

Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ВАНЄЄВА Олена Олександрівна

УДК 517.958

Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації

01.01.03 — математична фізика

111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ О.О. Ванєєва

Науковий консультант
доктор фіз.-мат. наук, професор
ПОПОВИЧ Роман Омелянович

Київ — 2020

Анотація

Ванєєва О.О. Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 “математична фізика” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячено розвитку теорії групоїдів еквівалентності класів диференціальних рівнянь, створенню нових методів і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також розв’язанню низки класифікаційних задач групового аналізу, включаючи класифікації лівських і неklasичних операторів редукції та законів збереження. Основну увагу в дисертації зосереджено на застосуванні групоїдів еквівалентності до задач групової класифікації і пошуку точних розв’язків рівнянь математичної фізики, біології та фінансової математики.

У першому розділі дисертації узагальнено і поліпшено теорію групового аналізу диференціальних рівнянь. Використовуючи термінологію групоїдів визначено, зокрема, поняття звичайної, узагальненої, розширеної, розширеної узагальненої та умовної груп еквівалентності, груп точкових симетрій систем з класу, нормалізованого й напівнормалізованого класів. Також введено різні типи еквівалентності допустимих перетворень та запропоновано поняття породжувальної множини таких перетворень, а також бієктивних функторів між групоїдами еквівалентності.

У підрозділі 1.1 наведено основні поняття щодо допустимих перетворень в класах диференціальних рівнянь, які разом із іншими поняттями групового аналізу переформульовано у термінології групоїдів у підрозділі 1.2. Методи класифікації допустимих перетворень та лівських симетрій представлено у підрозділі 1.3. Уперше введено поняття регулярних та сингулярних розширень лівської симетрії в класі диференціальних рівнянь і запропоновано модифікацію алгебраїчного методу для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь.

Другий розділ дисертації присвячено пошуку групоїдів еквівалентності й класифікації лівських і неklasичних операторів редукції в класах $(1+1)$ - і $(2+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку.

У підрозділі 2.1 досліджено трансформаційні властивості загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку $u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx})$, $H_{u_{xx}} \neq 0$, і побудовано ланцюжок його вкладених нормалізованих підкласів. Знайдено групоїди еквівалентності цих підкласів. Особливу увагу приділено важливому для застосувань класу рівнянь типу реакції–дифузії–конвекції зі змінними коефіцієнтами.

Групову класифікацію класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями $f(x)u_t = (g(x)e^{nu_x})_x + h(x)e^{mu}$ виконано в підрозділі 2.2. Групоїд еквівалентності цього класу вичерпно описано через розбиття на нормалізовані підкласи й максимальні умовні групи еквівалентності. Досліджено граничні переходи (контракції) між рівняннями реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями і такими рівняннями з експоненціальними нелінійностями, а також між їх алгебрами лівської симетрії, відповідними анзацами лівської редукції, точними розв’язками та законами збереження.

У підрозділі 2.3 прокласифіковано закони збереження і потенціальні симетрії рівнянь дифузії у пористому середовищі $u_t = ((u^n)_x + f(x)u^m)_x$.

Клас узагальнених рівнянь Фішера з залежними від часу коефіцієнтами, $u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u(1 - u)$, $ab \neq 0$, досліджено з точки зору лівської симетрії в підрозділі 2.4. Знайдено групоїд еквівалентності та виконано вичерпну групову класифікацію цього класу. Точні розв’язки побудовано за допомогою методів еквівалентності й відображень між класами.

Клас рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля, $u_t = a^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3$, $ac \neq 0$, які також називають узагальненими рівняннями Фішера або рівняннями Ньюела–Вайтхеда, досліджено з точки зору лівської й “неklasичної” симетрії в підрозділі 2.5. Виконано класифікації лівських і регулярних неklasичних операторів редукції. Вичерпно описано допусти-

мі перетворення класу. Знайдено критерій звідності рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами до подібних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Побудовано широкі сім'ї точних розв'язків для рівнянь зі змінними коефіцієнтами з цього класу.

У підрозділі 2.6 виконано групові класифікації двох класів узагальнених рівнянь Бюргерса. Результати групової класифікації класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінною в'язкістю $u_t + a(u^n)_x = g(t)u_{xx}$, $ag \neq 0$, $n \geq 2$, застосовано до розв'язання крайової задачі для таких рівнянь, а також для отримання групової класифікації класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням і залежними від часу коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}$, $ng \neq 0$. При цьому використано оригінальний метод еквівалентності.

Підрозділ 2.7 присвячено груповому аналізу класу $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова $u_t = f(t)u_{yy} - g(t)[K(u)]_x$, $fgK_{uu} \neq 0$. Класифікаційні переліки отримано для двох можливих калібрувань довільних елементів. Показано, що групу еквівалентності класу й, зокрема, її тип можна використовувати для вибору оптимального калібрування.

У третьому розділі дисертації групоїди еквівалентності застосовано до розв'язання задач групової класифікації, а також дослідження інтегровності рівнянь типу Кортевега–де Фріза й пов'язаних моделей.

Підрозділ 3.1 присвячено опису групоїда еквівалентності в класі рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами $u_t + f(t, x)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. Доведено, що цей клас ненормалізований, але його можна зобразити як об'єднання шести неперетинних нормалізованих підкласів. Знайдено максимально широкі групи еквівалентності для кожного підкласу, які виявились розширеними узагальненими в п'яти випадках. Запропоновано способи поліпшення трансформаційних властивостей підкласів з використанням калібрувань довільних елементів і методу відображень між класами. Группову класифікацію одного з викоремлених підкласів наведено в якості ілюстративного прикладу.

У підрозділі 3.2 побудовано ієрархію нормалізованих підкласів загального класу $(1 + 1)$ -вимірних еволюційних рівнянь третього порядку, які містять рівняння Кортевега–де Фріза й їхні узагальнення. Це дає повний опис групоїдів еквівалентності в цих класах. Для двох класів рівнянь Кортевега–де Фріза (КдФ) і модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза (мКдФ) зі змінними коефіцієнтами отримано необхідні й достатні умови звідності таких рівнянь до стандартних рівнянь КдФ і мКдФ, відповідно. Також виконано вичерпний груповий аналіз нормалізованого класу рівнянь КдФ зі змінними коефіцієнтами $u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$.

Підрозділ 3.3 присвячено дослідженню узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами $u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0$. Виконано вичерпну групову класифікацію цих рівнянь й проведено відповідні лівські редукції рівнянь Кавахари до звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано певні точні й чисельні розв’язки, зокрема, для рівняння Кавахари, що описує хвилі в морі, вкритому кригою, товщина якої збільшується з часом. У підрозділі 3.4 досліджено рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні (ББМ), які моделюють поширення помірно довгих хвиль з невеликою амплітудою в системах з нелінійними й дисперсійними ефектами. Групову класифікацію рівнянь ББМ з залежними від часу коефіцієнтами $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0$, $gh \neq 0$, здійснено за допомогою методу відображень між класами. Також знайдено закони збереження таких рівнянь.

У підрозділі 3.5 показано, як точкові перетворення можна використовувати для дослідження інтегровності, зокрема, для виокремлення класів інтегровних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Знайдено групоїди еквівалентності декількох вкладених нормалізованих підкласів класу $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь n -го порядку. В рамках запропонованого підходу досліджено клас рівнянь типу КдФ п’ятого порядку зі змінними коефіцієнтами. Виокремлено його підкласи, що є інтегровними й побудовано пари Лакса для них.

