (3.3), які мають нетривіальні закони збереження, вичерпується такими, що задовольняють одній з наступних умов*

1. $m = n + 1$.

   $n \neq -1$: $\quad \left(\varphi^i f u,\ -\varphi^i u^n u_x + \varphi^i_x \frac{u^{n+1}}{n+1}\right),\ \varphi^i,\ i = 1, 2.$

   $n = -1$: $\quad (\, x f u,\ -x u^{-1} u_x + \ln u\,),\ x;\ (\, f u,\ -u^{-1} u_x\,),\ 1.$

2. $m = 1,\ h = \mu f$.

   $n \neq -1$: $\quad \left(x e^{-\mu t} f u,\ e^{-\mu t}\left(-x u^n u_x + \frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\right),\ x e^{-\mu t};$

   $\quad (\, e^{-\mu t} f u,\ -e^{-\mu t} u^n u_x\,),\ e^{-\mu t}.$

   $n = -1$: $\quad (\, x e^{-\mu t} f u,\ e^{-\mu t}(-x u^{-1} u_x + \ln u)\,),\ x e^{-\mu t};$

   $\quad (\, e^{-\mu t} f u,\ -e^{-\mu t} u^{-1} u_x\,),\ e^{-\mu t}.$

Тут β_1, β_2, μ — довільні сталі. Функції $\varphi^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, складають фундаментальну систему розв'язків лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку $\varphi_{xx} + (n+1)h\varphi = 0$. (Разом з умовами на довільні елементи класу (3.3) також наведено вектори, що зберігаються, а також характеристики базисних елементів відповідного простору законів збереження.)

Доведення. Зважаючи на лему 3.1, можна вважати, що $F = F(t, x, u)$ та $G = G(t, x, u, u_x)$. Далі підставляючи вираз для u_t отриманий з (3.3) в (3.17), розщеплюємо одержане рівняння відносно u_{xx}. Коефіцієнт при u_{xx} дає рівняння $u^n f^{-1} F_u + G_{u_x} = 0$, отже $G = -u^n f^{-1} F_u u_x + \widehat{G}(t, x, u)$. Підставляючи вираз на G в інші рівняння (3.17) та розщеплюючи їх за степенями u_x, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних на функції F та $\widehat{G}$

$$F_{uu} = 0, \quad -u^n \left(\frac{F_u}{f}\right)_x + \widehat{G}_u = 0, \quad F_t + \frac{h}{f} u^m F_u + \widehat{G}_x = 0. \tag{3.18}$$

З перших двох рівнянь (3.18) випливає, що $F=\Phi(t,x)fu+F^0(t,x)$, $\widehat{G}=\Phi_x\int u^n+G^0(t,x)$. (У виразі на F зручно виділити f як множник біля u.) Випадок $n=-1$ є особливим під час інтегрування функції u^n. Отже, отримуємо

$$G=\begin{cases}-\Phi u^n u_x+\Phi_x\frac{u^{n+1}}{n+1}+G^0(t,x), & n\neq -1,\\ -\Phi u^{-1}u_x+\Phi_x\ln u+G^0(t,x), & n=-1.\end{cases}$$

У подальшому дослідженні провідну роль відіграє диференціальний наслідок системи (3.18), який можна записати у вигляді

$$f\Phi_t+\Phi_{xx}u^n+mh\Phi u^{m-1}=0. \tag{3.19}$$

Рівняння (3.19) є єдиною класифікуючою умовою для цієї задачі. В усіх випадках класифікації отримуємо рівняння $F^0_t+G^0_x=0$. Отже, можна вважати $F^0=G^0=0$ з точністю до еквівалентності векторів, що зберігаються, та вважати $\Phi\neq 0$, щоб отримати нетривіальні вектори, що зберігаються.

З рівняння (3.19) випливає, що рівняння (3.3) допускає нетривіальні вектори, що зберігаються, тоді і тільки тоді, коли параметри n та m приймають спеціальні значення, а саме, якщо

$$(n,m)\in\{(0,0),\,(0,1),\,(n',n'+1),\,(n',1),\,n'\in\mathbb{R}\}.$$

Випадки $(0,0)$ та $(0,1)$ виключено з розгляду, оскільки вони відповідають випадку лінійних рівнянь (3.3).

1. $m=n+1$. Розщеплюючи рівняння (3.19) за змінною u, отримуємо рівняння $\Phi_t=0$ та $\Phi_{xx}+(n+1)h\Phi=0$. Отже, Φ залежить тільки від x та пробігає множину розв'язків другого рівняння, яке є лінійним однорідним звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Якщо $n=-1$, то $\Phi=C_1x+C_2$.

2. $m=1$. В результаті розщеплення (3.19) маємо два рівняння $\Phi_{xx}=0$ та $f\Phi_t+h\Phi=0$. З рівняння $\Phi_{xx}=0$ отримуємо, що $\Phi=\Phi^1(t)x+\Phi^2(t)$.

Тоді друге рівняння набуває вигляду $\Phi^1_t fx + \Phi^2_t f + \Phi^1 hx + \Phi^2 h = 0$. Враховуючи умову $\Phi \neq 0$, маємо, що $h = \mu f$ та $\Phi = C_3 e^{-\mu t} x + C_4 e^{-\mu t}$. □

Наслідок 3.3. *Для будь-якого нелінійного рівняння з класу* (3.1) *розмірність простору законів збереження дорівнює або 0 або 2. В другому випадку рівняння можна звести точковим перетворенням до рівняння з того ж класу, в якому $g = 1$ та $h = 0$. Тоді базис відповідного простору характеристик складається з одиниці ($\varphi^1 = 1$) та функції $\varphi^2 = x$.*

3.6. Інваріантні розв'язки

Оператори ліївської симетрії, знайдені в результаті розв'язання задачі групової класифікації, можна застосувати для побудови точних розв'язків відповідних рівнянь. Метод редукції за підалгебрами алгебр Лі інваріантності є добре відомим та достатньо алгоритмічним для того, щоб бути застосованим у більшості випадків; його опис можна знайти в класичних підручниках [21, 23]. Вичерпний груповий аналіз, включаючи ліївські редукції, нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі сталими коефіцієнтами та довільними нелінійностями проведено в роботі [9] (див. також [78]). Багато точних розв'язків цих рівнянь наведено в [25]. З теореми 3.5 випливає, що задачу відшукання ліївських точних розв'язків рівнянь з класу (3.1), які мають чотири- чи п'яти-вимірні алгебри ліївської інваріантності (або навіть тривимірні алгебри ліївської інваріантності у випадку $m = n+1$), можна вважати розв'язаною.

Тому розглянемо тільки ті випадки з табл. 3.1, в яких хоча б одне з наведених значень довільних елементів не є сталим, та відповідна максимальна алгебра інваріантності є тривимірною. А саме випадки 9 та 12. (Нагадаємо, що випадок 5 можна звести додатковими перетвореннями еквівалентності до подібного випадку з таким самим значенням функції f та $\varepsilon = 0$, а потім звести отримане рівняння перетвореннями еквівалентності до одного з випадків 9–12 в залежності від значень n та f.)

Рівняння

$$u_t = (u^n u_x)_x + \alpha x^{-2} u^{n+1} \qquad \text{та} \qquad e^x u_t = (u^{-\frac{4}{3}} u_x)_x + \alpha u^{-\frac{1}{3}}$$

(табл. 3.1, випадок 9 та випадок 12) допускають тривимірні алгебри інваріантності з базисними операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t\partial_t - \frac{u}{n}\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + \frac{2u}{n}\partial_u$$

та

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t\partial_t + \frac{3}{4}u\partial_u, \quad X_3 = \partial_x - \frac{3}{4}u\partial_u,$$

відповідно. Обидва набори операторів задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Це означає, що алгебри з такими базисними операторами є ізоморфними алгебрі $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$, яка є прямою сумою двовимірної неабелевої алгебри Лі $\mathfrak{g}_2$ та одновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}_1$. Оптимальну систему підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$ можна побудувати, використовуючи стандартний алгоритм [21, 23]. Також можна скористатися класифікацією оптимальних підалгебр три- та чотири-вимірних алгебр Лі, виконаної в [97]. Таким чином, знаходимо оптимальну систему, що складається з одновимірних підалгебр: $\langle X_2 - \mu X_3 \rangle$, $\langle X_3 \rangle$, $\langle X_1 \pm X_3 \rangle$, $\langle X_1 \rangle$ та двовимірних підалгебр: $\langle X_1, X_3 - \nu X_2 \rangle$, $\langle X_1, X_2 \rangle$, де μ та ν — довільні сталі.

Ліївську редукцію до алгебраїчних рівнянь можна зробити тільки за першою з двох наведених двовимірних підалгебр, оскільки друга не задовольняє умову трансверсальності [21]. Відповідні анзаци та редуковані алгебраїчні рівняння мають вигляд

$$9.\ u = Cx^\sigma, \quad \text{де} \quad \sigma = \frac{\nu + 2}{n}; \quad C^{n+1}((n+1)\sigma^2 - \sigma + \alpha) = 0;$$

$$12.\ u = Ce^{\sigma x}, \quad \text{де} \quad \sigma = -\frac{3}{4}(\nu + 1); \quad C^{-\frac{1}{3}}(\sigma^2 - 3\alpha) = 0;$$

Тут C — стала, яку треба відшукати. Редуковані рівняння мають нетривіальні розв'язки тільки для деяких значень σ і, більш того, стають тотожностями для цих значень σ. В результаті, побудовано наступні стаціонарні розв'язки:

$$9.\ u = Cx^{\sigma}, \quad \text{де} \quad (n+1)\sigma^2 - \sigma + \alpha = 0,$$
$$12.\ u = Ce^{\sigma x}, \quad \text{де} \quad \sigma^2 = 3\alpha,$$

де C — довільна стала. Ці розв'язки також можна отримати, послідовно редукуючи вихідне рівняння за одновимірними підалгебрами.

Анзаци та редуковані рівняння, що відповідають одновимірним підалгебрам з оптимального набору наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Ліївські редукції випадків 9 та 12 з таблиці 3.1

№	X	ω	$u=$	Редуковане рівняння
9.1	$X_2 - \mu X_3$	xt^{μ}	$t^{-\frac{1+2\mu}{n}}\varphi(\omega)$	$(\varphi^n\varphi_\omega)_\omega - \mu\omega\varphi_\omega + \frac{1+2\mu}{n}\varphi + \alpha\omega^{-2}\varphi^{n+1} = 0$
9.2	X_3	t	$x^{\frac{2}{n}}\varphi(\omega)$	$n^2\varphi_\omega - (\alpha n^2 + 2n + 4)\varphi^{n+1} = 0$
9.3	$X_3 \pm X_1$	$xe^{\mp t}$	$e^{\pm\frac{2t}{n}}\varphi(\omega)$	$(\varphi^n\varphi_\omega)_\omega \pm \omega\varphi_\omega \mp \frac{2}{n}\varphi + \alpha\omega^{-2}\varphi^{n+1} = 0$
9.4	X_1	x	$\varphi(\omega)$	$(\varphi^n\varphi_\omega)_\omega + \alpha\omega^{-2}\varphi^{n+1} = 0$
12.1	$X_2 - \mu X_3$	$x + \mu\ln t$	$t^{\frac{3}{4}(\mu+1)}\varphi(\omega)$	$(\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi_\omega)_\omega - \mu e^{\omega}\varphi_\omega - \frac{3}{4}(\mu+1)e^{\omega}\varphi + \alpha\varphi^{-\frac{1}{3}} = 0$
12.2	X_3	t	$e^{-\frac{3}{4}x}\varphi(\omega)$	$16\varphi_\omega + (3 - 16\alpha)\varphi^{-\frac{1}{3}} = 0$
12.3	$X_3 \pm X_1$	$x \mp t$	$e^{\mp\frac{3}{4}t}\varphi(\omega)$	$(\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi_\omega)_\omega \pm e^{\omega}\varphi_\omega \pm \frac{3}{4}e^{\omega}\varphi + \alpha\varphi^{-\frac{1}{3}} = 0$
12.4	X_1	x	$\varphi(\omega)$	$(\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi_\omega)_\omega + \alpha\varphi^{-\frac{1}{3}} = 0$

Деякі з редукованих рівнянь, наведених в табл. 3.2, повністю проінтегровано. В результаті отримано наступні розв'язки:

$$9.2.\ \varphi = \left(C - \left(\alpha n + 2 + \frac{4}{n}\right)\omega\right)^{-\frac{1}{n}};$$

$$9.4.\ \varphi = \begin{cases} C_1\omega^{\frac{1}{2(n+1)}}(\ln\omega + C_2)^{\frac{1}{n+1}}, & \alpha' = 0, \\ \left(C_1\omega^{\varkappa_1} + C_2\omega^{\varkappa_2}\right)^{\frac{1}{n+1}}, & \alpha' > 0, \\ \omega^{\frac{1}{2(n+1)}}\left(C_1\sin(\sigma\ln\omega) + C_2\cos(\sigma\ln\omega)\right)^{\frac{1}{n+1}}, & \alpha' < 0, \end{cases}$$

де $\quad \alpha' = 1 - 4\alpha(n+1), \quad \varkappa_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\alpha'}}{2}, \quad \sigma = \dfrac{\sqrt{-\alpha'}}{2};$

$$12.2.\ \varphi = \left(C + \left(\frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{4}\right)\omega\right)^{\frac{3}{4}};$$

$$12.4.\ \varphi = \begin{cases} C_1(\omega + C_2)^{-3}, & \alpha = 0, \\ \left(C_1e^{\varkappa\omega} + C_2e^{-\varkappa\omega}\right)^{-3}, & \alpha > 0, \\ \left(C_1\sin(\sigma\omega) + C_2\cos(\sigma\omega)\right)^{-3}, & \alpha < 0, \end{cases}$$

де $\quad \varkappa = \sqrt{\alpha/3}, \quad \sigma = \sqrt{-\alpha/3}.$

З вищенаведених розв'язків редукованих рівнянь можна легко побудувати точні розв'язки для рівнянь з вихідного класу.

Відзначимо, що з отриманих розв'язків, використовуючи перетворення еквівалентності чи допустимі перетворення, можна побудувати точні розв'язки рівнянь реакції–дифузії з набагато складнішими довільними елементами.

3.7. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено перетворення еквівалентності, допустимі перетворення, ліївські симетрії, закони збереження та точні розв'язки (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами (3.1).

Ключовий момент представленого дослідження — це застосування різних узагальнень звичайної групи еквівалентності, а саме узагальнених, розширених та умовних груп еквівалентності, а також допустимих перетворень, для калібрування довільних елементів. Цей підхід максимальне спрощує розв'язання задачі групової класифікації, побудову законів збереження та знаходження точних розв'язків. Множина допустимих перетворень класу (3.1) має цікаву структуру, яку вичерпно описано в теоремі 3.7.

Наведені результати складають основу для подальшого аналізу класу (3.1) сучасними симетрійними методами. Зокрема, класифікація законів збереження створює необхідні передумови для вивчення потенціальних симетрій [50].

Основні результати розділу 3 опубліковано в роботі [118].

РОЗДІЛ 4

Групова класифікація квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневою нелінійністю

У цьому розділі з симетрійної точки зору досліджено клас (1+1)-вимірних квазілінійних рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневою нелінійністю

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m. \tag{4.1}$$

Тут $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x, $fgh \neq 0$, $m \neq 0, 1$. Лінійний випадок, що відповідає значенням $m = 0$ та $m = 1$, виключено з розгляду, оскільки він є добре дослідженим [23, 88].

У підрозділі 4.1 побудовано звичайну та узагальнену розширену групи еквівалентності класу (4.1), а також класів, що виникають пізніше під час застосування запропонованого підходу до групової класифікації.

Правомірність використання техніки відображення класів для дослідження симетрійних властивостей класу (4.1) доведено у підрозділі 4.2

У підрозділі 4.3 спочатку виконано групові класифікації класу-образу та другого класу-образу (у пунктах 4.3.1 та 4.3.2, відповідно). У пункті 4.3.3 отримані результати використано для одержання класифікації ліївських симетрій рівнянь з вихідного класу. Техніку застосування перетворень еквівалентності під час групової класифікації проілюстровано прикладами.

У підрозділі 4.4 знайдено додаткові перетворення еквівалентності між рівняннями, що допускають розширення ліївської симетрії. Ці перетворення використано для представлення групової класифікації вихідного класу, а також класів-образів, відносно всіх точкових перетворень.

Структуру множини допустимих перетворень в класі-образі для випадків $m \neq 0, 1, 2$ вичерпно описано у підрозділі 4.5.

Підрозділ 4.6 присвячено побудові ліївських та неліївських точних розв'язків рівнянь з вихідного класу та класів-образів. При цьому використано різні техніки: у пункті 4.6.1 — метод ліївської редукції, у пунктах 4.6.2 та 4.6.3 — розмноження відомих розв'язків з використанням відображень між класами та додаткових перетворень еквівалентності.

У підрозділі 4.7 підхід, що базується на відображеннях між класами, поширено на дослідження некласичних симетрій. Запропоновано підхід до класифікації некласичних симетрій рівнянь з класу (4.1). Також виділено деякі підкласи, для яких оператори редукції отримано з вже відомих операторів рівнянь (4.1) зі сталими коефіцієнтами.

4.1. Групи еквівалентності та відображення між класами

Як і у підрозділі 3.1 шукатимемо звичайну та узагальнену розширену групи еквівалентності класу (4.1), використовуючи прямий метод [85]. Отримані результати сформульовано у наступних твердженнях.

Теорема 4.1. *Клас рівнянь* (4.1) *допускає звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$, що складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u,$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0 \delta_1}{\delta_3 \varphi_x} f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0 \varphi_x}{\delta_3} g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_3^m \varphi_x} h, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j, $j = 0, 1, 2, 3,$ — довільні сталі, $\delta_0 \delta_1 \delta_3 \neq 0$, φ — довільна гладка функція змінної x, $\varphi_x \neq 0$.

Теорема 4.2. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу (4.1) складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \psi(x)u,$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^2}f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^2}\,g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^{m+1}}h, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j, $j = 0, 1, 2,$ — довільні сталі, $\delta_0\delta_1 \neq 0$; φ — довільна гладка функція своєї змінної, $\varphi_x \neq 0$ та $\psi = \psi(x)$ — ненульовий розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x = 0. \tag{4.2}$$

Зауваження 4.1. Кожний розв'язок рівняння (4.2) має вигляд $\psi(x) = \big(\delta_3 \int dx/g(x) + \delta_4\big)^{-1}$, де δ_3, δ_4 — довільні сталі, $(\delta_3, \delta_4) \neq (0, 0)$.

З теорем 4.1 та 4.2 випливає, що довільний елемент m є інваріантом групи $\hat{G}^{\sim}$. Це дозволяє представити клас (4.1) як об'єднання його підкласів, кожен з яких відповідає фіксованому значенню m. Групи еквівалентності цих підкласів є *умовними групами еквівалентності* для всього класу (4.1). Для класу (4.1) існує тільки одна нетривіальна умовна група еквівалентності, а саме та, що відповідає значенню $m = 2$. Для інших значень m відповідні умовні групи еквівалентності є тривіальними.

Теорема 4.3. *Клас рівнянь*

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^2 \tag{4.3}$$

допускає узагальнену розширену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{m=2}$, що складається з перетворень

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^2}\,f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^2}\,g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^3}\,h,$$

де δ_j, $j=0,1,2$, *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1\neq 0$, $\psi(x)$ *— гладкий розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку*

$$\left[\frac{g}{\psi^2}\left(\frac{\psi^2}{2h}\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right)_x\right]_x=\frac{\psi}{4h}\left[\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right]^2 \tag{4.4}$$

та $\chi=-\dfrac{\psi^2}{2h}\left(\dfrac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x$.

Група $\hat G^{\sim}_{m=2}$ є умовною узагальненою розширеною групою еквівалентності класу (4.1) за умови $m=2$. Вона є нетривіальною, оскільки група еквівалентності $\hat G^{\sim}$ всього класу (4.1), в перетвореннях з якої покладено $m=2$, очевидно вужча за групу $\hat G^{\sim}_{m=2}$, тобто $\hat G^{\sim}|_{m=2}\subsetneq\hat G^{\sim}_{m=2}$. Функція $\psi(x)=\left(\delta_3\int\frac{dx}{g(x)}+\delta_4\right)^{-1}$, що з'являється в перетвореннях еквівалентності з групи $\hat G^{\sim}$, є частинним розв'язком рівняння (4.4). Зауважимо, що $G^{\sim}|_{m=2}=G^{\sim}_{m=2}$, тобто умова $m=2$ не дає розширення звичайної групи еквівалентності.

Наявність довільної функції $\varphi(x)$ в перетвореннях еквівалентності з груп $G^{\sim}$ та $\hat G^{\sim}$ дозволяє спростити задачу групової класифікації класу (4.1), зменшивши кількість довільних елементів.

Наприклад, перетворення з групи $G^{\sim}$

$$\tilde t=t,\quad \tilde x=\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{g(y)}+x_0,\quad \tilde u=u$$

відображає клас (4.1) на свій підклас $\tilde f(\tilde x)\tilde u_{\tilde t}=\tilde u_{\tilde x\tilde x}+\tilde h(\tilde x)\tilde u^m$ з новими довільними елементами $\tilde f(\tilde x)=f(x)g(x)$, $\tilde g(\tilde x)=1$ та $\tilde h(\tilde x)=g(x)h(x)$.

Іншими словами, виконано *калібрування* $g=1$ довільних елементів класу (4.1). Взагалі кажучи, будь-які довільні функціональні елементи f, g та h класу (4.1) можна відкалібрувати в одиницю перетвореннями з групи $G^{\sim}$. Незважаючи на те, що калібрування $g=1$ здається найбільш вдалим, задача групової класифікації класу $f(x)u_t=u_{xx}+h(x)u^m$ залишається складною. Доречний вихід з цієї ситуації — відобразити клас (4.1) деяким невиродженим перетворенням змінних, що не належить до груп еквівалентності $G^{\sim}$ та $\hat G^{\sim}$, на клас, для якого легше розв'язати задачу класифікації. Для цього спочатку виконаємо таке калібрування довільних елементів класу (4.1), щоб нові коефіцієнти $\tilde f$ та $\tilde g$ співпадали. З теореми 4.1 випливає, що це можна зробити перетворенням

$$t' = \operatorname{sign}(f(x)g(x))t, \quad x' = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|}\,dy + x_0, \quad u' = u \tag{4.5}$$

з деякою фіксованою точкою x_0. Перетворення (4.5) породжує відображення класу (4.1) на свій підклас

$$f'(x')u'_{t'} = (f'(x')u'_{x'})_{x'} + h'(x')u'^{\,m},$$

де $f'(x') = g'(x') = \operatorname{sign}(g(x))\,|f(x)g(x)|^{\frac{1}{2}}, \quad h'(x') = \sqrt{\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|}\,h(x).$

Отже, не втрачаючи загальності, обмежимося дослідженням класу

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^m, \tag{4.6}$$

оскільки всі результати, що стосуються симетрій та розв'язків цього класу, можна поширити на клас (4.1) перетворенням (4.5).

Узагальнену розширену групу еквівалентності класу (4.6) можна одержати з теореми 4.2, а умовну, для значення $m = 2$, — з теореми 4.3, покладаючи у відповідних перетвореннях $\tilde f = \tilde g$ та $f = g$. Результати підсумуємо в наступних твердженнях.

Теорема 4.4. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat G^{\sim}_{f=g}$ класу (4.6) складається з перетворень*

$$\tilde t = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde x = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde u = \psi(x)u,$$

$$\tilde f = \frac{\delta_0\delta_1}{\psi^2} f, \quad \tilde h = \frac{\delta_0}{\delta_1\psi^{m+1}} h, \quad \tilde m = m.$$

Тут δ_j, $j = 0,\dots,3$, — довільні сталі, $\delta_0\delta_1 \neq 0$; $\psi = \psi(x)$ — довільний (ненульовий) розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\left(\frac{f\psi_x}{\psi^2}\right)_x = 0. \tag{4.7}$$

Теорема 4.5. *Клас рівнянь*

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^2 \tag{4.8}$$

допускає узагальнену розширену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{f=g,m=2}$, *що складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\psi^2} f, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_1\psi^3} h,$$

де δ_j, $j = 0, 1, 2, 3,$ *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$. $\psi(x)$ *— гладкий розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку*

$$\left[\frac{f}{\psi^2}\left(\frac{\psi^2}{2h}\left(\frac{f\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right)_x\right]_x = \frac{\psi}{4h}\left[\left(\frac{f\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right]^2 \tag{4.9}$$

та $\chi = -\dfrac{\psi^2}{2h}\left(\dfrac{f\psi_x}{\psi^2}\right)_x$.

Як і в ситуації з класом (4.1), умовна група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{f=g,m=2}$ підкласу (4.8) класу (4.6) є ширшою, ніж група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{f=g}|_{m=2}$. Використання перетворень еквівалентності з теорем 4.4 та 4.5 дозволяє помітно спростити процес розв'язання задачі групової класифікації класу (4.6). Зауважимо, що звичайні групи еквівалентності класів (4.6) та (4.8) отримуємо, покладаючи $\psi = \mathrm{const}$ в перетвореннях з груп $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$ та $\hat{G}^{\sim}_{f=g,m=2}$, відповідно. Легко бачити, що $G^{\sim}_{f=g}|_{m=2} = G^{\sim}_{f=g,m=2}$.

Сім'я точкових перетворень

$$v(t,x) = \sqrt{|f(x)|}\,u(t,x), \tag{4.10}$$

параметризованих довільним елементом f, породжує відображення класу (4.6) на клас

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^m + F(x)v. \tag{4.11}$$

Нові довільні елементи F та H визначаються за формулами

$$F(x) = -\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}, \quad H(x) = \frac{h(x)}{(\sqrt{|f(x)|})^{m+1}}. \tag{4.12}$$

Оскільки клас (4.11) є образом класу (4.6) відносно перетворення (4.10), то ці класи називатимемо *класом-образом* та *вихідним класом*, відповідно.

Сім'я перетворень (4.10), параметризованих довільним елементом f, породжує специфічне калібрування довільних елементів класу (4.6). А саме, кожна фіксована пара (F, H) є образом нескінченної кількості пар функцій (f, h), що задовольняють умови (4.12). Крім того, всі результати щодо симетрій та точних розв'язків для класу (4.6) можна відновити з відповідних результатів, отриманих для класу (4.11).

Використовуючи прямий метод, знайдено групи еквівалентності всього класу (4.11) та його підкласу з $m = 2$. Виявляється, що для всіх значень $m \neq 2$ клас (4.11) має звичайну групу еквівалентності і лише для значення $m = 2$ — узагальнену розширену. Інтерпретацію цих результатів представлено у наступному підрозділі.

Теорема 4.6. *Звичайна група еквівалентності* $G^{\sim}_{FH}$ *класу* (4.11) *складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = \delta_4 v,$$
$$\tilde{F} = \frac{F}{{\delta_1}^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{{\delta_1}^2 {\delta_4}^{m-1}}, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j, $j = 1, ..., 4$, *— довільні сталі,* $\delta_1 \delta_4 \neq 0$.

Теорема 4.7. *Клас рівнянь*

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^2 + F(x)v \tag{4.13}$$

допускає узагальнену розширену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$, *що складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = \delta_4 v + \chi(x),$$
$$\tilde{F} = \frac{F}{{\delta_1}^2} - \frac{2H}{{\delta_1}^2 \delta_4}\chi, \quad \tilde{H} = \frac{H}{{\delta_1}^2 \delta_4},$$

де δ_j, $j=1,\dots,4$, *— довільні сталі,* $\delta_1\delta_4\neq 0$, $\chi(x)$ *— гладкий розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку*

$$\chi_{xx}=\frac{H}{\delta_4}\chi^2-F\chi.$$

Аналогічно ситуації з класами (4.1) та (4.6), знову отримуємо, що $G^{\sim}_{FH}\big|_{m=2}=G^{\sim}_{FH,m=2}\subsetneq\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$, де $G^{\sim}_{FH,m=2}$ — звичайна група еквівалентності класу (4.13).

Зрештою, послідовні калібрування зводять задачу групової класифікації для класу (4.1) з $m\neq 2$ до подібної, але більш простої, задачі для класу (4.11).

У випадку $m=2$ необхідне додаткове калібрування з використанням відображення між класами. Це калібрування треба обрати таким чином, щоб складні перетворення еквівалентності, що містять в собі функцію ψ, відобразились в тотожні перетворення на множині нових змінних та довільних елементів. Це калібрування можна зробити сім'єю перетворень

$$w(t,x)=v(t,x)+\frac{F(x)}{2H(x)},\tag{4.14}$$

що породжує відображення класу (4.13) на клас рівнянь вигляду

$$w_t=w_{xx}+H(x)w^2+G(x).\tag{4.15}$$

Нова довільна функція G виражається через функції F та H наступним чином

$$G(x)=-\left(\frac{F(x)}{2H(x)}\right)_{xx}-\frac{F(x)^2}{4H(x)}.\tag{4.16}$$

Називатимемо клас (4.15) *другим класом-образом.* Зауважимо, що перетворення (4.14) параметризовані двома довільними елементами F та H.

Теорема 4.8. *Звичайна група еквівалентності* $G^{\sim}_{HG}$ *класу* (4.15) *складається з перетворень*

$$\tilde t={\delta_1}^2t+\delta_2,\quad \tilde x=\delta_1x+\delta_3,\quad \tilde w=\delta_4w,$$

$$\tilde G=\frac{\delta_4G}{{\delta_1}^2},\quad \tilde H=\frac{H}{{\delta_1}^2\delta_4},$$

де δ_j, $j = 1, ..., 4$, *— довільні сталі,* $\delta_1\delta_4 \neq 0$.

Вичерпну групову класифікацію класів (4.11), (4.15) та (4.6) виконано в підрозділі 4.3

Зауважимо, що для рівнянь з класу (4.1) справедливе зауваження 3.4.

4.2. Обґрунтування відображень між класами

У рамках наведених у підрозділі 2.2 теоретичних відомостей проінтерпретуємо результати підрозділу 4.1, що стосуються загального класу (4.1) з $m \neq 0, 1$. Інтерпретація для підкласу (4.3), який відповідає особливому значенню параметру $m = 2$, аналогічна, але більш складна.

Розглянемо дискретну підгрупу узагальненої розширеної групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$, що складається з перетворень, в яких $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_0 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\psi = 1$, $\varphi = x$. Використовуючи заміну знаку змінної t, кожне рівняння з класу (4.1) завжди можна звести до рівняння з того ж класу, в якому значення довільних елементів f та g локально мають однакові знаки, тобто $\operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g$. Відповідне відображення має вигляд

$$\tilde{t} = \operatorname{sign}(f(x)g(x))t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u,$$
$$\tilde{f} = \operatorname{sign}(f(x)g(x))f, \quad \tilde{g} = g, \quad \tilde{h} = h, \quad \tilde{m} = m.$$

Підклас рівнянь, довільні елементи яких задовольняють умову $\operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g$, позначимо (4.1′). Узагальнена розширена група еквівалентності $\check{G}^{\sim}$ цього підкласу складається з перетворень групи $\hat{G}^{\sim}$, в яких $\delta_1 > 0$. Очевидно, що рівняння з класу (4.1) є $\hat{G}^{\sim}$-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх образи у класі (4.1′) є $\check{G}^{\sim}$-еквівалентними.

Розглянемо підгрупу H_{x_0} групи $\check{G}^{\sim}$, що складається з перетворень еквівалентності, в яких $\delta_0 = \delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\psi = 1$ та φ пробігає множину гладких функцій, що мають додатні похідні та однакову фіксовану точку x_0. Кожне перетворення з групи $\check{G}^{\sim}$ породжує перетворення подібності на сім'ї підгруп $\{H_x\}$. Цей факт не є тривіальним, оскільки ці перетворення стають точковими лише після фіксування довільних елементів. Щоб довести його, візьмемо довільне перетворення еквівалентності Φ вигляду, наведеного в теоремі 4.2, та довільне перетворення Ω:

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = \omega(x), \quad \tilde u = u,$$
$$\tilde f = \frac{1}{\omega_x} f, \quad \tilde g = \omega_x g, \quad \tilde h = \frac{1}{\omega_x} h, \quad \tilde m = m$$

з підгрупи H_{x_0}. Відмітимо, що перетворення $\bar\Phi = \Phi^{-1}$, обернене до перетворення Φ з групи $\breve G^{\sim}$, має такий самий вигляд зі значеннями

$$\bar\delta_0 = \frac{1}{\delta_0}, \quad \bar\delta_1 = \frac{1}{\delta_1}, \quad \bar\delta_2 = -\frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \bar\varphi = \varphi^{-1}, \quad \bar\psi^{\tilde g} = \frac{1}{\psi^g \circ \varphi^{-1}}.$$

Тут φ^{-1} — функція обернена до φ. Верхні індекси функції ψ позначають значення довільного елементу g, що виникає у відповідному рівнянні вигляду (4.2). Дійсно,

$$\left(\frac{\tilde g \bar\psi^{\tilde g}_{\bar x}}{(\bar\psi^{\tilde g})^2}\right)_{\bar x} = -\frac{\delta_0}{\varphi_x}\left(\frac{\varphi_x}{(\psi^g)^2} g \frac{\psi^g_x}{\varphi_x}\right)_x = -\frac{\delta_0}{\varphi_x}\left(\frac{g\psi^g_x}{(\psi^g)^2}\right)_x = 0.$$

Покажемо, що $\Phi^{-1}\Omega\Phi \in H_{\bar\varphi(x_0)}$. Позначимо величини, що змінюються під дією перетворень Φ, $\Omega\Phi$ та $\Phi^{-1}\Omega\Phi$ позначками хвильки, дашка та галочки відповідно.

$$\check t = \bar\delta_1 \hat t + \bar\delta_2 = \frac{\tilde t - \delta_2}{\delta_1} = t, \quad \check x = \bar\varphi(\hat x) = (\bar\varphi\circ\omega)(\tilde x) = (\bar\varphi\circ\omega\circ\varphi)(x),$$
$$\check u = \frac{\hat u}{\hat\zeta} = \frac{\tilde u}{\hat\zeta} = \frac{\psi}{\hat\zeta} u = u,$$
$$\check f = \frac{\bar\delta_1\bar\delta_0}{\bar\varphi_{\hat x}} \hat\zeta^2 \hat f = \frac{\bar\delta_1\bar\delta_0}{\bar\varphi_{\tilde x}} \hat\zeta^2 \tilde f = \frac{\bar\delta_1\bar\delta_0}{\bar\varphi_{\tilde x}} \frac{\delta_1\delta_0}{\varphi_x} \frac{\hat\zeta^2}{\psi^2} f = f,$$
$$\check g = \bar\delta_0 \bar\varphi_{\hat x} \hat\zeta^2 \hat g = \bar\delta_0 \bar\varphi_{\tilde x} \hat\zeta^2 \tilde g = \bar\delta_0 \delta_0 \bar\varphi_{\tilde x} \varphi_x \frac{\hat\zeta^2}{\psi^2} g = g,$$
$$\check h = \frac{\bar\delta_0}{\bar\varphi_{\hat x}} \hat\zeta^{m+1} \hat h = \frac{\bar\delta_0}{\bar\varphi_{\tilde x}} \hat\zeta^{m+1} \tilde h = \frac{\bar\delta_0}{\bar\varphi_{\tilde x}} \frac{\delta_0}{\varphi_x} \frac{\hat\zeta^{m+1}}{\psi^{m+1}} h = h,$$

де

$$\hat\zeta = \frac{1}{\bar\psi^{\hat g}} = \frac{1}{\bar\psi^{\tilde g}\circ\omega^{-1}} = \psi^g \circ \bar\varphi \circ \omega^{-1},$$

та, отже, $\hat\zeta(\hat x)=\psi^g(x)$. Функція $\bar\psi^{\hat g}$ є розв'язком рівняння (4.2) з відповідним значенням $\hat g$ довільного елементу, оскільки

$$\left(\frac{\hat g\bar\psi^{\hat g}_{\hat x}}{(\bar\psi^{\hat g})^2}\right)_{\hat x}=\frac{1}{\omega_{\tilde x}}\left(\omega_{\tilde x}\frac{\tilde g\bar\psi^{\tilde g}_{\tilde x}}{(\bar\psi^{\tilde g})^2}\frac{1}{\omega_{\tilde x}}\right)_{\tilde x}=0.$$

Функція $\bar\varphi\circ\omega\circ\varphi$ має фіксовану точку $\bar\varphi(x_0)$. Отже, вищенаведені формули показують, що $\Phi^{-1}\Omega\Phi\in H_{\bar\varphi(x_0)}$.