Четвертий розділ дисертації присвячено алгебраїчному методу групової класифікації, що зазвичай застосовують до нормалізованих класів диференціальних рівнянь. Групову класифікацію класів рівнянь мКдФ з залежними від часу коефіцієнтами $u_t + u^2 u_x + g(t) u_{xxx} + h(t) u = 0$, $g \neq 0$, проведено в розділі 4.1 стандартним алгебраїчним методом. Потім метод еквівалентності використано для виконання групової класифікації подібних класів рівнянь типу мКдФ.

У підрозділі 4.2 алгебраїчний метод групової класифікації поширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Розширюючи й істотно узагальнюючи попередні результати щодо класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь, вичерпно описано його групоїд еквівалентності завдяки побудові породжувальної множини допустимих перетворень. Задачу повної групової класифікації досліджуваного класу розв'язано з точністю як до звичайної, так і до загальної точкової еквівалентності. Розв'язання включає повну попередню групову класифікацію класу і побудову сингулярних розширень ліївської симетрії, не пов'язаних з підалгебрами алгебри еквівалентності.

Попереднє дослідження ліївських симетрій у класі нелінійних рівнянь Дірака з двома просторовими змінними проведено в розділі 4.3 з використанням алгебраїчної техніки. Наведено список нелінійностей, для яких такі рівняння допускають одновимірне розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності. Побудовано кілька розв'язків таких рівнянь.

У додатку А наведено результати класифікації ліївських й не-класичних (умовних і потенціальних) операторів редукції для класів $(1+1)$ -вимірних рівнянь реакції-дифузії з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної. Підрозділ А.1 присвячено груповій класифікації ненормалізованого класу рівнянь дифузії з нелінійним джерелом $u_t = u_{xx} + h(x)B(u)$, $hB_{uu} \neq 0$. Для отримання вичерпної класифікації використано умовну групу еквівалентності, знайдену в процесі вивчення допустимих перетворень у цьому класі.

У підрозділі А.2 з використанням методу відображень між класами досліджено ліівські й неklasичні оператори редукції квазілінійних рівнянь реакції–дифузії з експоненціальним джерелом і змінними коефіцієнтами $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)e^{mu}$, $fghm \neq 0$. Результати аналогічного дослідження щодо неklasичних операторів редукції для таких рівнянь зі степеневим джерелом $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m$, $fgh \neq 0$, $m \neq 0, 1$, наведено в підрозділі А.3. Знайдені оператори редукції використано для побудови точних розв’язків. У підрозділі А.4 досліджено потенціальні симетрії нелінійних рівнянь дифузії зі змінними коефіцієнтами $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$, $fgn \neq 0$.

У додатку Б наведено результати групового аналізу рівнянь $K(m, n)$, рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса та узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза третього й п’ятого порядків.

У підрозділі В.1 виконано групову класифікацію рівняння Гарднера зі змінними коефіцієнтами $u_t + k(t)uu_x + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. Ми покажемо, що використання навіть звичайної групи еквівалентності дозволяє отримати повний результат. Але використання більш широкої, а саме розширеної узагальненої групи еквівалентності, дає ще більше спрощення, а тому більш перспективне.

Вичерпну групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + h(t)u + g(t)u_{xxx} = 0$, $ng \neq 0$, наведено в підрозділі В.2. Знайдені ліівські симетрії застосовано для редукції задачі з початковими й крайовими умовами для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза до задачі Коші для нелінійного звичайного диференціального рівняння третього порядку.

Підрозділи В.3 і В.4 присвячено вичерпній груповій класифікації узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п’ятого порядку з коефіцієнтами, що залежать від часу, загального вигляду $u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxxxx} = 0$, $n\beta \neq 0$. Випадки $n = 1$ та $n \neq 1$ відрізняються трансформаційними властивостями, тому їх розглянуто окремо в розділах В.3 і В.4, відповідно.

У підрозділі В.5 досліджено властивості лівських симетрій рівнянь $K(m, n)$ вигляду $u_t + g(t)(u^m)_x + f(t)(u^n)_{xxx} = 0$, $fn \neq 0$. Групову класифікацію наведено з точністю до найширших можливих груп еквівалентності: звичайної групи еквівалентності всього класу для загального випадку та умовних груп еквівалентності для окремих значень показників степеня m та n .

Використовуючи метод відображення між класами, в підрозділі В.6 наведено повну групову класифікацію класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + k(t)u_{xx} + h(t)u_{xxt} = 0$, $ghk \neq 0$. Як побічний продукт цього підходу також отримано групову класифікацію пов'язаного класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з джерелом $u_t + uu_x + K(t)u_{xx} + H(t)u_{xxt} = F(t)$, $HK \neq 0$.

Для багатьох рівнянь з розглянутих класів також побудовано точні розв'язки.

Ключові слова: груповий аналіз диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності, лівська симетрія, некласична симетрія, оператор редукції, група еквівалентності, закон збереження.

Abstract

Vaneeva O.O. Equivalence groupoids in group classification problems. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 “Mathematical Physics” (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the development of the theory of equivalence groupoids of classes of differential equations, to the creation of new methods and algorithms of group analysis of differential equations and to solving a wide range of group analysis problems, including classifications of Lie and nonclassical reduction operators and local conservation laws. The main attention is paid to the application of equivalence groupoids to group classification problems, studying integrability and finding solutions of equations of mathematical physics, mathematical biology and financial mathematics.

We firstly describe the basic notions on admissible transformations in classes of differential equations in section 1.1. Then in section 1.2 we relate existing notions and results from group analysis of differential equations to the groupoid-relevant terminology. The procedures for classifying admissible transformations and Lie symmetries for non-normalized classes of differential equations are presented in section 1.3. We develop a new version of the algebraic method of group classification for non-normalized classes of differential equations, which is based on classifying admissible transformations of the class under study up to their equivalence generated by the equivalence group of this class. We revisit the general framework of the classification of admissible transformations via modifying its basic notion of equivalent admissible transformations and introducing the notion of generating sets for equivalence groupoids. Several new techniques for classifying admissible transformations of non-normalized classes are also suggested. More specifically, we show that the method of furcate splitting

and the algebraic method for computing the complete point or contact symmetry groups of single systems of differential equations and the complete equivalence groups of classes of such systems (including discrete symmetry and equivalence transformations) can be extended to admissible transformations. We also use the opportunity of describing admissible transformations via establishing a functor between the equivalence groupoids of classes that are not related by families of point transformations. Revisiting the algebraic method of group classification, we introduce the notions of regular and singular Lie-symmetry extensions for a class of differential equations.

In section 2.1 we study transformation properties of the general class of evolution equations $u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx})$, $H_{u_{xx}} \neq 0$ and construct a chain of its nested normalized subclasses. A special attention is paid to a class of variable coefficient equations of reaction-diffusion-convection type. The obtained equivalence groups can further be used in group analysis of such classes of nonlinear evolution equations.

The group classification of a class of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities $f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu}$ is carried in section 2.2. The equivalence groupoid of this class is exhaustively described via finding the complete family of maximal normalized subclasses and associated conditional equivalence groups. Limit processes between variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities and those with exponential nonlinearities are simultaneously studied with limit processes between objects related to these equations (including Lie symmetries, exact solutions and conservation laws).

The class of generalized Fisher equations with time dependent coefficients, $u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u(1 - u)$, $ab \neq 0$ is studied from Lie symmetry point of view in section 2.3. We find the associated equivalence groupoid and perform the exhaustive group classification of this class. Exact solutions are constructed using the equivalence method and the method of mapping between classes.

A class of the Newell–Whitehead–Segel equations $u_t = a^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3$, $ac \neq 0$, is studied with Lie and “nonclassical” symmetry points of view in Section 2.4. The classifications of Lie reduction operators and of regular nonclassical reduction operators are performed. The set of admissible transformations (the equivalence groupoid) of the class is described exhaustively. The criterion of reducibility of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations to their constant coefficient counterparts is derived. Wide families of exact solutions for variable coefficient equations from the class are constructed.