Для кожного рівняння з класу (4.1$'$) існує єдине перетворення з групи H_{x_0}, яке відображає його в рівняння з класу (4.6), тобто в рівняння з довільними елементами, на які накладено обмеження калібруванням $\tilde f=\tilde g$. Це перетворення відповідає значенню $\omega(x)=\int_{x_0}^x\sqrt{f(y)/g(y)}\,dy+x_0$. З цього випливає, що кожна орбіта підгрупи H_{x_0} у множині довільних елементів класу (4.1$'$) перетинає множину довільних елементів класу (4.6) точно по одному елементу. Це означає, з огляду на твердження 2.4, що рівняння з класу (4.1$'$) є $\check G^{\sim}$-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх образи у класі (4.6) є $\hat G^{\sim}_{f=g}$-еквівалентними. Останнє твердження також можна перевірити безпосередньо.

Сім'я перетворень еквівалентності (4.5) породжує нетривіальне відображення групи $\check G^{\sim}$ на узагальнену розширену групу еквівалентності $\hat G^{\sim}_{f=g}$ класу (4.6). Дійсно, перетворення, наведене в теоремі 4.2, індукує перетворення

$$\begin{aligned}
&\tilde t'=|\delta_1|t'+\operatorname{sign}(\delta_1 fg)\delta_2,\\
&\tilde x'=\operatorname{sign}(\varphi_x)|\delta_1|^{\frac12}x'+\\
&\qquad\operatorname{sign}(\varphi_x)|\delta_1|^{\frac12}\int_{\varphi^{-1}(x_0)}^{x_0}\sqrt{\left|\frac{f(y)}{g(y)}\right|}\,dy+x_0-\operatorname{sign}(\varphi_x)|\delta_1|^{\frac12}x_0,\\
&\tilde u'=\psi^{f'}u',\qquad \psi^{f'}(x')=\psi^g(x),\\
&\tilde f'=\operatorname{sign}(\varphi_x)\frac{|\delta_1|^{\frac12}}{\psi^2}f',\quad \tilde h'=\frac{\delta_0\operatorname{sign}(\varphi_x)}{|\delta_1|^{\frac12}\psi^{m+1}}h'.
\end{aligned}$$

Функція $\psi^{f'}$ задовольняє рівняння (4.7), в якому довільний елемент f

дорівнює f', оскільки

$$\left(\frac{f'\psi^{f'}_{x'}}{(\psi^{f'}_{x'})^2}\right)_{x'}=\operatorname{sign}(g)\left|\frac{g}{f}\right|^{\frac12}\left(|fg|^{\frac12}\left|\frac{g}{f}\right|^{\frac12}\frac{\psi^g_x}{(\psi^g)^2}\right)_x=\left|\frac{g}{f}\right|^{\frac12}\left(\frac{g\psi^g_x}{(\psi^g)^2}\right)_x=0.$$

У підрозділі 4.2 клас (4.6) відображається на клас (4.11) перетворенням, визначеним формулами (4.10) та (4.12). Множина прообразів кожного рівняння з класу (4.11) співпадає з орбітою підгрупи H' групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$ в класі (4.6), де підгрупа H' складається з перетворень групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$ (див. теорему 4.4), в яких $\delta_0=\delta_1=1$ та $\delta_2=\delta_3=0$. Дійсно, умови

$$-\frac{(|f(x)|^{\frac12})_{xx}}{|f(x)|^{\frac12}}=-\frac{(|\tilde f(x)|^{\frac12})_{xx}}{|\tilde f(x)|^{\frac12}},\quad \frac{h(x)}{|f(x)|^{\frac{m+1}{2}}}=\frac{\tilde h(x)}{|\tilde f(x)|^{\frac{m+1}{2}}}$$

означають, що $\tilde f=\zeta^2 f$ та $\tilde h=\zeta^{m+1}h$, де $\zeta=\delta_4\int\frac{dx}{f(x)}+\delta_5$ для деяких сталих δ_4 та δ_5. Більш того, два рівняння з класу (4.6) пов'язані перетворенням з групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$ тоді і тільки тоді, коли їх образи в класі (4.11) пов'язані перетворенням з групи $G^{\sim}_{FH}$.

Сім'я перетворень (4.10) породжує гомоморфізм групи еквівалентності класу (4.6) на групу еквівалентності класу (4.11). А саме, перетворення, наведене в теоремі 4.4, відображається в перетворення з теореми 4.6, де нова стала δ_4 дорівнює $\sqrt{|\delta_0\delta_1|}\operatorname{sign}(\psi)$. Ядро гомоморфізму співпадає з підгрупою H' та містить, у деякому сенсі, найскладніші перетворення з групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$, які і роблять цю групу еквівалентності узагальненою та розширеною. Тому образом групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$ є звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{FH}$. (Це не так у випадку групи $\hat G^{\sim}_{f=g,m=2}$.)

В результаті побудовано ланцюжок відображень

$$\text{клас (4.1)}\to\text{клас }(4.1')\to\text{клас (4.6)}\to\text{клас (4.11)}.$$

Відображення кожного елемента ланцюжка в наступний є сюр'єкцією. Рівняння з відповідного вихідного класу є еквівалентними відносно узагальненої розширеної групи еквівалентності цього класу тоді і тільки тоді, коли їх образи є еквівалентними відносно відповідної групи еквівалентності класу-образу. Тоді результуюче відображення класу (4.1) на клас (4.11) допускає такі самі властивості як композиція відображень, що їх мають.

Підсумовуючи наведену інтерпретацію результатів підрозділу 4.1, сформулюємо наступне твердження.

Твердження 4.1. *Групова класифікація рівнянь* (4.1) *відносно узагальненої розширеної групи еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}$ *є еквівалентною груповій класифікації рівнянь* (4.11) *відносно звичайної групи еквівалентності* $G^{\sim}_{FH}$ *цього класу. Класифікаційний перелік для класу* (4.1) *можна отримати з відповідного переліку для класу* (4.11)*, знаходячи по одному прообразу кожного елементу останнього переліку відносно результуючого відображення класу* (4.1) *на клас* (4.11).

У випадку $m = 2$ подібний ланцюжок є довшим:

$$\text{клас } (4.3) \to \text{клас } (4.3') \to \text{клас } (4.8) \to \text{клас } (4.13) \to \text{клас } (4.15).$$

Остаточне твердження щодо зв'язку групових класифікацій в класах (4.3) та (4.15) формулюється аналогічно твердженню 4.1.

Твердження 4.2. *Групова класифікація рівнянь* (4.3) *відносно узагальненої розширеної групи еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{m=2}$ *є еквівалентною груповій класифікації рівнянь* (4.15) *відносно звичайної групи еквівалентності* $G^{\sim}_{HG}$ *цього класу. Класифікаційний перелік для класу* (4.3) *можна отримати з відповідного переліку для класу* (4.15) *взяттям одного прообразу для кожного елементу останнього переліку відносно результуючого відображення класу* (4.3) *на клас* (4.15).

4.3. Ліївські симетрії

У підрозділах 4.1 та 4.2 показано, що задача групової класифікації для класу (4.1) зводиться до подібних, але більш простих задач для класу (4.11), якщо $m \neq 2$ та для класу (4.15), якщо $m = 2$. В цьому підрозділі спочатку виконано групові класифікації для класів (4.11) та (4.15), а потім отримані результати використано для того, щоб отримати групову класифікацію класу (4.1).

4.3.1. Групова класифікація класу-образу. Групову класифікацію класу (4.11) виконаємо в рамках класичного підходу [21,23] з точністю до перетворень еквівалентності з групи $G^{\sim}_{FH}$ цього класу. Оскільки рівняння (4.11) є квазілінійним еволюційним рівнянням, то шукаємо оператори вигляду $\Gamma = \tau(t)\partial_t + \xi(t,x)\partial_x + \eta(t,x,v)\partial_v$, які утворюють однопараметричні групи точкових перетворень рівнянь з класу (4.11). Отже, вимагаємо, щоб виконувалась рівність

$$\Gamma^{(2)}\left(v_t - v_{xx} - H(x)v^m - F(x)v\right) = 0 \tag{4.17}$$

для всіх розв'язків рівняння (4.11).

Звідси отримуємо визначальні рівняння на коефіцієнти τ, ξ та η. Визначальні рівняння, що містять тільки коефіцієнти оператора Γ, мають вигляд $\eta_{vv} = 0$, $\tau_t = 2\xi_x$, $\xi_t = \xi_{xx} - 2\eta_{xv}$. Інтегруючи їх, отримуємо вирази для коефіцієнтів ξ та η:

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t), \quad \eta = \left(-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \zeta(t)\right)v + \eta^0(t,x),$$

де σ та ζ — довільні функції змінної t. Маємо лише одне додаткове визначальне рівняння

$$\eta_t = \eta_{xx} - (\eta_v - \tau_t)(Hv^m + Fv) + \xi(H_x v^m + F_x v) + \eta(mHv^{m-1} + F).$$

Підстановка отриманих форм ξ та η в останнє рівняння та розщеплення його за змінною v для всіх значень параметру $m \neq 0, 1, 2$ призводить до рівнянь

$$\left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)H_x = \left(\frac{m-1}{8}\tau_{tt}x^2 + \frac{m-1}{2}\sigma_t x + (1-m)\zeta - \tau_t\right)H,$$

$$\left(\frac{1}{2}\tau_t x+\sigma\right)F_x=-\tau_t F-\frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2-\frac{1}{2}\sigma_{tt}x+\frac{1}{4}\tau_{tt}+\zeta_t,$$

$$\eta^0 mH=0,\qquad {\eta^0}_t={\eta^0}_{xx}+\eta^0 F.$$

Оскільки $mH\neq 0$, то з третього рівняння випливає, що $\eta^0=0$. Тоді четверте рівняння стає тотожністю. В результаті маємо два класифікуючих рівняння, які містять в собі як невизначені коефіцієнти оператора так і довільні елементи класу.

Розщеплення цих рівнянь за функціями F та H у випадку, коли вони є довільними, дає наступні умови $\tau_t=0$, $\sigma=\zeta=0$. Отже, ядром основних груп класу (4.6) є група зсувів за змінною часу, з відповідною алгеброю Лі $A^{\ker}=\langle\partial_t\rangle$.

В таблиці 4.1 наведено перелік значень довільних функцій F, H та базиси відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності для всіх $G^{\sim}_{FH}$-нееквівалентних випадків розширення ліївської симетрії.

Зауваження 4.2. Результати, наведені в табл. 4.1, отримано, припускаючи, що $m\neq 2$. У пункті 4.3.2. показано, що перелік $\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$-нееквівалентних випадків розширення ліївської симетрії для класу (4.13) (тобто для класу (4.11) з $m=2$) вичерпується випадками, представленими в табл. 4.1. Це пояснює наявність спеціального обмеження на сталу a_3 у випадку $m=2$, зазначеного під табл. 4.1.

Зауваження 4.3. Деякі сталі, що виникають у табл. 4.1, можна додатково відкалібрувати перетвореннями з групи еквівалентності $G^{\sim}_{FH}$. Так, у випадках 1 та 2 сталу q, якщо вона не дорівнює нулю, можна покласти рівною 1 перетворенням $\tilde t=q^2t$, $\tilde x=qx$, $\tilde v=q^{\frac{2}{1-m}}v$. Подібним перетворенням у випадках 4–6 можна виконати калібрування $p=\pm1$, в залежності від знаку сталої p. Існують також інші можливості. Наприклад, сталу a_1, якщо вона не дорівнює нулю, можна зробити 1 або -1, в залежності від її знаку, перетворенням $\tilde t=|a_1|t$, $\tilde x=|a_1|^{\frac12}x$, $\tilde v=|a_1|^{\frac{1}{1-m}}v$. Для того, щоб спростити вигляд функції F у випадках 2 та 4–6, треба зробити відповідне калібрування сталих α або β. Наприклад, розглянемо рівняння з класу (4.11) з довільними елементами, наведеними у випадку 2 табл. 4.1. Перетворення $\tilde{t} = \alpha^2 t$, $\tilde{x} = \alpha x$, $\tilde{v} = \alpha^{\frac{2}{1-m}} v$ відображає його в еквівалентне рівняння вигляду $\tilde{v}_{\tilde{t}} = \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \delta e^{(1-m)\tilde{x}} \tilde{v}^m - \tilde{v}$, яке допускає наступну максимальну алгебру ліївської інваріантності

$$\left\langle \partial_t,\, \partial_x + v\partial_v,\, 2t\partial_t + (x - 2t)\partial_x + \left(x - 2t + \tfrac{2}{1-m}\right) v\partial_v \right\rangle.$$

Таблиця 4.1

Результати групової класифікації рівнянь
$$\boldsymbol{v_t = v_{xx} + H(x)v^m + F(x)v,\ m \neq 0, 1;\ H(x) \neq 0}$$

№	$H(x)$	$F(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	δe^{qx}	a_1	$\partial_t,\, \partial_x + \alpha v\partial_v$
2	δe^{qx}	$-\alpha^2$	$\partial_t,\, \partial_x + \alpha v\partial_v$, $2t\partial_t + (x - 2\alpha t)\partial_x + \left(\alpha(x - 2\alpha t) + \frac{2}{1-m}\right) v\partial_v$
3	δx^k	$a_2 x^{-2}$	$\partial_t,\, 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{k+2}{1-m} v\partial_v$
4	$\delta x^k e^{px^2}$	$-\beta^2 x^2 + \beta \frac{2k+5-m}{1-m} + a_2 x^{-2}$	$\partial_t,\, e^{4\beta t}\left[\partial_t + 2\beta x\partial_x - 2\beta\left(\beta x^2 - \frac{k+2}{1-m}\right) v\partial_v\right]$
5	δe^{px^2}	$-\beta^2 x^2 + \beta a_3$	$\partial_t,\, e^{2\beta t}\left[\partial_x - \beta x v\partial_v\right]$
6	δe^{px^2}	$-\beta^2 x^2 + \beta \frac{5-m}{1-m}$	$\partial_t,\, e^{2\beta t}\left[\partial_x - \beta x v\partial_v\right]$, $e^{4\beta t}\left[\partial_t + 2\beta x\partial_x - 2\beta\left(\beta x^2 - \frac{2}{1-m}\right) v\partial_v\right]$

Тут $\alpha, \beta, \delta, k, p, q, a_1, a_2, a_3$ — сталі, що задовольняють наступні умови: $\alpha = \frac{q}{1-m}$, $\beta = \frac{2p}{m-1}$, $\delta = \pm 1 \bmod G^{\sim}_{FH}$, $p \neq 0$, $a_1 \neq -\alpha^2$, $k^2 + a_2^2 \neq 0$, $q^2 + a_1^2 \neq 0$; $a_3 \neq \frac{5-m}{1-m}$ та додатково $a_3 \neq 5$, якщо $m = 2$.

Нижче наведено перетворення з груп Лі, що відповідають алгебрам ліївської інваріантності з базисними операторами наведеними в табл. 4.1.

0. $t' = t + \varepsilon_1, \quad x' = x, \quad v' = v;$

1. $t' = t + \varepsilon_1, \quad x' = x + \varepsilon_2, \quad v' = v e^{\alpha\varepsilon_2};$

2. $t'=te^{2\varepsilon_3}+\varepsilon_1,\quad x'=(x+2\alpha t)e^{\varepsilon_3}-2\alpha te^{2\varepsilon_3}+\varepsilon_2,$

$v'=ve^{\alpha\varepsilon_2}e^{-2\alpha^2te^{2\varepsilon_3}+\alpha(x+2\alpha t)e^{\varepsilon_3}+\frac{2}{1-m}\varepsilon_3-\alpha x};$

3. $t'=te^{2\varepsilon_2}+\varepsilon_1,\quad x'=xe^{\varepsilon_2},\quad v'=ve^{\frac{k+2}{1-m}\varepsilon_2};$

4. $t'=-\frac{1}{4\beta}\ln(e^{-4\beta t}-4\beta\varepsilon_2)+\varepsilon_1,\quad x'=xe^{-2\beta t}(e^{-4\beta t}-4\beta\varepsilon_2)^{-\frac{1}{2}},$

$v'=ve^{2\beta^2tx^2e^{-4\beta t}+2\beta\frac{k+2}{1-m}\varepsilon_2}(e^{-4\beta t}-4\beta\varepsilon_2)^{\frac{\beta}{2}x^2e^{-4\beta t}};$

5. $t'=t+\varepsilon_1,\quad x'=x+e^{2\beta t}\varepsilon_2,\quad v'=ve^{-\beta e^{2\beta t}(x+\frac{1}{2}e^{2\beta t}\varepsilon_2)\varepsilon_2};$

6. $t'=-\frac{1}{4\beta}\ln(e^{-4\beta t}-4\beta\varepsilon_3)+\varepsilon_1,\quad x'=xe^{-2\beta t}(e^{-4\beta t}-4\beta\varepsilon_3)^{-\frac{1}{2}}+e^{2\beta t}\varepsilon_2,$

$v'=ve^{2\beta^2tx^2e^{-4\beta t}+2\beta\frac{2}{1-m}\varepsilon_3}(e^{-4\beta t}-4\beta\varepsilon_3)^{\frac{\beta}{2}x^2e^{-4\beta t}}e^{-\beta e^{2\beta t}(x+\frac{1}{2}e^{2\beta t}\varepsilon_2)\varepsilon_2}.$

4.3.2. Групова класифікація другого класу-образу. У випадку $m=2$ виконаємо групову класифікацію класу (4.15) відносно його групи еквівалентності $G^{\sim}_{HG}$, а потім перенесемо отримані результати на класи (4.11) та (4.1).

Нехай оператори загального вигляду $\Gamma=\tau(t)\partial_t+\xi(t,x)\partial_x+\eta(t,x,w)\partial_w$ породжують однопараметричні групи точкових перетворень симетрії рівнянь з класу (4.15). Застосувавши до рівнянь (4.15) критерій інфінітезимальної інваріантності, отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Γ, з яких знаходимо

$$\xi=\frac{1}{2}\tau_tx+\sigma(t),\quad \eta=\left(-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2-\frac{1}{2}\sigma_tx+\zeta(t)\right)w+\eta^0(t,x),$$

та класифікуючі рівняння, які, з урахуванням отриманих виразів для ξ та η, мають вигляд

$$\left(\frac{1}{2}\tau_tx+\sigma\right)H_x=\left(\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2+\frac{1}{2}\sigma_tx-\zeta-\tau_t\right)H,$$
$$2\eta^0H=-\frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2-\frac{1}{2}\sigma_{tt}x+\zeta_t+\frac{1}{4}\tau_{tt},$$
$$\left(\frac{1}{2}\tau_tx+\sigma\right)G_x=-\left(\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2+\frac{1}{2}\sigma_tx-\zeta+\tau_t\right)G+\eta^0_t-\eta^0_{xx}.$$

Ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (4.15) співпадає з одновимірною алгеброю $\langle\partial_t\rangle$. Всі можливі $G^{\sim}_{HG}$-нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності вичерпуються наведеними у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Результати групової класифікації рівнянь
$\boldsymbol{w_t = w_{xx} + H(x)w^2 + G(x)}$. $\boldsymbol{H(x) \neq 0}$

№	$H(x)$	$G(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	δe^{qx}	$b_1 e^{-qx}$	$\partial_t,\ \partial_x - qw\partial_w$
2	δe^{qx}	$\frac{q^4}{4\delta}e^{-qx}$	$\partial_t,\ \partial_x - qw\partial_w,$ $2t\partial_t + (x+2qt)\partial_x - \left((qx+2q^2t+2)w + \frac{q^2}{\delta}e^{-qx}\right)\partial_w$
3	δx^k	$\frac{b_2}{\delta x^{k+4}}$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x - (k+2)w\partial_w$
4	$\delta x^k e^{px^2}$	$G_1(x)$	$\partial_t,$ $e^{8pt}\left[\partial_t + 4px\partial_x - 4p\left((2px^2+k+2)w + \frac{2p(4px^2+2k+3)}{\delta x^k e^{px^2}}\right)\partial_w\right]$
5	δe^{px^2}	$\frac{p^2(4p^2x^4-20px^2+b_3)}{\delta e^{px^2}}$	$\partial_t,\ e^{4pt}\left[\partial_x - 2px\left(w + \frac{2p}{\delta e^{px^2}}\right)\partial_w\right]$
6	δe^{px^2}	$\frac{p^2(4p^2x^4-20px^2-11)}{\delta e^{px^2}}$	$\partial_t,\ e^{4pt}\left[\partial_x - 2px\left(w + \frac{2p}{\delta e^{px^2}}\right)\partial_w\right],$ $e^{8pt}\left[\partial_t + 4px\partial_x - 8p\left((px^2+1)w + \frac{p(4px^2+3)}{\delta e^{px^2}}\right)\partial_w\right]$

Тут $\delta = \pm 1$, $k^2 + b_2^2 \neq 0$, $p \neq 0$, $b_1 \neq \frac{q^4}{4\delta}$, $b_3 \neq -11$, q — довільна стала, $q^2 + b_1^2 \neq 0$,

$$G_1(x) = \frac{(2p^2x^2+p)(2p^2x^2-11p) + 8kp^3x^2 + 2k(3k-5)p^2}{\delta x^k e^{px^2}} + \frac{k(k+1)(2k+3)px^2 + b_2}{\delta x^{k+4} e^{px^2}}.$$

Для того, щоб отримати групову класифікацію класу (4.13) потрібно знайти по одному прообразу всіх рівнянь з класу (4.15), що мають довільні елементи H та G, наведені в табл. 4.2, відносно перетворення (4.14) та після цього побудувати оператори ліївської симетрії отриманих рівнянь. Будь-яка функція G є образом такої функції F, що є загальним розв'язком рівняння (4.16). Тоді кожні два рівняння з класу (4.13) з довільними елементами F_1 та F_2, які є частковими розв'язками рівняння (4.16), та відповідним H є $\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$-еквівалентними. Наприклад, розглянемо рівняння з класу (4.15) з довільними елементами наведеними у випадку 6 табл. 4.2, тобто рівняння

$$w_t = w_{xx} + \delta e^{px^2} w^2 + \frac{p^2(4p^2x^4 - 20px^2 - 11)}{\delta e^{px^2}}.$$

Для таких значень функцій G та H знаходимо два часткових розв'язка звичайного диференціального рівняння (4.16), а саме $F_1 = -2p(2px^2+3)$ та $F_2 = -2p(2px^2 - 5)$. Це означає, що рівняння

$$v_t = v_{xx} + \delta e^{px^2} v^2 - 2p(2px^2+3)v \quad \text{та}$$
$$\tilde{v}_{\tilde{t}} = \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \delta e^{p\tilde{x}^2} \tilde{v}^2 - 2p(2p\tilde{x}^2 - 5)\tilde{v}$$

є еквівалентними відносно деякого перетворення з групи $\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$. Явну форму цього перетворення знаходимо з теореми 4.7. Воно має вигляд $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{v} = v - \dfrac{8p}{\delta e^{px^2}}$. Максимальні алгебри ліївської інваріантності цих рівнянь мають наступний вигляд

$$\Big\langle \partial_t,\ e^{4pt}\left[\partial_x - 2pxv\partial_v\right],$$
$$e^{8pt}\left[\partial_t + 4px\partial_x - 8p\left((px^2+1)v + \frac{p(a_3+3)}{\delta e^{px^2}}\right)\partial_v\right]\Big\rangle,$$

де $a_3 = -3$ або $a_3 = 5$, відповідно.

Отримані для кожного випадку функції G з табл. 4.2 часткові розв'язки звичайного диференціального рівняння (4.16) та відповідні функції H складають наступні пари функцій $(F,\ H)$:

1. $(F, H) = (a_1,\ \delta e^{qx})$, де $a_1 = -q^2 \pm \sqrt{q^4 - 4\delta b_1}$, $a_1 \neq -q^2$.
2. $(F, H) = \big(-q^2,\ \delta e^{qx}\big)$.
3. $(F, H) = \big(a_2 x^{-2},\ \delta x^k\big)$.

4. $(F,H)=\Big(-4p^2x^2-2p(2k+3)+a_2x^{-2},\, \delta x^k e^{px^2}\Big)$,

5. $(F,H)=\Big(-4p^2x^2+2p\,a_3,\, \delta e^{px^2}\Big)$, де $a_3=1\pm\sqrt{5-b_3}$, $a_3\neq-3,\,5$.

6. $(F,H)=(-4p^2x^2+2p\,a_3,\, \delta e^{px^2})$, де $a_3=-3,\,5$.

У випадках 3 та 4 $a_2=-(k+2)(k+3)\pm\sqrt{(k+2)^2(k+3)^2-4b_2}$, $k^2+a_2^2\neq 0$.

Отже, групову класифікацію класу (4.13) відносно групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$ можна представити переліком, наведеним у табл. 4.1 (після підстановки значення $m=2$ скрізь, де це необхідно).

4.3.3. Групова класифікація вихідного класу. Сім'я перетворень (4.10), параметризованих довільним елементом f, породжує відображення класу (4.6) на клас (4.11). Базисні елементи максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (4.6) можна знайти з відповідних алгебр інваріантності рівнянь з класу-образу (4.11) за формулою

$$\tilde{Q}=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\left[-\frac{\xi f_x u}{2f}+\frac{\eta}{\sqrt{|f|}}\right]\partial_u. \tag{4.18}$$

Тут τ, ξ та η є коефіцієнтами операторів з табл. 4.1 біля ∂_t, ∂_x та ∂_v, відповідно.

Перетворення (4.10) не є взаємно однозначним, оскільки прообразом кожного рівняння з класу (4.11) є двопараметрична сім'я рівнянь з класу (4.6). Кожна така сім'я складається з рівнянь, еквівалентних відносно перетворень, наведених в теоремі 4.4. Для того, щоб отримати групову класифікацію класу (4.6) відносно групи $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$, достатньо знайти по одному представнику з кожної сім'ї рівнянь, яка відображається перетворенням (4.10) в рівняння з класу (4.11) з коефіцієнтами F та H, представленими випадками 1–6 табл. 4.1. Тобто, для кожної пари (F,H) з табл. 4.1 необхідно знайти будь-яку пару функції (f,h), що задовольняє умови (4.12).

Задача відшукання пар функцій (f, h) розв'язується в два етапи. Спочатку треба проінтегрувати нелінійне звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$(\sqrt{|f(x)|})_{xx} + F\sqrt{|f(x)|} = 0 \qquad (4.19)$$

для кожного значення функції F з табл. 4.1. Після цього всі відповідні h легко знайти з другої умови (4.12). Нижче наведено перелік функцій f та h, що складають пари (f, h), пов'язані формулами (4.12) з шістьма парами функцій (F, H), представленими випадками 1–6 табл. 4.1. В усіх випадках $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

1. $a_1 = 0$: $f = (c_1x + c_2)^2$, $h = \delta e^{qx}(c_1x + c_2)^{m+1}$, $q \neq 0$;

   $a_1 > 0 \Rightarrow a_1 = 1 \bmod G^{\sim}_{FH}$:

   $f = (c_1 \sin x + c_2 \cos x)^2$, $h = \delta e^{qx}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)^{m+1}$;

   $a_1 < 0 \Rightarrow a_1 = -1 \bmod G^{\sim}_{FH}$:

   $f = (c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x)^2$, $\delta e^{qx}(c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x)^{m+1}$, $q \neq \pm(1 - m)$.

2. $q = 0$: $f = (c_1x + c_2)^2$, $h = \delta(c_1x + c_2)^{m+1}$;

   $q \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1 \bmod G^{\sim}_{FH}$:

   $f = (c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x)^2$, $h = \delta e^{(1-m)x}(c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x)^{m+1}$, де $\alpha = \frac{q}{1-m}$.

3. $a_2 = 0$: $f = (c_1x + c_2)^2$, $h = \delta x^k(c_1x + c_2)^{m+1}$, $k \neq 0$,

   $a_2 = \frac{1}{4}$: $f = x(c_1 + c_2 \ln|x|)^2$, $h = \delta x^l(c_1 + c_2 \ln|x|)^{m+1}$,

   $a_2 > \frac{1}{4}$: $f = x(c_1 \sin(\rho \ln|x|) + c_2 \cos(\rho \ln|x|))^2$,

   $h = \delta x^l(c_1 \sin(\rho \ln|x|) + c_2 \cos(\rho \ln|x|))^{m+1}$,

   $a_2 < \frac{1}{4}$, $a_2 \neq 0$: $f = x(c_1|x|^\rho + c_2|x|^{-\rho})^2$, $h = \delta x^l(c_1|x|^\rho + c_2|x|^{-\rho})^{m+1}$,

   де $\rho = \frac{\sqrt{|1-4a_2|}}{2}$, $l = \frac{2k+m+1}{2}$.

4. $f = x^{-1}\left(c_1 M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) + c_2 W_{\kappa,\mu}(\beta x^2)\right)^2$,

   $h = \delta x^s e^{px^2}\left(c_1 M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) + c_2 W_{\kappa,\mu}(\beta x^2)\right)^{m+1}$, де $s = \frac{2k-m-1}{2}$, $\kappa = \frac{2k+5-m}{4(1-m)}$, $\mu = \frac{\sqrt{|1-4a_2|}}{4}$. Тут і надалі $\beta = \frac{2p}{m-1}$, $M_{\kappa,\mu}$ та $W_{\kappa,\mu}$ — функції Уіттекера (див., наприклад, [31, Розділ 16]).

5. $f = x^{-1}\left(c_1 M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) + c_2 W_{\kappa,\mu}(\beta x^2)\right)^2$,
   $h = \delta x^{-\frac{m+1}{2}} e^{px^2}\left(c_1 M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) + c_2 W_{\kappa,\mu}(\beta x^2)\right)^{m+1}$, де $\kappa = \frac{a_3}{4}$, $\mu = \frac{1}{4}$.
6. $f = x^{-1}\left(c_1 M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) + c_2 W_{\kappa,\mu}(\beta x^2)\right)^2$,
   $h = \delta x^{-\frac{m+1}{2}} e^{px^2}\left(c_1 M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) + c_2 W_{\kappa,\mu}(\beta x^2)\right)^{m+1}$,
   де $\kappa = \frac{5-m}{4(1-m)}$, $\mu = \frac{1}{4}$.

Як зазначалося вище, для отримання повної групової класифікації класу (4.6) відносно її узагальненої розширеної групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$ достатньо взяти будь-якого найпростішого представника з кожної пари (f, h), що складається з функцій, наведених вище. Проілюструємо цей факт наступними прикладами.

Приклад 4.1 (табл. 4.1, випадок 3, $\boldsymbol{a_2 = \frac{1}{4}}$)**.** Відповідне рівняння з класу (4.11) є образом рівнянь з класу (4.6) з довільними елементами $(f, h) = \left(x(c_1 + c_2 \ln|x|)^2,\ \delta x^l (c_1 + c_2 \ln|x|)^{m+1}\right)$, де $l = \frac{2k+m+1}{2}$. Найпростішим представником цієї пари функцій є $(f, h) = \left(x,\ \delta x^l\right)$. Рівняння $x(c_1 + c_2 \ln|x|)^2 u_t = (x(c_1 + c_2 \ln|x|)^2 u_x)_x + \delta x^l (c_1 + c_2 \ln|x|)^{m+1} u^m$ еквівалентно рівнянню $\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \delta \tilde{x}^l \tilde{u}^m$. З теореми 4.4 знаходимо, що ці рівняння зводяться одне до одного перетворенням $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = (c_1 + c_2 \ln|x|)u$, Отже, знаючи максимальну алгебру ліївської інваріантності або точні розв'язки для останнього рівняння, з довільними елементами найпростішого вигляду, можна отримати подібні результати для рівнянь з коефіцієнтами $(f, h) = \left(x(c_1 + c_2 \ln|x|)^2,\ \delta x^l (c_1 + c_2 \ln|x|)^{m+1}\right)$.

Приклад 4.2 (табл. 4.1, випадок 1, $\boldsymbol{a_1 < 0}$)**.** Оскільки $a_1 < 0$, перетворенням з групи $G^{\sim}_{FH}$ можна виконати калібрування $a_1 = -1$ (див. зауваження 4.3). Рівняння з класу (4.6), що відображаються у цей випадок, мають наступну пару довільних елементів f та g

$$(f, h) = \left((c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x)^2,\ \delta e^{qx}(c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x)^{m+1}\right),$$

де $q \neq \pm(1-m)$. З точністю до перетворень зсуву та розтягу будь-яку пару такого вигляду можна звести до однієї з трьох нееквівалентних $\left(e^{2x}, \delta e^{(q+m+1)x}\right)$, $\left(\operatorname{ch}^2 x, \delta e^{qx}\operatorname{ch}^{m+1}x\right)$, $\left(\operatorname{sh}^2 x, \delta e^{qx}\operatorname{sh}^{m+1}x\right)$. Рівняння з класу (4.6) з такими довільними елементами є $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$-еквівалентними. Дійсно, з теореми 4.4 знаходимо, що рівняння, яке має першу пару довільних елементів відображається в рівняння, що відповідає другій парі, перетворенням

$$\tilde{t}=t, \quad \tilde{x}=x, \quad \tilde{u}=\frac{e^x}{\operatorname{ch} x}\,u.$$

Рівняння, що мають за довільні елементи другу та третю пару функцій, пов'язані перетворенням $\tilde{t}=t$, $\tilde{x}=x$, $\tilde{u}=u\operatorname{th} x$. Для представлення у таблиці 4.3 з трьох наведених пар обрано першу та подальше спрощено її вигляд перетворенням еквівалентності $\tilde{t}=4t$, $\tilde{x}=2x$, $\tilde{u}=4^{\frac{1}{1-m}}u$, що в результаті дає рівняння $e^{\tilde{x}}\tilde{u}_{\tilde{t}}=(e^{\tilde{x}}\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}}+\delta e^{\frac{q+m+1}{2}\tilde{x}}\tilde{u}^m$. Позначивши $\frac{q+m+1}{2}$ через r, отримуємо випадок 1.3 табл. 4.3.

Отже, для завершення групової класифікації класу (4.6) відносно його групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$ (або групи $\hat{G}^{\sim}_{f=g,m=2}$, якщо $m=2$) треба обрати найпростіші функцій f, h та побудувати для рівнянь з класу (4.6), що мають обрані довільні елементи, відповідні базиси максимальних алгебр ліївської інваріантності за формулою (4.18). Отримані результати зібрано в табл. 4.3, де перша цифра номеру кожного випадку показує, з якого випадку табл. 4.1 він був відновлений.

Приклад 4.3 (табл. 4.1, випадок 2, $\boldsymbol{q \neq 0}$)**.** Рівняння з класу (4.11) з коефіцієнтами наведеними у випадку 2 табл. 4.1, де $q \neq 0$, є образом рівнянь з класу (4.6) з довільними елементами

$$(f,h)=\left((c_1\operatorname{sh}|\alpha|x+c_2\operatorname{ch}|\alpha|x)^2,\ \delta e^{qx}(c_1\operatorname{sh}|\alpha|x+c_2\operatorname{ch}|\alpha|x)^{m+1}\right),$$

де $\alpha=\frac{q}{1-m}$. Найпростішим представником такої пари довільних елементів є $(f,h)=\left(e^{2|\alpha|x},\ \delta e^{(q+(m+1)|\alpha|)x}\right)$. Перетворенням еквівалентності $\tilde{t}=4\alpha^2 t$, $\tilde{x}=2|\alpha|x$, $\tilde{u}=(2|\alpha|)^{\frac{2}{1-m}}u$ з групи $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$ можна покласти

Таблиця 4.3

Результати групової класифікації рівнянь
$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^m$, $f(x)h(x) \neq 0$, $m \neq 0, 1$

№	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1.1	1	δe^{qx}	$\partial_t,\ \partial_x + \alpha u\partial_u$
1.2	$(\cos x)^2$	$\delta e^{qx}(\cos x)^{m+1}$	$\partial_t,\ \partial_x + (\alpha + \operatorname{tg} x)\, u\partial_u$
1.3	e^x	δe^{rx}	$\partial_t,\ \partial_x + \frac{r-1}{1-m}u\partial_u$
2.1	1	δ	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2}{1-m}u\,\partial_u$
2.2	e^x	δe^x	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + (x-t)\partial_x + \frac{2}{1-m}u\partial_u$
3.1	x^λ	δx^γ	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2-\lambda+\gamma}{1-m}u\partial_u$
3.2	$xf_0(x)^2$	$\delta x^l f_0(x)^{m+1}$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x + \left(\rho \operatorname{tg}(\rho\ln\lvert x\rvert) + \frac{l+1}{1-m}\right)u\partial_u$
4	$x^{-1}f_1(x)^2$	$\delta x^s e^{px^2} f_1(x)^{m+1}$	$\partial_t,\ e^{4\beta t}\Big[\partial_t + 2\beta x\partial_x -$ $2\beta\Big(2\beta x^2 - \frac{2(s+3)}{1-m} + \Big(2\mu_1 + \frac{s-m+4}{1-m}\Big)\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\Big)u\partial_u\Big]$
5	$x^{-1}f_3(x)^2$	$\delta x^{-\frac{m+1}{2}} e^{px^2} f_3(x)^{m+1}$	$\partial_t,\ e^{2\beta t}\Big[\partial_x - \Big(4\beta x^2 - 1 - a_3 + (a_3+3)\frac{f_4(x)}{f_3(x)}\Big)\dfrac{u}{2x}\partial_u\Big]$
6	$x^{-1}f_5(x)^2$	$\delta x^{-\frac{m+1}{2}} e^{px^2} f_5(x)^{m+1}$	$\partial_t,\ e^{2\beta t}\Big[\partial_x - \Big(2\beta x^2 + \frac{m-3}{1-m} + 2\frac{2-m}{1-m}\frac{f_6(x)}{f_5(x)}\Big)\dfrac{u}{x}\partial_u\Big],$ $e^{4\beta t}\Big[\partial_t + 2\beta x\partial_x - 4\beta\Big(\beta x^2 + \frac{m-5}{2(1-m)} + \frac{2-m}{1-m}\frac{f_6(x)}{f_5(x)}\Big)u\partial_u\Big]$

$\alpha = \frac{q}{1-m}$, $\beta = \frac{2p}{m-1}$, $\delta = \pm 1$, $p \neq 0, \rho \neq 0$; q, s — довільні сталі. $r \neq 1, m$.
У випадку 1.1 $q \neq 0$.

У випадку 3.1 $(\lambda,\gamma) \neq \{(0,0),\ (2, m+1)\}$, якщо $m \neq 2$
та $(\lambda,\gamma) \neq \{(-6,-9),\ (0,0),\ (2,3),\ (8,12)\}$, якщо $m = 2$.

$f_0(x) = \cos(\rho\ln\lvert x\rvert)$

$f_{2i-1}(x) = M_{\kappa_i,\mu_i}(\beta x^2)$, $f_{2i}(x) = M_{\kappa_i+1,\mu_i}(\beta x^2)$, $i = 1, 2, 3$, де $M_{\kappa,\mu}$ — функція Уіттекера.

$\kappa_1 = \frac{s+3}{2(1-m)}$, $\mu_1 = \frac{\sqrt{1-4a_2}}{4}$, $\kappa_2 = \frac{a_3}{4}$, $\mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{4}$, $\kappa_3 = \frac{5-m}{4(1-m)}$.
У випадку 4 $s \neq -\frac{m+1}{2}$, якщо $a_2 = 0$ (тобто, якщо $\mu_1 = \frac{1}{4}$). У випадку 5 $a_3 \neq \frac{5-m}{1-m}$ та додатково $a_3 \neq 5$, якщо $m = 2$.

$|\alpha| = 1$. Тоді $(f,h) = (e^{2x},\, \delta e^{2x})$, якщо $\alpha = 1$, та $(f,h) = (e^{2x},\, \delta e^{2mx})$, якщо $\alpha = -1$. Перетворення $\tilde t = t$, $\tilde x = -x$, $\tilde u = e^x u$ з групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$ породжує відображення рівняння з другою парою довільних елементів на рівняння з першою. З цієї причини тільки першу пару довільних елементів наведено у табл. 4.3 (див. випадок 2.2). З формули (4.18) знаходимо максимальну алгебру інваріантності $\left\langle \partial_t,\, \partial_x,\, 2t\partial_t + (x-t)\partial_x + \frac{2}{1-m}u\partial_u \right\rangle$ рівняння $e^x u_t = (e^x u_x)_x + \delta e^{mx} u^m$.

Зауваження 4.4. Рівняння з класу (4.6) зі степеневими коефіцієнтами $(f,h) = (x^{\lambda_1}, \delta x^{\gamma_1})$ є еквівалентними рівнянню зі степеневими коефіцієнтами $(\tilde f, \tilde h) = (x^{\lambda_2}, \delta x^{\gamma_2})$ відносно перетворення $\tilde t = t$, $\tilde x = x$, $\tilde u = x^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}} u$, що належить до групи $\hat G^{\sim}_{f=g}$, тоді і тільки тоді, коли $\lambda_2 = 2 - \lambda_1$, $\gamma_2 = \gamma_1 + (m+1)(1-\lambda_1)$, $(\lambda_1,\lambda_2) \neq (1,1)$.

У випадку $m = 2$ два рівняння (4.6) зі степеневими коефіцієнтами є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх степені задовольняють умовам $\lambda_2 = 2 - \lambda_1$ або $\lambda_2 = 1 \pm \sqrt{49 + 17{\lambda_1}^2 - 24\gamma_1\lambda_1 - 58\lambda_1 + 40\gamma_1 + 8{\gamma_1}^2}$ та $\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{3}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Користуючись цими формулами, можна легко перевірити, що рівняння, які мають коефіцієнти $(f,h) = (x^\lambda, \delta x^\gamma)$ (випадок 3.1 табл. 4.3), де $(\lambda,\gamma) = (2, m+1)$ для $m \neq 2$ та $(\lambda,\gamma) = \{(-6,-9),\, (2,3),\, (8,12)\}$ для $m = 2$ є еквівалентними рівнянню зі значенням $(\lambda,\gamma) = (0,0)$, тобто рівнянню зі сталими коефіцієнтами, представленому у випадку 2.1 табл. 4.3.

Цей факт пояснює наявність обмежень на значення λ та γ наведених під таблицею 4.3.

Зауваження 4.5. Для деяких значень параметрів функції Уіттекера можна виразити через елементарні функції. Див., наприклад, [31]. Так, використовуючи формулу $M_{\kappa,-\kappa-\frac12}(z) = e^{\frac{z}{2}} z^{-\kappa}$, можна отримати умови на параметри, за яких функції, що виникають у випадках 4–6 табл. 4.3 як значення довільних елементів, є елементарними. Нижче наведено такі умови з відповідними довільними елементами та максимальними алгебрами ліївської інваріантності.

Якщо у випадку 4 $s = m - 4 - 2(1-m)\mu_1$, де $\mu_1 = \frac{\sqrt{|1-4a_2|}}{4}$ та, як наслідок, $\kappa_1 = -\mu_1 - \frac{1}{2}$, то в термінах сталої κ_1 маємо

$$(f,h) = \left(x^{-(1+4\kappa_1)}e^{\beta x^2}, \delta x^{-(3+4m\kappa_1)}e^{\beta m x^2}\right);$$
$$A^{\max} = \left\langle \partial_t,\, e^{4\beta t}\left[\partial_t + 2\beta x\partial_x - 2\beta(2\beta x^2 - 4\kappa_1)u\partial_u\right]\right\rangle.$$

У випадку 5 з $a_3 = -3$ та, отже, $m \neq 2$ отримуємо

$$(f,h) = \left(x^2 e^{\beta x^2},\, \delta x^{m+1}e^{\beta m x^2}\right);$$
$$A^{\max} = \left\langle \partial_t,\, e^{2\beta t}\left[\partial_x - (2\beta x^2+1)\frac{u}{x}\partial_u\right]\right\rangle.$$

У випадку 6 з $m = 2$ маємо

$$(f,h) = \left(x^2 e^{2px^2},\, \delta x^3 e^{4px^2}\right); \quad A^{\max} = \left\langle \partial_t,\, e^{4pt}\left[\partial_x - (4px^2+1)\frac{u}{x}\partial_u\right],\right.$$
$$\left. e^{8pt}\left[\partial_t + 4px\partial_x - 4p(4px^2+3)u\partial_u\right]\right\rangle.$$

4.4. Додаткові перетворення еквівалентності

У попередньому підрозділі виконано групову класифікацію рівнянь з класів (4.6), (4.11) та (4.1). Виявляється, в кожному з цих класів існують додаткові перетворення еквівалентності між нееквівалентними, відносно відповідної групи еквівалентності, випадками розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності. Ці перетворення спрощують подальше застосування результатів групової класифікації. Пари випадків з табл. 4.1, що зводяться один до одного точковими перетвореннями, та відповідні перетворення вичерпуються наступними:

$1 \mapsto \tilde{1}|_{(\tilde q,\tilde a_1)=(0,a_1+\alpha^2)}, \quad 2 \mapsto \tilde{2}|_{\tilde q=0}$:

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = x + 2\alpha t, \quad \tilde v = e^{-\alpha x}v, \quad \text{де} \quad \alpha = \tfrac{q}{1-m}; \tag{4.20}$$

$4 \mapsto \tilde{3}$:

$$\tilde t = -\frac{1}{4\beta}e^{-4\beta t}, \quad \tilde x = e^{-2\beta t}x, \quad \tilde v = \exp\left(\frac{\beta}{2}x^2 + 2\beta\frac{k+2}{m-1}t\right)v; \tag{4.21}$$

$6 \mapsto \tilde{2}|_{\tilde{q}=0}$:

$$\tilde{t} = -\frac{1}{4\beta}e^{-4\beta t}, \quad \tilde{x} = e^{-2\beta t}x, \quad \tilde{v} = \exp\left(\frac{\beta}{2}\,x^2 + \frac{4\beta}{m-1}\,t\right)v. \tag{4.22}$$

Зауважимо, що перетворення (4.22) відображає рівняння з класу (4.11) з коефіцієнтами $F = -\beta^2x^2 + \beta a_3$ та $H = \delta e^{px^2}$ (випадок 5 табл. 4.1) до рівняння $\tilde{v}_{\tilde{t}} = \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \delta\tilde{v}^m - \frac{1}{4\tilde{t}}\left(\frac{5-m}{m-1} + a_3\right)\tilde{v}$, яке не належить до класу (4.11). Подібні додаткові перетворення еквівалентності отримано і для класу (4.15).

$1 \mapsto \tilde{1}|_{(\tilde{q},\tilde{b}_1)=\left(0,\, b_1-\frac{q^4}{4\delta}\right)}$, $\quad 2 \mapsto \tilde{2}|_{\tilde{q}=0}$: $\quad \tilde{t} = t, \ \ \tilde{x} = x - 2q\,t, \ \ \tilde{w} = e^{qx}w + \frac{q^2}{2\delta}$;

$4 \mapsto \tilde{3}$: $\quad \tilde{t} = -\frac{1}{8p}e^{-8pt}, \ \ \tilde{x} = e^{-4pt}x, \ \ \tilde{w} = e^{4p(k+2)t}\left(e^{px^2}w + \frac{2p^2x^2+p(2k+3)}{\delta x^k}\right)$;

$6 \mapsto \tilde{2}|_{\tilde{q}=0}$: $\quad \tilde{t} = -\frac{1}{8p}e^{-8pt}, \ \ \tilde{x} = e^{-4pt}x, \ \ \tilde{w} = e^{8pt}\left(e^{px^2}w + \frac{2p^2x^2+3p}{\delta}\right)$.

Результатом дослідження додаткових перетворень еквівалентності в класах (4.11) та (4.15) є наступна теорема.

Теорема 4.9. *З точністю до множини точкових перетворень, перелік розширень максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу* (4.11) *(відповідно, з класу* (4.15)*) вичерпується випадками* 0, $1|_{q=0}$, $2|_{q=0}$, 3, *та* 5 *таблиці 4.1 (відповідно, таблиці 4.2).*

Задача відшукання додаткових перетворень еквівалентності для класу (4.6) та задача опису всіх допустимих перетворень в цьому класі набагато складніші, ніж подібні задачі для класів-образів. Найкращим способом побудови додаткових перетворень еквівалентності для класу (4.6) є знаходження "прообразів" додаткових перетворень еквівалентності в класах-образах.

В усіх випадках нижче $\alpha = \frac{q}{1-m}$, $\beta = \frac{2p}{m-1}$.

$1.1 \mapsto \widetilde{1.2}|_{\tilde{q}=0}$: $\ \tilde{t} = \alpha^2 t$, $\tilde{x} = |\alpha|(x + 2\alpha t)$, $\tilde{u} = \alpha^{\frac{2}{1-m}}e^{-\alpha x}\sec(|\alpha|(x+2\alpha t))u$;

$1.2 \mapsto \widetilde{1.2}|_{\tilde{q}=0}$: $\ \tilde{t} = \zeta^2 t$, $\tilde{x} = \zeta(x + 2\alpha t)$,

$\tilde{u} = \zeta^{\frac{2}{1-m}} e^{-\alpha x} \cos x \sec(\zeta(x + 2\alpha t))u$, де $\zeta = \sqrt{1+\alpha^2}$;

$1.3|_{|\alpha|>1} \mapsto \tilde{1.2}|_{\tilde{q}=0}$: $\tilde{t} = \hat{\zeta}^2 t$, $\tilde{x} = \hat{\zeta}(x + \alpha t)$,

$\tilde{u} = \hat{\zeta}^{\frac{2}{1-m}} e^{\frac{x}{2}(1-\alpha)} \sec(\zeta(x + \alpha t))u$, де $\hat{\zeta} = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$, $q = 2r - m - 1$;

$1.3|_{|\alpha|<1} \mapsto \tilde{1.3}|_{\tilde{r}=\frac{m+1}{2}}$: $\tilde{t} = \breve{\zeta}^2 t$, $\tilde{x} = \breve{\zeta}(x + \alpha t)$,

$\tilde{u} = \breve{\zeta}^{\frac{2}{1-m}} \exp\left(\frac{(1-\alpha-\breve{\zeta})x - \alpha\breve{\zeta}t}{2}\right) u$, де $\breve{\zeta} = \sqrt{1-\alpha^2}$, $q = 2r - m - 1$;

$2.2 \mapsto \tilde{2.1}$:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + t, \quad \tilde{u} = u; \tag{4.23}$$

$4|_{a_2=0} \mapsto \tilde{3.1}|_{(\lambda,\gamma)=(0,k)}$: $\tilde{t} = -\frac{1}{4\beta} e^{-4\beta t}$, $\tilde{x} = e^{-2\beta t} x$,

$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{2\beta(k+2)}{m-1} t\right) M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) u$,

де $\kappa = \frac{s+3}{2(1-m)}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $s = \frac{2k-m-1}{2}$;

$4|_{a_2=\frac{1}{4}} \mapsto \tilde{3.1}|_{(\lambda,\gamma)=(1,l)}$: $\tilde{t} = -\frac{1}{4\beta} e^{-4\beta t}$, $\tilde{x} = e^{-2\beta t} x$,

$\tilde{u} = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{\beta}{2} x^2 + \beta \frac{2k+m+3}{m-1} t\right) M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) u$,

де $l = \frac{2k+m+1}{2}$, $\kappa = \frac{s+3}{2(1-m)}$, $\mu = 0$, $s = \frac{2k-m-1}{2}$;

$4|_{a_2<\frac{1}{4}} \mapsto \tilde{3.1}|_{(\lambda,\gamma)=(1+2\rho,\, l+(m+1)\rho)}$: $\tilde{t} = -\frac{1}{4\beta} e^{-4\beta t}$, $\tilde{x} = e^{-2\beta t} x$,

$\tilde{u} = x^{-(1+\rho)} \exp\left(\frac{\beta}{2} x^2 + \beta \left(\frac{2k+m+3}{m-1} + 2\rho\right) t\right) M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) u$,

де $\rho = \frac{\sqrt{1-4a_2}}{2}$, $l = \frac{2k+m+1}{2}$, $\kappa = \frac{s+3}{2(1-m)}$, $\mu = \frac{\sqrt{1-4a_2}}{4}$, $s = \frac{2k-m-1}{2}$;

$4|_{a_2>\frac{1}{4}} \mapsto \tilde{3.2}$: $\tilde{t} = -\frac{1}{4\beta} e^{-4\beta t}$, $\tilde{x} = e^{-2\beta t} x$,

$\tilde{u} = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{\beta}{2} x^2 + \beta \frac{2k+m+3}{m-1} t\right) M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) \sec\left(\rho \ln\left(e^{-2\beta t} x\right)\right) u$,

де $\rho = \frac{\sqrt{4a_2-1}}{2}$, $\kappa = \frac{s+3}{2(1-m)}$, $\mu = \frac{\sqrt{4a_2-1}}{4}$, $s = \frac{2k-m-1}{2}$;

$6 \mapsto \tilde{2.1}$:

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = -\frac{1}{4\beta} e^{-4\beta t}, \quad \tilde{x} = e^{-2\beta t} x, \\ &\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{4\beta}{m-1} t\right) M_{\kappa,\mu}(\beta x^2) u, \end{aligned} \tag{4.24}$$

де $\kappa = \frac{5-m}{4(1-m)}$, $\mu = \frac{1}{4}$.

Класифікаційний перелік з табл. 4.3 можна скоротити отриманими додатковими перетвореннями еквівалентності. В результаті, матимемо групову класифікацію рівнянь (4.1) з точністю до всіх точкових перетворень.

Теорема 4.10. *З точністю до довільних точкових перетворень, перелік розширень максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу* (4.1) *вичерпується випадками, наведеними в таблиці 4.4.*

Таблиця 4.4

Результати групової класифікації рівнянь (4.1) **відносно множини всіх точкових перетворень**

№	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	$\cos^2 x$	$\delta\cos^{m+1} x$	$\partial_t,\ \partial_x + \operatorname{tg} x\, u\partial_u$
2	e^x	$\delta e^{\frac{m+1}{2}x}$	$\partial_t,\ 2\,\partial_x - u\partial_u$
3	1	δ	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2}{1-m}u\,\partial_u$
4	x^λ	δx^γ	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2-\lambda+\gamma}{1-m}u\partial_u$
5	$x(\cos(\rho\ln\lvert x\rvert))^2$	$\delta x^l(\cos(\rho\ln\lvert x\rvert))^{m+1}$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x + \left(\rho\operatorname{tg}(\rho\ln\lvert x\rvert) + \frac{l+1}{1-m}\right)u\partial_u$
6	$x^{-1}f_3(x)^2$	$\delta x^{-\frac{m+1}{2}}e^{px^2}f_3(x)^{m+1}$	$\partial_t,\ e^{2\beta t}\Big[\partial_x -$ $\left(4\beta x^2 - 1 - a_3 + (a_3+3)\frac{f_4(x)}{f_3(x)}\right)\frac{u}{2x}\partial_u\Big]$

$\delta = \pm 1, \quad \rho \neq 0, \quad \beta = \frac{2p}{m-1}.$

У випадку 4 $(\lambda,\gamma) \neq \{(0,0),\,(2,m+1)\}$, якщо $m \neq 2$, та $(\lambda,\gamma) \neq \{(-6,-9),\,(0,0),\,(2,3),\,(8,12)\}$, якщо $m = 2$.

У випадку 6 $f_3(x) = M_{\kappa,\mu}(\beta x^2)$, $f_4(x) = M_{\kappa+1,\mu}(\beta x^2)$, $\kappa = \frac{a_3}{4}$, $\mu = \frac{1}{4}$; $a_3 \neq \frac{5-m}{1-m}$ та додатково $a_3 \neq 5$, якщо $m = 2$.

Наслідок 4.1. *Будь-яке рівняння з класу* (4.1)*, що є інваріантним відносно тривимірної алгебри Лі, зводиться деяким точковим перетворенням до рівняння зі сталими коефіцієнтами з того ж класу.*

4.5. Класифікація допустимих перетворень

Завдяки спеціальній формі рівнянь з класу (4.1) та можливості відображення цього класу на клас більш простої структури, можна повністю описати всі допустимі перетворення в класі (4.1).

Зауважимо, що опис допустимих перетворень є набагато складнішою задачею, ніж класифікація ліївських симетрій оскільки, у певному сенсі, перша задача включає в себе другу. Наскільки відомо, це один з перших прикладів виконання такого опису у випадку ненормалізованого класу.

Оскільки клас (4.1) можна відобразити спочатку на його підклас (4.6), а потім на клас (4.11), то достатньо розв'язати задачу опису всіх допустимих перетворень для класу (4.11). Для цього розглянемо пару рівнянь з класу-образу, тобто рівняння (4.11) та

$$\tilde v_{\tilde t} = \tilde v_{\tilde x\tilde x} + \tilde H(\tilde x)\tilde v^{\tilde m} + \tilde F(\tilde x)\tilde v, \quad \tilde m \neq 0,1, \quad \tilde H \neq 0, \tag{4.25}$$

та припустимо, що ці рівняння пов'язані точковими перетворенням $\mathcal{T}$ загального вигляду

$$\tilde t = T(t,x,v), \quad \tilde x = X(t,x,v), \quad \tilde v = V(t,x,v),$$

де $|\partial(T,X,V)/\partial(t,x,v)| \neq 0$. Потрібно побудувати визначальні рівняння на функції T, X та V та розв'язати їх в залежності від значень довільних елементів в рівняннях (4.11) та (4.25).

Після виконання заміни змінних в рівнянні (4.25), отримуємо рівняння в змінних t, x та v. Це рівняння повинно тотожно дорівнювати нулю на многовиді, визначеному рівнянням (4.11) в просторі джетів другого порядку змінних (t,x,v), де (t,x) та v вважаються незалежними та залежною змінними відповідно. Розщеплюючи цю тотожність за похідними

v_x, v_{tt}, v_{tx}, v_{xx}, маємо, по-перше, наступні рівняння

$$T_x = T_v = X_v = V_{vv} = 0,$$

що узгоджується з вже відомими результатами для більш загальних класів еволюційних рівнянь [85, 102, 108]. Інтегруючі останні рівняння та підставляючи знайдені форми функцій T, X та V у інші визначальні рівняння, отримаємо

$$T = T(t), \quad X = X(t,x), \quad V = V^1(t,x)v + V^0(t,x),$$

$$T_t = {X_x}^2, \quad 2\frac{V^1_x}{V^1} = -\frac{X_tX_x}{T_t} + \frac{X_{xx}}{X_x}, \tag{4.26}$$

$$\tilde{F}V + \tilde{H}V^{\tilde{m}} = \frac{V_v}{T_t}(Fv + Hv^m) + \frac{V_tX_x - V_xX_t - V_{xx}X_x}{T_tX_x}, \tag{4.27}$$

та $T_tX_xV^1 \neq 0$. Розв'язуючи рівняння (4.26), знаходимо, що

$$T_t > 0, \quad X = \varepsilon\sqrt{T_t}x + \sigma(t), \quad V^1 = \zeta(t)\exp\left(-\frac{1}{8}\frac{T_{tt}}{T_t}x^2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\sigma_t}{\sqrt{T_t}}x\right),$$

де $\zeta \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

З рівняння (4.27) та лінійності функції V за змінною v випливає, що

$$\tilde{m} = m, \quad \tilde{H} = \frac{(V^1)^{1-m}}{T_t}H.$$

Далі обмежимося дослідженням випадку $m \neq 2$. Це можливо зробити, оскільки m є інваріантом допустимих перетворень в розглядуваному класі та його можна вважати фіксованим. Випадок $m = 2$ є особливим та потребує окремого вивчення з використанням додаткового відображення в інший клас як і у випадку з дослідженням ліївських симетрій.

Якщо $m \neq 2$, то з рівняння (4.27) випливає, що $V^0(t,x) = 0$. Після розщеплення рівняння (4.27) за змінною v отримуємо вираз на $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = \frac{F}{T_t} + \frac{V^1_tX_x - V^1_xX_t - V^1_{xx}X_x}{T_tX_xV^1}.$$

Рівняння, що містять в собі вирази на функції $\tilde{H}$ та $\tilde{F}$, складають, фактично, систему класифікуючих рівнянь. Ці рівняння треба розв'язати відносно T, σ, ζ, H та F.

Лема 4.1. *Допустимі перетворення, що не породжуються групою еквіалентності $G^{\sim}_{FH}$, існують тільки між рівняннями з довільними елементами загального вигляду*

$$H=\delta|x+\nu|^k e^{px^2+qx},\quad F=s_2x^2+s_1x+s_0+\frac{\kappa}{(x+\nu)^2}, \tag{4.28}$$

де k, κ, δ, ν, p, q, s_2, s_1, s_0 є сталими. Підклас $\mathcal{E}$ таких рівнянь є замкненим відносно допустимих перетворень в цілому класі (4.11).

Доведення. Підставивши вирази для X та V^1 в класифікуючі рівняння, маємо

$$\tilde{H}T_t\zeta^{m-1}\exp\left(-\frac{m-1}{8}\frac{T_{tt}}{T_t}x^2-\frac{m-1}{2\varepsilon}\frac{\sigma_t}{\sqrt{T_t}}x\right)=H,$$
$$T_t\tilde{F}=F+\frac{3T_{tt}{}^2-2T_{ttt}T_t}{16T_t{}^2}x^2-\frac{\sqrt{T_t}}{2\varepsilon}\left(\frac{\sigma_t}{T_t}\right)_t x+\frac{\sigma_t{}^2+T_{tt}}{4T_t}+\frac{\zeta_t}{\zeta}.$$

Диференціюючи останні рівняння за змінною t, отримуємо наступну систему:

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}T_{tt}\sqrt{T_t}\,x+T_t\sigma_t\right)\tilde{H}_{\tilde{x}}=$$
$$\left(\frac{m-1}{8}T_t\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)_t x^2+\frac{m-1}{2\varepsilon}T_t\left(\frac{\sigma_t}{\sqrt{T_t}}\right)_t x-(m-1)T_t\frac{\zeta_t}{\zeta}-T_{tt}\right)\tilde{H},$$
$$\left(\frac{\varepsilon}{2}T_{tt}\sqrt{T_t}x+T_t\sigma_t\right)\tilde{F}_{\tilde{x}}+T_{tt}\tilde{F}=$$
$$\left(\frac{3T_{tt}{}^2-2T_{ttt}T_t}{16T_t{}^2}\right)_t x^2-\frac{\varepsilon}{2}\left(\sqrt{T_t}\left(\frac{\sigma_t}{T_t}\right)_t\right)_t x+\left(\frac{\sigma_t{}^2+T_{tt}}{4T_t}+\frac{\zeta_t}{\zeta}\right)_t.$$

Ця система не містить функцій F та H. Змінну x можна виключити з рівнянь системи, підставивши $x=(\tilde{x}-\sigma)/\sqrt{T_t}$. В результаті маємо систему двох незачеплених звичайних диференціальних рівнянь на функції $\tilde{F}$ та $\tilde{H}$, що залежать тільки від змінної $\tilde{x}$. Зауважимо також, що коефіцієнти біля похідних $\tilde{H}_{\tilde{x}}$ та $\tilde{F}_{\tilde{x}}$ в цій системі співпадають.

Якщо будь-яке рівняння системи є тотожністю відносно відповідної невідомої функції, то всі коефіцієнти біля самої функції та її похідної дорівнюють нулю, з чого випливає $T_{tt}=0$, $\sigma_t=0$ та, отже, $\zeta_t=0$, оскільки

$\tilde{H} \neq 0$. Після інтегрування отриманих рівнянь та виконання необхідних підстановок отримуємо в точності формули перетворень з групи еквівалентності $G^{\sim}_{FH}$ (див. теорему 4.6).

Отже, нетривіальні перетворення еквівалентності (тобто перетворення, які не є породженими перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$) існують тільки у випадку, коли класифікуючі рівняння є системою нетотожних рівнянь відносно обох функцій $\tilde{F}$ та $\tilde{H}$. Тоді система має вигляд

$$
\begin{aligned}
&(a\tilde{x}+b)\tilde{H}_{\tilde{x}} = (c_2\tilde{x}^2 + c_1\tilde{x} + c_0)\tilde{H},\\
&(a\tilde{x}+b)\tilde{F}_{\tilde{x}} = -2a\tilde{F} + d_2\tilde{x}^2 + d_1\tilde{x} + d_0,
\end{aligned}
$$

де коефіцієнти a, b, c_i та d_i, $i = 0, 1, 2$, є сталими, та $(a, b) \neq (0, 0)$. Більше того, $c_2 = d_2 = 0$, якщо $a = 0$. Проінтегрувавши систему, отримуємо, що функції $\tilde{F}$ та $\tilde{H}$ мають вигляд (4.28). Жодне перетворення, що задовольняє отримані умови, не змінює загальний вигляд (4.28) функцій F, H та перетворює тільки сталі параметри. Отже, підклас $\mathcal{E}$ рівнянь з довільними елементами F та H такого вигляду є замкненим відносно допустимих перетворень в цілому класі (4.11). $\square$

З леми 4.1 випливає, що допустимі перетворення в класі (4.11) з $m \neq 2$ вичерпуються допустимими перетвореннями, породженими перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$, та допустимими перетвореннями в підкласі $\mathcal{E}$. Для завершення дослідження потрібно описати множину $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ допустимих перетворень в підкласі $\mathcal{E}$. Зауважимо, що будь-яке допустиме перетворення з $T_{tt} = 0$ та $\sigma_t = 0$ є тривіальним. Отже, достатньо знайти всі елементи множини $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ з $(T_{tt}, \sigma_t) \neq (0, 0)$.

Сталі k, κ, ν, p, q, δ, s_2, s_1 та s_0 можна вважати довільними елементами класу $\mathcal{E}$. Розщеплюючи класифікуючі рівняння (тобто формули перетворень для F та H) за змінною x, отримуємо класифікуючі рівняння (чи формули перетворень) в термінах нових довільних елементів:

$$
\tilde{k} = k, \quad \tilde{\kappa} = \kappa; \quad \tilde{\nu} = \varepsilon\sqrt{T_t}\,\nu - \sigma, \quad \text{якщо} \quad (k, \kappa) \neq (0, 0),
$$

$$\tilde p=\frac{p}{T_t}+\frac{m-1}{8}\frac{T_{tt}}{{T_t}^2},\quad \tilde q+2\sigma\tilde p=\frac{\varepsilon q}{\sqrt{T_t}}+\frac{m-1}{2}\frac{\sigma_t}{T_t},$$
$$\tilde\delta\zeta^{m-1}{T_t}^{k/2+1}e^{\tilde p\sigma^2+\tilde q\sigma}=\delta,$$
$${T_t}^2\tilde K_2=K_2,\ {T_t}^{3/2}(\tilde K_1+2\sigma\tilde K_2)=K_1,\ T_t(\tilde K_0+\sigma\tilde K_1+\sigma^2\tilde K_2)=K_0,$$

де

$$K_2=s_2+\frac{4p^2}{(m-1)^2},\quad K_1=s_1+\frac{4pq}{(m-1)^2},$$
$$K_0=s_0+\frac{q^2+4p(k+2)}{(m-1)^2}-\frac{2p}{m-1}.$$

Сталі $\tilde K_2$, $\tilde K_1$, $\tilde K_0$ виражаються аналогічно до K_2, K_1, K_0 через відповідні сталі з хвильками. Позначимо кожне класифікуюче рівняння тією величиною, перетворення якої воно описує, тобто (k), (κ), (ν), (p), (q), (δ), (K_2), (K_1) та (K_0), відповідно.

Оскільки k та κ є інваріантними відносно всіх допустимих перетворень, то можна представити клас $\mathcal E$ як сім'ю $\{\mathcal E_{k\kappa}\}$ підкласів, параметризованих сталими k та κ, та розглядати кожен підклас окремо. Хоча K_2, K_1 та K_0 змінюються під дією допустимих перетворень, системи $K_2=0$, $K_2=K_1=0$ та $K_2=K_1=K_0=0$ так як і їх заперечення є інваріантами множини всіх допустимих перетворень. Ці умови є зручними для того, щоб виокремити різні випадки та підкласи з нетривіальними допустимими перетвореннями.

Якщо $K_2\neq0$ (відповідно $K_2=0$ та $K_1\neq0$), тоді з рівняння (K_2) (відповідно з (K_1)) випливає, що $\tilde K_2\neq0$ (відповідно $\tilde K_1\neq0$) та $T_t=\mathrm{const}$. Тоді з рівняння (K_1) (відповідно (K_0)) отримуємо $\sigma=\mathrm{const}$. Отже, підклас, виокремлений з класу $\mathcal E$ умовою $(K_1,K_2)\neq(0,0)$, є нормалізованим та замкненим відносно точкових перетворень в цілому класі (4.11). Група еквівалентності цього підкласу індукується групою $G^{\sim}_{FH}$.

Далі припускаємо, що $K_2=K_1=0$. Розглянемо можливі випадки.

Нехай $K_0\neq0$. Тоді з рівняння (K_0) випливає, що $\tilde K_0\neq0$ та $T_t=K_0/\tilde K_0=\mathrm{const}$. Якщо додатково $(k,\kappa)\neq(0,0)$, тоді з рівняння (ν)

отримуємо $\sigma = \mathrm{const}$, тобто відповідний підклас також є нормалізованим та допускає групу еквівалентності, яку індукує група $G^{\sim}_{FH}$, Цей підклас є замкненим відносно точкових перетворень у всьому класі (4.11). Отже, умова $k = \kappa = 0$ є необхідною для існування нетривіальних допустимих перетворень в цьому випадку. Для того, щоб проінтегрувати рівняння (q), необхідно розглянути два різні випадки $p = \tilde{p} = 0$ та $p\tilde{p} \neq 0$. Зауважимо, що з рівняння (p) випливає, що умови $p = 0$ та $\tilde{p} = 0$ (або $p \neq 0$ та $\tilde{p} \neq 0$) мають виконуватися одночасно.

В першому випадку маємо $\sigma_t = \mathrm{const}$, тобто остаточно

$$T = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \sigma = \delta_5\delta_1 t + \delta_3,$$
$$\varepsilon = \operatorname{sign}\delta_1, \quad \zeta = \delta_4 \exp\left[\left(-\frac{q\delta_5}{m-1} - \frac{{\delta_5}^2}{2}\right) t\right],$$

де δ_i, $i = 1, \ldots, 5$, — довільні сталі, $\delta_1\delta_4 \neq 0$. Після виконання всіх необхідних підстановок отримуємо перетворення для пар рівнянь з підкласу $\mathcal{E}_1$ класу $\mathcal{E}$ з довільними елементами, на які накладено наступні умови

$$k = \kappa = p = s_2 = s_1 = 0, \quad s_0 + \frac{q^2}{(m-1)^2} \neq 0.$$

Оскільки ці перетворення можна застосувати до будь-якого рівняння з підкласу $\mathcal{E}_1$ та вираз для перетворення змінної $\tilde{v}$ залежить від довільного елемента q, то ці перетворення складають узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_1)$ підкласу $\mathcal{E}_1$. З цього також випливає, що підклас $\mathcal{E}_1$ є нормалізованим в узагальненому сенсі відносно точкових перетворень в класі (4.11). Перетворення з групи $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_1)$, в яких $\delta_5 \neq 0$, не є індукованими перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$. Отже, $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_1)$ є нетривіальною умовною узагальненою групою еквівалентності всього класу (4.11).

Випадок $p\tilde{p} \neq 0$ досліджуємо аналогічно. Повний набір обмежень на довільні елементи є наступним

$$k = \kappa = s_2 = s_1 = 0, \quad p \neq 0, \quad s_0 + \frac{q^2 + 4p(k+2)}{(m-1)^2} - \frac{2p}{m-1} \neq 0.$$

Позначимо підклас, що виділено за допомогою цих умов, через $\mathcal{E}_2$. Отримуємо

$$T=\delta_1{}^2t+\delta_2,\quad \sigma=\delta_5\delta_1\exp\frac{4pt}{m-1}+\delta_3\delta_1,\quad \varepsilon=\operatorname{sign}\delta_1,$$
$$\zeta=\delta_4\exp\left[\frac{-1}{m-1}\left(p\delta_5{}^2\exp\frac{8pt}{m-1}-p\delta_3{}^2+q\delta_5\exp\frac{4pt}{m-1}+q\delta_3\right)t\right],$$

де δ_i, $i=1,\dots,5$, — довільні сталі, $\delta_1\delta_4\neq0$. Відповідні перетворення можна застосувати до будь-якого рівняння з підкласу $\mathcal{E}_2$, а також вони істотно залежать від довільних елементів цього підкласу та, отже, складають узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_2)$ підкласу $\mathcal{E}_2$. Група $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_2)$ є нетривіальною умовною узагальненою групою еквівалентності класу (4.11), оскільки перетворення з групи $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_2)$, в яких $\delta_5\neq0$, не породжуються перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$. Підклас $\mathcal{E}_2$ є нормалізованим в узагальненому сенсі та замкненим відносно точкових перетворень у класі (4.11). Більш того, перетворення довільних елементів

$$\tilde p=\frac{p}{\delta_1{}^2},\quad \tilde q=\frac{q}{\delta_1}-2\frac{\delta_3}{\delta_1}p,\quad \tilde s_0=s_0+4\frac{\delta_3p}{\delta_1{}^2}\frac{q-\delta_3p}{(m-1)^2},\quad \tilde\delta=\frac{\delta_4^{1-m}}{\delta_1{}^2}\delta$$

не залежать від параметрів δ_2 та δ_5, тобто для будь-яких фіксованих значень довільних елементів допустимі перетворення з $\delta_1=1$ та $\delta_3=0$ складають групу точкових симетрій відповідного рівняння (порівняймо з випадком 5 табл. 4.1). З цього випливає, що підклас $\mathcal{E}_2$ є напівнормалізованим у звичайному сенсі та його звичайна група еквівалентності індукується групою $G^{\sim}_{FH}$. Фактично, узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_2)$ породжується групою $G^{\sim}_{FH}$ та точковими перетвореннями симетрії рівнянь з підкласу $\mathcal{E}_2$.