In section 2.5 we consider two classes of generalized Burgers equations with the Lie symmetry point of view. At first we solve the group classification of a class of generalized Burgers equations with time-dependent viscosity $u_t + a(u^n)_x = g(t)u_{xx}$, $agn \neq 0$, is performed we solve an associated boundary-value problem using the symmetries obtained. Then the group classification of the generalized Burgers equations with linear damping $u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}$, $ng \neq 0$, is derived using the equivalence method suggested in [299].

In section 2.6 the complete group classification a class of (2+1)-dimensional nonlinear Kolmogorov equations $u_t = f(t)u_{yy} - g(t)[K(u)]_x$, $fgK_{uu} \neq 0$, is achieved using a gauging of arbitrary elements (i.e. via reducing the number of variable coefficients) with the application of equivalence transformations. Two possible gaugings are discussed in order to show how equivalence groups serve in making the optimal choice.

The third section of the thesis is devoted to applications of equivalence groupoids to solving group classification problems and the study of integrability of Korteweg–de Vries (KdV) equations and related models.

In section 3.1 we completely describe the equivalence groupoid in a class of variable coefficient KdV equations $u_t + f(t, x)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. As a result, full description of the structure of the equivalence groupoid of the class is given. The class under study is partitioned into

six disjoint normalized subclasses. The widest possible equivalence group for each subclass is found which appears to be generalized extended in five of six cases. Ways for improvement of transformational properties of the subclasses are proposed using gaugings of arbitrary elements and mapping between classes. The group classification of one of the subclasses is carried out as an illustrative example.

In section 3.2 we construct a hierarchy of normalized classes of third order $(1 + 1)$ -dimensional evolution equations, which is related to the Korteweg–de Vries equations and their generalizations. This gives the complete description of equivalence groupoids within such classes. For two wide subclasses of the variable-coefficient KdV and mKdV equations we derive the necessary and sufficient condition of similarity of such equations to the standard KdV and mKdV equations, respectively. We also carry out exhaustive group analysis of a normalized class of variable-coefficient KdV equations $u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$.

Section 3.3 is devoted to the study of variable coefficient generalized Kawahara equations $u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0$. An exhaustive group classification of these equations is carried out. All inequivalent Lie reductions of these equations to ordinary differential equations are performed. We also present some examples on the construction of exact and numerical solutions. In section 3.4 we investigate Benjamin–Bona–Mahony (BBM) equations that is similarly to KdV equation model the unidirectional propagation of moderately long waves with small finite amplitude in systems that manifest nonlinear and dispersive effects. Group classification of BBM equations with time dependent coefficients $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0$, $gh \neq 0$, is carried out using the method of mapping between classes. As by-product of this approach the complete group classification of a class of variable-coefficient BBM equations with forcing term is derived.

In section 3.5 we discuss how point transformations can be used for the study of integrability, in particular, for deriving classes of integrable variable

coefficient differential equations. The procedure of finding the equivalence groupoid is specified for the case of n th-order evolution equations. A class of fifth-order variable-coefficient KdV-like equations is studied within the framework suggested.

The fourth chapter of the thesis is devoted to applications of the algebraic method and its extensions to solving group classification problems.

Group classification of the class of mKdV equations with time-dependent coefficients $u_t + u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u = 0$, $g \neq 0$, is carried out in section 4.1 using the standard algebraic method. Then the equivalence method is utilized to perform the group classification of a related classes of mKdV-like equations. We prove that the class under consideration is normalized. This allows us to formulate the classification results in three ways: up to two kinds of equivalence (which are generated by transformations from the corresponding equivalence groups and all admissible point transformations) and using no equivalence. Some exact solutions of mKdV-like equations are also constructed.

In section 4.2 we extend the algebraic method of group classification to non-normalized classes of differential equations. Enhancing and essentially generalizing previous results on a class on $(1+1)$ -dimensional nonlinear wave and elliptic equations, we exhaustively describe its equivalence groupoid. Then the complete group classification problem for the class under study is achieved up to both usual and general point equivalences. The solution includes the complete preliminary group classification of the class and the construction of singular Lie-symmetry extensions, which are not related to subalgebras of the equivalence algebra. The complete preliminary group classification is based on classifying appropriate subalgebras of the entire infinite-dimensional equivalence algebra whose projections are qualified as maximal extensions of the kernel invariance algebra.

A preliminary study of Lie symmetries in a class of nonlinear Dirac equations in two spatial dimensions is given in section 4.3, using a version

of algebraic technique. A list of nonlinearities for which such equations admit one-dimensional extension of the maximal Lie invariance algebras is presented. Some solutions for the equations under study are constructed.

In appendix A we collect the results on classification of Lie and nonclassical (conditional and potential) reduction operators for classes of (1+1)-dimensional reaction–diffusion equations with spatial dependent coefficients. Section A.1 is devoted to the group classification of diffusion equations with a nonlinear source $u_t = u_{xx} + h(x)B(u)$, $hB_{uu} \neq 0$. To achieve complete classification we use a conditional equivalence group found in the course of the study of admissible point transformation within the class.

In section A.2 Lie and nonclassical reduction operators of variable coefficient semilinear reaction–diffusion equations with exponential source $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)e^{mu}$, $fghm \neq 0$, are investigated using the algorithm involving a mapping between classes of differential equations, which is generated by a family of point transformations. Special attention is paid to check whether reduction operators are inequivalent to Lie symmetry operators. The derived reduction operators are applied to construction of closed-form solutions. The similar study on nonclassical reduction operators of variable coefficient semilinear reaction–diffusion equations with power source $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m$ is performed in section A.3.

In section A.4 we derive potential symmetries of variable coefficient nonlinear diffusion equations of the form $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$, $fgn \neq 0$.

In appendix B the results on group analysis of $K(m, n)$, Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and generalized KdV equations of third and fifth orders are presented.

In section B.1 we perform the group classification of the variable coefficient Gardner equations $u_t + k(t)uu_x + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. We show that even the use of usual equivalence group allows one to get the complete result. At the same time utilizing wider generalized extended equivalence group provides more simplification and therefore is preferable.

The exhaustive group classification of a class of variable coefficient generalized KdV equations $u_t + u^n u_x + h(t)u + g(t)u_{xxx} = 0$, $ng \neq 0$, is presented in section B.2. The found Lie symmetries are applied in order to reduce the initial and boundary value problem for the generalized KdV equations to an initial value problem for nonlinear third-order ODEs.

Sections B.3 and B.4 are devoted to the exhaustive group classification of generalized fKdV equations with time dependent coefficients of the general form $u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxxx} = 0$, $n\beta \neq 0$. The cases $n = 1$ and $n \neq 1$ differ by their transformational properties and therefore treated separately in sections B.3 and B.4, respectively.

In section B.5 we investigate Lie symmetry properties of variable coefficient $K(m, n)$ equations $u_t + g(t)(u^m)_x + f(t)(u^n)_{xxx} = 0$, $fn \neq 0$. Group classification is presented up to widest possible equivalence groups, the usual equivalence group of the whole class for the general case and the conditional equivalence groups for special values of the exponents m and n .

Using the method of mapping between classes we present the complete group classification of BBMB equations $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + k(t)u_{xx} + h(t)u_{xxt} = 0$, $ghk \neq 0$, in section B.6. As a by-product of this approach we also get the group classification of a related class of BBMB equations with a forcing term $u_t + uu_x + K(t)u_{xx} + H(t)u_{xxt} = F(t)$, $HK \neq 0$.

For many equations from the considered classes exact solutions are constructed.

Key words: group analysis of differential equations, equivalence groupoid, Lie symmetry, nonclassical symmetry, reduction operator, equivalence group, conservation law.