Припустимо, що $K_0=0$. Тоді з рівняння (K_0), отримуємо, що $\tilde K_0=0$. Рівняння (p) тоді можна переписати у вигляді

$$\left(\frac{1}{T_t}\right)_t=-p'\frac{1}{T_t}+\tilde p',\quad \text{де}\quad p'=\frac{-8p}{m-1},\quad \tilde p'=\frac{-8\tilde p}{m-1}.$$

Проінтегрувавши це рівняння, запишемо його загальний розв'язок в такій формі, щоб неперервна залежність параметрів p та $\tilde{p}$ була очевидною:

$$
\begin{aligned}
&p\tilde{p} \neq 0\colon \quad \frac{e^{\tilde{p}'T}-1}{\tilde{p}'} = {\delta_1}^2\frac{e^{p't}-1}{p'} + \delta_2,\\
&p = 0,\ \tilde{p} \neq 0\colon \quad \frac{e^{\tilde{p}'T}-1}{\tilde{p}'} = {\delta_1}^2 t + \delta_2,\\
&p \neq 0,\ \tilde{p} = 0\colon \quad T = {\delta_1}^2\frac{e^{p't}-1}{p'} + \delta_2,\\
&p = \tilde{p} = 0\colon \quad T = {\delta_1}^2 t + \delta_2.
\end{aligned}
$$

Похідну T_t можна виразити наступним чином $T_t = {\delta_1}^2 e^{p't-\tilde{p}'T}$. Вираз для ζ можна легко знайти з рівняння (δ), якщо T та σ відомі. Не наводимо його явний вигляд через громіздкість.

На відміну від випадку $K_0 \neq 0$, тут нетривіальні допустимі перетворення існують як для нульових так і для ненульових значень (k, κ).

Якщо $(k,\kappa) \neq (0,0)$, то з рівняння (ν) отримуємо $\sigma = \varepsilon\sqrt{T_t}\,\nu - \tilde{\nu}$. Накладаючи умову T_{tt} для того, щоб нетривіальні допустимі перетворення існували, розщеплюємо рівняння (q) за змінною t та отримуємо $q - 2p\nu = \tilde{q} - 2\tilde{p}\tilde{\nu} = 0$. Інших обмежень на довільні елементи немає. Підклас, що виділяється з класу $\mathcal{E}$ умовами $K_2 = K_1 = K_0 = 0$, $(k,\kappa) \neq (0,0)$ та $q = 2p\nu$ позначимо через $\mathcal{E}_3$. Побудовані перетворення можна застосувати до будь-якого рівняння з підкласу $\mathcal{E}_3$, а також істотно залежать від його довільних елементів та, отже, складають п'ятипарметричну узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_3)$ підкласу $\mathcal{E}_3$. В якості параметрів можна взяти δ_1, δ_2, $\tilde{p}$, $\tilde{\nu}$ та $\tilde{\delta}$. підклас $\mathcal{E}_3$ є нормалізованим в узагальненому сенсі, а також замкненим відносно точкових симетрій в класі (4.11). Поклавши $\tilde{p} = p$, $\tilde{\nu} = \nu$ та $\tilde{\delta} = \delta$, отримуємо точкові перетворення симетрії відповідного рівняння. Отже, будь-яке рівняння з підкласу $\mathcal{E}_3$ має двопараметричну групу точкових симетрій та його можна звести точковими перетвореннями до рівняння з того ж підкласу зі значеннями $p = \nu = q = 0$, $\delta = \pm 1$ та тими ж значеннями k та κ. Допустимі перетворення не породжені перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$ та точковими перетвореннями симетрії самих рівнянь тільки якщо $p=0$ та $\tilde p\neq 0$ або, навпаки, $p\neq 0$ та $\tilde p=0$. Підкласи класу $\mathcal{E}_3$, що виділяються додатковими умовами $p\neq 0$ або $p=0$ є напівнормалізованими у звичайному сенсі та їх звичайні групи еквівалентності індукуються групою $G^{\sim}_{FH}$.

Нехай тепер $k=\kappa=0$. Позначимо відповідний підклас $\mathcal{E}$ через $\mathcal{E}_4$. Інтегруючи рівняння (q) відносно σ отримуємо, що

$$\sigma=\delta_3\exp\frac{4\tilde p T}{m-1}+\left\{\begin{array}{ll}-\dfrac{\tilde q}{2\tilde p}, & \tilde p\neq 0\\[2ex] \dfrac{2\tilde q T}{m-1}, & \tilde p=0\end{array}\right\}-\delta_1\left\{\begin{array}{ll}-\dfrac{q}{2p}, & p\neq 0\\[2ex] \dfrac{2qt}{m-1}, & p=0\end{array}\right\}.$$

Аналогічно вже розглянутим випадкам, побудовані перетворення можна застосувати до будь-якого рівняння з підкласу $\mathcal{E}_4$, також ці перетворення істотно залежать від довільних елементів та, отже, складають узагальнену групу еквівалентності $\hat G^{\sim}(\mathcal{E}_4)$ підкласу $\mathcal{E}_4$, яка містить шість параметрів (а саме δ_1, δ_2, δ_3, $\tilde p$, $\tilde q$ та $\tilde\delta$). Таким чином, підклас $\mathcal{E}_4$ є нормалізованим в узагальненому сенсі та замкненим відносно точкових перетворень в цілому класі (4.11). Поклавши $\tilde p=p$, $\tilde q=q$ та $\tilde\delta=\delta$, отримуємо точкові перетворення симетрії відповідного рівняння. Отже, будь-яке рівняння з підкласу $\mathcal{E}_4$ допускає трипараметричну групу точкових симетрій та, крім того, зводиться точковими перетвореннями до рівняння зі сталими коефіцієнтами $u_t=u_{xx}\pm u^m$. Допустимі перетворення, що не породжені перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$ та точковими перетвореннями відповідних рівнянь, існують тоді і тільки тоді, коли $p=0$ та $\tilde p\neq 0$ або, навпаки, $p\neq 0$ та $\tilde p=0$. Підкласи класу $\mathcal{E}_4$, що пов'язані з додатковими обмеженнями $p\neq 0$ або $p=0$, є напівнормалізованими у звичайному сенсі та їх звичайні групи еквівалентності індукуються групою $G^{\sim}_{FH}$.

Зауважимо, що підклас $\mathcal{E}_{4,p=0}$ можна об'єднати з класом $\mathcal{E}_1$, який має таку саму групу еквівалентності, що складається з перетворень, в яких $T_{tt}=\sigma_{tt}=0$. Отриманим в результаті об'єднання є клас $\mathcal{E}'_1$, що виділяється обмеженнями $k = \kappa = p = s_2 = s_1 = 0$. Тільки після встановлення відповідності між вищенаведеною умовною групою еквівалентності та класом $\mathcal{E}_1'$, ця група стає дійсно максимальною.

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступної теореми.

Теорема 4.11. *Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{FH}$ класу* (4.11) *з $m \neq 0, 1, 2$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = \delta_4 v,$$
$$\tilde{F} = \frac{F}{{\delta_1}^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{{\delta_1}^2 {\delta_4}^{m-1}}, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j, $j = 1, ..., 4,$ — довільні сталі, $\delta_1\delta_4 \neq 0$. Параметр m інваріантний відносно будь-якого точкового перетворення у класі (4.11). *Допустимі перетворення, що не породжуються перетвореннями з групи $G^{\sim}_{FH}$, існують тільки між рівняннями з довільними елементами загального вигляду*

$$H = \delta|x+\nu|^k e^{px^2+qx}, \quad F = s_2x^2 + s_1x + s_0 + \frac{\kappa}{(x+\nu)^2},$$

де k, κ, δ, ν, p, q, s_2, s_1, s_0 — сталі, що задовольняють умови

$$s_2 = -\frac{4p^2}{(m-1)^2}, \quad s_1 = -\frac{4pq}{(m-1)^2}$$

причому $k = \kappa = 0$ або $K_0 = q - 2p\nu = 0$, де

$$K_0 := s_0 + \frac{q^2 + 4p(k+2)}{(m-1)^2} - \frac{2p}{m-1}.$$

Множину рівнянь, що допускають нетривіальні допустимі перетворення, можна розбити на чотири підкласи, кожен з яких є нормалізованим в узагальненому сенсі та замкненим відносно точкових перетворень у класі (4.11). *Для кожного з цих підкласів визначено додаткові обмеження на довільні елементи: $\mathcal{E}_1$: $K_0 \neq 0$, $k = \kappa = p = 0$; $\mathcal{E}_2$: $K_0 \neq 0$, $k = \kappa = 0$, $p \neq 0$; $\mathcal{E}_3$: $K_0 = 0$, $(k, \kappa) \neq (0, 0)$, $q = 2p\nu$;*

$\mathcal{E}_4$: $K_0 = k = \kappa = 0$. Підклас $\mathcal{E}_2$ є напівнормалізованим у звичайному сенсі, причому його (звичайна) група еквівалентності індукується групою $G^{\sim}_{FH}$.

Множина допустимих перетворень в класі (4.11) *породжується звичайною групою еквівалентності $G^{\sim}_{FH}$ та нетривіальними умовними узагальненими групами еквівалентності $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_j)$, $j = 1, \dots, 4$.*

4.6. Точні розв'язки

У цьому підрозділі побудовано ліївські та неліївські точні розв'язки рівнянь з класів-образів (4.11), (4.15) та класу (4.6).

4.6.1. Ліївські редукції. Оператори ліївської симетрії дозволяють побудувати точні розв'язки рівнянь з досліджуваних класів методом редукції. Цей метод є добре відомим та достатньо алгоритмічним (див., наприклад, [21, 23]). Спочатку для кожного випадку розширення алгебри ліївської інваріантності будуємо оптимальні системи підалгебр. За кожною підалгеброю з оптимальної системи проводимо редукцію.

Знання додаткових перетворень еквівалентності дозволяє спростити цю задачу, зменшивши кількість випадків, що треба розглянути. Наприклад, для того, щоб побудувати інваріантні розв'язки рівнянь з класу (4.11), краще виконати редукції лише для нееквівалентних відносно точкових перетворень випадків, тобто для випадків 0, $1|_{q=0}$, $2|_{q=0}$, 3, та 5 табл. 4.1. Розмножуючи знайдені точні розв'язки додатковими перетвореннями еквівалентності (4.20)–(4.22), отримаємо розв'язки рівнянь з класу (4.11) з довільними елементами, наведеними у випадках $1|_{q\neq0}$, $2|_{q\neq0}$, 4, та 6 тієї ж таблиці.

Розглянемо детально випадок $2|_{q=0}$ табл. 4.1, тобто рівняння

$$v_t = v_{xx} + \delta v^m,$$

що допускає тривимірну максимальну алгебру ліївської інваріантності з базисними операторами

$$X_1=\partial_t,\quad X_2=\partial_x,\quad X_3=2t\partial_t+x\partial_x+\frac{2}{1-m}v\partial_v.$$

Цей набір операторів задовольняє наступні комутаційні співвідношення

$$[X_1,X_2]=0,\quad [X_1,X_3]=2X_1,\quad [X_2,X_3]=X_2.$$

Оптимальну систему підалгебр цієї алгебри можна побудувати, застосовуючи стандартну техніку [21,23]. Іншим шляхом є відшукання відповідної системи в переліку оптимальних систем підалгебр для всіх тривимірних алгебр Лі [97]. Шукана оптимальна система складається з наступних одновимірних підалгебр

$$\langle X_3\rangle,\quad \langle X_2\rangle,\quad \langle X_2-X_1\rangle,\quad \langle X_2+X_1\rangle,\quad \langle X_1\rangle.$$

Цей набір можна зменшити, використавши дискретне перетворення симетрії $(t,x,v)\mapsto(t,-x,v)$, яке зводить $\langle X_2+X_1\rangle$ в $\langle X_2-X_1\rangle$. Кількість нееквівалентних підалгебр зменшено, таким чином, до чотирьох.

Двовимірні підалгебри оптимальної системи вичерпуються наступними трьома $\langle X_3,\,X_1\rangle$, $\langle X_3,\,X_2\rangle$, $\langle X_1,\,X_2\rangle$. Редукція за останньою двовимірною підалгеброю дає лише тривіальний нульовий розв'язок. Нижче наведено перелік інших підалгебр з оптимальної системи разом з відповідними анзацами та редукованими рівняннями. Також вказано розв'язки деяких редукованих рівнянь.

$$\langle X_3\rangle\colon\ v=t^{\frac{1}{1-m}}\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x}{\sqrt{t}},\quad \varphi_{\omega\omega}+\frac12\omega\varphi_\omega+\frac{1}{m-1}\,\varphi+\delta\varphi^m=0;$$

$$\langle X_2\rangle\colon\ v=\varphi(\omega),\quad \omega=t,\quad \varphi_\omega=\delta\varphi^m,\quad \varphi=\left(\delta(1-m)\omega+C\right)^{\frac{1}{1-m}};$$

$$\langle X_2-X_1\rangle\colon\ v=\varphi(\omega),\quad \omega=x+t,\quad \varphi_{\omega\omega}-\varphi_\omega+\delta\varphi^m=0;$$

$$\langle X_1\rangle\colon\ v=\varphi(\omega),\quad \omega=x,\quad \varphi_{\omega\omega}+\delta\varphi^m=0;$$

$$\langle X_3,\,X_1\rangle\colon\ v=\hat Cx^{\frac{2}{1-m}},\quad \tfrac{2(1+m)}{(1-m)^2}\hat C+\delta\hat C^m=0,\quad \hat C=\left(-\tfrac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}};$$

$$\langle X_3,\,X_2\rangle\colon\ v=\hat Ct^{\frac{1}{1-m}},\quad \tfrac{1}{1-m}\hat C+\delta\hat C^m=0,\quad \hat C=\left(\delta(1-m)\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

В результаті побудовано два точних розв'язки в явному вигляді, а саме $v = (\delta(1-m)t + C)^{\frac{1}{1-m}}$, де C — довільна стала, та стаціонарний розв'язок $v = \left(-\frac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}} x^{\frac{2}{1-m}}$.

Нижче наводимо лише точні розв'язки, отримані методом редукції, та відповідні рівняння без анзаців та редукованих рівнянь.

$v_t = v_{xx} + \delta v^m + \tilde{a}_1 v\colon\ v = \left(Ce^{\tilde{a}_1(1-m)t} - \frac{\delta}{\tilde{a}_1}\right)^{\frac{1}{1-m}};$

$v_t = v_{xx} + \delta x^k v^m + a_2 x^{-2} v\colon\ v = \left(-\frac{(k+2)(m+k+1)+a_2(1-m)^2}{\delta(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} x^{\frac{k+2}{1-m}};$

$v_t = v_{xx} + \delta e^{px^2} v^m + (-\beta^2 x^2 + \beta a_3) v\colon\ v = \left(\frac{\delta}{\beta(1-a_3)} + Ce^{2pt(1-a_3)}\right)^{\frac{1}{1-m}} e^{-\frac{\beta}{2}x^2}.$

Застосовуючи перетворення (4.20)–(4.22), розмножуємо отримані розв'язки для всіх інших рівнянь з класу (4.11), що мають довільні елементи, наведені в табл. 4.1

$v_t = v_{xx} + \delta e^{qx} v^m + a_1 v\colon\ v = e^{\alpha x}\left(Ce^{(\alpha^2+a_1)(1-m)t} - \frac{\delta}{\alpha^2+a_1}\right)^{\frac{1}{1-m}};$

$v_t = v_{xx} + \delta e^{qx} v^m - \alpha^2 v\colon\ v = e^{\alpha x}\big(\delta(1-m)t + C\big)^{\frac{1}{1-m}},$
$v = \left(-\frac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}} (x + 2\alpha t)^{\frac{2}{1-m}} e^{\alpha x};$

$v_t = v_{xx} + \delta x^k e^{px^2} v^m + \left(-\beta^2 x^2 + \beta\frac{2k+5-m}{1-m} + a_2 x^{-2}\right) v\colon$
$v = \left(-\frac{(k+2)(m+k+1)+a_2(1-m)^2}{\delta(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} x^{\frac{k+2}{1-m}} e^{-\frac{\beta}{2}x^2};$

$v_t = v_{xx} + \delta e^{px^2} v^m + \left(-\beta^2 x^2 + \beta\frac{5-m}{1-m}\right) v\colon$
$v = \left(\frac{\delta(m-1)}{4\beta} + Ce^{4\beta t}\right)^{\frac{1}{1-m}} e^{-\frac{\beta}{2}x^2},\ v = \left(-\frac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}} x^{\frac{2}{1-m}} e^{-\frac{\beta}{2}x^2}.$

Ліївські розв'язки рівнянь з класу (4.15) можна знайти безпосередньо методом редукції або розмножуючи перетворенням (4.14) розв'язки, отримані для рівнянь з класу (4.11), поклавши в них $m = 2$. Наводимо розв'язки, побудовані методом редукції.

$w_t = w_{xx} + \delta e^{qx} w^2 + b_1 e^{-qx}\colon\ w = -\frac{q^2+2\theta\operatorname{th}(\theta t)}{2\delta e^{qx}},\ w = -\frac{q^2+2\theta\operatorname{cth}(\theta t)}{2\delta e^{qx}},$
$w = -\frac{q^2\pm 2\theta}{2\delta e^{qx}}$, де $\theta = \frac{1}{2}\sqrt{q^4 - 4\delta b_1};$

$w_t = w_{xx} + \delta e^{qx} w^2 + \frac{q^4}{4\delta} e^{-qx}\colon\ w = -\frac{q^2 t+2}{2\delta t e^{qx}},\ w = -\frac{q^2}{2\delta e^{qx}};$

$w_t=w_{xx}+\delta x^k w^2+\frac{b_2}{\delta x^{k+4}}$: $w=\frac{-(k+2)(k+3)\pm\sqrt{(k+2)^2(k+3)^2-4b_2}}{2\delta x^{k+2}}$;

$w_t=w_{xx}+\delta x^k e^{px^2}w^2+G_1(x)$:

$w=-\frac{2px^2(2px^2+2k+3)+(k+2)(k+3)\pm\sqrt{(k+2)^2(k+3)^2-4b_2}}{2\delta x^{k+2}e^{px^2}}$;

$w_t=w_{xx}+\delta e^{px^2}w^2+\frac{p^2(4p^2x^4-20px^2+b_3)}{\delta e^{px^2}}$: $w=-\frac{p(2px^2-1\pm\sqrt{5-b_3})}{\delta e^{px^2}}$,

$w=\frac{p\delta(1-2px^2)+\sqrt{p^2\delta^2(b_3-5)}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{p^2\delta^2(b_3-5)}(t+C)\right)}{\delta^2 e^{px^2}}$;

$w_t=w_{xx}+\delta e^{px^2}w^2+\frac{p^2(4p^2x^4-20px^2-11)}{\delta e^{px^2}}$: $w=-\frac{p(2px^2+3)}{\delta e^{px^2}}$,

$w=-\frac{p(2px^2-5)}{\delta e^{px^2}}$, $w=-\frac{px^2(2px^2+3)+6}{\delta x^2 e^{px^2}}$, $w=-\frac{p\left((2px^2-5)e^{-8pt}+2px^2+3\right)}{\delta(e^{-8pt}+1)e^{px^2}}$.

Тут $G_1=\frac{(2p^2x^2+p)(2p^2x^2-11p)x^4+8kp^3x^6+2k(3k-5)p^2x^4+k(k+1)(2k+3)px^2+b_2}{\delta x^{k+4}e^{px^2}}$.

Для того, щоб отримати лiївськi розв'язки рiвнянь з класу (4.6), також є двi можливостi, а саме безпосередня редукцiя за операторами, наведеними в табл. 4.3 або розмноження розв'язкiв, побудованих для класiв-образiв, перетвореннями (4.10) або (4.14), вiдповiдно. Легко бачити, що клас-образ (4.11) (та (4.15)) має простiшу структуру рiвнянь та вiдповiдних операторiв симетрiї. Отже, оптимальним шляхом є застосування перетворень (4.10) або (4.14) до iнварiантних розв'язкiв рiвнянь з класу (4.11) або (4.15), вiдповiдно. В результатi отримано наступнi точнi розв'язки рiвнянь з класу (4.6).

$u_t=u_{xx}+\delta e^{qx}u^m$: $u=e^{\alpha x}\left(Ce^{\alpha q t}-\frac{\delta}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{1-m}}$;

$\cos^2\!x\,u_t=(\cos^2\!x\,u_x)_x+\delta e^{qx}\cos^{m+1}\!x\,u^m$:

$u=e^{\alpha x}\sec x\left(Ce^{(\alpha^2+1)(1-m)t}-\frac{\delta}{\alpha^2+1}\right)^{\frac{1}{1-m}}$;

$e^x u_t=(e^x u_x)_x+\delta e^{rx}u^m$: $u=e^{\frac{r-1}{1-m}x}\left(Ce^{\frac{(r-1)(r-m)}{1-m}t}-\frac{\delta(1-m)^2}{(r-1)(r-m)}\right)^{\frac{1}{1-m}}$;

$u_t=u_{xx}+\delta u^m$: $u=(C+\delta(1-m)t)^{\frac{1}{1-m}}$, $u=\left(-\frac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}}x^{\frac{2}{1-m}}$;

$e^x u_t=(e^x u_x)_x+\delta e^x u^m$: $u=(C+\delta(1-m)t)^{\frac{1}{1-m}}$,

$u=\left(-\frac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}}(x+t)^{\frac{2}{1-m}}$;

$$x^\lambda u_t=(x^\lambda u_x)_x+\delta x^\gamma u^m\colon\ \ u=x^{\frac{2-\lambda+\gamma}{1-m}}\left(\tfrac{\delta(1-m)^2}{(2-\lambda+\gamma)(m(\lambda-1)-\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{1-m}};$$

$$x\cos^2(\rho\ln x)\,u_t=(x\cos^2(\rho\ln x)\,u_x)_x+\delta x^l\cos^{m+1}(\rho\ln x)\,u^m\colon$$

$$u=\hat{C}x^{\frac{l+1}{1-m}}\sec(\rho\ln|x|),\ \text{де}\ \hat{C}=\left(-\tfrac{4\delta(1-m)^2}{(2l-m+3)(2l+m+1)+(1+4\rho^2)(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}};$$

$$\tfrac{1}{x}M^2_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u_t=\left(\tfrac{1}{x}M^2_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u_x\right)_x+\delta x^s e^{px^2}M^{m+1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u^m\colon$$

$$u=\left(-\tfrac{4\delta(1-m)^2}{(2s+m+5)(2s+3m+3)+4a_2(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}}x^{\frac{s+3}{1-m}}e^{-\frac{\beta}{2}x^2}M^{-1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2),$$
де $\kappa=\frac{s+3}{2(1-m)}$, $\mu=\frac{\sqrt{1-4a_2}}{4}$;

$$\tfrac{1}{x}M^2_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u_t=\left(\tfrac{1}{x}M^2_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u_x\right)_x+\delta x^{-\frac{m+1}{2}}e^{px^2}M^{m+1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u^m\colon$$

$$u=\left(\tfrac{\delta}{\beta(1-a_3)}+Ce^{2pt(1-a_3)}\right)^{\frac{1}{1-m}}e^{-\frac{\beta}{2}x^2}\sqrt{x}M^{-1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2),\ \text{де}\ \kappa=\tfrac{a_3}{4},\ \mu=\tfrac{1}{4};$$

$$\tfrac{1}{x}M^2_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u_t=\left(\tfrac{1}{x}M^2_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u_x\right)_x+\delta x^{-\frac{m+1}{2}}e^{px^2}M^{m+1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2)u^m\colon$$

$$u=\left(\tfrac{\delta(m-1)}{4\beta}+Ce^{4\beta t}\right)^{\frac{1}{1-m}}e^{-\frac{\beta}{2}x^2}\sqrt{x}\,M^{-1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2),$$

$$u=\left(-\tfrac{\delta(1-m)^2}{2(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-m}}x^{2\kappa}e^{-\frac{\beta}{2}x^2}M^{-1}_{\kappa,\mu}(\beta x^2),\ \text{де}\ \kappa=\tfrac{5-m}{4(1-m)},\ \mu=\tfrac{1}{4}.$$

У випадку $m=2$ додатково побудовано наступні інваріантні розв'язки деяких рівнянь з класу (4.6)

$$u_t=u_{xx}+\delta e^{qx}u^2\colon\ \ u=-\frac{\theta(1+\operatorname{th}(\theta\,t))}{\delta e^{qx}},\ u=-\frac{\theta(1+\operatorname{cth}(\theta\,t))}{\delta e^{qx}},\ \text{де}\ \theta=\frac{q^2}{2}.$$

$$\cos^2 x\,u_t=(\cos^2 x\,u_x)_x+\delta e^{qx}\cos^3 x\,u^2\colon\ \ u=-\frac{\theta(1+\operatorname{th}(\theta\,t))}{\delta e^{qx}\cos x},$$
$$u=-\frac{\theta(1+\operatorname{cth}(\theta\,t))}{\delta e^{qx}\cos x},\ \text{де}\ \theta=\frac{q^2+1}{2}.$$

$$e^x\,u_t=(e^x\,u_x)_x+\delta e^{\frac{q+3}{2}x}\,u^2\colon\ \ u=-\frac{\theta(1+\operatorname{th}(\theta\,t))}{\delta e^{\frac{q+1}{2}x}},\ u=-\frac{\theta(1+\operatorname{cth}(\theta\,t))}{\delta e^{\frac{q+1}{2}x}},$$
де $\theta=\dfrac{q^2-1}{8}$.

Зауважимо, що знайдені розв'язки можна розмножити перетвореннями еквівалентності та отримати інваріантні розв'язки рівнянь з класів (4.6), (4.11), (4.15) з більш складними коефіцієнтами, а також рівнянь з класу (4.1).

4.6.2. Відображення між класами та розмноження розв'язків. Рівняння реакції–дифузії з довільними елементами, що є сталими, досліджувались в багатьох роботах. Переліки точних розв'язків таких рівнянь наведено, наприклад, в [25, 78]. Отже, використовуючи відомі точні розв'язків рівнянь зі сталими коефіцієнтами, можна отримати нові точні розв'язки рівнянь з класу (4.6) зі змінними коефіцієнтами.

Нелінійні рівняння з класу (4.11) зі сталими коефіцієнтами мають вигляд

$$v_t = v_{xx} + \delta v^m + \varepsilon v, \tag{4.29}$$

де $\delta = \pm 1 \bmod G^{\sim}_{FH}$, $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\} \bmod G^{\sim}_{FH}$, А саме вони є рівняннями Колмогорова–Петровського–Піскунова, які з'являються у якості моделей в теоріях тепло- та масо-переносу, теорії горіння, біології та екології. Відомо, що рівняння (4.29) мають наступні точні розв'язки [25]:

$$\begin{aligned} v &= [\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)]^{\frac{2}{1-m}}, \\ v &= [-\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)]^{\frac{2}{1-m}}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

де C — довільна стала, параметри λ, μ, β визначаються за формулами

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1-m)(m+3)}{2(m+1)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\varepsilon(1-m)^2}{2(m+1)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{\delta}{\varepsilon}}.$$

Рівняння Колмогорова–Петровського–Піскунова (4.29) є образами, відносно відображення, породженого сім'єю перетворень (4.10), рівнянь з класу (4.6), що мають наступні коефіцієнти f та h:

$$\begin{aligned} &\varepsilon = 0\colon\ f = (c_1x + c_2)^2,\ h = \delta(c_1x + c_2)^{m+1};\\ &\varepsilon = 1\colon\ f = (c_1\sin x + c_2\cos x)^2,\ h = \delta(c_1\sin x + c_2\cos x)^{m+1};\\ &\varepsilon = -1\colon\ f = (c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^2,\ h = \delta(c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^{m+1}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Якщо, наприклад, $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$, то прообразом рівняння (4.29) є рівняння вигляду

$$(c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^2\, u_t = \\ [(c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^2\, u_x]_x + (c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^{m+1}u^m.$$

Відповідне перетворення (4.10) має вигляд $v = (c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)u$. Застосовуючи його до розв'язків (4.30), отримуємо точні розв'язки останнього рівняння:

$$u = (c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^{-1}\,[1 + C\exp(\lambda t \pm \mu x)]^{\frac{2}{1-m}}\,,\\ u = (c_1\operatorname{sh} x + c_2\operatorname{ch} x)^{-1}\,[-1 + C\exp(\lambda t \pm \mu x)]^{\frac{2}{1-m}}\,,$$

де C — довільна стала, $\lambda = \frac{(m-1)(m+3)}{2(m+1)}$, $\mu = \sqrt{-\frac{(1-m)^2}{2(m+1)}}$.

Клас рівнянь Колмогорова–Петровського–Піскунова, в залежності від значень сталих δ, ε, m, містить деякі цікаві підкласи, які досліджувались з різних точок зору багатьма авторами. В результаті знайдено точні розв'язки рівнянь, що відрізняються від (4.30). Будуватимемо розв'язки рівнянь з класу (4.6) з довільними елементами, наведеними у (4.31), використовуючи відомі розв'язки рівняння (4.29).

Якщо $\delta = -\varepsilon = -1$, то рівняння (4.29) набуває вигляду

$$v_t = v_{xx} + v(1 - v^{\hat m}), \quad \hat m = m - 1, \tag{4.32}$$

тобто є узагальненням добре відомого рівняння Фішера ($\hat m = 1$). Це рівняння описує, наприклад, перенос маси в двокомпонентній нерухомій суміші при наявності об'ємної хімічної реакції квазіпершого порядку. Кінетична функція $f(v) = v(1-v)$ також моделює автокатолітичне ланцюгове перетворення в теорії горіння.

Автори робіт [77, 120] знайшли наступний хвильовий розв'язок рівняння (4.32)

$$v = \left[\frac{1}{2}\left\{1 - \operatorname{th}\left(\frac{\hat{m}}{2\sqrt{2\hat{m}+4}}\left(x - \frac{(\hat{m}+4)t}{\sqrt{2\hat{m}+4}}\right)\right)\right\}\right]^{\frac{2}{\hat{m}}}. \tag{4.33}$$

У випадку $\hat{m} = 1$, цей розв'язок є добре відомим розв'язком, знайденим М. Абловіцем та А. Зеппетеллою ще в 1979 році [40]. Зауважимо, що хвильові розв'язки вичерпують множину відомих розв'язків узагальненого рівняння Фішера (4.32) майже для всіх значень $\hat{m}$, включаючи $\hat{m} = 1$.

Отже, застосувавши відповідне перетворення (4.10) до розв'язку (4.33), отримуємо неліївський точний розв'язок рівняння

$$\begin{aligned}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)^2\, u_t &= \\ &[(c_1 \sin x + c_2 \cos x)^2\, u_x]_x - (c_1 \sin x + c_2 \cos x)^{m+1} u^m.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Цей розв'язок має вигляд

$$u = \frac{1}{\phi(x)}\left[\frac{1}{2}\left\{1 - \operatorname{th}\left(\frac{m-1}{2\sqrt{2(m+1)}}\left(x - \frac{(m+3)t}{\sqrt{2(m+1)}}\right)\right)\right\}\right]^{\frac{2}{m-1}},$$

де $\phi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Для значення $\hat{m} = 2$ ($m = 3$) рівняння (4.32) є дійсним випадком рівняння Ньюела–Вайтхеда, чиї точні розв'язки знайдено Ф. Карієлло та М. Тейбором у 1989 році [55]. Також воно є частинним випадком рівняння Фіцгу–Нагумо $v_t = v_{xx} - v(1-v)(a-v)$ зі значенням $a = -1$, яке виникає у генетиці популяцій як модель передачі нервових імпульсів. Перелік точних розв'язків рівняння Фіцгу–Нагумо наведено, наприклад, в [25]. З цих розв'язків можна отримати точні розв'язки рівняння (4.34) з $m = 3$.

Рівняння (4.29) з $m = 3$ також є цікавими з точки зору некласичної симетрії (див. підрозділ 4.7). Багато точних розв'язків рівняння (4.29) з

$m=3$ та інших квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі сталими коефіцієнтами та кубічним членом, що відповідає наявності джерела або стоку, побудовано в роботах [45] та [60] (а також в неявному вигляді у [35]) методом редукції за некласичними операторами симетрії. На жаль жодна з цих робіт не містить повного переліку точних розв'язків, які можна отримати цим методом. Наводимо впорядкований та доповнений перелік дійсних точних розв'язків рівняння (4.29) з $m=3$ та $\varepsilon \neq 0$:

$$\delta=-1,\ \varepsilon=1:$$

$$v=\frac{C_1\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)-C_1'\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{C_2\exp\left(-\frac{3}{2}t\right)+C_1\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_1'\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)},$$

$$v=C_1\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\sinh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{ds}\left(C_1\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\cosh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$v=C_1\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\cosh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{ds}\left(C_1\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\sinh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$v=\frac{C_1}{2}\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\sinh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\frac{1+\operatorname{cn}\left(C_1\exp\left(\frac{3}{2}t\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(C_1\exp\left(\frac{3}{2}t\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)},$$

$$v=\frac{C_1}{2}\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\cosh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\frac{1+\operatorname{cn}\left(C_1\exp\left(\frac{3}{2}t\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(C_1\exp\left(\frac{3}{2}t\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)};$$

$$\delta=-1,\ \varepsilon=-1:$$

$$v=\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{C_2\exp\left(\frac{3}{2}t\right)+\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)},$$

$$v=C_1\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{ds}\left(C_1\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$v=\frac{C_1}{2}\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\frac{1+\operatorname{cn}\left(C_1\exp\left(-\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(C_1\exp\left(-\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)};$$

$$\delta=1,\ \varepsilon=1:$$

$$v=\frac{C_1}{2}\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\sinh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{sd}\left(C_1\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\cosh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$v=\frac{C_1}{2}\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\cosh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{sd}\left(C_1\exp\left(\tfrac{3}{2}t\right)\sinh\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$\delta=1$, $\varepsilon=-1$:
$$v=\frac{C_1}{2}\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{sd}\left(C_1\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Тут $\operatorname{cn}(z,k)$, $\operatorname{sn}(z,k)$, $\operatorname{ds}(z,k)$, та $\operatorname{sd}(z,k)=\dfrac{1}{\operatorname{ds}(z,k)}$ — еліптичні функції Якобі (див., наприклад, [31, Розділ 22]), функції $\operatorname{cn}(z,k)$ та $\operatorname{sn}(z,k)$ пов'язані співвідношенням $\operatorname{sn}^2(z,k)+\operatorname{cn}^2(z,k)=1$.

Розв'язки рівняння (4.29) з $m=3$ та $\varepsilon=0$ наведено в підрозділі 4.6.3 та застосовано для побудови розв'язків рівнянь з класів (4.6) та (4.11) зі змінними коефіцієнтами.

Використовуючи перетворення (4.10), легко отримати дійсні точні розвязки для будь-якого рівняння з класу (4.6) зі значенням $m=3$ та коефіцієнтами, наведеними у (4.31), так само як і для всіх еквівалентних до них рівнянь відносно перетворень з групи $\hat{G}^{\sim}_{f=g}$. Проілюструємо це наступним прикладом.