Список публікацій

1. Ванеєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Доповіді НАН України* (2019), № 5, С. 3–10.
2. Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A. and Sophocleous C., Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), no. 1, P. 264–275.
3. Ванеєва О.О., Точні розв’язки рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), № 1, С. 44–49.
4. Vaneeva O. and Pošta S., Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), no. 10, 101504, 12 pp.
5. Vaneeva O., Pošta S. and Sophocleous C., Enhanced group classification of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Lett.* **65** (2017), P. 19–25.
6. Vaneeva O., Karadzhov Yu. and Sophocleous C., Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, pp. 349–360, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016.
7. Nesterenko M., Pošta S. and Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016), no. 11, 115203, 26 pp.
8. Vaneeva O., Kuriksha O. and Sophocleous C. Enhanced group classification of Gardner equations with time-dependent coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** (2015), no. 1–3, P. 1243–1251.
9. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of Benjamin–Bona–Mahony equations with time dependent coefficients, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012016, 12 pp.

10. Vaneeva O.O., Sophocleous C. and Leach P.G.L., Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems, *J. Engrg. Math.* **91** (2015), no. 1, P. 165–176.
11. Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Груповий аналіз класу рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, *Доповіди НАН України* (2014), № 10, С. 12–20.
12. Vaneeva O.O., Papanicolaou N.C., Christou M.A. and Sophocleous C., Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** (2014), no. 9, P. 3074–3085.
13. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), no. 4, 045201, 19 pp.
14. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of generalized fifth-order Korteweg–de Vries equations with time-dependent coefficients, *Lie Theory and its Application in Physics*, pp. 311–321, Springer Proc. Math. Stat. **111**, Springer, Tokyo, 2014.
15. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of variable coefficient generalized fifth-order KdV equations, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **11** (2014), no. 7, P. 990–995.
16. Charalambous K., Vaneeva O. and Sophocleous C., Group classification of variable coefficient $K(m, n)$ equations, *J. Geom. Symmetry. Phys.* **33** (2014), P. 79–90.
17. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89** (2014), no. 3, 038003, 9 pp.
18. Pocheketa O.A., Popovych R.O. and Vaneeva O.O., Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping, *Appl. Math. Comput.* **243** (2014), P. 232–244.

19. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient KdV-like equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, pp. 451–459, Springer Proc. Math. Stat. **36**, Springer, Tokyo, 2013.
20. Vaneeva O. and Karadzhov Yu., Lie symmetries of (2+1)-dimensional nonlinear Dirac equations, *Sveske fizičkih nauka. Ser. A* **XXVI** (2013), no. A1, P. 349–359.
21. Vaneeva O., Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** (2012), no. 2, P. 611–618.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), no. 1, P. 225–242.
23. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with an exponential source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, pp. 207–219, University of Cyprus, Nicosia, 2011.
24. Popovych R.O. and Vaneeva O.O., More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. I, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), no. 12, P. 3887–3899.
25. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. and Vaneeva O.O., Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations, *Phys. A* **388** (2009), no. 4, P. 343–356.
26. Vaneeva O., Group classification via mapping between classes: an example of semilinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity, *Sveske fizičkih nauka. Ser. A* **XXII** (2009), no. A1, P. 463–471.
27. Vaneeva O.O., Bihlo A. and Popovych R.O., Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear

- wave and elliptic equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **91** (2020), 105419, 28 pp.
28. Ванеєва О.О., Класифікація диференціальних рівнянь за симетрійними властивостями, *Вісник НАН України* (2017), № 9, С. 33–40.
 29. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, pp. 225–237, University of Cyprus, Nicosia, 2013.
 30. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, pp. 191–209, University of Cyprus, Nicosia, 2009.
 31. Vaneeva O., Equivalence groupoids in the group classification problems, *Program & Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference* (2019, September 24–26, Kyiv), P. 119.
 32. Vaneeva O., Equivalence groupoids, normalization property and group classification problems for evolution equations, *Abstracts of 10th Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics* (2019, September 9–14, Belgrade, Serbia), P. 48–49.
 33. Vaneeva O., Transformation and normalization properties of evolution equations, *Abstracts of XI International Workshop “Lie Theory and its Applications in Physics”* (2019, June 17–23, Varna, Bulgaria), P. 20.
 34. Ванеєва О.О., Нормалізовані класи квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Тези доповідей міжнародної конференції молодих математиків* (2019, 6–8 червня, Київ), Інститут математики, Київ, С. 50.
 35. Ванеєва О.О., Бойко В.М., Жалій О.Ю., Точні розв’язки рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами, *Матеріали міжнародної науково-методичної конференції “Сучасні науко-*

- во-методичні проблеми математики у вищій школі” (21–22 червня 2018 р.), НУХТ, Київ, 2018, С. 14.
36. Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A. and Sophocleous C., Classification of Lie and nonclassical reduction operators for a class of generalized Newell–Whitehead–Segel equations, *Book of Abstracts of the 9th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”* (2018, June 10–14, Larnaca, Cyprus), P. 39.
 37. Ванеєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра*, Т. 3, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 2018, С. 97–98; <http://iapmm.lviv.ua/mpmm2018>
 38. Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Ліївські та неklasичні оператори редукції узагальнених рівнянь Фішера, *Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків* (2017, 7–10 червня, Київ), Інститут математики, Київ, 2017, С. 79.
 39. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *International Workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics”* (2016, December 17–20, Kyiv, Ukraine). Abstract.
<http://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Vaneeva>
 40. Vaneeva O., Karadzhov Yu. and Sophocleous C., Group classification of variable coefficient nonlinear Kolmogorov equations, *Book of Abstracts of the 8th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”* (2016, June 12–17, Larnaca, Cyprus), P. 37.
 41. Vaneeva O., Group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction–diffusion equations, *International Workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics”* (2015, December 27–

- 28, Kyiv, Ukraine). Abstract.
<http://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2015/Vaneeva>
42. Vaneeva O., Equivalence transformations in the study of integrability, *Abstracts of XI International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2015, June 15–21, Varna, Bulgaria), P. 27.
 43. Ванеєва О.О., Сучасні техніки групової класифікації диференціальних рівнянь, *Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015"* (26–28 травня 2015 р., Львів). Тези доповідей.
<http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Vaneeva.pdf>
 44. Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Групова класифікація квазілінійних рівнянь реакції-дифузії, *Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків* (2015, 3–6 червня, Київ), Інститут математики, Київ, 2015, С. 136.
 45. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis and invariant solutions of variable coefficient Kawahara equations, *Book of Abstracts of the 7th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus), P. 30.
 46. Vaneeva O. and Popovych R., Equivalence transformations in the study of integrability, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics"* (2013, December 22–23, Kyiv, Ukraine). Abstract. <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/VaneevaPopovych2013>
 47. Vaneeva O., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, *Abstracts of X International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2013, June 17–23, Varna, Bulgaria), P. 25.
 48. Vaneeva O., Admissible transformations in classes of PDEs, *Book of Abstracts of the XVII Geometrical Seminar* (2012, September 3–8, Zlatibor, Serbia), P. 83–84.

49. Vaneeva O., Point transformations in classes of differential equations, *Book of abstracts of the 6th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems"* (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus), P. 46.
50. Vaneeva O., Applications of equivalence and symmetry point transformations in studying PDEs, *Abstracts of the International Workshop "Young Women in PDEs"* (2012, May 10–12, Bonn, Germany), P. 15–16.
51. Vaneeva O., Group classification of variable-coefficient mKdV equations, *International Workshop "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics"* (2011, December 18–19, Kyiv, Ukraine). Abstract. <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Vaneeva>
52. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient mKdV-like equations, *Abstracts of IX International Workshop "Lie Theory and its Applications in Physics"* (2011, June 20–26, Varna, Bulgaria), P. 24.