Приклад 4.4. Якщо $c_1=0$, $c_2=1$, $\delta=1$, та $\varepsilon=-1$ в формулі (4.31), то $(f,h)=(\operatorname{ch}^2x,\,\operatorname{ch}^4x)$, тобто рівняння з класу (4.6) має вигляд

$$\operatorname{ch}^2x\,u_t=\left(\operatorname{ch}^2x\,u_x\right)_x+\operatorname{ch}^4x\,u^3.$$

Перетворюючи відповідний розв'язок з переліку за формулою (4.10), отримуємо неліївський точний розв'язок останнього рівняння, а саме

$$u=\frac{C_1}{2\operatorname{ch}x}\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{sd}\left(C_1\exp\left(-\tfrac{3}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C_2,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

де $C_1\neq0$.

Зауважимо, що клас (4.29) є підкласом більш загального класу квазілінійних рівнянь реакції–дифузії вигляду

$$u_t=u_{xx}+k\left(-(k+1)u^n+\lambda_1u+\lambda_2u^{\frac{n+1}{2}}+\lambda_3u^{\frac{3-n}{2}}+\lambda_4u^{2-n}\right).$$

Багато точних розв'язків таких рівнянь побудовано в роботі [94] з використанням анзацу $u = z_x^k\varphi(z)$, де $z = z(t,x)$. З деяких розв'язків, знайдених у [94], можна отримати точні розв'язки рівнянь з класу (4.6), використовуючи перетворення (4.10).

4.6.3. Розмноження розв'язків додатковими перетвореннями еквівалентності. У підрозділі 4.5 вичерпно описано множини додаткових перетворень еквівалентності в класах (4.11), (4.15) та (4.6). Деякі з цих перетворень відображають рівняння з довільними елементами, що залежать від змінної x, в рівняння з довільними елементами, що є сталими. При цьому розв'язки останніх рівнянь часто є відомими. Наприклад, випадки $2|_{q\neq0}$ та 6 табл. 4.1 (та випадки 2.2, 6 з табл. 4.3) еквівалентні випадку $2|_{q=0}$ (2.1) з тієї ж таблиці відносно точкових перетворень (4.20) та (4.22) ((4.23) та (4.24)), відповідно.

Перепозначивши змінну u на v у випадку 2.1 табл. 4.3, отримуємо в точності випадок $2|_{q=0}$ табл. 4.1. Використовуючи змінні з хвильками, запишемо їх у вигляді

$$\tilde v_{\tilde t} = \tilde v_{\tilde x\tilde x} + \delta\tilde v^m. \tag{4.35}$$

Точні розв'язки рівняння (4.35) з $m = 3$ можна побудувати, наприклад, використовуючи метод редукції за операторами ліївської або некласичної симетрії [35,45,60] (див. підрозділ 4.7). З точністю до еквівалентності відносно перетворень зсувів, масштабних перетворень та двох дискретних перетворень заміни знаку змінних $\tilde x$ та $\tilde v$, відомі наступні точні нестаціонарні розв'язки рівняння (4.35).

$$\begin{aligned}
&\delta=-1\colon\quad \tilde v = \frac{2\sqrt2\,\tilde x}{\tilde x^2+6\tilde t},\quad \tilde v = \sqrt2\,\tilde x\,\mathrm{ds}\left(\frac{\tilde x^2}{2}+3\tilde t, \frac{\sqrt2}{2}\right);\\
&\delta=1\colon\qquad \tilde v = \frac{\sqrt2}{2}\,\tilde x\,\mathrm{sd}\left(\frac{\tilde x^2}{2}+3\tilde t, \frac{\sqrt2}{2}\right),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

де $\mathrm{ds}(z,k)$ та $\mathrm{sd}(z,k)=\dfrac{1}{\mathrm{ds}(z,k)}$ — еліптичні функції Якобі (див., наприклад, [31, Розділ 22]).

Застосовуючи до цих розв'язки перетворення (4.20), знаходимо відповідні розв'язки рівняння $v_t=v_{xx}+\delta e^{qx}v^3-\frac{q^2}{4}v$:

$$
\begin{aligned}
\delta=-1\colon\quad & v=\frac{2\sqrt{2}e^{-\frac{qx}{2}}(x-qt)}{(x-qt)^2+6t},\\
& v=\sqrt{2}e^{-\frac{qx}{2}}(x-qt)\,\mathrm{ds}\left(\frac{(x-qt)^2}{2}+3t,\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\\
\delta=1\colon\quad & v=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{qx}{2}}(x-qt)\,\mathrm{sd}\left(\frac{(x-qt)^2}{2}+3t,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Перетворюючи розв'язки (4.36) за формулою (4.22), отримуємо розв'язки рівняння $v_t=v_{xx}+\delta e^{px^2}v^3-p(px^2+1)v$

$$
\begin{aligned}
\delta=-1\colon\quad & v=\frac{4\sqrt{2}\,p\,x}{2px^2-3}\,e^{-\frac{p}{2}x^2},\\
& v=\sqrt{2}x\,e^{-\frac{p}{2}x^2-4pt}\mathrm{ds}\left(\frac{e^{-4pt}}{4p}(2px^2-3),\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\\
\delta=1\colon\quad & v=\frac{\sqrt{2}}{2}x\,e^{-\frac{p}{2}x^2-4pt}\mathrm{sd}\left(\frac{e^{-4pt}}{4p}(2px^2-3),\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Аналогічним чином, використовуючи перетворення (4.23) та (4.24), з розв'язків (4.36), в яких треба покласти $\tilde{v}=\tilde{u}$, можна побудувати відповідні точні розв'язки наступних рівнянь з класу (4.6)

$$
\begin{aligned}
& e^xu_t=(e^xu_x)_x+\delta e^xu^3\quad\text{та}\\
& \frac{1}{x}M^2_{-\frac14,\frac14}(px^2)u_t=\left(\frac{1}{x}M^2_{-\frac14,\frac14}(px^2)u_x\right)_x+\delta x^{-2}e^{px^2}M^4_{-\frac14,\frac14}(px^2)u^3.
\end{aligned}
$$

Функцію Уіттекера, що присутня в коефіцієнтах останнього рівняння, можна виразити через функцію помилок $\mathrm{Erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$ наступним чином $M_{-\frac14,\frac14}(px^2)=\frac12\sqrt[4]{p}\,\sqrt{\pi x}\,e^{\frac{p}{2}x^2}\mathrm{Erf}(\sqrt{p}\,x)$.

4.7. Про процедуру класифікації некласичних симетрій

Отже, відображення між класами та перетворення еквівалентності можуть істотно спростити задачу відшукання операторів некласичної симетрії. Більш того, їх використання може стати вирішальним кроком в розв'язанні цієї задачі. Наприклад, задачу групової класифікації для класу (4.1) вдається розв'язати тільки після калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності та відображення отриманого класу в інші. Оскільки задача класифікації некласичних симетрій є більш складною, ніж аналогічна задача для ліївських симетрій, то можна стверджувати, що відображення класу (4.1) у інші класи є необхідною умовою розв'язання цієї задачі. А саме, треба виконати наступні кроки.

1. Подібно до класифікації ліївських симетрій спочатку калібруємо довільні елементи класу (4.1) таким чином, щоб виконувалась умова $f = g$, тобто зводимо його до класу (4.6). Далі розглядаємо окремо випадки $m = 2$ та $m \neq 2$. Якщо $m = 2$, то клас (4.6) відображається в клас (4.11) перетворенням (4.10). Якщо $m \neq 2$, то клас (4.13) відображається в клас (4.15) перетворенням

$$w = \sqrt{|f|}u - \frac{|f|}{2h}\left(\sqrt{|f|}\,\right)_{xx},$$

що є композицією перетворень (4.10) та (4.14).

2. Оскільки некласичні симетрії рівнянь з класів-образів зі сталими коефіцієнтами вже досліджено, ці рівняння треба виключити з розгляду. З леми 2.3 випливає, що також з розгляду треба виключити ті рівняння з класів (4.11) та (4.15) зі змінними коефіцієнтами, що є еквівалентними рівнянням зі сталими коефіцієнтами відносно точкових перетворень. Тобто рівняння з довільними елементами наведеними у випадках $1|_{q\neq 0}$, $2|_{q\neq 0}$, 4 та 6 табл. 4.1 та 4.2, а також рівнянь, що зводяться до них перетвореннями з відповідних груп еквівалентності.

3. Некласичні оператори симетрії треба класифікувати з точністю

до відношень еквівалентності, породжених групами еквівалентності або множиною допустимих перетворень. При цьому треба обмежитись пошуком лише тих операторів, що мають ненульовий коефіцієнт біля ∂_t, тоді можна вважати, що $\tau = 1$. Також з результатів треба виключити всі отримані оператори, що еквівалентні ліївським.

4. Наступним кроком є знаходження прообразів отриманих операторів некласичної симетрії та рівнянь, що їх допускають. При цьому використовуються обернені перетворення між класами.

Проілюструємо процес отримання некласичних симетрій для деяких рівнянь з класу (4.6) з відомих операторів для рівнянь з класу-образу (4.11) зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння з класів-образів зі сталими коефіцієнтами належать до більш широкого класу квазілінійних рівнянь теплопровідності з джерелом

$$v_t = v_{xx} + q(u), \tag{4.37}$$

чиї ліївські симетрії прокласифіковано в [8]. Некласичні симетрії рівнянь з цього класу досліджено в [29, 35, 45, 60]. Відповідні неліївські точні розв'язки побудовано в явному вигляді методом редукції в [45, 60]. Виявилось, що нелінійні рівняння (4.37) допускають некласичні симетрії з ненульовим коефіцієнтом біля ∂_t тоді і тільки тоді, коли q є кубічним поліномом за змінною v. Отже, у випадку $q = \delta v^3 + \varepsilon v$, де $\delta \neq 0$, нееквівалентні оператори некласичної симетрії з ненульовим коефіцієнтом біля ∂_t вичерпуються наступними:

$$\delta < 0\colon \quad \partial_t \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-2\delta}\, v\partial_x + \tfrac{3}{2}(\delta v^3 + \varepsilon v)\partial_v,$$

$$\varepsilon = 0\colon \quad \partial_t - \tfrac{3}{x}\partial_x - \tfrac{3}{x^2}v\partial_v,$$

$$\varepsilon < 0\colon \quad \partial_t + 3\mu\,\mathrm{tg}(\mu x)\partial_x - 3\mu^2\sec^2(\mu x)v\partial_v,$$

$$\varepsilon > 0\colon \quad \partial_t - 3\mu\,\mathrm{th}(\mu x)\partial_x + 3\mu^2\mathrm{sech}^2(\mu x)v\partial_v,$$

$$\partial_t - 3\mu\,\mathrm{cth}(\mu x)\partial_x - 3\mu^2\mathrm{cosech}^2(\mu x)v\partial_v,$$

де $\mu = \sqrt{|\varepsilon|/2}$.

Відшукуючи прообрази рівнянь з такими значеннями q відносно перетворення (4.10) та прообрази відповідних операторів редукції за формулою (4.18), отримуємо випадки, наведені в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5

Оператори некласичної симетрії рівнянь
$\boldsymbol{f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + \delta f(x)^2u^3}$, $\boldsymbol{f(x) = \zeta(x)^2}$

№	$\zeta(x)$	Оператори некласичної симетрії
1	$c_1x + c_2$	$\partial_t \pm \frac{3}{2}\sqrt{-2\delta}\zeta u\partial_x + \frac{3}{2}(\delta\zeta^2u \mp c_1\sqrt{-2\delta})u^2\partial_u$, $\partial_t - \dfrac{3}{x}\partial_x - \dfrac{3c_2}{x^2\zeta}u\partial_u$
2	$c_1\sin(\sqrt{\varepsilon}x) + c_2\cos(\sqrt{\varepsilon}x)$	$\partial_t \pm \frac{3}{2}\sqrt{-2\delta}\zeta u\partial_x + \frac{3}{2}(\delta\zeta^2u^2 \mp \sqrt{-2\delta}\zeta_xu + \varepsilon)u\partial_u$, $\partial_t - 3\mu\,\mathrm{th}(\mu x)\partial_x + 3\mu\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\,\mathrm{th}(\mu x) + \mu\,\mathrm{sech}^2(\mu x)\right)u\partial_u$, $\partial_t - 3\mu\,\mathrm{cth}(\mu x)\partial_x + 3\mu\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\,\mathrm{cth}(\mu x) - \mu\,\mathrm{cosech}^2(\mu x)\right)u\partial_u$
3	$c_1\,\mathrm{sh}(\sqrt{\lvert\varepsilon\rvert}x) + c_2\,\mathrm{ch}(\sqrt{\lvert\varepsilon\rvert}x)$	$\partial_t \pm \frac{3}{2}\sqrt{-2\delta}\zeta u\partial_x + \frac{3}{2}(\delta\zeta^2u^2 \mp \sqrt{-2\delta}\zeta_xu + \varepsilon)u\partial_u$, $\partial_t + 3\mu\,\mathrm{tg}(\mu x)\partial_x - 3\mu\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\,\mathrm{tg}(\mu x) + \mu\sec^2(\mu x)\right)u\partial_u$

$c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. У випадку 2 $\varepsilon > 0$. У випадку 3 $\varepsilon < 0$, $\mu = \sqrt{|\varepsilon|/2}$.

Зауваження 4.6. Існують два шляхи використання відображень між класами рівнянь під час дослідження некласичних симетрій. Припустимо, що некласичні симетрії рівнянь з класів-образів є відомими. Перший шлях — взяти прообрази побудованих операторів та рівнянь, що їх допускають. Потім можна редукувати прообрази рівнянь за відповідними прообразами операторів некласичної симетрії для того, щоб отримати неліївські розв'язки рівнянь з вихідного класу. Цей шлях не є оптимальним, оскільки кінцевою метою дослідження некласичних симетрій є побудова точних розв'язків. Це спостереження підтверджується тим фактом, що рівняння з класу-образу та відповідні оператори некласичної симетрії мають, як правило, більш прості форми та, отже, є більш зручними для проведення редукції. При цьому редуковані рівняння також є більш простими для інтегрування. Більш того, виявляється, що іноді прообрази рівнянь, параметризованих однією сталою, належать до різних сімей рівнянь, параметризованих декількома сталими. В результаті, роблячи редукції в рівняннях вихідного класу, доводиться мати справу з багатьма різними анзацами та редукованими рівняннями, в той час як це еквівалентно одному анзацу та редукованому рівнянню в класі-образі. Тому другий шлях, який полягає в проведенні редукцій в класах-образах та знаходженні прообразів отриманих точних розв'язків, є кращим.

4.8. Висновки до розділу 4

У цьому розділі виконано розширений груповий аналіз класу (4.1). Групи еквівалентності різних типів знайдено для класу (4.1), його підкласу з $g = f$ та класів пов'язаних з ними спеціальними точковими перетвореннями. Побудовано всі точкові перетворення, що пов'язують випадки розширення ліївської симетрії. Ці перетворення є додатковими до перетворень з груп еквівалентності. Тобто насправді розв'язано дві задачі групової класифікації для кожного з розглядуваних класів — відносно відповідної групи еквівалентності та відносно множини всіх точкових перетворень. Вичерпно описано множину допустимих перетворень у випадку $m \neq 0, 1, 2$. Широкі сім'ї точних розв'язків для розглядуваних рівнянь отримано з використанням класичного метода ліївської редукції, а також розмноженням з вже відомих розв'язків додатковими перетвореннями еквівалентності чи відображеннями між класами. Побудовано деякі некласичні симетрії рівнянь з класу (4.1).

Основні результати розділу 4 опубліковано в роботах [7, 119].

РОЗДІЛ 5

Груповий аналіз нелінійних рівнянь дифузії між пластинами

У цьому розділі досліджено симетрії та закони збереження класу нелінійних рівнянь дифузії між пластинами загального вигляду

$$u_t = (D(u)u_x)_x + h(x)u, \tag{5.1}$$

де $D_u \neq 0$. Тут u — температура (концентрація), t та x — часова та просторова змінні відповідно. D — коефіцієнт теплопровідності (дифузії), $h = -N^2 f(x)$, де N — параметр пластини, f — коефіцієнт тепло-(масо-) переносу.

Умова $D_u = 0$ відповідає лінійним рівнянням з класу (5.1), які досліджено з симетрійної точки зору в рамках класифікації загальних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Дивись роботу [88] (переклад англійською — [79, с. 473–508]) та монографію [23, с. 340–356]. Крім того, лінійні та нелінійні рівняння з класу (5.1) не пов'язані точковими перетвореннями. Тому лінійний випадок виключено з розгляду.

Підрозділі 5.1 присвячено груповій класифікації нелінійних рівнянь (5.1). Знайдено додаткові перетворення еквівалентності та умовні групи еквівалентності. Це дозволило спростити результати класифікації та їх подальше застосування. Наприкінці підрозділу 5.1 наведено результат щодо класифікації локальних законів збереження рівнянь з класу (5.1).

У підрозділі 5.2 побудовано точні розв'язки рівнянь з цього класу, що не зводяться точковими перетвореннями до рівнянь з $h(x) = \text{const}$.

У підрозділі 5.3 для деяких рівнянь з класу (5.1) отримано оператори редукції, за якими побудовано точні розв'язки.

Одне цікаве рівняння з класу (5.1) вивчено в підрозділі 5.4. З використанням різних симетрійних технік (ліївська редукція та приховані симетрії — пункт 5.4.1, нелінійне відокремлення змінних, узагальнені умовні симетрії — пункт 5.4.2, некласичні симетрії — пункт 5.4.3) знайдено багато його точних розв'язків.

5.1. Групова класифікація, перетворення еквівалентності та закони збереження

Групову класифікацію класу (5.1) виконано у рамках класичного підходу. Знайдено всі необхідні об'єкти (група еквівалентності, ядро та всі нееквівалентні розширення максимальних алгебр інваріантності). Крім цього досліджено додаткові перетворення еквівалентності та умовну групу еквівалентності, завдяки чому спрощено результати класифікації.

Теорема 5.1. *Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}$ класу* (5.1) *складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_5 u, \quad \tilde{D} = \delta_1^{-1}\delta_3^2 D, \quad \tilde{h} = \delta_1^{-1} h,$$

де δ_i, $i = 1, \ldots, 5$, — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\delta_5 \neq 0$.

Зв'язній компоненті одиниці в групі $G^{\sim}$ належать неперервні перетворення, в яких $\delta_1 > 0$, $\delta_3 > 0$ та $\delta_5 > 0$. Дискретна компонента групи $G^{\sim}$ породжується трьома інволютивними перетвореннями заміни знаків у наборах $\{t, D, h\}$, $\{x\}$, $\{u\}$. Зауважимо, що клас (5.1) не допускає перетворень еквівалентності, які б залежали від його довільних елементів D та h, тобто він не має узагальненої групи еквівалентності.

Теорема 5.2. *Ядро максимальних алгебр інваріантності рівнянь з класу* (5.1) *співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_t \rangle$. Всі можливі $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності вичерпуються наведеними у таблиці 5.1.*

Таблиця 5.1

Результати групової класифікації рівнянь

$u_t = (D(u)u_x)_x + h(x)u,\ D_u \neq 0.$

№	$D(u)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	$\forall$	∂_t
2	$\forall$	1	$\partial_t,\ \partial_x$
3	$\forall$	x^{-2}	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x$
4	u^n	εx^q	$\partial_t,\ -qnt\partial_t + nx\partial_x + (q+2)u\partial_u$
5	u^n	εe^x	$\partial_t,\ -nt\partial_t + n\partial_x + u\partial_u$
6	$u^{-4/3}$	$h^1(x)$	$\partial_t,\ -4qt\partial_t + 4(x^2+p)\partial_x - 3(4x+q)u\partial_u$
7	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x$
8	$(u+1)^{-1}$	ε	$\partial_t,\ \partial_x,\ e^{\varepsilon t}\partial_t + \varepsilon e^{\varepsilon t}(u+1)\partial_u$
9	e^u	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ x\partial_x + 2\partial_u$
10	$u^n,\ n \neq -\frac{4}{3}$	ε	$\partial_t,\ \partial_x,\ e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u),\ nx\partial x + 2u\partial_u$
11	$(u{+}\alpha)^n,\ n \neq -\frac{4}{3}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ nx\partial_x + 2(u{+}\alpha)\partial_u$
12	$u^{-4/3}$	ε	$\partial_t,\ \partial_x,\ e^{\frac{4}{3}\varepsilon t}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u),\ 2x\partial_x - 3u\partial_u,\ x^2\partial_x - 3xu\partial_u$
13	$(u{+}\alpha)^{-4/3}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ 2x\partial_x - 3(u{+}\alpha)\partial_u,\ x^2\partial_x - 3x(u{+}\alpha)\partial_u$

$$h^1(x) = \varepsilon \exp\left[\int \frac{q}{x^2+p}dx\right]; \quad p \in \{-1, 0, 1\} \bmod G^{\sim},$$

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \alpha \in \{0, 1\} \bmod G^{\sim}; \quad n \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Випадок 6 відсутній у роботах [53,95,96]. Функція h^1, в залежності від значення сталої p, дорівнює одній з таких функцій:

$$p = -1\colon\ h^1 = \varepsilon\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{q/2}, \quad p = 0\colon\ h^1 = \varepsilon e^{-q/x},$$

$$p = 1\colon\ h^1 = \varepsilon e^{q \operatorname{arctg} x}.$$

Додатково вважаємо $q = -1 \bmod G^{\sim}$, якщо $p = 0$.

Деякі випадки з табл. 5.1, еквівалентні відносно точкових перетворень, що не належать групі $G^{\sim}$. Використовуючи ці перетворення, які називають додатковими перетвореннями еквівалентності, можна спростити результати класифікації та їх подальше застосування. Наведемо пари еквівалентних рівнянь та відповідні точкові перетворення:

$$6_{p=0}\mapsto 5_{\tilde n=-4/3}\colon\quad \tilde t=t,\ \tilde x=x^{-1},\ \tilde u=x^3u;$$
$$6_{p=-1}\mapsto 4_{\tilde n=-4/3,\,\tilde q=q/2}\colon\quad \tilde t=t,\ \tilde x=\frac{x-1}{x+1},\ \tilde u=2^{-3/2}(x+1)^3u;$$
$$11_{\alpha\neq0}\mapsto 11_{\alpha=0},\ 13_{\alpha\neq0}\mapsto 13_{\alpha=0}\colon\quad \tilde t=t,\ \tilde x=x,\ \tilde u=u+\alpha;$$
$$10\mapsto 11_{\alpha=0},\ 12\mapsto 13_{\alpha=0}\ (n=-\tfrac43)\colon\quad \tilde t=\tfrac{1}{\varepsilon n}e^{\varepsilon nt},\ \tilde x=x,\ \tilde u=e^{-\varepsilon t}u.$$

Третє перетворення є очевидним, але не належить групі $G^{\sim}$. Останнє перетворення було відомо раніше [78]. Зауважимо також, що подібне перетворення

$$\tilde t=-\tfrac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon t},\ \tilde x=x,\ \tilde u=e^{-\varepsilon t}(u+1)$$

пов'язує випадок 8 з рівнянням $\tilde u_{\tilde t}=(\tilde u^{-1}\tilde u_{\tilde x})_{\tilde x}-\varepsilon$, яке не належить до розглядуваного класу. Випадок 6 з $p=1$ зводиться до випадку 4 тільки над полем комплексних чисел.

Всі інші випадки з табл. 5.1 не зводяться один до одного точковими перетвореннями. Отже, справедливе наступне твердження.

Теорема 5.3. *З точністю до всіх точкових перетворень можливі випадки розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь* (5.1) *вичерпуються випадками 1–5,* $6_{p=1}$*, 7–9,* $11_{\alpha=0}$ *та* $13_{\alpha=0}$ *з табл. 5.1.*

Особливість коефіцієнту дифузії $D=u^{-4/3}$ під час групової класифікації можна пояснити наявністю нетривіальних умовних груп еквівалентності в класі (5.1). Дійсно, група еквівалентності розширюється за умови $D=u^{-4/3}$. Група еквівалентності $G_1^{\sim}$ підкласу рівнянь (5.1) з

$D = u^{-4/3}$ складається з перетворень

$$\tilde t = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde x = \frac{\delta_3 x + \delta_4}{\delta_5 x + \delta_6}, \quad \tilde u = \pm\delta_1(\delta_5 x + \delta_6)^3 u, \quad \tilde h = {\delta_1}^{-1} h,$$

де δ_i, $i = 1, \dots, 6,$ — довільні сталі, $\delta_1 > 0$ та $\delta_3\delta_6 - \delta_4\delta_5 = \pm 1$. Група $G_1^\sim$ є нетривіальною умовною групою еквівалентності класу (5.1). Зауважимо, що перші два додаткових перетворення еквівалентності належать до групи $G_1^\sim$.

Інший приклад умовної групи еквівалентності класу (5.1) виникає за умови $h = 0$. Група еквівалентності $G^\sim$ тоді розширюється перетворенням зсуву за змінною u, тобто група еквівалентності $G_2^\sim$ нелінійних рівнянь дифузії ($h = 0$) складається з перетворень

$$\tilde t = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde x = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde u = \delta_5 u + \delta_6, \quad \tilde D = \delta_1^{-1}\delta_3^2 D,$$

де δ_i, $i = 1, \dots, 6,$ — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\delta_5 \neq 0$. Третє додаткове перетворення еквівалентності належить до групи $G_2^\sim$.

Підклас рівнянь (5.1) з коефіцієнтом h, що є сталою, допускає узагальнену групу еквівалентності. Термін “узагальнена” означає, що перетворення змінних t, x та u можуть залежати від довільних елементів [19,89,90]. Узагальнена група еквівалентності $G_3^\sim$ породжується перетвореннями з групи $G^\sim$ та останнім додатковим перетворенням еквівалентності, в якому ε треба замінити на h.

Знання умовних груп еквівалентності дозволяє повністю описати множну допустимих перетворень в класі (5.1).

Прокласифіковано локальні закони збереження рівнянь з класу (5.1). Доведено, що рівняння з класу (5.1) допускають нетривіальні закони збереження тільки для сталих значень довільного елемента h. Відповідні простори законів збереження є двовимірними і мають базисні елементи з такими векторами густини і характеристиками:

$$\big(\, xe^{-ht}u,\ e^{-ht}\big(-xDu_x + {\textstyle\int} D\big)\,\big),\ xe^{-ht} \quad \text{та} \quad (\, e^{-ht}u,\ -e^{-ht}Du_x\,),\ e^{-ht}.$$

Доведення цього результату проводиться аналогічно до теореми 3.8.

5.2. Точні розв'язки

Випадки 7–13 табл. 5.1 представлені рівняннями реакції–дифузії зі сталими коефіцієнтами. Крім цього рівняння з такими коефіцієнтами або є нелінійними рівняннями дифузії (тобто мають $h = 0$), або зводяться до таких додатковими перетвореннями еквівалентності. Багато розв'язки рівнянь реакції дифузії зі сталими коефіцієнтами знайдено в роботах [9, 25, 72, 78]. З цієї причини редукції проводитимемо лише для випадків 4–6 табл. 5.1, тобто для рівнянь, які не зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з класу (5.1).

В попередньому підрозділі показано, що рівняння

$$u_t = (u^{-4/3}u_x)_x + h^1(x)u \tag{5.2}$$

(випадок 6 табл. 5.1) допускає двовимірну неабелеву алгебру $\mathfrak{g}$ ліївської інваріантності породжену операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = -4qt\partial_t + 4(x^2+p)\partial_x - 3(4x+q)u\partial_u.$$

Повний перелік нееквівалентних одновимірних та двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпується алгебрами $\langle X_1\rangle$, $\langle X_2\rangle$ та $\langle X_1, X_2\rangle$.

Результатом ліївської редукції рівняння (5.2) за двовимірною підалгеброю $\langle X_1, X_2\rangle$ є алгебраїчне рівняння. В той же час, редукуючи його за двома одновимірними підалгебрами, отримуємо звичайні диференціальні рівняння.

Нижче наведено перелік виконаних редукцій, кожен пункт якого містить підалгебру, за якою проведено редукцію, відповідний анзац та редуковане рівняння. Перший номер випадків у списку співпадає з номером випадків з табл. 5.1.

6.0. $\langle X_1, X_2\rangle$: $\quad u = C(x^2+p)^{-3/2}\big(h^1(x)\big)^{-3/4}, \quad C^{4/3} = \dfrac{3}{16}(q^2+16p).$

Підставляючи розв'язок

$$C = \pm\frac{3^{3/4}}{8}(q^2+16p)^{3/4}$$

редукованого алгебраїчного рівняння у відповідний анзац, будуємо точний розв'язок

$$u = \pm\frac{3^{3/4}}{8}(q^2+16p)^{3/4}(x^2+p)^{-3/2}\big(h^1(x)\big)^{-3/4}$$

рівняння (5.2).

6.1. $\langle X_1\rangle$: $\quad u=(\varphi(\omega))^{-3}$, $\omega=x$; $\quad 3\varphi_{\omega\omega}=h^1(\omega)\varphi^{-3}$;

6.2. $\langle X_2\rangle$: $\quad u=\big((x^2+p)^{1/2}(h^1(x))^{1/4}\varphi(\omega)\big)^{-3}$, $\omega=th^1(x)$;

$$3q^2\omega^2\varphi_{\omega\omega}+\tfrac{9}{2}q^2\omega\varphi_\omega-3\varphi^{-4}\varphi_\omega+\tfrac{3}{16}(q^2+16p)\varphi-\varepsilon\varphi^{-3}=0.$$

Отримані редуковані рівняння мають частинні розв'язки, які дають розв'язок рівняння (5.2), побудований редукцією за двовимірною підалгеброю до алгебраїчного рівняння. Задача полягає в тому, щоб знайти інші розв'язки. На жаль, вдалося лише понизити порядок редукованого рівняння з випадку 6.1. А саме, після заміни змінних

$$y=(\omega^2+p)^{-1/2}(h^1(\omega))^{-1/4}\varphi,$$
$$\psi=(\omega^2+p)^{-1/2}(h^1(\omega))^{-1/4}((\omega^2+p)\varphi_\omega-\omega\varphi),$$

знайденої з використанням оператора симетрії $4(\omega^2+p)\partial_\omega+(4\omega+q)\varphi\partial_\varphi$ рівняння 6.1 набуває вигляду $(4\psi-qy)\psi_y+q\psi+4py=\frac{4}{3}\varepsilon y^{-3}$. Найкращим способом відшукання точних розв'язків рівнянь з випадку 6, в яких $p\leqslant 0$, є відображення таких рівнянь у випадок 4 (або 5, якщо $p=0$) додатковими перетвореннями еквівалентності та дослідження рівняння-образу.

Для кожного з випадків 4 та 5 табл. 5.1. позначимо базисні оператори симетрії через X_1 та X_2. Оптимальна система підалгебр у цьому випадку співпадає з оптимальною системою для випадку 6. Відповідні анзаци та редуковані рівняння мають такий вигляд ($\varepsilon'=\operatorname{sign}t$):

4.0. $\langle X_1,X_2\rangle$: $\quad u=Cx^{\frac{q+2}{n}}$, $\quad (q+2)(nq+n+q+2)C^{n+1}+\varepsilon n^2C=0$;

4.1. $\langle X_1\rangle$: $\quad u=(\varphi(\omega))^{\frac{1}{n+1}}, \quad \omega=x,$

$$\varphi_{\omega\omega}+\varepsilon(n+1)\omega^q\varphi^{\frac{1}{n+1}}=0, \quad \text{якщо } n\neq-1;$$

$$u=\exp(\varphi(\omega)), \quad \omega=x, \quad \varphi_{\omega\omega}+\varepsilon\omega^q e^{\varphi}=0, \quad \text{якщо } n=-1;$$

4.2. $\langle X_2\rangle$: $\quad u=|t|^{-\frac{q+2}{nq}}\varphi(\omega), \quad \omega=|t|^{\frac{1}{q}}x,$

$$(\varphi^n\varphi_\omega)_\omega+\varepsilon\omega^q\varphi+\varepsilon'\frac{q+2}{nq}\varphi-\varepsilon'\frac{1}{q}\omega\varphi_\omega=0;$$

5.0. $\langle X_1, X_2\rangle$: $\quad u=Ce^{\frac{x}{n}}, \quad (n+1)C^{n+1}+\varepsilon n^2C=0;$

5.1. $\langle X_1\rangle$: $\quad u=(\varphi(\omega))^{\frac{1}{n+1}}, \quad \omega=x,$

$$\varphi_{\omega\omega}+\varepsilon(n+1)e^{\omega}\varphi^{\frac{1}{n+1}}=0, \quad \text{якщо } n\neq-1;$$

$$u=\exp(\varphi(\omega)), \quad \omega=x, \quad \varphi_{\omega\omega}+\varepsilon e^{\varphi+\omega}=0, \quad \text{якщо } n=-1;$$

5.2. $\langle X_2\rangle$: $\quad u=|t|^{-\frac{1}{n}}\varphi(\omega), \quad \omega=x+\ln|t|,$

$$(\varphi^n\varphi_\omega)_\omega+\varepsilon e^{\omega}\varphi+\varepsilon' n^{-1}\varphi-\varepsilon'\varphi_\omega=0.$$

Редукція до алгебраїчних рівнянь дає наступні розв'язки рівнянь з випадків 4 та 5:

4. $u=\left(-\dfrac{q+2}{\varepsilon n^2}(nq+n+q+2)\right)^{-\frac{1}{n}}x^{\frac{q+2}{n}};$

5. $u=\left(-\dfrac{n+1}{\varepsilon n^2}\right)^{-\frac{1}{n}}e^{\frac{x}{n}}.$

Редуковані звичайні диференціальні рівняння є рівняннями Емдена–Фаулера та Лане–Емдена або їх модифікаціями. Розв'язки цих рівнянь відомі для багатьох значень параметрів (див., наприклад, [24]). Відповідно, для багатьох значень параметрів n та q можна побудувати точні розв'язки рівнянь з випадків 4 та 5 табл. 5.1.

5.3. Про некласичні симетрії

У цьому підрозділі вивчаються некласичні симетрії деяких рівнянь з класу (5.1). Як зазначалося у підрозділі 2.4, задача відшукання операторів редукції з нульовим коефіцієнтом біля ∂_t зводиться до розв'язання одного рівняння, яке еквівалентне вихідному рівнянню. Досить часто вдається знайти частинні розв'язки такого рівняння, припускаючи, наприклад, що коефіцієнт оператора редукції біля ∂_u є поліномом змінної u. Використовуючи цей підхід, знайдено, що рівняння

$$u_t = (u^{-1}u_x)_x + xu \tag{5.3}$$

є умовно інваріантним відносно оператора $\partial_x + tu\partial_u$. Відповідний анзац $u = e^{tx}\varphi(\omega)$, $\omega = t$, редукує рівняння (5.3) до рівняння $\varphi_\omega = 0$. Таким чином, побудуємо точний розв'язок $u = Ce^{tx}$ рівняння (5.3). Цей розв'язок не можна отримати методом редукції за операторами ліївської симетрії. Його можна додатково розмножити перетвореннями симетрії рівняння (5.3).

Зауважимо, що некласичні симетрії нелінійних рівняння дифузії (тобто рівнянь вигляду (5.1) з $h = 0$) вивчено тільки у випадку степеневих та експоненціальних коефіцієнтів дифузії [44]. Оператори некласичної симетрії, які мають ненульовий коефіцієнт при ∂_t та не є еквівалентними операторам ліївської симетрії, знайдено тільки у випадках, коли коефіцієнт дифузії D є експоненціальною функцією (випадок 9 табл. 5.1 та еквівалентні йому рівняння) або $u^{-\frac{1}{2}}$. Більш того, розв'язки, побудовані для випадку $D = e^u$ методом редукції за операторами некласичної симетрії, є ліївськими.

Протилежна ситуація спостерігається у випадку $h \neq 0$. Тоді існують оператори редукції рівнянь з класу (5.1), які мають ненульовий коефіцієнт біля ∂_t, нееквівалентні ліївським операторам та призводять до неліївських розв'язків. Так, рівняння (5.3) допускає оператор некласичної симетрії $\partial_t + xu\partial_u$. Відповідний анзац $u = e^{tx}\varphi(\omega)$, $\omega = x$, редукує рівняння (5.3) до звичайного диференціального рівняння $(\varphi^{-1}\varphi_\omega)_\omega = 0$ з загальним розв'язком $\varphi = C_1e^{C_2x}$, що дає розв'язок рівняння (5.3), еквівалентний побудованому вище неліївському розв'язку відносно перетворень з групи симетрії рівняння (5.3).