Зміст

Перелік умовних позначень	26
Вступ	27
Розділ 1	
Групоїди еквівалентності в класах диференціальних рівнянь	52
1.1. Допустимі перетворення: загальні відомості	54
1.2. Групоїди еквівалентності	56
1.3. Класифікація допустимих перетворень і задачі групової класифікації	60
Розділ 2	
Групоїди еквівалентності в груповому аналізі нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку	71
2.1. Групоїди еквівалентності класів $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку	75
2.2. Розширений груповий аналіз класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями	84
2.3. Потенціальні симетрії одного класу рівнянь дифузії	98
2.4. Групова класифікація рівняння Фішера зі змінними коефіцієнтами	105
2.5. Класифікація ліївських і некласичних симетрій рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами	114
2.6. Ліївські симетрії узагальнених рівнянь Бюргерса й їх застосування до розв’язання крайових задач	124
2.7. Групова класифікація $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова	139

Розділ 3

Групоїди еквівалентності у дослідженні рівнянь типу Кортвега–де Фріза й пов’язаних моделей	152
3.1. Групоїд еквівалентності одного класу рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами	154
3.2. Груповий аналіз рівнянь Кортвега–де Фріза з коефіцієнтами, залежними від часу	168
3.3. Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами	182
3.4. Ліівські симетрії і закони збереження рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами	198
3.5. Застосування групоїдів еквівалентності в дослідженні інтегровності	207

Розділ 4

Алгебраїчний метод групової класифікації і його розширення	222
4.1. Ліівські симетрії та точні розв’язки рівнянь мКдФ зі змінними коефіцієнтами	224
4.2. Алгебраїчний метод групової класифікації для ненормалізованих класів: нелінійні хвильові й еліптичні рівняння	236
4.3. Ліівські симетрії $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака	272

Основні результати та висновки	283

Список використаних джерел	286

Додаток А

Ліівські й некласичні симетрії квазілінійних рівнянь реакції–дифузії	321
A.1. Групова класифікація класу рівнянь реакції–дифузії	322

А.2. Ліївські та некласичні оператори редукції класу напівлінійних рівнянь дифузії з експоненційним джерелом	325
А.3. Некласичні оператори редукції класу квазілінійних рівнянь дифузії зі степеневим джерелом	336
А.4. Потенціальні симетрії класу неоднорідних рівнянь дифузії	345

Додаток Б

Груповий аналіз рівнянь $K(m, n)$, рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса та рівнянь типу Кортевега–де Фріза	349
Б.1. Групова класифікація рівнянь Гарднера з залежними від часу коефіцієнтами	350
Б.2. Застосування ліївських симетрій до крайових задач для узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами	356
Б.3. Груповий аналіз рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами	365
Б.4. Груповий аналіз класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку	372
Б.5. Групова класифікація рівнянь $K(m, n)$ зі змінними коефіцієнтами	379
Б.6. Груповий аналіз класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса	387

Додаток В

Список публікацій і апробація результатів	395

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathcal{L}_\theta$	диференціальне рівняння з набором параметр-функцій $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$ в якості довільного елемента
L_θ	диференціальна функція, що є лівою частиною рівняння $\mathcal{L}_\theta$
$J^{(k)}$	простір струменів порядку k
$\mathcal{L}_{(p)}$	многовид, визначений рівнянням $\mathcal{L}$ у просторі $J^{(p)}$
$\mathcal{G}^\sim$	групоїд еквівалентності класу
$G^\sim$	звичайна група еквівалентності класу
$\hat{G}^\sim$	узагальнена (узагальнена розширена) група еквівалентності класу
$\partial_t, \partial_x, \partial_u$	оператори диференціювання за змінними t, x, u
D_t, D_x	оператори повної похідної за змінними t, x
$\mathfrak{g}_\theta, A^{\max}$	максимальна алгебра ліівської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_\theta$
$\mathfrak{g}^\cap, A^{\ker}$	ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності
$u_{(p)}$	множина всіх частинних похідних функцій u за змінними x порядків не більших за p
$Q^{(2)}$	друге продовження векторного поля Q
$\overset{\text{g}}{\sim}$	відношення калібрувальної еквівалентності

Вступ

Актуальність теми. Поль Дірак, лауреат Нобелівської премії з фізики й один із творців квантової механіки, зазначав: “Фізичний закон має бути математично красивим”. Математичними моделями фізичних законів часто виступають диференціальні рівняння, як звичайні, так і з частинними похідними. Виникає питання, які диференціальні рівняння математично красиві. З давніх часів саме симетрію асоціювали з красою в архітектурі, дизайні, а також вважали важливою рисою особистої привабливості. Після появи фундаментальних робіт С. Лі стало зрозуміло, що симетрію можна розглядати також як міру краси диференціальних рівнянь. Симетрією системи диференціальних рівнянь називають перетворення змінних системи, що відображає кожен розв’язок системи у розв’язок цієї самої системи. До того ж, наявність нетривіальних симетрійних властивостей — це одна з особливостей, які вирізняють диференціальні рівняння, що описують реальні фізичні процеси, з множини всіх диференціальних рівнянь. Основні рівняння математичної фізики, зокрема рівняння Ньютона, Лапласа, Даламбера, Ейлера–Лагранжа, Гамільтона–Якобі, Максвелла, Дірака, Шредінгера, інваріантні відносно багатопараметричних груп неперервних перетворень. Отже, результатом класифікації ліївських або некласичних симетрій (умовних, потенціальних, узагальнених) у певному класі рівнянь є виокремлення модельних рівнянь із нетривіальними симетрійними властивостями, які потенційно цікавіші для застосувань. Задачу класифікації допустимих груп ліївських симетрій називають задачею групової класифікації. Зважаючи на актуальність цієї тематики, груповим аналізом диференціальних рівнянь займаються у багатьох країнах світу, зокрема в Австралії (Ф. Бродбридж, Дж. Гоард), Австрії (М. Кунцинґер), Великобританії (П. Гайдон, О. Михайлов), Італії (К. Нуччі, Е. Пуччі, Дж. Сакоманді, Р. Трачина), Іспанії (М. Бру-

зон, М. Гандаріас), Канаді (С. Анко, А. Біло, Дж. Блюман, П. Вінтерніц, М. Грюндланд, Н. Камран, О. Шевяков), Китаї (Д. Хуанг, Ч. Чу), Німеччині (М. Оберлак), Росії (В.К. Андрєєв, О.В. Боровських, Р.К. Газізов, В.А. Дородніцин, О.В. Капцов, В.В. Пухначьов, В.В. Соколов, І.В. Степанова, С.В. Хабіров), США (Б. Абрагам-Шраунер, Д. Арріго, П. Олвер, В. Міллер), Таїланді (С. Мелешко), Чехії (М. Марван, С. Пошта, А. Сергєєв) і на Кіпрі (П. Ліч, К. Софоклеус). Українська школа групового аналізу, яку започаткував В.І. Фушич, наразі має провідні позиції у світі завдяки фундаментальному внеску в розвиток методів групового аналізу його учнів, зокрема А.Г. Нікітіна, В.М. Бойка, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича, М.І. Серова, В.А. Тичиніна, І.М. Цифри. Так, у роботах Р.О. Поповича і його учнів було введено поняття групоїда еквівалентності, розширених і розширених узагальнених груп еквівалентності, нормалізованого класу диференціальних рівнянь, модулів редукції, а також запропоновано такі методи розв'язання задач групової класифікації, як розбиття класу на нормалізовані підкласи, метод розгалуженого розщеплення й метод відображень між класами диференціальних рівнянь.

Іще одним важливим застосуванням симетрій є те, що вони дають змогу алгоритмічно будувати точні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Такі рівняння моделюють найрізноманітніші процеси реального світу й виникають, зокрема, у математичній фізиці, математичній біології, фінансовій математиці. Вивчення нелінійних моделей є складною задачею, оскільки загальної теорії інтегрування для відповідних рівнянь не існує. Більшість випадків знаходження точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь пов'язані зі вдалим добором заміни змінних у рівнянні. При цьому невироджені точкові перетворення, які відповідають ліївським симетріям, є найуживанішими. Методи, що базуються на використанні невироджених точкових перетворень, — одні з найефективніших аналітичних інструментів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Моделльні рівняння, що зустрічаються у застосуваннях, часто містять сталі або функціональні параметри, а отже, складають класи рівнянь. Важливою задачею є дослідження їхніх трансформаційних властивостей, а саме — опис невироджених точкових перетворень між рівняннями (системами рівнянь) з класу. Якщо дві системи диференціальних рівнянь пов'язані таким перетворенням, то їх називають еквівалентними або (у термінології Л.В. Овсянникова) подібними. Відповідно еквівалентні між собою простори локальних законів збереження, алгебри симетрій різних типів і сім'ї інваріантних розв'язків таких систем. Зокрема, метод еквівалентності дає змогу побудувати розв'язки системи із відомих розв'язків еквівалентної системи. Систематичне дослідження трансформаційних властивостей класів систем диференціальних рівнянь ініціювали Дж. Кінгстон і К. Софоклеус 1991 року. Вони назвали перетворення, що пов'язують рівняння у класі, формозберігаючими, оскільки такі перетворення зберігають структуру рівнянь класу і змінюють лише вигляд довільних елементів. 1992 року Ж.-П. Ґазо і П. Вінтерніц також почали досліджувати такі перетворення, назвавши їх дозволеними. Аналогічні перетворення у класах диференціальних рівнянь досліджувались, зокрема, у роботах П. Басараба-Горвата, Б.М. Ваґанана, Л. Ґаґнона, Ф. Ґунґора, С. Оземіра, М.І. Серова й Р.М. Черніги.

Розвинену теорію перетворень у класах диференціальних рівнянь сформульовано в роботах Р.О. Поповича та його співавторів, де запропоновано термін “допустимі перетворення”. Допустиме перетворення у класі диференціальних рівнянь — це впорядкована трійка, що складається з двох рівнянь цього класу й невиродженого точкового перетворення, що відображає перше з цих рівнянь у друге. Множина допустимих перетворень має структуру групоїда відносно операції композиції перетворень, а тому її називають групоїдом еквівалентності. Клас диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності якого породжено групою еквівалентності класу, називають нормалізованим. Використання допустимих перетво-

рень дає можливість суттєво спростити класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь, зокрема, класифікації різних типів симетрій, побудову локальних законів збереження і точних розв'язків, а також дослідження інтегровності. Також важливо, що нормалізовані класи мають простіші трансформаційні властивості й зручніші для дослідження. Отже, важливими задачами групового аналізу, крім безпосереднього розв'язання задач групової класифікації, пошуку різних типів симетрій і точних розв'язків, є також побудова групоїдів еквівалентності для класів рівнянь, цікавих для застосувань, і дослідження властивості нормалізованості таких класів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем “Симетрія та інтегровність нелінійних моделей” (номер держреєстрації 0106U000436), “Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь” (номер держреєстрації 0110U008615), “Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики” (номер держреєстрації 0116U003059), “Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства” (номер держреєстрації 0117U002119), “Класифікація симетрій та точні розв'язки нелінійних моделей фізичних та біологічних процесів” (номер держреєстрації 0118U003803), “Симетрія та інтегровність рівнянь сучасної математичної фізики” (номер держреєстрації 0120U100173).

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи — розвиток теорії групоїдів еквівалентності класів диференціальних рівнянь, створення нових методів і алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також розв'язання низки класифікаційних задач групового аналізу, зокрема задач класифікації ліівських і неklasичних операторів редукції, законів збереження. Основну увагу в дисертації зосереджено на застосуванні групоїдів еквівалентності до дослідження інтегровності,

класифікації симетрій і пошуку точних розв'язків у класах рівнянь математичної фізики, біології й фінансової математики.

Об'єктом дослідження є $(1+1)$ -вимірні нелінійні еволюційні рівняння і спеціальні класи таких рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема, рівняння типу реакції–дифузії, Фішера, Бюргерса, Кортевега–де Фріза, Кавахари, а також $(1+1)$ -вимірні нелінійні хвильові й еліптичні рівняння, рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні й Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса, $(2+1)$ -вимірні рівняння Колмогорова й Дірака.

Предметом дослідження є групи і групоїди еквівалентності класів диференціальних рівнянь, групова класифікація, ліївські, неklasичні й потенціальні оператори редукції, закони збереження та розв'язки диференціальних рівнянь, а також контракції рівнянь, алгебр ліївської інваріантності, розв'язків і законів збереження.

Методи дослідження. Інфінітезимальний метод Лі–Овсянникова розв'язання задачі групової класифікації використано разом із техніками калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності, розгалуженого розщеплення, розбиття класів на нормалізовані підкласи, а також доповнено методом граничних переходів (контракцій). Алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Для класифікації допустимих перетворень використано узагальнення методу розгалуженого розщеплення й алгебраїчного методу Гайдона, а також оригінальні методи встановлення ізоморфізмів між групоїдами еквівалентності й побудови породжувальної множини допустимих перетворень. Для пошуку операторів редукції використано метод перетворень між класами диференціальних рівнянь. Точні розв'язки знайдено за допомогою методів ліївської й неklasичної редукції, а також методу еквівалентності.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Досліджено допустимі перетворення загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу, для кожного з яких описано групоїд еквівалентності.
2. Проведено розширений груповий аналіз кількох класів рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. Граничні переходи (конtrakції) застосовано для отримання групової класифікації, знаходження точних розв’язків і класифікації законів збереження класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями.
3. Для двох різних калібрувань довільних елементів виконано групову класифікацію $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова зі змінними коефіцієнтами. Показано, що групу еквівалентності й, зокрема, її тип можна використовувати як критерій оптимального калібрування.
4. Знайдено групоїди еквівалентності та виконано груповий аналіз низки класів узагальнених рівнянь Бюргерса, Кортевега–де Фріза третього і п’ятого порядків, Кавахари й $K(m, n)$. Розв’язано кілька граничних задач для таких рівнянь. За допомогою оригінального алгоритму всі випадки розширення лівської симетрії у згаданих класах відновлено зі списків, побудованих з точністю до відповідних груп еквівалентності.
5. Групоїд еквівалентності класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п’ятого порядку зі змінними коефіцієнтами застосовано до дослідження інтегровності цих рівнянь. Завдяки цьому знайдено всі інтегровні випадки, для яких побудовано пари Лакса.
6. З використанням методу перетворень між класами диференціальних рівнянь прокласифіковано лівські симетрії рівнянь Гарднера, Бенджаміна–Бона–Махоні та Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі змінними коефіцієнтами, а також знайдено некласичні оператори редукції рівнянь реакції–дифузії.

7. Побудовано локальні закони збереження для кількох класів рівнянь реакції–дифузії й рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами.
8. Метод розгалуженого розщеплення й алгебраїчний метод Гайдона узагальнено для класифікації допустимих перетворень. Розвинуто такі нові техніки пошуку груподів еквівалентності, як встановлення ізоморфізмів між цими групами й побудова породжувальної множини допустимих перетворень. Введено поняття регулярних і сингулярних розширень ліівської симетрії, за допомогою яких алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь.
9. Запропоновані поняття і методи застосовано для вичерпного опису групода еквівалентності й виконання групової класифікації ненормалізованого класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь.
10. Досліджено ліівські симетрії $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака. Зокрема, знайдено всі такі рівняння, що допускають чотиривимірні алгебри ліівської інваріантності.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані методи можна використати в подальших дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь, зокрема, моделей математичної фізики, математичної біології, фінансової математики.