5.4. Розширений аналіз одного рівняння дифузії між пластинами

Цей підрозділ присвячено дослідженню одного рівняння з класу (5.1) з коефіцієнтами $D = u^{-3/2}$ та $h = x^{-1}$, тобто рівняння

$$u_t = (|u|^{-3/2}u_x)_x + x^{-1}u. \tag{5.4}$$

З використанням різних симетрійних технік (ліївська редукція, нелінійне відокремлення змінних, узагальнені умовні симетрії, приховані симетрії) побудовано багато точних розв'язків цього рівняння.

Рівняння (5.4) не виділяється за своїми симетрійними властивостями (у сенсі Лі) з класу (5.1). Максимальною алгеброю ліївської інваріантності рівняння (5.4) є $A_1 = \langle \partial_t,\ D = t\partial_t + x\partial_x - \frac{2}{3}u\partial_u \rangle$, тобто група G_1 його симетрій складається з перетворень

$$\tilde{t} = e^{\delta_1}t + \delta_0, \quad \tilde{x} = e^{\delta_1}x, \quad \tilde{u} = e^{-\frac{2}{3}\delta_1}u,$$

де δ_0, δ_1 — довільні сталі. В той самий час, рівняння (5.4) має особливі властивості, пов'язані з різними типами неліївських симетрій, що дозволяє побудувати його точні розв'язки.

Зважаючи на фізичний сенс рівняння можна вважати, що функція u є додатною та опустити модуль у виразі $|u|^{-3/2}$.

Замість рівняння (5.4) зручно вивчати еквівалентне йому рівняння

$$v_t = vv_{xx} - \frac{2}{3}(v_x)^2 - \frac{3}{2}\frac{v}{x}, \tag{5.5}$$

де $v = u^{-3/2}$, і тому v є додатною функцією. В термінах змінних (t, x, v) оператор ∂_t зберігає свій вигляд, а оператор дилатації набуває вигляду $D = t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v$. Оберненим перетворенням рівняння (5.5) в рівняння (5.4) є $u = v^{-2/3}$.

Для зручності наведемо спочатку всі побудовані точні розв'язки рівняння (5.4), а потім обговоримо методи їх отримання. Наведені розв'язки є G_1-нееквівалентними, отже, їх можна додатково розмножити перетвореннями з цієї групи.

$$1)\ u=\left(-\varepsilon^2x^3+3\varepsilon x^2-\frac{9}{4}x\right)^{-2/3},\ \varepsilon\in\{-1,0,1\}\bmod G_1,$$

$$2)\ u=\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{t}-\frac{9}{4}x\right)^{-2/3},$$

$$3)\ u=\left(x^3-3x^2\operatorname{tg}2t-\frac{9}{4}x\right)^{-2/3},$$

$$4)\ u=\left(-x^3+3x^2\operatorname{th}2t-\frac{9}{4}x\right)^{-2/3},$$

$$5)\ u=\left(-x^3+3x^2\operatorname{cth}2t-\frac{9}{4}x\right)^{-2/3},$$

$$6)\ \sqrt{\psi-\psi^2}-\frac{1}{2}\arcsin(2\psi-1)=\pm\frac{1}{x}+C_0,$$

$$\psi:=-\frac{u^{-1/2}}{x},\quad 0<\psi<1,$$

$$7)\ \sqrt{\psi+\psi^2}-\frac{1}{2}\ln(2\psi+1+\sqrt{\psi+\psi^2})=\pm\frac{1}{x}+C_0,$$

$$\psi:=-\frac{u^{-1/2}}{x},\quad \psi<-1\ \text{або}\ \psi>0.$$

Розв'язки 1)–5) треба розглядати тільки для тих значень (t,x), для яких відповідна основа степені $-2/3$ є додатною.

Зауважимо, що з розв'язків (5.4) можна отримати розв'язки рівнянь, які еквівалентні рівнянню (5.4) відносно точкових перетворень. Наприклад, перетворення $\tilde t=t$, $\tilde x=x^{-1}$, $\tilde u=x^2u$ пов'язує рівняння (5.4) з рівнянням

$$\tilde x^{-1}\tilde u_{\tilde t}=(\tilde u^{-3/2}\tilde u_{\tilde x})_{\tilde x}+\tilde u.$$

Обидва ці рівняння належать до класу (3.3), який досліджено у розділі 3. Отже, вищенаведені розв'язки можна розмножити до розв'язків рівнянь з класу (3.3).

5.4.1. Ліївські редукції. Розпочнемо обговорення методів знаходження вищенаведених розв'язків, починаючи з класичного метода Лі. Алгебра A_1 є неабелевою двовимірною алгеброю. Повний перелік нееквівалентних підалгебр алгебри A_1 вичерпується одновимірними підалгебрами $\langle\partial_t\rangle$ та $\langle D\rangle$, а також самою алгеброю A_1.

За алгеброю A_1 будуємо анзац $u = \varphi x^{-2/3}$. Враховуючи додатність u, φ також має бути додатною функцією. Оскільки A_1 має тільки один функціонально незалежний інваріант, то φ є сталою. Отже, цей анзац редукує рівняння (5.4) до алгебраїчного рівняння $4\varphi^{-3/2} + 9\operatorname{sign} x = 0$ на функцію φ, яке має розв'язок тільки на від'ємній напівосі $x < 0$. В результаті отримуємо розв'язок 1) з $\varepsilon = 0$. Всі інші розв'язки 1)–5) є його модифікаціями з додатковими членами.

Розв'язки, інваріантні відносно підалгебри $\langle\partial_t\rangle$, стаціонарні. Відповідний анзац $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = x$, дає редуковане рівняння

$$(\varphi^{-3/2}\varphi_\omega)_\omega + \omega^{-1}\varphi = 0, \tag{5.6}$$

яке інтегрується в квадратурах. Рівняння (5.6) пов'язано з рівняннями 6.101 та 6.205 з [13]. Інтегровність рівняння (5.6) можна пояснити в рамках симетрійного підходу. Алгебра ліївської інваріантності рівняння (5.6) породжується операторами $\hat{D} = 3\omega\partial_\omega - 2\varphi\partial_\varphi$ та $\hat{\Pi} = \omega^2\partial_\omega - 2\omega\varphi\partial_\varphi$, тобто є двовимірною. Цього достатньо для того щоб проінтегрувати рівняння (5.6) методом Лі.

Алгебра A_1 індукує тільки ту підалгебру алгебри ліївської інваріантності рівняння (5.6), що породжена оператором $\hat{D}$. Отже, $\hat{\Pi}$ є *прихованим* оператором симетрії вихідного рівняння (5.4). Зауважимо, що перший нетривіальний приклад прихованих симетрій, пов'язаних з редукцією диференціальних рівнянь з частинними похідними, наведено Л.В. Капітанскім [14, 15] для рівнянь Нав'є–Стокса. Широкі класи прихованих симетрій рівнянь Нав'є–Стокса побудовано в роботах [64, 65]. Див. також [41], де наведено різні означення прихованих симетрій диференціальних рівнянь.

Для того, щоб звести рівняння (5.6) до інтегровного вигляду, треба виконати таку заміну змінних

$$\psi = -\frac{\varphi^{-1/2}}{\omega}, \quad \text{тобто} \quad \varphi = \frac{1}{\omega^2\psi^2}.$$

З рівняння (5.6) випливає, що $\psi_\omega \neq 0$ і ψ задовольняє умову $(\omega^4{\psi_\omega}^2)_\omega = (\psi^{-1})_\omega$, яку легко проінтегрувати один раз. Інтегруючи далі отримане звичайне диференціальне рівняння першого порядку $\omega^4{\psi_\omega}^2 = \psi^{-1} + C_1$, де C_1 — довільна стала, знаходимо неявний розв'язок

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^{-1} + C_1}} = \pm\frac{1}{\omega} + C_0.$$

Сталу інтегрування C_1 можна відкалібрувати в одне із значень з множини $\{-1, 0, 1\}$ масштабними перетвореннями. Зауважимо, що всі значення сталої C_0 еквівалентні відносно групи прихованої симетрії, породженої оператором $\hat{\Pi}$. Обчислення інтегралу залежить від значення сталої C_1.

Якщо $C_1 = 0$, то обов'язково $\psi > 0$, тобто, враховуючи означення ψ, відповідні розв'язки рівняння (5.6) існують тільки для від'ємних значень $\omega = x$. Отриманий розв'язок $\psi = (C_0 - \frac{3}{2}x^{-1})^{\frac{2}{3}}$ відповідає розв'язку 1) рівняння (5.4). Сталу C_0 можна відкалібрувати в $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ масштабними перетвореннями, що відповідають оператору $\hat{D}$.

З умови $C_1 = -1$ випливає, що $0 < \psi < 1$, отже, розв'язки знову існують тільки для від'ємних значень ω та їх можна записати в неявному вигляді як розв'язок 6) рівняння (5.4). У випадку $C_1 = 1$ маємо обмеження $\psi < -1$ або $\psi > 0$ та знаходимо розв'язок 7).

Також можна побудувати розв'язки, що є інваріантними відносно масштабних перетворень. У цьому випадку більш зручно працювати у термінах змінних (t, x, v). Анзац, побудований за підалгеброю $\langle D \rangle$, має вигляд $v = t\varphi(\omega)$, де $\omega = x/t$, та редукує рівняння (5.5) до наступного звичайного диференціального рівняння

$$\varphi\varphi_{\omega\omega} - \frac{2}{3}(\varphi_\omega)^2 + \omega\varphi_\omega - \frac{3}{2}\frac{\varphi}{\omega} - \varphi = 0.$$

Воно має два поліноміальних розв'язки: $\varphi = -\frac{9}{4}\omega$ та $\varphi = \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{9}{4}\omega$. Підставляючи їх у використаний анзац, отримуємо розв'язки $1)_{\varepsilon=0}$ та 2) рівняння (5.4).

5.4.2. Неліївський анзац. Вигляд інваріантних розв'язків 1) і 2) підказує шлях, як побудувати більше розв'язків рівняння (5.5). В результаті обираємо анзац

$$v = \varphi^1(t)x^3 + \varphi^2(t)x^2 - \frac{9}{4}x,$$

який редукує рівняння (5.5) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi^1_t = 0, \qquad \varphi^2_t = -6\varphi^1 - \frac{2}{3}(\varphi^2)^2.$$

Ця система має такі, нееквівалентні відносно перетворень з групи ліївських симетрій вихідного рівняння, розв'язки (φ^1, φ^2):

$$(\varepsilon^2, \varepsilon), \quad (0, -\tfrac{3}{2}t), \quad (1, -3\operatorname{tg} 2t), \quad (-1, 3\operatorname{th} 2t), \quad (-1, 3\operatorname{cth} 2t),$$

які відповідають розв'язкам 1)–5) рівняння (5.4). Розв'язки 3)–5) не є ліївськими.

Вищенаведений анзац у термінах функції u має вигляд

$$u = \left(\varphi^1(t)x^3 + \varphi^2(t)x^2 - \frac{9}{4}x\right)^{-2/3}.$$

Цей анзац можна проінтерпретувати в рамках багатьох різних підходів знаходження розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, таких як нелінійне відокремлення змінних [72], метод диференціальних зв'язків [30], антиредукція [69], редукція за операторами узагальненої умовної симетрії [62, 121].

Отже, диференціальний зв'язок $2x^3(x^{-2}u^{-3/2})_{xx} = -9$, що відповідає використаному анзацу, є сумісним (тобто знаходиться в інволюції) з рівнянням (5.4). Антиредукція рівняння (5.4) анзацем, що містить дві нові невідомі функції однакового аргументу, до системи двох звичайних диференціальних рівнянь означає, що оператор

$$(8u^2+8xuu_x+5x^2{u_x}^2-x^2uu_{xx}+6xu^{7/2})\partial_u$$

є оператором узагальненої умовної симетрії рівняння (5.4).

5.4.3. Про некласичні симетрії. Оператори редукції рівняння (5.4) мають загальний вигляд $Q=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\eta\partial_u$, де τ, ξ та η є функціями змінних t, x, u та виконується умова $(\tau,\xi)\neq 0$. Оскільки (5.4) є еволюційним рівнянням, існує два принципово різні випадки знаходження оператора Q: $\tau\neq 0$ та $\tau=0$.

Отримавши систему визначальних рівнянь у випадку $\tau\neq 0$ та проінтегрувавши її, маємо наступне твердження. Будь-який оператор некласичної симетрії рівняння (5.4) у випадку $\tau\neq 0$ еквівалентний оператору ліївської симетрії.

У випадку $\tau=0$, $\xi\neq 0$ з точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції можна покласти $\xi=1$, тобто $Q=\partial_x+\eta\partial_u$. З критерію умовної інваріантності отримуємо одне визначальне рівняння на коефіцієнт η

$$\eta_t=\frac{\eta_{xx}+2\eta\eta_{xu}+\eta^2\eta_{uu}}{u^{3/2}}-\frac{9\eta\eta_x+6\eta^2\eta_u}{2u^{5/2}}+\frac{15\eta^3}{4u^{7/2}}+\frac{\eta-u\eta_u}{x}-\frac{u}{x^2},$$

яке зводиться деяким неточковим перетворенням до рівняння (5.4), де η стає параметром. Знайдені частинні розв'язки визначального рівняння дають оператори, редукція за якими призводить до перерахованих розв'язків рівняння (5.4). Наприклад, оператор

$$\partial_x-2\frac{u}{x}\Big(1\pm\sqrt{C_1u-xu^{3/2}}\Big)\partial_u$$

дає розв'язки 1), 6) та 7) у випадках $C_1=0$, $C_1=-1$ та $C_1=1$, відповідно. Анзац, використаний у підрозділі 5.4.2, пов'язаний за умови $\varphi^1=C_1$ з оператором

$$\partial_x-\frac{u}{6x}\big(4C_1x^3u^{\frac32}+9xu^{\frac32}+8\big)\partial_u,$$

редукцією за яким, в залежності від значення C_1, можна побудувати розв'язки 1)–5).

5.5. Висновки до розділу 5

У цьому розділі виконано вичерпну групову класифікацію (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії між пластинами. Класифікацію виконано за класичним алгоритмом. Прямим методом знайдено групу еквівалентності досліджуваного класу. Після застосування критерію інфінітезимальної інваріантності та отримання визначальних рівнянь, знайдено спочатку ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності, а потім усі випадки розширення. Далі знайдено додаткові перетворення еквівалентності та виокремлено умови, за яких група еквівалентності класу допускає розширення, тобто знайдено всі умовні групи еквівалентності у цьому класі рівнянь. Прокласифіковано локальні закони збереження. Для нелінійних рівнянь з класу (5.1), що нееквівалентні лінійними, побудовано точні розв'язки. Для одного рівняння дифузії між пластинами з використанням різних симетрійних технік (ліївська редукція, нелінійне відокремлення змінних, узагальнені умовні симетрії, приховані симетрії, некласичні симетрії) побудовано ліївські, а також неліївські точні розв'язки.

Основні результати розділу 5 опубліковано в роботах [106, 118].

РОЗДІЛ 6

Потенціальні некласичні симетрії рівнянь дифузії

Цей розділі присвячено дослідженню потенціальних некласичних симетрій (1+1)-вимірного рівняння швидкої дифузії

$$u_t = (u^{-1}u_x)_x. \tag{6.1}$$

У підрозділі 6.1 зроблено огляд відомих результатів щодо ліївської та потенціальної симетрії рівняння (6.1). У підрозділі 6.2 некласичні симетрії відповідного потенціального рівняння (див. підрозділ 3.1)

$$v_t = {v_x}^{-1}v_{xx} \tag{6.2}$$

прокласифіковано відносно групи його ліївських симетрій. В результаті знайдено нові широкі класи потенціальних некласичних симетрій рівняння швидкої дифузії. У підрозділі 6.3 доведено, що деякі класи потенціальних некласичних симетрій пов'язані зі звичайними некласичними симетріями на множині розв'язків допоміжної потенціальної системи. Підрозділ 6.4 присвячено огляду відомих та побудові нових точних розв'язків рівнянь (6.1) та (6.2). В результаті знайдено нові точні неліївські розв'язки цих рівнянь. Показано, що всі відомі неліївські розв'язки рівняння швидкої дифузії вичерпуються такими, які можна побудувати методом редукції з відшуканих операторів потенціальної некласичної симетрії. У підрозділі 6.5 описано нелінійності, при яких рівняння з класу (1+1)-вимірних рівнянь фільтрації мають нетривіальні некласичні симетрії.

6.1. Ліївські та потенціальні симетрії рівняння швидкої дифузії

Максимальну алгебру ліївської інваріантності

$$A_1^{\max} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t + u\partial_u,\ x\partial_x - 2u\partial_u \rangle$$

рівняння (6.1) знайдено в роботі [22]. Повну групу G_1 симетрій рівняння (6.1) утворюють неперервні однопараметричні групи з відповідними інфінітезимальними операторами з алгебри $A_1^{\max}$ та два інволютивні перетворення заміни знаку у множинах змінних $\{t, u\}$ та $\{x\}$. Дію будь-якого елемента з групи G_1 на функцію u можна задати формулою

$$\tilde{u}(t, x) = \varepsilon_3^{-1}\varepsilon_4^2 u(\varepsilon_3 t + \varepsilon_1, \varepsilon_4 x + \varepsilon_2),$$

де ε_1, ..., ε_4 — довільні сталі, $\varepsilon_3\varepsilon_4 \neq 0$ [22].

Властивості ліївських симетрій рівняння (6.1) є звичайними для рівнянь дифузії. Особливість рівняння (6.1) з симетрійної точки зору проявляється після введення потенціалу v та дослідження потенціальної системи

$$v_x = u, \quad v_t = u^{-1}u_x \tag{6.3}$$

або потенціального рівняння (6.2). Точкові та некласичні симетрії рівняння (6.2) називають відповідно *потенціальними* та *потенціальними некласичними* симетріями рівняння (6.1).

Максимальна алгебра ліївської інваріантності

$$A_2^{\max} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_v, t\partial_t + v\partial_v, x\partial_x - v\partial_v \rangle$$

рівняння (6.2) та відповідна, пов'язана з нею, група ліївських симетрій достатньо звичайні для нелінійних рівнянь фільтрації. Однак, рівняння (6.2) відрізняється своїми дискретними симетріями, а саме воно допускає окрім двох звичайних перетворень заміни знаку в множинах $\{t, v\}$ та $\{x, v\}$, перетворення годографа $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = v$, $\tilde{v} = x$. Ці три інволютивні перетворення разом з однопараметричними групами неперервних перетворень, породжених інфінітезимальними операторами з алгебри $A_2^{\max}$, утворюють повну групу G_2 симетрій рівняння (6.2). Перетворення з групи G_2 мають вигляд

$$\tilde{t} = \varepsilon_3 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_4 x + \varepsilon_2, \quad \tilde{v} = \varepsilon_3 {\varepsilon_4}^{-1} v \quad \text{та}$$

$$\tilde{t} = \varepsilon_3 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_3 {\varepsilon_4}^{-1} v, \quad \tilde{v} = \varepsilon_4 x + \varepsilon_2,$$

де $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ — довільні сталі, $\varepsilon_3\varepsilon_4 \neq 0$.

Подібний результат справедливий для потенціальної системи (6.3), яка інваріантна відносно перетворення

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = v, \quad \tilde{u} = u^{-1}, \quad \tilde{v} = x, \tag{6.4}$$

що є додатковим до звичайної групи G_1 ліївських симетрій рівняння (6.1). Перетворення (6.4) називатимемо потенціальним перетворенням годографа рівняння швидкої дифузії.

Множина ліївських розв'язків рівняння (6.1) замкнена відносно перетворення (6.4) [104].

6.2. Оператори редукції нелінійного рівняння фільтрації

У цьому підрозділі досліджено G_2-нееквівалентні оператори редукції потенціального рівняння швидкої дифузії (6.2). Оператори редукції для цього рівняння шукаємо у загальному вигляді $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_v$, де τ, ξ та θ — функції змінних t, x та v, $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$. Оскільки (6.2) є еволюційним рівнянням, існує два принципово різні випадки відшукання операторів Q: $\tau \neq 0$ та $\tau = 0$.

У випадку $\tau = 0$ маємо $\xi \neq 0$ та, з точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції, можемо покласти $\xi = 1$, тобто $Q = \partial_x + \theta\partial_v$.

Критерій умовної інваріантності призводить до одного визначального рівняння на коефіцієнт θ

$$\theta\theta_t = \theta_{xx} + 2\theta\theta_{xv} + \theta^2\theta_{vv} - \theta^{-1}(\theta_x)^2 - 2\theta_x\theta_v - \theta(\theta_v)^2,$$

яке зводиться деяким неточковим перетворенням до вихідного рівняння (6.2), де θ стає параметром. Тому випадок $\tau = 0$ називають "no-go" випадком [122, 123].

Нагадаємо, що термін "no-go" треба розуміти як неможливість вичерпного розв'язання задачі відшукання операторів редукції з нульовим коефіцієнтом при ∂_t. Але, накладаючи додаткові обмеження на коефіцієнт θ, можна побудувати часткові приклади операторів з $\tau = 0$ для того, щоб використати їх для побудови точних розв'язків вихідного рівняння. Цей підхід застосовано у роботі [76] до рівняння швидкої дифузії (6.1). Оскільки визначальне рівняння має більше незалежних змінних та, отже, більше степенів вільності для накладання додаткових умов, то часто буває легше вгадати простий розв'язок або простий анзац для визначального рівняння, який може дати параметризовану сім'ю складних розв'язків вихідного рівняння. (Подібна ситуація виникає під час відшукання лієвських симетрій звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.)

Розглянемо випадок $\tau \neq 0$, який допускає повне розв'язання на відміну від попереднього випадку. З точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції можемо покласти $\tau = 1$. Визначальні рівняння на коефіцієнти ξ та θ мають вигляд

$$\xi_{vv} = \xi\xi_v, \tag{6.5}$$

$$\xi_t = 2\xi_{xv} - \theta_{vv} - \theta_v\xi + \theta\xi_v - \xi\xi_x, \tag{6.6}$$

$$\theta_{xx} = \theta\theta_x, \tag{6.7}$$

$$\theta_t = 2\theta_{xv} - \xi_{xx} - \xi_x\theta + \xi\theta_x - \theta\theta_v. \tag{6.8}$$

Розв'язавши їх, отримуємо наступне твердження.

Теорема 6.1. *G_2-нееквівалентні неліївські оператори редукції потенціального рівняння швидкої дифузії* (6.2) *вичерпуються такими:*

1. $\partial_t + \varepsilon\partial_x + f(\omega)\partial_v, \quad$ *де* $\quad \omega = x + \varepsilon t;$

2. $\partial_t + f(\omega)(\partial_x + \partial_v), \quad$ *де* $\quad \omega = x + v;$

3. $\partial_t + \xi\partial_x + (\varphi_t + \varphi_x\xi)\partial_v, \quad$ *де* $\quad \xi = \dfrac{-2}{v+\varphi}, \quad \varphi \in \{t + e^x,\, tf(x)\};$

4. $\partial_t + \xi\partial_x - \dfrac{\chi_t + \chi_x\xi}{1+\chi^2}\partial_v, \quad$ *де* $\quad \xi = -\dfrac{1 + \chi\operatorname{tg}(v/2)}{\operatorname{tg}(v/2) - \chi},$
   $\chi \in \{-\operatorname{tg} x \operatorname{th} t,\, \operatorname{th} x \operatorname{tg} t\};$

5. $\partial_t + \xi\partial_x + \dfrac{\chi_t + \chi_x\xi}{\chi}\partial_v, \quad$ *де* $\quad \xi = \dfrac{1 - \chi e^v}{1 + \chi e^v},$
   $$\chi \in \left\{\pm\frac{e^{2x} - e^{2t}}{2},\, \frac{e^{2x} + e^{2t}}{2},\, \pm\frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)},\, \frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)},\, \frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)}\right\}.$$

Тут $\varepsilon \in \{0,\, 1\}$, f *— довільний несталий розв'язок звичайного диференціального рівняння* $f_{\omega\omega} = ff_\omega$, *тобто*

$$f \in \{-2/\omega,\, -\operatorname{ctg}(\omega/2),\, -\operatorname{th}(\omega/2),\, -\operatorname{cth}(\omega/2)\} \bmod G_2.$$

Схема доведення така. (Повний варіант доведення наведено в додатку А.1.) Будь-який розв'язок рівняння $\xi_{vv} = \xi\xi_v$ належить множині

$$\{\varphi,\, -2/(v+\varphi),\, -2\mu\operatorname{ctg}\omega,\, -2\mu\operatorname{th}\omega,\, -2\mu\operatorname{cth}\omega\},$$

де $\omega = \mu(v+\varphi)$, μ та φ — довільні функції змінних t та x, $\mu \neq 0$. Друге рівняння системи є лінійним неоднорідним звичайним диференціальним рівнянням другого порядку на функцію θ, де v — незалежна змінна, а t та x можна вважати параметрами. Для будь-якого допустимого значення ξ це рівняння має частинний розв'язок без ірраціональних особливостей. Розв'язок відповідного однорідного рівняння має ірраціональні особливості, якщо $\xi_v \neq 0$. З інших рівнянь системи випливає, що доданки у виразі для θ, які містять такі особливості, мають тотожно дорівнювати нулю. Більш того, $\mu = \mathrm{const}$, тобто $\mu = 1/2 \bmod G_2$, і φ задовольняє деяку перевизначену систему двох диференціальних рівнянь. Інтегрування цієї системи для всіх вищевказаних значень ξ та класифікація отриманих розв'язків з точністю до еквівалентності відносно групи G_2 разом з виключенням випадків ліївських операторів дає твердження теореми.

Всі оператори з теореми 6.1 — потенціальні некласичні симетрії рівняння (6.1).

6.3. Зв'язок між класами некласичних та потенціальних некласичних симетрій

У цьому підрозділі встановлено зв'язок між операторами редукції рівнянь (6.1) та (6.2).

Як зазначалося у підрозділі 1.3 однією з задач у роботі [76] є побудова частинних випадків операторів редукції для рівнянь дифузії (1.6) у "no-go" випадку, коли оператори можна звести до вигляду $\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$. М.Л. Гандаріас запропонувала шукати часткові випадки для коефіцієнту η за допомогою анзацу

$$\eta = \frac{\eta^1(t,x)u + \eta^2(t,x)}{f(u)}, \tag{6.9}$$

де $f(u) \equiv u^{-\alpha}$. Після підстановки виразу (6.9) у визначальне рівняння на η та його розщеплення за змінною u, отримаємо перевизначену систему на функції η^1 та η^2. Для рівняння швидкої дифузії (6.1) ця система має вигляд

$$\eta^2_{xx} = \eta^2\eta^2_x, \qquad \eta^2_t = \eta^2\eta^1_x - \eta^1\eta^2_x + \eta^1_{xx}, \qquad \eta^1_t = \eta^1\eta^1_x. \tag{6.10}$$

Система (6.10) випливає з системи рівнянь (6.5)–(6.8), якщо проредукувати останню за групою зсувів за змінною v, тобто, якщо вважати, що ξ, θ не залежать від v та ввести перепозначення $\xi = -\eta^1$, $\theta = \eta^2$.

Цей факт можна довести для будь-якої пари рівнянь

$$u_t = (f(u)u_x)_x, \tag{6.11}$$

$$v_t = f(v_x)v_{xx} \tag{6.12}$$

з однаковою функцією f.

Розглянемо оператори редукції $Q = \partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_v$ та $Q' = \partial_x + \eta\partial_u$ рівняння (6.12) і (6.11) відповідно. Тут ξ, θ залежать тільки від t та x, коефіцієнт η визначається формулою (6.9). Застосувавши до рівняння (6.12) (або (6.11)) та оператора Q (Q') критерій умовної інваріантності, отримуємо визначальні рівняння на функції ξ і θ (η^1 і η^2):

$$\begin{aligned}&(\xi\xi_x {v_x}^2 - (\xi_x\theta + \xi\theta_x)v_x + \theta\theta_x)f'(v_x)\\ &\qquad +((\xi_t + 2\xi\xi_x)v_x - \theta_t - 2\theta\xi_x)f(v_x) + (-\xi_{xx}v_x + \theta_{xx})(f(v_x))^2 = 0\\ &\Big(\text{або} \quad (\eta^1 u + \eta^2)(\eta^1_x u + \eta^2_x)f'(u) -\\ &\qquad ((\eta^1_t - 2\eta^1\eta^1_x)u + \eta^0_t - 2\eta^0\eta^1_x)f(u) + (\eta^1_{xx}u + \eta^2_{xx})(f(u))^2 = 0\Big),\end{aligned}$$

які треба додатково розщепити за змінною v_x (u). Системи, отримані в обох випадках розщепленням, співпадають, якщо покласти $\eta^1 = -\xi, \eta^2 = \theta$. Характеристичне рівняння $Q[v] = \theta - v_t - \xi v_x = 0$ можна переписати на многовиді розв'язків потенціальної системи

$$v_x = u, \quad v_t = f(u)u_x \tag{6.13}$$

у вигляді $u_x - \dfrac{-\xi u + \theta}{f(u)} = 0$, а тому воно співпадає з характеристичним рівнянням $Q'[u] = 0$.

Отже, справедливе твердження.

Твердження 6.1. *Оператор* $Q = \partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_v$, *де* $\xi = \xi(t,x)$, $\theta = \theta(t,x)$, *є оператором редукції рівняння* (6.12) *тоді і тільки тоді, коли оператор*

$$Q' = \partial_x + \frac{-\xi u + \theta}{f(u)}\partial_u$$

є оператором редукції рівняння (6.11).

Система (6.13) *встановлює зв'язок між відповідними множинами інваріантних розв'язків.*

6.4. Точні розв'язки рівнянь швидкої дифузії та нелінійної фільтрації

Всі інваріантні розв'язки рівнянь (6.1) та (6.2), побудовані в явній формі класичним ліївським методом, зібрано, наприклад, в [25, 104]. Повний перелік G_1-нееквівалентних розв'язків такого типу вичерпується такими:

$$
\begin{aligned}
&1)\ u=\frac{1}{1+\varepsilon e^{x+t}},\quad v=-\ln|e^{-x}+\varepsilon e^{t}|;\\
&2)\ u=e^{x},\quad v=e^{x}+t;\\
&3)\ u=\frac{1}{x-t+\mu t e^{-x/t}},\quad v=\ln|t|+\int\frac{d\vartheta}{\vartheta-1+\mu e^{-\vartheta}}\bigg|_{\vartheta=x/t};\\
&4)\ u=\frac{2t}{x^2+\varepsilon t^2},\quad v\big|_{\varepsilon=0}=-\frac{2t}{x},\\
&\quad v\big|_{\varepsilon=1}=2\operatorname{arctg}\frac{x}{t},\quad v\big|_{\varepsilon=-1}=\ln\left|\frac{x-t}{x+t}\right|;\\
&5)\ u=\frac{2t}{\cos^2 x},\quad v=2t\operatorname{tg}x;\\
&6)\ u=-\frac{2t}{\operatorname{ch}^2 x},\quad v=-2t\operatorname{th}x;\\
&7)\ u=\frac{2t}{\operatorname{sh}^2 x},\quad v=-2t\operatorname{cth}x.
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Тут ε та μ — довільні сталі, $\varepsilon\in\{-1,0,1\} \bmod G_1$. Нижче стрілочками показано можливі перетворення у множині розв'язків (6.14) під дією потенціального перетворення годографа (6.4) з точністю до зсувів за змінною x [104]:

$$\circlearrowright\ 1)_{\varepsilon=0}\,;\quad 1)_{\varepsilon=1}\longleftrightarrow 1)_{\varepsilon=-1,\,x+t<0}\,;\quad \circlearrowright\ 1)_{\varepsilon=-1,\,x+t>0}\,;$$

$$2)\longleftrightarrow 3)_{\mu=0,\,x>t}\,;\quad \circlearrowright\ 4)_{\varepsilon=0}\,;\quad 5)\longleftrightarrow 4)_{\varepsilon=4}\,;$$

$$6)\longleftrightarrow 4)_{\varepsilon=-4,\,|x|<2|t|}\,;\quad 7)\longleftrightarrow 4)_{\varepsilon=-4,\,|x|>2|t|}\,.$$

Шостий зв'язок був відомий раніше [36, 67, 109]. Якщо $\mu \neq 0$, розв'язок 3) зі списку (6.14) відображається перетворенням (6.4) у розв'язок

$$8)\ u = t\vartheta(\omega) - t + \mu t e^{-\vartheta(\omega)}, \qquad \omega = x - \ln|t|,$$

який інваріантний відносно алгебри $\langle t\partial_t + \partial_x + u\partial_u\rangle$. Тут ϑ — функція, визначена неявно формулою $\int(\vartheta - 1 + \mu e^{-\vartheta})^{-1}d\vartheta = \omega$.

Деякі класи неліївських точних розв'язків рівняння (6.1) побудовано в [76, 110, 111]. Ці розв'язки та подібні до них можна універсально представити над комплексним полем як суму двох простих хвиль, що рухаються з однаковими "швидкостями" у різних напрямках:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha^2}{\beta}(-\operatorname{ctg}(\alpha x + \beta t + \gamma) + \operatorname{ctg}(\alpha x - \beta t + \delta)) \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta}\frac{2\sin(2\beta t + \gamma - \delta)}{\cos(2\beta t + \gamma - \delta) - \cos(2\alpha x + \gamma + \delta)}, \end{aligned} \tag{6.15}$$

де α, β, γ та δ — комплексні сталі, $\alpha\beta \neq 0$. Можна довести, що функція (6.15) є дійснозначною (для дійсних t та x) тоді і тільки тоді, коли, з точністю до перетворень з групи G_1, сталі приймають значення

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{&(1, 1, 0, 0),\ (i, i, 0, 0),\ (i, i, \pi/2, 0), \\ &(i, i, \pi/2, \pi/2),\ (i, 1, 0, 0),\ (1, i, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (6.15) та вищевказані значення $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, отримуємо наступні (дійсні) розв'язки рівняння швидкої дифузії (6.1) та рівняння нелінійної фільтрації (6.2):

$$1')\ u = \operatorname{ctg}(x - t) - \operatorname{ctg}(x + t) = \frac{2\sin 2t}{\cos 2t - \cos 2x},\ v = \ln\left|\frac{\sin(x - t)}{\sin(x + t)}\right|;$$

$$2')\ u = \operatorname{cth}(x - t) - \operatorname{cth}(x + t) = \frac{2\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2t}, \quad v = \ln\left|\frac{\operatorname{sh}(x - t)}{\operatorname{sh}(x + t)}\right|;$$

$$3')\ u = \operatorname{cth}(x - t) - \operatorname{th}(x + t) = \frac{2\operatorname{ch} 2t}{\operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} 2t}, \quad v = \ln\left|\frac{\operatorname{sh}(x - t)}{\operatorname{ch}(x + t)}\right|;$$

$$4')\ u=\operatorname{th}(x-t)-\operatorname{th}(x+t)=-\frac{2\operatorname{sh}2t}{\operatorname{ch}2x+\operatorname{ch}2t},\quad v=\ln\frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)};$$

$$5')\ u=\operatorname{ctg}(ix+t)-\operatorname{ctg}(ix-t)=\frac{2\sin 2t}{\operatorname{ch}2x-\cos 2t},$$
$$v=2\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}t\ \operatorname{th}x);$$

$$6')\ u=i\operatorname{ctg}(x+it)-i\operatorname{ctg}(x-it)=\frac{2\operatorname{sh}2t}{\operatorname{ch}2t-\cos 2x},$$
$$v=2\operatorname{arctg}(\operatorname{cth}t\ \operatorname{tg}x).$$

(Всі двійки в останніх виразах для u можна прибрати масштабними перетвореннями з групи G_1.)

Перетворення (6.4) діє на множині розв'язків $1')$–$6')$ наступним чином:

$$1')_{\cos 2t<\cos 2x}\longleftrightarrow 5')|_{t\to t+\pi/2,\,x\to x/2,\,v\to 2v};$$
$$1')_{\cos 2t>\cos 2x}\longleftrightarrow 5')|_{x\to x/2,\,v\to 2v-\pi}\,;\quad \circlearrowright 6')|_{x\to x/2,\,v\to 2v};$$
$$2')_{|x|<|t|}\longleftrightarrow 4')|_{x\to x/2,\,v\to 2v};\quad \circlearrowright 2')_{|x|>|t|}|_{x\to x/2,\,v\to 2v}\,;$$
$$\circlearrowright 3')_{x<t}|_{x\to x/2,\,v\to 2v};\quad 3')_{x>t}\longleftrightarrow 3')_{x>t}|_{x\to -x/2,\,v\to -2v}.$$

У роботі [111] Ф. Розено використав адитивне розділення змінних для потенціального рівняння швидкої дифузії (6.2) та побудував розв'язок $4')$. Використовуючи метод узагальнених умовних симетрій, Ч. Чу [110] знайшов розв'язки, які можна записати у формах $1')$ та $6')$. Після виправлення неточностей у двох випадках з [110], можна також знайти розв'язки $2')$ та $5')$. Розв'язки $1')$, $3')$ та $4')$ отримано у роботі [76] принаймні в одній з наведених форм, але еквівалентність цих форм не показано.