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що виносяться на захист, дисертантка одержала самостійно. У роботах, які опубліковано разом із іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У статтях [2,4–6,8–11,13–17,20,23,29] співавтори дисертантки незалежно виконували обрахунки або перевіряли їх, а також брали участь у їхньому обговоренні. Постановка задач у цих роботах, вибір методів для

їхнього розв'язання й доведення результатів належать дисертантці. У роботах [2,5,6,10,16,17,29] із цього переліку К. Софоклеусу також належить початковий вибір класів для дослідження.

У статті [7] постановка задачі, загальний план дослідження й доведення основних результатів належить М.О. Нестеренко, дисертантка показала, що певні рівняння типу Бюргерса, Кортевега–де Фріза третього й п'ятого порядків, Кавахари та реакції–дифузії є інваріантними відносно алгебр Галілея чи їхніх деформацій, а також перевірила основні результати щодо реалізацій, С. Пошта брав участь у обчисленні реалізацій і обговоренні результатів.

У роботі [12] К. Софоклеусу належить постановка задачі, Н. Папаніколау й М. Крісто — чисельне розв'язання граничної задачі й побудова графіків отриманих розв'язків, дисертантці — доведення всіх результатів роботи щодо допустимих перетворень, групової класифікації, побудови точних розв'язків і редукції граничної задачі.

У статтях [22,24,27,30] усі основні результати і їхнє доведення дисертантка отримала самотійно, Р.О. Поповичу належить постановка задачі й загальний план дослідження. К. Софоклеус у роботах [22,30] та А. Біло в роботі [27] брали участь у обговоренні результатів і перевірці доведень.

У статті [18] дисертантці належить початковий вибір класу узагальнених рівнянь Бюргерса для дослідження, а також побудова графіків розв'язків. Усі обчислення проводилися дисертанткою й О.А. Почекетою незалежно з метою їх подальшого порівняння та перевірки. Р.О. Поповичу належить загальна постановка задачі й оцінка отриманих результатів.

У роботі [25] дисертантка виконала основний обсяг обчислень щодо групової класифікації, обчислення законів збереження і потенціальних симетрій із метою перевірки й порівняння результатів. К. Софоклеусу в цій роботі належить вибір класів для дослідження і перевірка результатів, Р.О. Поповичу — постановка задачі й розробка методів досліджень, а також побудова ієрархії потенціальних законів збереження і потенціаль-

них симетрій лінійних і лінеаризованих рівнянь із досліджуваних класів, пошук додаткових потенціальних перетворень еквівалентності між випадками класифікації.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародних конференціях “Bogolyubov Kyiv Conference: Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Київ, 2019), “Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics” (Белград, Сербія, 2012, 2019), “XVII Geometrical Seminar” (Златибор, Сербія, 2012), “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2018), “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2018); міжнародних симпозіумах “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Протарас, Кіпр, 2012; Ларнака, Кіпр, 2014, 2016, 2018), “Lie Theory and Its Applications in Physics” (Варна, Болгарія, 2011, 2013, 2015, 2019), “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (Дубна, Росія, 2013), “The Sixth Petrov International Symposium on High Energy Physics, Cosmology and Gravity” (Київ, 2013), “Young Women in PDEs” (Бонн, Німеччина, 2012); міжнародних семінарах “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2011, 2013, 2015, 2016, 2018), а також на міжнародних конференціях молодих математиків (Київ, 2015, 2017, 2019) і конференції молодих учених “Підстригачівські читання” (Львів, 2015).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися й обговорювалися на науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 2008–2020), Вченій раді Інституту математики НАН України (2015, 2017, 2018). Також результати дисертації були предметом доповідей на засіданні Відділення математики НАН України (2015) і засіданні Президії НАН України (2017), науковому семінарі кафедри математики і статистики університету Саскачевана (Саскатун, Канада, 2010), науковому семінарі кафедри математики Чеського

технічного університету у Празі (Прага, Чехія, 2013), науковому семінарі кафедри математики і статистики університету Кіпру (Нікосія, Кіпр, 2013).

Публікації. Результати дисертації висвітлено у 52 наукових публікаціях. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України [1,3,11] і наукових періодичних виданнях інших держав [2,4–10,12–26], що проіндексовані у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science і налічують, відповідно, 249 і 229 цитувань в цих базах. Результати дисертації додатково відображено в публікаціях [27–30], а також у тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [31–52]. Кожна зі статей [2,4,5,7,8,10,12,13,17,18,21,22,24,25] як опублікована у виданні з квартиля Q1 або Q2 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank прирівнюється до трьох публікацій, а кожна з робіт [9,15,16] як опублікована у виданні з квартиля Q3 — до двох публікацій (п. 2 Наказу № 1220 МОН України від 23.09.2019), отже, 26 статей, у яких відображено основні результати дисертації, зараховуються як 57 фахових публікацій. Роботи [1–8,10–14,16,18,19,21–25,29,30] проіндексовано у базах Zentrablatt Math або MathSciNet. Публікації [1,3,19,21,26,28] одноосібні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 344 найменувань, і трьох додатків. Повний обсяг дисертації становить 399 сторінок, із них список використаних джерел міститься на 35 сторінках, а додатки — на 80 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих у дисертації проблем, сформульовано задачі дослідження й коротко викладено результати роботи. Основну частину роботи складають чотири розділи. На початку кожного розділу стисло описано результати, що містяться в ньому.

У **першому** розділі дисертації наведено основні означення й необхідні теоретичні відомості щодо груп і групоїдів еквівалентності й пов'язаних понять групового аналізу диференціальних рівнянь. Зауважимо, що більшість із цих понять описано в термінології групоїдів уперше.

Розгляньмо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{L}_{\theta} \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ систем диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_{\theta}$ з залежними змінними $u = (u^1, \dots, u^m)$ і незалежними змінними $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$ — набір довільних елементів класу. Тут $\mathcal{L}_{\theta}$ — система диференціальних рівнянь виду $L(x, u_{(r)}, \theta(x, u_{(r)})) = 0$ із фіксованим набором L диференціальних функцій від u порядку r , параметризованих θ , значення яких пробігають множину $\mathcal{S}$, $u_{(r)}$ — набір похідних залежних змінних u за незалежними змінними x аж до порядку r (разом із u як похідними нульового порядку). Множину $\mathcal{S}$ складають розв'язки допоміжної системи диференціальних рівнянь $S(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}) = 0$ і нерівностей $\Sigma(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}) \neq 0$ на θ , де змінні $(x, u_{(r)})$ з простору струменів порядку r є незалежними змінними, а набір $\theta_{(q)}$ утворено похідними θ за змінними $(x, u_{(r)})$ аж до порядку q . З точністю до калібрувальної еквівалентності систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, яка зазвичай є тривіальною, відображення $\theta \mapsto \mathcal{L}_{\theta}$ з $\mathcal{S}$ у $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ бієктивне.

Групоїдом еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають малу категорію з множиною об'єктів $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ або $\mathcal{S}$ і множиною стрілок, утвореною (локальними) дифеоморфізмами у просторі з координатами (x, u) між парами систем із $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$:

$$\mathcal{G}^{\sim} = \{\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta}) \mid \theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}, \Phi \in \text{Diff}_{(x,u)}^{\text{loc}} : \Phi_* \mathcal{L}_{\theta} = \mathcal{L}_{\tilde{\theta}}\}.$$

Елементи групоїду еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ називають *допустимими (точковими) перетвореннями* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Підняття довільного елементу θ перетворенням Φ визначено як $\Phi_* \theta = \tilde{\theta}$, якщо $\Phi_* \mathcal{L}_{\theta} = \mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$.