Один з методів, який можна застосувати для знаходження вищевказаних розв'язків, — це редукція за операторами умовної симетрії вигляду $Q=\partial_x+(\eta^1(t,x)u+\eta^2(t,x))u\partial_u$ (див. [76]). А саме, розв'язки $1')$, $3')$ та $4')$ можна отримати методом редукції за операторами

$$\partial_x+(u^2-2\operatorname{ctg}(x-t)u)\partial_u,\quad \partial_x+(u^2-2\operatorname{cth}(x-t)u)\partial_u,$$
$$\partial_x+(u^2-2\operatorname{th}(x-t)u)\partial_u.$$

Сукупний перелік розв’язків з [76, 110, 111] доповнено подібними, а саме, розв’язками 2′) та 5′). Розв’язок 2′) також можна побудувати редукцією за другим з наведених операторів. Дійсні розв’язки 5′) і 6′) відповідають подібним операторам

$$\partial_x + (iu^2 - 2\coth(x - it)u)\partial_u \quad \text{та} \quad \partial_x - (iu^2 - 2i\coth(t - ix)u)\partial_u$$

з комплексними коефіцієнтами.

Всі редукції за операторами з теореми 6.1 або еквівалентними до них приводять до розв’язків, які є еквівалентними переліченим ліївським розв’язкам 1)–7) або розв’язкам 1′)–6′). Наприклад, оператори

$$\partial_t - \partial_x - 2\operatorname{ctg}(x - t)\partial_v, \quad \partial_t - \partial_x - 2\coth(x - t)\partial_v,$$
$$\partial_t - \partial_x - 2\operatorname{th}(x - t)\partial_v$$

приводять до розв’язків 1′), 3′), 4′) відповідно (див. також підрозділ 6.3).

6.5. Класифікація некласичних симетрій класу нелінійних рівнянь фільтрації

Теорема 6.2. *Нелінійні рівняння фільтрації* (6.12) *допускають неліївські оператори редукції з ненульовими коефіцієнтами при* ∂_t *тільки у випадку нелінійностей типу Фуджити*

$$f(v_x) = \frac{1}{a{v_x}^2 + bv_x + c},$$

де a, b, c *— довільні сталі.*

Доведення цієї тереми міститься у додатку А.2.

Зауважимо, що існують точно три $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки нелінійностей типу Фуджити:

$$f(v_x) = 1, \quad f(v_x) = \frac{1}{v_x}, \quad f(v_x) = \frac{1}{v_x^2 + 1}.$$

Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (6.12) складається з перетворень

$$\tilde t = \varepsilon_1 t + \varepsilon_2, \quad \tilde x = \varepsilon_1' x + \varepsilon_2' v + \varepsilon_3',$$
$$\tilde v = \varepsilon_1'' x + \varepsilon_2'' v + \varepsilon_3'', \quad \tilde f = \varepsilon_1^{-1}(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' v_x)^2 f,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_i', \varepsilon_i''$, $i = 1, 2, 3,$ — довільні сталі, $\varepsilon_1(\varepsilon_1'\varepsilon_2'' - \varepsilon_2'\varepsilon_1'') \neq 0$. Некласичні симетрії $(1+1)$-вимірного лінійного рівняння теплопровідності $(f = 1)$ вичерпно досліджено в [68]. Аналогічне дослідження другого випадку $(f = v_x^{-1})$ виконано у підрозділі 6.5. Отже, для того, щоб завершити класифікацію операторів редукції в класі нелінійних рівнянь фільтрації (6.12) відносно групи $G^{\sim}$ (див. означення 2.15), достатньо описати оператори редукції рівняння з останньою нелінійністю. Зауважимо, що рівняння з нелінійністю $f = \dfrac{1}{v_x^2 + 1}$ зводиться до потенціального рівняння швидкої дифузії (6.2) $(\tilde f = \tilde v_{\tilde x}^{-1})$ над полем комплексних чисел за допомогою перетворення $\tilde t = t$, $\tilde x = x + iv$, $\tilde v = x - iv$. Тому можливим методом вивчення цього рівняння є виконання вказаної комплексної заміни в операторах редукції з теореми 6.1 та подальше дослідження їх дійсної форми.

6.6. Висновки до розділу 6

У даному розділі представлено класифікацію операторів редукції нелінійного рівняння фільтрації (6.2), а також схему доведення та перелік побудованих точних розв'язків, включаючи ліївські та неліївські. Оскільки рівняння (6.2) є потенціальною формою рівняння швидкої дифузії (6.1), всі отримані оператори є потенціальними некласичними симетріями рівняння (6.1). Також досліджено некласичні симетрії у класі рівнянь фільтрації, а саме доведено, що ці рівняння допускають нетривіальні оператори некласичної симетрії тільки у випадку нелінійностей типу Фуджити.

Основні результати розділу 6 опубліковано у роботах [107, 116].

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Використовуючи новий підхід до групової класифікації, що базується на застосуванні перетворень з узагальненої розширеної групи еквівалентності та відображень між класами рівнянь, повністю розв'язано задачу групової класифікації (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями. За знайденими симетріями методом редукції побудовані нові точні розв'язки рівнянь з досліджуваного класу.

2. Описано множини всіх допустимих перетворень в класах (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями.

3. Прокласифіковано всі локальні закони збереження (1+1)-вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями.

4. Виконано вичерпну групову класифікацію рівнянь дифузії між пластинами, а також прокласифіковано локальні закони збереження рівнянь з цього класу. Побудовано додаткові перетворення еквівалентності та точні розв'язки таких рівнянь.

5. Прокласифіковано потенціальні некласичні симетрії (1+1)-вимірного рівняння швидкої дифузії. Доведено, що деякі класи таких симетрій пов'язані зі звичайними некласичними симетріями на множині розв'язків допоміжної потенціальної системи. Знайдено нові точні неліївські розв'язки. Показано, що відомі точні розв'язки рівняння швидкої дифузії вичерпуються розв'язками, які можна побудувати за знайденими операторами потенціальної некласичної симетрії.

6. Описано нелінійності, для яких рівняння з класу (1+1)-вимірних рівнянь фільтрації допускають нетривіальні некласичні симетрії.

Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичної фізики, а також в математичній біології, хімії та теоретичній фізиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 482–489.

[2] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Пер. с англ. под ред. А.М. Эфроса. – Харьков: ДНТВУ, 1939. – 719 с.

[3] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 293. – С. 1033–1035.

[4] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1989. – Т. 34. – С. 3–83.

[5] Боровских А.В. Групповая классификация уравнений эйконала для трехмерной неоднородной среды // Матем. сб. – 2004. – Т. 195, № 4. – С. 23–64.

[6] Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. / Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 380 с.

[7] Ванєєва О.О. Групова класифікація рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т. 3, № 2. – 2006. – С. 49–62.

[8] Дородницын В.А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком // Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр. – 1979. – № 57. – 32 с.

[9] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – Т. 22, № 6. – С. 1393–1400.

[10] Жаринов В.В. Законы сохранения эволюционных систем // Теор. и мат. физ. – 1986. – Т. 68, № 2. – С. 163–171.

[11] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

[12] Іванова Н.М. Класифікаційні задачі для рівнянь конвекції–дифузії та рівнянь Шрьодінгера: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03; – Захищена 29.03.2005; Затв. 30.06.2005. – К.: Ін-т математики НАН України, 2004. – 129 с.

[13] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. С.В. Фомин. – Санкт-Петербург: Лань, 2003. – 576 с.

[14] Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье — Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 243, № 4. – С. 901—904.

[15] Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса при наличии вращательной симметрии и некоторые новые точные решения // Зап. науч. семинара ЛОМИ. – 1979. – Т. 84. – С. 89–107.

[16] Курдюмов С.П., Посашков С.А., Синило А.В. О инвариантных решениях уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, допускаящим наиболее широкую группу преобразо-

ваний // Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр. – 1984. – № 110. – 28 с.

[17] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 365–372.

[18] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.

[19] Мелешко С.В. Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // Прикл. мат. мех. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 56–62.

[20] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 8. – С. 1053–1060.

[21] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / Пер. с англ. Щербак И.Г. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

[22] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492–495.

[23] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[24] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

[25] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

[26] Попович Р.О. Про клас Q-умовних симетрій та розв'язки еволюційних рівнянь // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 194–199.

[27] Попович Р.О., Корнєва І.П. Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 200–211.

[28] Попович Р.О., Черніга Р.М. Повна класифікація симетрій Лі системи нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – Т. 36. – С. 212–221.

[29] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 10. – С. 1370–1376.

[30] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.

[31] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа II: Трансцендентные функции / Пер. с англ. под ред. Ф.В. Широкова. – М.: Физматгиз, 1963. – 516 с.

[32] Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 11. – С. 1456–1470.

[33] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 288 с.

[34] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

[35] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 24—27.

[36] Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности // Доклады НАН Украины. – 1992. – № 1. – С. 26–30.

[37] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

[38] Хамитова Р.С. Структура группы и базис законов сохранения // Теор. и матем. физика. – 1982. – Т. 52. – С. 244–251.

[39] Черніга Р.М., Плюхін О.Г. Нові Q-умовні симетрії та розвязки рівнянь типу реакції–дифузії–конвекції зі степеневими нелінійностями // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т. 3, № 2. – 2006. – С. 316–330.

[40] Ablowitz M.J., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // Bull. Math. Biol. – 1979. – V. 41. – P. 835–840.

[41] Abraham-Shrauner B., Leach P.G.L., Govinder K.S., Ratcliff G. Hidden and contact symmetries of ordinary differential equations // J. Phys. A. – 1995. – V. 28. – P. 6707–6716.

[42] Anco S.C., Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. I. Examples of conservation law classifications // Eur. J. Appl. Math. – 2002. – V. 13. – P. 545–566. (arXiv:math-ph/0108023.)

[43] Anco S.C., Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. II. General treatment, Eur. J. Appl. Math. – 2002. – V. 13. – P. 567–585. (arXiv:math-ph/0108024.)

[44] Arrigo D.J., Hill J.M. Nonclassical symmetries for nonlinear diffusion and absorption // Stud. Appl. Math. – 1995. – V. 94. – P. 21–39.

[45] Arrigo D.J., Hill J.M., Broadbridge P. Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source // IMA J. Appl. Math. – 1994. – V. 52. – P. 1–24.

[46] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – V. 69, № 1. – P. 43–94. (arXiv:math-ph/0005013.)

[47] Berryman J.G., Holland C.J. Asymptotic behavior of the nonlinear diffusion equation $n_t = (n^{-1}n_x)_x$ // J. Math. Phys. – 1982. – V. 23, № 6. – P. 983–987.

[48] Bluman G., Anco S.C. Symmetry and integration methods for differential equations. – New-York: Springer-Verlag, 2002. – 419 p.

[49] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. of Math. and Mech. – 1969. – V. 18, № 11. – P. 1025–1042.

[50] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New-York: Springer-Verlag, 1989. – 412 p.

[51] Bluman G.W., Reid G.J., Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations // J. Math. Phys. – 1988. – V. 29 – P. 806–811.

[52] Bluman G.W., Yan Z. Nonclassical potential solutions of partial differential equations // Euro. J. Appl. Math. – 2005. – V. 16. – P. 239–261.

[53] Bokhari A.H., Kara A.H., Zaman F.D. A note on a symmetry analysis and exact solutions of a nonlinear fin equation // Appl. Math. Lett. – 2006. – V. 19. – P. 1340–1356.

[54] Branson T.P., Steeb W.-H. Symmetries of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – V. 16. – P. 469–472.

[55] Cariello F., Tabor M. Painleve expansions for nonintegrable evolution equations // Physica D. – 1989. – V. 39. – P. 77–94.

[56] Cherniha R. New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 326. – P. 783–799.

[57] Cherniha R., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – V. 40. – P. 10049–10070. (arXiv:math-ph/0612078.)

[58] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. Appl. Math. – 1998. – V. 9. – P. 527–542.

[59] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms, II // Euro. J. Appl. Math. – 2006. – V. 17. – P. 1–9.

[60] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. – 1994. – V. 70. – P. 250–288.

[61] Crank J. The mathematics of diffusion. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – 414 p.

[62] Fokas A.S., Liu Q.M. Generalized conditional symmetries and exact solutions of nonitegrable equations // Теор. и матем. физика. – 1994. – Т. 99, № 2 – С. 263–278.

[63] Frey H.-D., Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F. Symmetries and integrability of generalized diffusion reaction equations // J. Phys. A. – 1993. – V. 25. – P. 665–679.

[64] Fushchych W.I., Popovych R.O. Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations, I // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – V. 1, № 1. – P. 75–113.

[65] Fushchych W.I., Popovych R.O. Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations, II // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – V. 1, № 2. – P. 158–188.

[66] Fushchych W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. The conditional invariance and exact solutions of the nonlinear diffusion equation // Доповіді АН України. – 1993. – № 4. – P. 37–40.

[67] Fushchych W.I., Serov N.I., Tychinin V.A., Amerov T.K. On non-local symmetries of nonlinear heat equation // Доклады АН Украины. – 1992. – № 11. – С. 27–33.

[68] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., Popovych R.O. Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Доклады АН Украины. – 1992. – № 12. – С. 28–33.

[69] Fushchych W., Zhdanov R. Antireduction and exact solutions of nonlinear heat equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – V. 1, № 1. – P. 60–64.

[70] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – V. 20. – P. L45–L48.

[71] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Conditional symmetry and reduction of partial differential equations // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 7, –С. 970–982.

[72] Galaktionov V. A., On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications // Differ. and Integral Equat. – 1990. – V. 3. – P. 863–874.

[73] Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Elenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasilinear heat equation with a source: peaking, location, symmetry exact solution, asymptotics, structures // J. Soviet Math. – 1988. – V. 41. – C. 1222–1292.

[74] Gandarias M.L. Classical point symmetries of a porous medium equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1996. – V. 29. – P. 607–633.

[75] Gandarias M.L. Nonclassical potential symmetries of the Burgers equation // Proceedings of the Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – Kyiv (Ukraine). – 1997. – P. 130–137.

[76] Gandarias M.L. New symmetries for a model of fast diffusion // Phys. Let. A. – 2001. – V. 286. – P. 153–160.

[77] Hereman W., Takaoka M. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA // J. Phys. A. – 1990. – V. 23. – P. 4805–4822.

[78] Ibragimov N.H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / Boca Raton: CRC Press, 1994. – V. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. – 429 p.

[79] Ibragimov N.H. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / Boca Raton: CRC Press, 1994. – V. 2: Applications in engineering and physical sciences. – 546 p.

[80] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Conservation laws of variable coefficient diffusion-convection equations // Proceedings of 10th International Conference in Modern Group Analysis. – Larnaca (Cyprus). – 2005. – P. 108–115 (math-ph/0505015).

[81] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group classification and conservation laws of variable coefficient diffusion–convection equations, in preparation.

[82] Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable coefficient nonlinear diffusion–convection equations // J. Comp. Appl. Math. – 2006. – V. 197. – P. 322–344.

[83] Kamin S., Rosenau P. Nonlinear thermal evolution in an inhomogeneous medium // J. Math. Phys. – 1982. – V. 23. – P. 1385–1390.

[84] Kingston J.G., Sophocleous C. On point transformations of a generalised Burgers equation // Phys. Lett. A. – 1991. – V. 155. – P. 15–19.

[85] Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – V. 31. – P. 1597–1619.

[86] Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2001. – V. 36. – P. 987–997.

[87] Kurtz T.G. Convergence of sequences of semigroups of nonlinear operators with an application to gas kinetics // Transactions of the Amer. Math. Society. – 1973. – V. 186. – P. 259–272.

[88] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung // Arch. for Math. – 1881. – V. 6, № 3. – P. 328–368.

[89] Meleshko S.V. Generalization of the equivalence transformations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1996. – V. 3. – P. 170–174.

[90] Meleshko S.V. Methods for constructing exact solutions of partial differential equations: mathematical and analytical techniques with applications to engineering. – New York: Springer, 2005. – 352 p.

[91] Murray J.D. Mathematical biology I: An introduction. – 3rd Ed. – New York: Springer, 2002. – 551 p.

[92] Murray J.D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. – 3rd Ed. – New York: Springer, 2002. – 811 p.

[93] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations // Укр. Мат. Вісн. – 2005. – Т. 2, № 2 – С. 149–200.

[94] Nikitin A.G., Barannyk T.A. Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Cent. Eur. J. Math. – 2004. – V. 2. – P. 840–858. (arXiv:math-ph/0303004.)

[95] Pakdemirli M., Sahin A.Z. Group classification of fin equation with variable thermal properties // Internat. J. Engrg. Sci. – 2004. – V. 42. – P. 1875–1889.

[96] Pakdemirli M., Sahin A.Z. Similarity analysis of a nonlinear fin equation // Appl. Math. Lett. – 2006. – V. 19. – P. 378–384.

[97] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – V. 18, № 7. – P. 1449–1455.

[98] Peletier L.A. The porous media equation // Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences. – London: Pitman, 1981. – P. 229–241.

[99] Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2000. – V. 30, Part 1. – P. 184–189. (arXiv:math-ph/0208005.)

[100] Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т. 3, № 2. – 2006. – С. 239–254.

[101] Popovych R.O., Eshraghi H. Admissible point transformations of nonlinear Schrodinger equations // Proceedings of 10th International Conference in Modern Group Analysis. – Larnaca (Cyprus). – 2005. – P. 168–176.

[102] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – V. 37. – P. 7547–7565 (arXiv:math-ph/0306035.)

[103] Popovych R.O., Ivanova N.M. Hierarchy of conservation laws of diffusion–convection equations // J. Math. Phys. – 2005. – V. 46, Paper 043502. – 21 p. (arXiv:math-ph/0407008.)

[104] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A. – 2005. – V. 38. – P. 3145–3155. (arXiv:math-ph/0402066.)

[105] Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schroedinger equations // arXiv:math-ph/0611061. – 2006. – 35 p.

[106] Popovych R.O., Sophocleous C., Vaneeva O.O. Exact solutions of a remarkable fin equation // Appl. Math. Lett. – 2007. – doi:10.1016/j.aml.2007.03.009. – 6 p. (arXiv:math-ph/0610017.)

[107] Popovych R.O., Vaneeva O.O., Ivanova N.M. Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation // Phys. Lett. A. – 2007. – V. 362. – P. 166–173. (arXiv:math-ph/0506067v3.)

[108] Prokhorova M. The structure of the category of parabolic equations // arXiv:math.AP/0512094. – 2005. – 24 p.

[109] Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations // Energy methods in continuum mechanics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – P. 75–99.

[110] Qu C. Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a generalized conditional symmetry method // IMA J. Appl. Math. – 1999. – V. 62. – P. 283–302.

[111] Rosenau P. Fast and superfast diffusion processes // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 74, № 7. – P. 1056–1059.

[112] Steeb W.-H. Diffusion equations and the geometric approach // Lett. Nuovo Cimento. – 1978. – V. 22. – P. 45–46.

[113] Sophocleous C. On symmetries of radially symmetric nonlinear diffusion equations // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33. – P. 3687–3693.

[114] Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of generalised inhomogeneous nonlinear diffusion equations // Phys. A. – 2003. – V. 324. – P. 509–529.

[115] Touloukian Y.S., Powell P.W., Ho C.Y., Klemens P.G. Thermophysical properties of matter: In 13 volumes / New York: Plenum, 1970. – V. 1: Thermal conductivity—metallic elements and alloys. – 1597 p.

[116] Vaneeva O.O. Reduction operators of nonlinear filtration equation / Proceedings of the VI International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics edited by H.-D. Doebner and V.K. Dobrev // Bulg. J. of Phys. – 2006. – V. 33(s2). – P. 227–230.

[117] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 330. – P. 1363–1386. (arXiv:math-ph/0605081.)

[118] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of nonlinear fin equations // Appl. Math. Lett. – 2007. – doi:10.1016/j.aml.2007.02.023. – 6 p. (arXiv:math-ph/0610006.)

[119] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source // arXiv:0708.3457. – 2007. – 43 p.

[120] Wang X.Y. Exact and explicit solitary wave solutions for the generalised Fisher equation // Phys. Lett. A. – 1988. – V. 131. – P. 277–279.

[121] Zhdanov R.Z. Conditional Lie-Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – V. 28. – P. 3841–3850.

[122] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation // Physica D. – 1998. – V. 122. – P. 178–186.

[123] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of the (1+1)-dimensional Boussinesq equation: a no-go theorem // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – Т. 19. – С. 88–99.

[124] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A. – 1999. – V. 32. – P. 7405–7418.

[125] Zhdanov R., Lahno V. Group Classification of the general evolution equation: local and quasilocal symmetries // SIGMA. – 2005. – V. 1, Paper 009. – 7 p. (arXiv:nlin/0510003.)

[126] Zhdanov R., Lahno V. Group classification of the general second-order evolution equation: semi-simple invariance groups // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – V. 40. – P. 5083–5103.

[127] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – V. 238, № 1. – P. 101–123. (arXiv:math-ph/0207023.)

Додаток А

Доведення тверджень з розділу 6

А.1. Доведення теореми про потенціальні некласичні симетрії рівняння швидкої дифузії

У цьому розділі виконано повне доведення теореми 6.1, яке опущено в розділі 6 через його громіздкість.

Для зручності наведемо ще раз систему визначальних рівнянь на коефіцієнти $\xi = \xi(t,x,v)$, $\theta = \theta(t,x,v)$ операторів редукції потенціального рівняння швидкої дифузії (6.2).

$$\xi_{vv} = \xi\xi_v, \tag{A.1}$$

$$\xi_t = 2\xi_{xv} - \theta_{vv} - \theta_v\xi + \theta\xi_v - \xi\xi_x, \tag{A.2}$$

$$\theta_{xx} = \theta\theta_x, \tag{A.3}$$

$$\theta_t = 2\theta_{xv} - \xi_{xx} - \xi_x\theta + \xi\theta_x - \theta\theta_v. \tag{A.4}$$

Спочатку проінтегруємо рівняння (A.1). Його розв'язки пробігають значення

$$\xi \in \{0, \xi(t,x), -2/\omega,\ -2\mu\operatorname{ctg}\mu\omega,\ -2\mu\operatorname{th}\mu\omega,\ -2\mu\operatorname{cth}\mu\omega\},$$

де $\mu = \mu(t,x)$, $\omega = v + \varphi(t,x)$. Отже, підставляючи отримані форми ξ в рівняння (A.2)–(A.4) та послідовно інтегруючи їх, знаходимо функції μ, φ та θ.

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. $\xi = 0$.

У цьому випадку рівняння (A.2) набуває вигляду $\theta_{vv} = 0$. Отже, $\theta = \alpha(t,x)v + \beta(t,x)$. Після підстановки цієї форми θ до рівнянь (A.3) і (A.4) їх праві та ліві частини стають поліномами змінної v. Збираючи коефіцієнти при однакових степенях v та прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему рівнянь

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha\beta_x = 0, \quad \beta_{xx} = \beta\beta_x, \quad \alpha_t = -\alpha^2, \quad \beta_t = -\alpha\beta$$

на функції $\alpha = \alpha(t,x)$ та $\beta = \beta(t,x)$. Подальше інтегрування залежить від значення α.

1. Якщо $\alpha = 0$, то β є функцією змінної x, що задовольняє рівняння

$$\beta_{xx} = \beta\beta_x. \tag{A.5}$$

Нас цікавлять ненульові розв'язки останнього рівняння (оскільки інакше $\xi = \theta = 0$), які вичерпуються наступними

$$\beta \in \{c, -2/x, -\operatorname{ctg}(x/2), -\operatorname{th}(x/2), -\operatorname{cth}(x/2)\} \bmod G_2', \tag{A.6}$$

де G_2': $\tilde{x} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2$, $\tilde{\beta} = \varepsilon_1^{-1}\beta$, $\varepsilon_1 \neq 0$ — група точкових симетрій рівняння (A.5), що індукована групою G_2; $c \neq 0$.

Відповідні оператори редукції мають вигляд

$$Q_{1.1} = \partial_t + c\partial_v, \quad Q_{1.2} = \partial_t - 2/x\,\partial_v, \quad Q_{1.3} = \partial_t - \operatorname{ctg}(x/2)\partial_v,$$

$$Q_{1.4} = \partial_t - \operatorname{th}(x/2)\partial_v, \quad Q_{1.5} = \partial_t - \operatorname{cth}(x/2)\partial_v.$$

Оператор $Q_{1.1}$ є ліївським, а тому тривіальним. Оператори $Q_{1.j}$, $j = \overline{2,5}$, наведено у теоремі 6.1 (випадок 1 з $\varepsilon = 0$).

2. З умови $\alpha \neq 0$ випливає, що

$$\alpha = \frac{1}{t + c_1}, \quad \beta = \frac{c_2}{t + c_1}.$$

Отже, отримуємо такий оператор редукції

$$Q_{1.6} = \partial_t + \frac{v + c_2}{t + c_1}\partial_v.$$

Цей оператор еквівалентний оператору ліївської симетрії рівняння (6.2) у сенсі означень 2.13 та 2.14, наведених у розділі 2.4 Дійсно, розглянемо оператори

$$Q_{1.6}, \quad Q'_{1.6} = (t + c_1)\partial_t + (v + c_2)\partial_v, \quad \tilde{Q}_{1.6} = t\partial_t + v\partial_v.$$

Оператори $Q_{1.6}$, $Q'_{1.6}$ еквівалентні у сенсі означення 2.13 з відповідною функцією $\lambda = t + c_1$. В свою чергу оператори $Q'_{1.6}$ та $\tilde{Q}_{1.6}$ еквівалентні відносно групи G_2 симетрій рівняння (6.2), яка містить зсуви за змінними t та v. Оскільки оператор $\tilde{Q}_{1.6}$ належить до максимальної алгебри $A_2^{\max}$ ліївської інваріантності рівняння (6.2) та еквівалентний оператору $Q_{1.6}$, останній є тривіальним і його треба виключити з класифікації. Далі в таких випадках будемо писати $Q \sim \tilde{Q} \in A_2^{\max}$.

II. $\xi \neq 0, \quad \xi = \xi(t, x)$.

Інтегрування рівняння (A.2) дає $\theta = \alpha(t, x)e^{-\xi v} + \beta(t, x) + \gamma(t, x)v$, де $\gamma(t, x) = -\xi_t/\xi - \xi_x$.

Підставляючи знайдену форму θ в рівняння (A.3) та (A.4) та розщеплюючи їх за змінною v, отримуємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних на функції α, β, ξ та γ. З цієї системи випливає, що $\alpha = 0$ та $\gamma_x = 0$. Далі треба розглянути два суттєво різні випадки, що виникають в залежності від того, чи дорівнює функція γ нулю.

1. Якщо $\gamma = \gamma(t) \neq 0$, результуюча система має вигляд

$$\beta_x = 0, \quad \gamma_t = -\xi_x\gamma - \gamma^2, \quad \beta_t = -\beta\xi_x - \xi_{xx} - \beta\gamma.$$

Інтегруємо цю систему, враховуючи зв'язок $\gamma = -\xi_t/\xi - \xi_x$:

$$\beta = \frac{c_2}{c_0 t + c_1}, \quad \gamma = \frac{1}{c_0 t + c_1}, \quad \xi = \frac{(c_0 - 1)x + c_3}{c_0 t + c_1}.$$

Отже,

$$Q_{2.1} = \partial_t + \frac{(c_0-1)x+c_3}{c_0t+c_1}\partial_x + \frac{v+c_2}{c_0t+c_1}\partial_v \sim \tilde{Q}_{2.1} \in A_2^{\max}.$$

2. Якщо $\gamma = 0$, то $\theta = \theta(t,x)$. У цьому випадку рівняння (А.2) та (А.4) набувають відповідно вигляду

$$\xi_t + \xi\xi_x = 0, \tag{А.7}$$

$$\theta_t = -\xi_{xx} - \xi_x\theta + \xi\theta_x. \tag{А.8}$$

В результаті маємо систему рівнянь (А.3), (А.7), (А.8) на функції ξ і θ, кожна з яких залежить від змінних t та x. Інтегруючи рівняння (А.3) та враховуючи його тривіальний розв'язок, отримуємо

$$\theta \in \{0, \theta(t), -2/\omega,\ -2\nu\operatorname{ctg}\nu\omega,\ -2\nu\operatorname{th}\nu\omega,\ -2\nu\operatorname{cth}\nu\omega\},$$

де $\nu = \nu(t)$, $\omega = x + \varphi(t)$. Підстановка цих значень θ в рівняння (А.7) та (А.8) дозволяє відшукати відповідні форми ξ. Розглянемо кожен підвипадок окремо.

2.a. $\theta = 0$.

Інтегрування рівняння (А.8) дає, що $\xi = \alpha(t)x + \beta(t)$. Враховуючи цей вираз для ξ та розщеплюючи рівняння (А.7) за змінною x, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь $\alpha_t + \alpha^2 = 0$, $\beta_t + \alpha\beta = 0$. Звідки маємо $\alpha = \dfrac{1}{t+c_3}$, $\beta = \dfrac{c_1}{t+c_3}$ та, отже, $\xi = \dfrac{x+c_1}{t+c_3}$. Відповідний оператор редукції має вигляд

$$Q_{2.2} = \partial_t + \frac{x+c_1}{t+c_3}\partial_x \sim \tilde{Q}_{2.2} \in A_2^{\max}.$$

Особливий розв'язок $(\alpha,\beta) = (0,c)$, $c \neq 0$, також призводить до тривіального оператора редукції.

2.b. $\theta = \theta(t) \neq 0$.

Оскільки θ залежить тільки від змінної t, інтегрування рівняння (А.8) дає такий вираз для коефіцієнта ξ:

$$\xi = \alpha(t)e^{-\theta x} + \beta(t) - \frac{\theta_t}{\theta}x.$$

Підставляючи його в рівняння (A.7), після розщеплення за змінною x знаходимо, що $\alpha = 0$, а функції β та θ задовольняють рівняння

$$\beta_t\theta^2 - \beta\theta\theta_t = 0, \quad \theta\theta_{tt} - 2{\theta_t}^2 = 0.$$

Ця система має загальний розв'язок $\beta = \dfrac{c_1}{t+c_3}$, $\theta = \dfrac{c_2}{t+c_3}$ та особливий $\beta = c_1$, $\theta = c_2$ з $c_2 \neq 0$. Відповідні оператори

$$Q_{2.3} = \partial_t + \frac{x+c_1}{t+c_3}\partial_x + \frac{c_2}{t+c_3}\partial_v, \quad Q_{2.4} = \partial_t + c_1\partial_x + c_2\partial_v$$

є тривіальними.

2.c. $\theta = -2/\omega$, де $\omega = x + \varphi(t)$.

Підставляючи вираз для θ в рівняння (A.8), отримуємо лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\omega^2\xi_{\omega\omega} - 2\omega\xi_\omega - 2\xi = -2\varphi_t, \tag{A.9}$$

де змінна t виступає у якості параметра.

Загальний розв'язок рівняння (A.9) шукаємо як суму будь-якого його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $\omega^2\xi_{\omega\omega} - 2\omega\xi_\omega - 2\xi = 0$, яке є рівнянням Ейлера. Отже, загальний розв'язок рівняння (A.9) має вигляд

$$\xi = \varkappa^i(t)|\omega|^{\lambda_i} + \varphi_t,$$

де $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $\varkappa^{1,2}(t)$ — довільні гладкі функції. З рівняння (A.7) випливає, що $\varkappa^i(t) = 0$ $(i = 1, 2)$ та $\varphi_{tt} = 0$, а тому $\varphi = c_1t + c_2$.

Знаходимо оператор редукції

$$Q = \partial_t + c_1\partial_x - \frac{2}{x + c_1t + c_2}\partial_v.$$

Оператор Q еквівалентний відносно групи G_2 інваріантності рівняння (6.2) оператору

$$Q_{2.5} = \partial_t + \varepsilon\partial_x - \frac{2}{x + \varepsilon t}\partial_v,$$

де $\varepsilon = 1$, якщо $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = 0$ в протилежному випадку. Оператор $Q_{2.5}$ наведений у випадку 1 теореми 6.1.

2.d. $\theta = -2\nu(t)\operatorname{ctg}\eta$, де $\eta = \nu(t)(x + \varphi(t))$.

Підставляючи вказану форму θ в рівняння (A.8), отримуємо звичайне диференціальне рівняння на функцію $\xi(\eta)$, в якому функції, що залежать від t, виступають у якості параметрів:

$$\xi_{\eta\eta} - 2\operatorname{ctg}\eta\xi_\eta - \frac{2}{\sin^2\eta}\xi = \frac{2\nu_t}{\nu^2}\operatorname{ctg}\eta - \frac{2\nu_t\eta}{\nu^2\sin^2\eta} - \frac{2\varphi_t}{\sin^2\eta}.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$\xi = \varkappa^i(t)|\eta|^{\lambda_i}\psi^i(\eta) - \frac{\nu_t}{\nu^2}\sin\eta\cos\eta + \frac{\nu_t}{\nu^2}\eta + \varphi_t, \quad \text{де} \quad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$\psi^{1,2}(\eta)$ — деякі фіксовані аналітичні функції, $\varkappa^{1,2}(t)$ — довільні гладкі функції [2]. З рівняння (A.7) випливає, що $\varkappa^i(t) = 0$ $(i = 1, 2)$, $\eta_t = 0$ та $\varphi_{tt} = 0$. Отже, $\eta = c$, $\varphi = c_1 t + c_2$.

Це дає оператор некласичної симетрії

$$Q = \partial_t + c_1\partial_x - 2c\operatorname{ctg} c(x + c_1 t + c_2)\partial_v,$$

який є оператором ліївської симетрії при $c = 0$. Отже, вважаємо $c \neq 0$. Спростивши вигляд оператора перетвореннями з групи G_2 (поклавши $c = \frac{1}{2}$, $c_1 = \varepsilon \in \{0, 1\}$, $c_2 = 0$), маємо один з операторів, наведених у випадку 1 теореми 6.1, а саме

$$Q_{2.6} = \partial_t + \varepsilon\partial_x - \operatorname{ctg}(x/2 + \varepsilon t/2)\partial_v.$$

2.e. $\theta = -2\nu(t)\operatorname{th}\eta$, де $\eta = \nu(t)(x + \varphi(t))$.

Підставляючи вираз для θ в рівняння (A.8), отримуємо лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\xi_{\eta\eta} - 2\operatorname{th}\eta\xi_\eta + \frac{2}{\operatorname{ch}^2\eta}\xi = \frac{2\nu_t}{\nu^2}\operatorname{th}\eta + \frac{2\nu_t\eta}{\nu^2\operatorname{ch}^2\eta} + \frac{2\varphi_t}{\operatorname{ch}^2\eta}.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$\xi = \varkappa^i(t)|\eta|^{\lambda_i}\psi^i(\eta) + \frac{\nu_t}{\nu^2}\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta + \frac{\nu_t}{\nu^2}\eta + \varphi_t, \quad \text{де} \quad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$\psi^{1,2}(\eta)$ — деякі фіксовані аналітичні функції, $\varkappa^{1,2}(t)$ — довільні гладкі функції. Підставляючи вирази для ξ і θ у рівняння (A.7), знову знаходимо $\varkappa^i(t)=0$ $(i=1,2)$, $\eta_t=0$ та $\varphi_{tt}=0$. Тобто $\eta=c$, $\varphi=c_1t+c_2$ та тому

$$Q=\partial_t+c_1\partial_x-2c\operatorname{th}c(x+c_1t+c_2)\partial_v.$$

$Q\sim Q_{2.7}\bmod G_2$, де $Q_{2.7}=\partial_t+\varepsilon\partial_x-\operatorname{th}(x/2+\varepsilon t/2)\partial_v$, $\varepsilon\in\{0,1\}$.

2.f. $\theta=-2\nu(t)\operatorname{cth}\eta$, де $\eta=\nu(t)(x+\varphi(t))$.

Для цього значення θ рівняння (A.8) набуває вигляду

$$\xi_{\eta\eta}-2\operatorname{cth}\eta\xi_\eta-\frac{2}{\operatorname{sh}^2\eta}\xi=\frac{2\nu_t}{\nu^2}\operatorname{cth}\eta-\frac{2\nu_t\eta}{\nu^2\operatorname{sh}^2\eta}-\frac{2\varphi_t}{\operatorname{sh}^2\eta}.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$\xi=\varkappa^i(t)|\eta|^{\lambda_i}\psi^i(\eta)-\frac{\nu_t}{\nu^2}\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta+\frac{\nu_t}{\nu^2}\eta+\varphi_t,\quad\text{де}\quad\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2},$$

$\psi^{1,2}(\eta)$ — деякі фіксовані аналітичні функції, $\varkappa^{1,2}(t)$ — довільні гладкі функції. Тоді з рівняння (A.7) випливає, що $\varkappa^i(t)=0$ $(i=1,2)$, $\eta_t=0$ та $\varphi_{tt}=0$, отже $\eta=c$, $\varphi=c_1t+c_2$. В результаті побудуємо оператор редукції

$$Q=\partial_t+c_1\partial_x-2c\operatorname{cth}c(x+c_1t+c_2)\partial_v.$$

$Q\sim Q_{2.8}\bmod G_2$, де $Q_{2.8}=\partial_t+\varepsilon\partial_x-\operatorname{cth}(x/2+\varepsilon t/2)\partial_v$, $\varepsilon\in\{0,1\}$.

Таким чином випадок, коли коефіцієнт $\xi\neq0$ не залежить від змінної v, охоплює усі G_2-нееквівалентні нетривіальні оператори некласичної симетрії, наведені у пункті 1 теореми 6.1.

$$\textbf{III}.\quad\xi=-\frac{2}{\omega},\quad\omega=v+\varphi(t,x).$$

Після підстановки $\xi=-2/\omega$ в рівняння (A.2) воно набуває вигляду

$$\omega^2\theta_{\omega\omega}-2\omega\theta_\omega-2\theta=-2\varphi_t-4\varphi_x\omega.$$

Інтегруючи його, маємо

$$\theta = \varkappa^i(t,x)|\omega|^{\lambda_i} + \varphi_t - \frac{2\varphi_x}{\omega},$$

де $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $\varkappa^{1,2}(t,x)$ — довільні гладкі функції. З рівнянь (A.3) та (A.4) випливає, що $\varkappa^i(t,x) = 0$ $(i = 1,2)$ та $\varphi_{tt} = 0$, $\varphi_t\varphi_x = \varphi_{xx}$. З першого рівняння на функцію φ маємо $\varphi = \beta(x)t + \alpha(x)$. Підставляючи цей вираз у друге рівняння та розщеплюючи його за змінною t, отримуємо систему

$$\beta\beta_x = \beta_{xx}, \quad \beta\alpha_x = \alpha_{xx}.$$

Якщо $\beta = 0$, то $\alpha = c_1x + c_2$. Якщо $\beta \neq 0$, то воно пробігає множину значень (A.6). Розв'язавши друге рівняння останньої системи для всіх значень β з (A.6), знаходимо, що φ пробігає множину значень (нееквівалентних відносно зсувів за змінними t, x, φ)

$$S_0 = \{\varepsilon x,\ t + \varepsilon e^x,\ -2t/x,\ -t\operatorname{ctg}(x/2),\ -t\operatorname{th}(x/2),\ -t\operatorname{cth}(x/2)\},$$

де $\varepsilon \in \{0,1\} \bmod G_2$. Отже, отримуємо оператори некласичної симетрії вигляду

$$Q = \partial_t - \frac{2}{v+\varphi}\partial_x + \left(\varphi_t - \frac{2\varphi_x}{v+\varphi}\right)\partial_v, \tag{A.10}$$

де φ пробігає множину значень S_0.

$$\begin{aligned}
&Q_{3.1} = \partial_t - 2/v\,\partial_x \sim Q_{1.2} \bmod G_2,\\
&Q_{3.2} = \partial_t - \frac{2}{v+x}(\partial_x + \partial_v),\\
&Q_{3.3} = \partial_t - \frac{2}{v+t}\partial_x + \partial_v \sim Q_{2.5}(\varepsilon = 1) \bmod G_2,\\
&Q_{3.4} = \partial_t - \frac{2}{v+t+e^x}\partial_x + \frac{v+t-e^x}{v+t+e^x}\partial_v,\\
&Q_{3.5} = \partial_t - \frac{2}{v-2t/x}\,\partial_x - \frac{2}{x-2t/v}\,\partial_v,
\end{aligned}$$

$$Q_{3.6} = \partial_t - \frac{2}{v - t\operatorname{ctg}(x/2)}\,\partial_x - \frac{t + v\operatorname{ctg}(x/2)}{v - t\operatorname{ctg}(x/2)}\,\partial_v,$$
$$Q_{3.7} = \partial_t - \frac{2}{v - t\operatorname{th}(x/2)}\,\partial_x + \frac{t - v\operatorname{th}(x/2)}{v - t\operatorname{th}(x/2)}\,\partial_v,$$
$$Q_{3.8} = \partial_t - \frac{2}{v - t\operatorname{cth}(x/2)}\,\partial_x + \frac{t - v\operatorname{cth}(x/2)}{v - t\operatorname{cth}(x/2)}\,\partial_v.$$

Отже, отримали всі оператори, наведені у випадку 3 теореми 6.1 ($Q_{3.j}$, $j = 4, 5, \ldots, 8$), а також один з операторів з пункту 2 ($Q_{3.2}$).

IV. $\xi = -2\mu(t,x)\operatorname{ctg}\mu(t,x)(v + \varphi(t,x))$.

Введемо позначення $\eta = \mu(t,x)(v + \varphi(t,x))$. Підставляючи вказану форму ξ в рівняння (A.2), отримуємо звичайне диференціальне рівняння на функцію $\theta(\eta)$, в якому функції, що залежать від t і x, виступають у якості параметрів:

$$\sin^2\eta\theta_{\eta\eta} - 2\sin\eta\cos\eta\theta_\eta - 2\theta = -2\varphi_t - 4\mu\varphi_x\operatorname{ctg}\eta +$$
$$\frac{4\mu_x}{\mu}\left(1 + \sin^2\eta - \eta\operatorname{ctg}\eta\right) - \frac{2\mu_t}{\mu^2}\left(\eta - \sin\eta\cos\eta\right).$$

Його розв'язок має вигляд

$$\theta = \varkappa^i(t,x)|\eta|^{\lambda_i}\psi^i(\eta) + \varphi_t - 2\mu\varphi_x\operatorname{ctg}\eta +$$
$$\frac{2\mu_x}{\mu}\left(1 - \sin^2\eta - \eta\operatorname{ctg}\eta\right) + \frac{\mu_t}{\mu^2}\left(\eta - \sin\eta\cos\eta\right),$$

де $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $\psi^{1,2}(\eta)$ — деякі фіксовані аналітичні функції, $\varkappa^{1,2}(t,x)$ — довільні гладкі функції.

Підстановка знайдених форм ξ, θ в рівняння (A.3) і (A.4) дозволяє знайти, що $\varkappa^i(t,x) = 0$ ($i = 1, 2$), $\mu(t,x) = m$, а функція φ задовольняє систему рівнянь

$$\varphi_{tt} + 4m^2\varphi_{xx} = 0, \quad \varphi_t\varphi_x = \varphi_{xx}.$$

Отже, оператори редукції у цьому випадку мають вигляд

$$Q = \partial_t - 2m\operatorname{ctg} m(v + \varphi)\partial_x + (\varphi_t - 2m\varphi_x\operatorname{ctg} m(v + \varphi))\partial_v,$$

де функція φ є розв'язком останньої системи.

Стала m не дорівнює нулю, бо тоді матимемо тривіальний оператор редукції. Використовуючи перетворення з групи G_2, а саме перетворення однорідного розтягу за змінними (t, v), покладемо сталу m рівною $\frac{1}{2}$. Тоді оператори редукції набувають вигляду

$$Q = \partial_t - \operatorname{ctg}(v/2 + \varphi/2)\partial_x + (\varphi_t - \varphi_x \operatorname{ctg}(v/2 + \varphi/2))\partial_v, \qquad (A.11)$$

де функція φ є розв'язком системи

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xx} = 0, \quad \varphi_t \varphi_x = \varphi_{xx}. \qquad (A.12)$$

Інтегруючи перше рівняння системи (A.12), отримуємо, що $\varphi = \phi(y) + \bar{\phi}(\bar{y})$, де $y = x + it$, $\bar{y} = x - it$. Будемо шукати дійснозначну функцію φ, яка є сумою двох спряжених комплекснозначних функцій ϕ та $\bar{\phi}$ (спряженість останніх двох функцій гарантує те, що φ буде дійснозначною).

Підставляючи знайдений вираз для φ у друге рівняння системи, отримуємо рівняння з відокремленими змінними

$$\phi_{yy} - i\left(\phi_y\right)^2 = -\left(\bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}} + i\left(\bar{\phi}_{\bar{y}}\right)^2\right).$$

Обидві частини цієї рівності дорівнюють тій самій комплексній сталій k. Легко бачити, що $k = -\bar{k}$, отже, вона є суто уявною. Для зручності позначимо її через $i\lambda$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. Виконаємо також заміну залежної змінної $\phi(y) = iz(y)$. Тоді маємо рівняння

$$z_{yy} + \left(z_y\right)^2 = \lambda, \qquad (A.13)$$

Нееквівалентні відносно зсувів за y та z розв'язки є такі

1. $\lambda = 0$: $\quad z \in \{0, \ln y\}$,
2. $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -1 \bmod G_2''$: $\quad z \in \{iy,\ \ln\cos y\}$,
3. $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 1 \bmod G_2''$: $\quad z \in \{y,\ \ln\operatorname{ch} y\}$,

де G_2'' — група інваріантності рівняння (A.13), що індукована групою G_2.

Використовуючи формулу $\ln W = \ln|W| + i\arg W$, де $W = W_1 + iW_2$ — довільне комплексне число, $\arg W = \operatorname{arctg}\dfrac{W_2}{W_1}$, знаходимо, що функція φ пробігає множину значень

$$S_1 = \Big\{0,\ x,\ t,\ -2\operatorname{arctg}\frac{t}{x},\ 2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x\operatorname{th}t),\ -2\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x\operatorname{tg}t)\Big\}.$$

Підставивши функції φ з множини S_1 у формулу (A.11), побудуємо оператори редукції рівняння (1.9).

$$\begin{aligned}
&Q_{4.1} = \partial_t - \operatorname{ctg}(v/2)\partial_x \sim Q_{1.3} \bmod G_2;\\
&Q_{4.2} = \partial_t - \operatorname{ctg}(v/2 + x/2)(\partial_x + \partial_v);\\
&Q_{4.3} = \partial_t - \operatorname{ctg}(v/2 + t/2)\partial_x + \partial_v \sim Q_{2.6} \bmod G_2;\\
&Q_{4.4} = \partial_t - \frac{x + \operatorname{tg}(v/2)t}{x\operatorname{tg}(v/2) - t}\partial_x - \frac{2}{x - t\operatorname{ctg}(v/2)}\partial_v \sim Q_{3.6} \bmod G_2;\\
&Q_{4.j} = \partial_t + \xi\partial_x - \frac{\chi_t + \chi_x\xi}{1+\chi^2}\partial_v, \quad \text{де} \quad \xi = -\frac{1 + \operatorname{tg}(v/2)\chi}{\operatorname{tg}(v/2) - \chi},\\
&\qquad \chi \in \{-\operatorname{tg}x\operatorname{th}t,\ \operatorname{th}x\operatorname{tg}t\},\ j = 5, 6.
\end{aligned}$$

Отже, отримали оператори, наведені у пункті 4 теореми 6.1 ($Q_{4.5}$, $Q_{4.6}$) та один з операторів, наведених у пункті 2 цієї ж теореми ($Q_{4.2}$).

V–VI. $\quad \xi = -2\mu(t,x)\operatorname{th}\eta \quad$ або $\quad \xi = -2\mu(t,x)\operatorname{cth}\eta,$

де $\eta = \mu(t,x)(v + \varphi(t,x))$. Випадки 5 та 6 доцільно розглядати разом.

Підставляючи вказані форми ξ в рівняння (A.2), отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2\eta\theta_{\eta\eta} - 2\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta\,\theta_\eta + 2\,\theta = 2\varphi_t + 4\mu\varphi_x\operatorname{th}\eta +{}\\
\frac{2\mu_t}{\mu^2}(\eta + \operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta) - \frac{4\mu_x}{\mu}\left(1 + \operatorname{ch}^2\eta - \eta\operatorname{th}\eta\right)
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^2\eta\theta_{\eta\eta} - 2\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta\,\theta_\eta - 2\,\theta = -2\varphi_t - 4\mu\varphi_x\operatorname{cth}\eta +{}\\
\frac{2\mu_t}{\mu^2}(\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta - \eta) - \frac{4\mu_x}{\mu}\left(\operatorname{sh}^2\eta - 1 + \eta\operatorname{cth}\eta\right).
\end{aligned}$$

Їх розв'язки мають відповідно вигляд

$$\theta = \varkappa^i(t,x)|\eta|^{\lambda_i}\psi^i(\eta) + \varphi_t - 2\mu\varphi_x \operatorname{th}\eta + \\ + \frac{2\mu_x}{\mu}\left(1 - \operatorname{ch}^2\eta - \eta\operatorname{th}\eta\right) + \frac{\mu_t}{\mu^2}\left(\eta + \operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta\right)$$

та

$$\theta = \varkappa^i(t,x)|\eta|^{\lambda_i}\psi^i(\eta) + \varphi_t - 2\mu\varphi_x \operatorname{cth}\eta + \\ \frac{2\mu_x}{\mu}\left(1 + \operatorname{sh}^2\eta - \eta\operatorname{cth}\eta\right) + \frac{\mu_t}{\mu^2}\left(\eta - \operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta\right),$$

де $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $\psi^{1,2}(\eta)$ — деякі фіксовані аналітичні функції, $\varkappa^{1,2}(t,x)$ — довільні гладкі функції.

В обох випадках з рівнянь (A.3) та (A.4) випливає, що $\varkappa^i(t,x) = 0$ $(i = 1,2)$, $\mu(t,x) = m$, а функція φ задовольняє систему рівнянь

$$\varphi_{tt} = 4m^2\varphi_{xx}, \quad \varphi_t\varphi_x = \varphi_{xx}.$$

Отже, оператори редукції мають вигляд

$$Q = \partial_t - 2m\operatorname{th} m(v+\varphi)\partial_x + (\varphi_t - 2m\varphi_x \operatorname{th} m(v+\varphi))\partial_v,$$

$$Q = \partial_t - 2m\operatorname{cth} m(v+\varphi)\partial_x + (\varphi_t - 2m\varphi_x \operatorname{cth} m(v+\varphi))\partial_v,$$

де функція φ є розв'язком останньої системи. Використовуючи перетворення з групи G_2, а саме перетворення однорідного розтягу за змінними (t,v), покладемо сталу m рівною $\frac{1}{2}$. Тоді оператори редукції набувають вигляду

$$Q = \partial_t - \operatorname{th}(v/2 + \varphi/2)\partial_x + (\varphi_t - \varphi_x \operatorname{th}(v/2 + \varphi/2))\partial_v, \tag{A.14}$$

$$Q = \partial_t - \operatorname{cth}(v/2 + \varphi/2)\partial_x + (\varphi_t - \varphi_x \operatorname{cth}(v/2 + \varphi/2))\partial_v, \tag{A.15}$$

де функція φ є розв'язком системи

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx}, \quad \varphi_t\varphi_x = \varphi_{xx}. \tag{A.16}$$

Система (A.16) інваріантна відносно зсувів за змінними t, x, φ, перетворення однорідного розтягу за змінними (t, x) та інволютивних перетворень заміни знаку у множинах змінних $\{t,\, x\}$, $\{x,\, \varphi\}$.

Інтегруючи перше рівняння, отримуємо, що $\varphi = \phi^1(y_1) + \phi^2(y_2)$, де $y_1 = x + t$, $y_2 = x - t$. Підставляючи знайдену форму у друге рівняння системи, отримуємо рівняння з відокремленими змінними

$$\phi^1_{y_1y_1} - \left(\phi^1_{y_1}\right)^2 = -\phi^2_{y_2y_2} - \left(\phi^2_{y_2}\right)^2.$$

Обидві частини рівності дорівнюють тій самій сталій, яку позначимо λ. Отже, маємо систему двох рівнянь

$$\phi^1_{y_1y_1} - \left(\phi^1_{y_1}\right)^2 = \lambda, \quad \phi^2_{y_2y_2} + \left(\phi^2_{y_2}\right)^2 = -\lambda. \tag{A.17}$$

Інтегруючи отримані рівняння в залежності від знаку λ, знаходимо наступні нееквівалентні розв'язки

1. $\lambda = 0$: $\quad \phi^1 \in \{0,\, -\ln|y_1|\}$, $\phi^2 \in \{0,\, \ln|y_2|\}$;
2. $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 1 \bmod G_2'$: $\quad \phi^1 = -\ln|\sin y_1|$, $\phi^2 = \ln|\sin y_2|$;
3. $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -1 \bmod G_2'$: $\phi^1 \in \{y_1,\ -\ln|\operatorname{sh} y_1|,\ -\ln\operatorname{ch} y_1\}$,
   $\phi^2 \in \{y_2,\ \ln|\operatorname{sh} y_2|,\ \ln\operatorname{ch} y_2\}$.

Тут G_2' — група інваріантності системи (A.17), що індукована групою G_2. Знаходимо, що функція φ приймає значення з множини

$$\begin{aligned} S_2 = \Bigg\{ & 0, \quad x, \quad t, \quad \ln|x-t|, \quad -\ln|x+t|, \quad \ln\left|\frac{x-t}{x+t}\right|, \\ & \ln\operatorname{sh}|x-t| + x + t, \quad \ln\operatorname{ch}(x-t) + x + t, \\ & -\ln\operatorname{sh}|x+t| + x - t, \quad -\ln\operatorname{ch}(x+t) + x - t, \\ & \ln\left|\frac{\sin(x-t)}{\sin(x+t)}\right|, \quad \ln\left|\frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)}\right|, \quad \ln\left|\frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)}\right|, \\ & \ln\left|\frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)}\right|, \quad \ln\frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Побудуємо оператори редукції (A.14), (A.15) для перших трьох значень функції φ з множини S_2.

$$
\begin{aligned}
&Q_{5.1} = \partial_t - \operatorname{th}(v/2)\partial_x \sim Q_{1.4} \bmod G_2;\\
&Q_{6.1} = \partial_t - \operatorname{cth}(v/2)\partial_x \sim Q_{1.5} \bmod G_2;\\
&Q_{5.2} = \partial_t - \operatorname{th}\left(v/2 + x/2\right)\left(\partial_x + \partial_v\right);\\
&Q_{6.2} = \partial_t - \operatorname{cth}\left(v/2 + x/2\right)\left(\partial_x + \partial_v\right);\\
&Q_{5.3} = \partial_t - \operatorname{th}\left(v/2 + t/2\right)\partial_x + \partial_v \sim Q_{2.7}(\varepsilon = 1) \bmod G_2;\\
&Q_{6.3} = \partial_t - \operatorname{cth}\left(v/2 + t/2\right)\partial_x + \partial_v \sim Q_{2.8}(\varepsilon = 1) \bmod G_2.
\end{aligned}
$$

Виявляється, що підстановка першого та третього елемента множини S_2 дає оператори редукції, які еквівалентні побудованим раніше. Підставивши другий елемент цієї множини, а саме $\varphi = x$, отримуємо два оператори $(Q_{5.2}, Q_{6.2})$, наведені у пункті 2 теореми 6.1.

Враховуючи вигляд решти значень φ з множини S_2, для зручності виразимо гіперболічні функції, що містяться в коефіцієнтах операторів (A.14) та (A.15), через експоненти. Тоді оператори редукції можна записати однією формулою

$$
Q = \partial_t + \xi\partial_x + \frac{\chi_t + \chi_x\xi}{\chi}\partial_v, \quad \text{де} \quad \xi = \frac{1 \mp e^v\chi}{1 \pm e^v\chi} \tag{A.18}
$$

та $\chi = e^\varphi$ пробігає множину значень (модулі тепер можна опустити)

$$
\begin{aligned}
\chi \in \Big\{ & x - t,\ (x+t)^{-1},\ \frac{x-t}{x+t},\ \operatorname{sh}(x-t)e^{x+t},\ \operatorname{ch}(x-t)e^{x+t},\\
& \operatorname{sh}(x+t)^{-1}e^{x-t},\ \operatorname{ch}(x+t)^{-1}e^{x-t},\ \frac{\sin(x-t)}{\sin(x+t)},\ \frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)},\\
& \frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)},\ \frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)},\ \frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Далі наводимо перелік операторів, отриманих після підстановки відповідних значень χ у формулу (A.18).

$$
Q_1 = \partial_t + \frac{1 \mp e^v(x-t)}{1 \pm e^v(x-t)}\partial_x \mp \frac{2}{e^{-v} \pm (x-t)}\partial_v \sim Q_{3.4} \bmod G_2;
$$

$$Q_2 = \partial_t + \frac{x+t\mp e^v}{x+t\pm e^v}\partial_x - \frac{2}{x+t\pm e^v}\partial_v \sim Q_{3.4} \bmod G_2;$$

$$Q_3 = \partial_t + \frac{x+t\mp e^v(x-t)}{x+t\pm e^v(x-t)}\partial_x - \frac{2(1\pm e^v)}{x+t\pm e^v(x-t)}\partial_v,$$

$$Q_{3a} \sim Q_{3.7} \bmod G_2, \quad Q_{3b} \sim Q_{3.8} \bmod G_2;$$

Тут і надалі літери a та b біля номеру оператора показують, верхній чи нижній знак у виразах $\pm$, $\mp$ треба брати.

$$Q_4 = \partial_t + \frac{2\mp e^v(e^{2x}-e^{2t})}{2\pm e^v(e^{2x}-e^{2t})}\partial_x + 2\frac{2\mp e^v(e^{2x}+e^{2t})}{2\pm e^v(e^{2x}-e^{2t})}\partial_v;$$

$$Q_5 = \partial_t + \frac{2\mp e^v(e^{2x}+e^{2t})}{2\pm e^v(e^{2x}+e^{2t})}\partial_x + 2\frac{2\mp e^v(e^{2x}-e^{2t})}{2\pm e^v(e^{2x}+e^{2t})}\partial_v,$$

$$Q_{5b} \sim Q_{4b} \bmod G_2;$$

$$Q_6 = \partial_t + \frac{e^{2t}-e^{-2x}\mp 2e^v}{e^{2t}-e^{-2x}\pm 2e^v}\partial_x - 2\frac{e^{2t}+e^{-2x}\pm 2e^v}{e^{2t}-e^{-2x}\pm 2e^v}\partial_v,$$

$$Q_{6a} \sim Q_{4b} \bmod G_2, \quad Q_{6b} \sim Q_{4a} \bmod G_2;$$

$$Q_7 = \partial_t + \frac{e^{2t}+e^{-2x}\mp 2e^v}{e^{2t}+e^{-2x}\pm 2e^v}\partial_x - 2\frac{e^{2t}-e^{-2x}\pm 2e^v}{e^{2t}+e^{-2x}\pm 2e^v}\partial_v,$$

$$Q_{7a} \sim Q_{5a} \bmod G_2, \quad Q_{7b} \sim Q_{5b} \bmod G_2;$$

$$Q_8 = \partial_t + \frac{\sin(x+t)\mp e^v\sin(x-t)}{\sin(x+t)\pm e^v\sin(x-t)}\partial_x - 2\frac{\cos(x+t)\pm e^v\cos(x-t)}{\sin(x+t)\pm e^v\sin(x-t)}\partial_v,$$

$$Q_8 \sim Q_{4.6} \bmod G_2;$$

$$Q_9 = \partial_t + \frac{\operatorname{sh}(x+t)\mp e^v\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)\pm e^v\operatorname{sh}(x-t)}\partial_x - 2\frac{\operatorname{ch}(x+t)\pm e^v\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)\pm e^v\operatorname{sh}(x-t)}\partial_v;$$

$$Q_{10} = \partial_t + \frac{\operatorname{ch}(x+t)\mp e^v\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)\pm e^v\operatorname{sh}(x-t)}\partial_x - 2\frac{\operatorname{sh}(x+t)\pm e^v\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)\pm e^v\operatorname{sh}(x-t)}\partial_v,$$

$$Q_{10b} \sim Q_{10a} \bmod G_2;$$

$$Q_{11} = \partial_t + \frac{\operatorname{sh}(x+t)\mp e^v\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)\pm e^v\operatorname{ch}(x-t)}\partial_x - 2\frac{\operatorname{ch}(x+t)\pm e^v\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)\pm e^v\operatorname{ch}(x-t)}\partial_v,$$

$$Q_{11} \sim Q_{10} \bmod G_2;$$

$$Q_{12} = \partial_t + \frac{\operatorname{ch}(x+t) \mp e^v \operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t) \pm e^v \operatorname{ch}(x-t)}\partial_x - 2\frac{\operatorname{sh}(x+t) \pm e^v \operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t) \pm e^v \operatorname{ch}(x-t)}\partial_v,$$

$$Q_{12b} \sim Q_{9a} \bmod G_2.$$

Нееквівалентні відносно перетворень з групи G_2 оператори з цього переліку, а саме оператори $Q_4, Q_{5a}, Q_9, Q_{10a}, Q_{12a}$, наведено у пункті 5 теореми 6.1.

Теорему повністю доведено.

A.2. Доведення теореми про класифікацію некласичних симетрій нелінійних рівнянь фільтрації

Опишемо основні етапи доведення теореми 6.2, яке також опущено в розділі 6 через його громіздкість.

Розглянемо клас нелінійних рівнянь фільтрації загального вигляду (6.12),

$$v_t = f(v_x)v_{xx}, \tag{A.19}$$

де $f = f(v_x)$ — довільна ненульова гладка функція змінної $y = v_x$ продовженого простору (“довільний елемент цього класу”). Точне формулювання того, що потрібно виконати, наступне: *знайти всі $G^{\sim}$-нееквівалентні значення довільного елемента f, при яких рівняння* (A.19) *допускають нетривіальні оператори некласичної симетрії з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t.* Перетворення, що складають групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (A.19), наведено у підрозділі 6.5. Їх можна охарактеризувати як композицію афінних перетворень у просторах змінних t та (x, v), зачеплених через перетворення довільного елемента f. Класифікації підлягають тільки оператори з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t, оскільки вичерпний опис операторів некласичної симетрії з нульовим коефіцієнтом при

∂_t вже виконано для загального класу $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь [26, 122, 123]. Під нетривіальними розуміємо оператори некласичної симетрії, що нееквівалентні ліївським операторам.

Рівняння (A.19) зручно переписати в еквівалентній формі

$$v_{xx} = g(v_x)v_t, \tag{A.20}$$

де $g(v_x) = 1/f(v_x)$.

Будь-який оператор некласичної симетрії рівняння (A.20) з ненульовим коефіцієнтом при ∂_t з точністю до звичайного відношення еквівалентності на множині операторів некласичної симетрії цього рівняння має зображення

$$Q = \partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_v,$$

де коефіцієнти ξ та θ залежать від t, x та v. Критерій умовної інваріантності дає таке визначальне рівняння

$$\begin{gathered}\left[\xi\xi_v y^3 + (\xi\xi_x - \xi\theta_v - \xi_v\theta)y^2 + (\theta\theta_v - \xi\theta_x - \xi_x\theta)y + \theta\theta_x\right] g_y + \\ \left[-2\xi\xi_v y^2 + (2\xi_v\theta - \xi_t - 2\xi\xi_x)y + 2\xi_x\theta + \theta_t\right] g + \\ \xi_{vv}y^3 + (2\xi_{vx} - \theta_{vv})y^2 + (\xi_{xx} - 2\theta_{vx})y - \theta_{xx} = 0,\end{gathered} \tag{A.21}$$

де $y = v_x$. Рівняння (A.21) має двоїсту природу: це одночасно і рівняння на ξ та θ, що є коефіцієнтами оператора некласичної симетрії рівняння (A.20), і умова на значення довільного елемента g, для яких такі оператори існують. Для аналізу рівняння (A.21) застосуємо метод, запропонований в [20]. Умови такого типу виникають, як правило, при розв'язання класичних задач групової класифікації у класах диференціальних рівнянь з довільними елементами, що залежать від невеликої кількості змінних продовженого простору (однієї або двох). Наприклад, в [20] за допомогою цього методу виконано групову класифікацію у класі нелінійних рівнянь Шрьодінгера з нелінійністю, що залежить від невідомої функції і функції, спряженої до неї.

Рівняння (A.21) як умова відносно g — це звичайне диференціальне рівняння з поліноміальними коефіцієнтами, де $y = v_x$ відіграє роль незалежної змінної, а t, x і v — роль параметрів:

$$\hat{P}g_y + \hat{Q}g + \hat{R} = 0, \tag{A.22}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{P} &= \xi\xi_v y^3 + (\xi\xi_x - \xi\theta_v - \xi_v\theta)y^2 + (\theta\theta_v - \xi\theta_x - \xi_x\theta)y + \theta\theta_x,\\
\hat{Q} &= -2\xi\xi_v y^2 + (2\xi_v\theta - \xi_t - 2\xi\xi_x)y + 2\xi_x\theta + \theta_t,\\
\hat{R} &= \xi_{vv}y^3 + (2\xi_{vx} - \theta_{vv})y^2 + (\xi_{xx} - 2\theta_{vx})y - \theta_{xx},
\end{aligned}$$

Для зручності введемо позначення для коефіцієнтів поліномів:

$$\hat{P} = \sum_{j=0}^{3} \hat{\alpha}_j y^j, \quad \hat{Q} = -2\hat{\alpha}_3 y^2 + \hat{\beta}_1 y + \hat{\beta}_0, \quad \hat{R} = \sum_{j=0}^{3} \hat{\gamma}_j y^j.$$

де

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_3 = \xi\xi_v, \quad \hat{\alpha}_2 = \xi(\xi_x - \theta_v) - \xi_v\theta,\\
&\hat{\alpha}_1 = -\theta(\xi_x - \theta_v) - \xi\theta_x, \quad \hat{\alpha}_0 = \theta\theta_x,\\
&\hat{\beta}_1 = 2\xi_v\theta - \xi_t - 2\xi\xi_x, \quad \hat{\beta}_0 = 2\xi_x\theta + \theta_t,\\
&\hat{\gamma}_3 = \xi_{vv}, \quad \hat{\gamma}_2 = 2\xi_{vx} - \theta_{vv}, \quad \hat{\gamma}_1 = \xi_{xx} - 2\theta_{vx}, \quad \hat{\gamma}_0 = -\theta_{xx}.
\end{aligned}$$

Кожне рівняння, отримане з (A.22) фіксуванням довільних значень параметрів, має вигляд

$$Pg_y + Qg + R = 0, \tag{A.23}$$

де

$$P = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j y^j, \quad Q = -2\alpha_3 y^2 + \beta_1 y + \beta_0, \quad R = \sum_{j=0}^{3} \gamma_j y^j,$$

α_j, β_1, β_0, γ_j — сталі. Кількість k незалежних рівнянь вигляду (A.23), які задовольняє деяка фіксована функція g, не може перевищувати два.

(Тут під незалежністю рівнянь розуміємо лінійну незалежність наборів їх коефіцієнтів над полем раціональних функцій від змінної $y = v_x$.) Щоб показати це, достатньо розглянути підмножину з трьох таких рівнянь як сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно g і g_y. Також відзначимо, що група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (A.19) індукує групу $G^{\sim}_{\rm det}$ перетворень у просторі (y, g), що діють на рівняннях вигляду (A.22). Група $G^{\sim}_{\rm det}$ породжена зсувами по y та інверсією $\tilde y = 1/y$, $\tilde g = g/y^2$. Проекція групи $G^{\sim}_{\rm det}$ на простір змінної y — це звичайна група дробово-лінійних перетворень на прямій, причому $G^{\sim}_{\rm det}$ ізоморфна цій групі. Отже, рівняння вигляду (A.22) потрібно вивчити з точністю до $G^{\sim}_{\rm det}$-еквівалентності.

Якщо $k = 0$, то з (A.22) випливає, що $\hat P = 0$, $\hat Q = 0$, $\hat R = 0$. Після розщеплення цих рівнянь по змінній y, отримаємо систему

$$\xi_v = 0, \quad \theta_x = 0, \quad \xi_x = \theta_v, \quad \theta_t + 2\theta_v\theta = 0, \quad \xi_t + 2\xi\xi_x = 0.$$

Будь-який розв'язок такої системи відповідає оператору, що еквівалентний деякому оператору з ядра $A^{\rm ker}$ максимальних алгебр інваріантності рівнянь з класу (A.20) (або (A.19)). Зауважимо, що базис алгебри $A^{\rm ker}$ утворюють оператори ∂_t, ∂_x, ∂_v і $2t\partial_t + x\partial_x + v\partial_v$. Групову класифікацію рівнянь з класу (A.19) виконано у роботі [3].

Припустимо, що $k = 1$, тобто є лише одне незалежне рівняння, і нехай (A.23) є цим незалежним рівнянням. Якщо многочлени P, Q, R мають спільний множник ненульового степеня, то на нього можна скоротити. Тому надалі вважаємо, що НСД$(P, Q, R) = 1$. Також з точністю до $G^{\sim}_{\rm det}$-еквівалентності можна вважати, що $\alpha_3 = 0$, але при цьому $P \neq 0$, оскільки інакше $k = 2$. Набір $(\hat P, \hat Q, \hat R)$ повинен бути пропорційним набору (P, Q, R) з деяким коефіцієнтом $\lambda = \lambda(t, x, v, y)$: $(\hat P, \hat Q, \hat R) = \lambda(P, Q, R)$, а тому

$$P\hat Q = Q\hat P, \quad Q\hat R = R\hat Q, \quad R\hat P = P\hat R.$$

Звідси випливає, що P ділить $\hat P$, а тому $\lambda = \hat P/P$ — многочлен по змінній y, причому його степень не перевищує 1, оскільки інакше $k = 2$. Випадки $\deg_y \lambda = 1$ та $\deg_y \lambda = 0$ необхідно розглядати окремо. Перебір усіх можливостей у цих випадках дає у цілому лише три типи нееквівалентних нелінійностей — степеневу, показникову і вигляду $g = \mu(y^2+1)e^{\nu \operatorname{arctg} y}$ — і лише оператори, еквівалентні ліївським.

Припустимо, що $k = 2$. Розв'яжемо систему, утворену двома незалежним рівняннями як систему лінійних рівнянь відносно g і g_y. В результаті отримаємо, що довільний елемент g є раціональною функцією: $g = N/D$, де N і D — многочлени змінної y, $\deg N \leqslant 4$, $\deg D \leqslant 6$, причому можна вважати, що N і D — взаємно прості. Крім того, функція $g = N/D$ повинна задовольняти хоча б одне рівняння вигляду (A.23). Перебираючи можливі варіанти N і D з точністю до $G^{\sim}_{\rm det}$-еквівалентності, отримаємо такі вирази для функції g:

$$
\begin{aligned}
&g = y^4 + n_2 y^2 + n_1 y + n_0, \quad g = y^3 + n_1 y + n_0,\\
&g = y^3 + n_3 y^2 + n_2 y + n_1 + n_0 y^{-1},\\
&g = \frac{y^4 + n_3 y^3 + n_2 y^2 + n_1 y + n_0}{y^2+1}, \quad (n_1, n_2) \neq (n_3, n_0 + 1),\\
&g = \frac{y^2 + n_2 y + n_1}{y^2+1} y, \quad (n_1, n_2) \neq (1, 0), \quad g = \frac{y^2}{y^2+1},\\
&g = 1, \quad g = y, \quad g = y^2 + 1,
\end{aligned}
$$

де n_0, n_1, n_2, n_3 — довільні сталі, що задовольняють вказані обмеження. Підставимо ці вирази у рівняння (A.22), розщепимо за змінною y і проінтегруємо знайдені системи рівнянь на функції ξ і θ. Для всіх вищенаведених випадків значень довільного елемента g крім трьох останніх, оператори, що відповідають розв'язкам цих систем, еквівалентні ліївським операторам рівнянь (A.20) з такими значеннями g.