З використанням термінології групоїдів визначено, зокрема, поняття звичайної, узагальненої, розширеної, розширеної узагальненої й умовної груп еквівалентності, груп точкових симетрій систем із класу, нормалізованого і напівнормалізованого класу. Також введено різні типи екви-

валентності допустимих перетворень та запропоновано поняття породжувальної множини таких перетворень. Обговорено методи пошуку і класифікації допустимих перетворень, а саме прямий метод, метод розгалуженого розщеплення, метод перетворень між класами диференціальних рівнянь, розбиття класу на підкласи з кращими трансформаційними властивостями, встановлення бієктивних функторів між групоїдами еквівалентності.

Однією з основних задач групового аналізу диференціальних рівнянь є *задача групової класифікації*. Така задача для класу $\mathcal{L}|_S$ із точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (або $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності) полягає у знаходженні ядра максимальних алгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^\cap$ і вичерпного списку $G^\sim$ -нееквівалентних (або $\mathcal{G}^\sim$ -нееквівалентних) значень θ разом із максимальними алгебрами ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$, для яких $\mathfrak{g}_\theta \neq \mathfrak{g}^\cap$.

Стандартний алгебраїчний метод групової класифікації дає повний розв'язок такої задачі лише для нормалізованих класів диференціальних рівнянь, тобто для класів, групоїди еквівалентності яких породжено перетвореннями з відповідних груп еквівалентності. Якщо клас $\mathcal{L}|_S$ не нормалізований, то певні випадки розширень ліївської симетрії в цьому класі не пов'язані з підалгебрами алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ цього класу.

Введено такі поняття (ϖ позначає проекцію простору з координатами $(x, u_{(r)}, \theta)$ на простір із координатами (x, u)):

Означення 1.4. Максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ системи $\mathcal{L}_\theta$ із класу $\mathcal{L}|_S$ називають *регулярною* в цьому класі, якщо існує така підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, що $\mathfrak{g}_\theta = \varpi_*\mathfrak{s}$, і *сингулярною* у класі $\mathcal{L}|_S$ в іншому разі.

Множину $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_\gamma \in \mathcal{G}^\sim \mid \gamma \in \Gamma\}$, де Γ — множина індексів, називають *породжувальною множиною допустимих перетворень* у класі $\mathcal{L}|_S$ із точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, якщо будь-яке допустиме перетворення класу можна описати як композицію скінченної кількості елементів множини $\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}} \cup \mathcal{G}^{G^\sim}$, де $\hat{\mathcal{B}} := \{\mathcal{T}^{-1} \mid \mathcal{T} \in \mathcal{B}\}$ — множина обернених

перетворень. Мінімальна множина $\mathcal{B}$ — підмножина множини $\mathcal{G}^\sim \setminus \mathcal{G}^{G^\sim}$.

З використанням цих понять алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь.

Другий розділ дисертації присвячено групоїдам еквівалентності $(1+1)$ - і $(2+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку й їхньому застосуванню до задач групової класифікації. Зокрема, досліджено трансформаційні властивості загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу:

$$\begin{aligned} u_t &= G(t, x, u, u_x)u_{xx} + H(t, x, u, u_x), \\ u_t &= G(t, x, u)u_{xx} + H(t, x, u, u_x), \\ u_t &= G(t, x, u)u_{xx} + \sum_{k=0}^n F^k(t, x, u)u_x^k, \quad n \geq 2, \\ u_t &= G(t, x, u)u_{xx} + F^1(t, x, u)u_x + F^0(t, x, u), \\ S(t, x)u_t &= (G(t, x, u)u_x)_x + K(t, x, u)u_x + P(t, x, u), \end{aligned} \tag{1.1}$$

де функції $G, H, S, K, P, F^k, k = 0, 1, 2, \dots$, — довільні гладкі функції своїх аргументів, $GS \neq 0$. Для всіх таких підкласів знайдено групи еквівалентності, перетворення з яких породжують відповідні групоїди еквівалентності. Зокрема, доведено таку теорему.

Теорема 2.10. *Групу еквівалентності класу (1.1) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U^1(t, x)u + U^0(t, x), \\ \tilde{S} &= Z(t, x, S), \quad \tilde{G} = \frac{X_x^2 G}{T_t S} Z, \\ \tilde{K} &= \frac{X_x Z}{T_t S} \left[K - \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2 \frac{U_x^1}{U^1} \right) G - 2 \mathcal{U} \frac{G_u}{U^1} - \frac{X_t}{X_x} S \right] - G \frac{X_x}{T_t} \left(\frac{Z}{S} \right)_x, \\ \tilde{P} &= \frac{Z}{T_t S} \left[U^1 P + \frac{\mathcal{U}^2}{U^1} G_u - \mathcal{U} (K + G_x) + (U_t^1 u + U_t^0) S \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{U_x^1}{U^1} \mathcal{U} - U_{xx}^1 u - U_{xx}^0 \right) G \right], \end{aligned}$$

де $\mathcal{U} = U_x^1 u + U_x^0$, T, X, U^1, U^0, Z — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $T_t X_x U^1 Z_S \neq 0$. Клас (1.1) нормалізований.

Підрозділ 2.2 присвячено груповій класифікації рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями й коефіцієнтами, що залежать від просторової змінної, а саме класу

$$f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu}, \quad (2.2)$$

де f, g, h — довільні гладкі функції змінної x , n і m — довільні сталі, причому $fgn \neq 0$. Доведено, що цей клас не є нормалізованим, вичерпно описано його групоїд еквівалентності у термінах максимальних умовних груп еквівалентності нормалізованих підкласів цього класу.

Теорема 2.16. *Клас (2.2) можна зобразити як об'єднання його трьох нормалізованих підкласів, виокремлених умовами:*

1. $(h \neq 0, m \neq 0, n)$ або $(m = 0, (h/f)_x \neq 0)$;
2. $m = 0, (h/f)_x = 0$; 3. $m = n$.

Другий і третій підкласи мають непорожній перетин — нормалізований підклас класу (2.2) з $h = 0$.

Також прокласифіковано лівські симетрії рівнянь із цього класу з калібруванням $g = 1$. Розмірність максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (2.2) не перевищує чотирьох. Доведено твердження: якщо рівняння з класу (2.2) інваріантне відносно чотиривимірної алгебри Лі, то воно точково-еквівалентне рівнянню $u_t = (e^u u_x)_x$ із цього класу. Якщо рівняння з класу (2.2) з $m \neq 0, n$ допускає тривимірну алгебру лівської інваріантності, то перетвореннями еквівалентності його можна звести до рівняння $u_t = (e^u u_x)_x \pm e^{mu}$.

Для знаходження лівських редукцій, точних розв'язків, законів збереження рівнянь з класу (2.2) використано метод граничних переходів (контракцій). Показано, що цим методом також можна отримати повну групову класифікацію, використавши відомі результати для рівнянь

зі степеневими нелінійностями виду $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m$, де $fg \neq 0$ і $(n, mh) \neq (0, 0)$.

У другому розділі також прокласифіковано локальні закони збереження і потенціальні симетрії узагальнених рівнянь дифузії

$$u_t = ((u^n)_x + f(x)u^m)_x, \quad n \neq 0, \quad (2.3)$$

з точністю до перетворень з групи еквівалентності $G^\sim$ таких рівнянь.

Теорема 2.28. *Будь-яке рівняння (2.40) допускає закон збереження $D_t F + D_x G = 0$, де*

$$1. F = u, \quad G = -nu^{n-1}u_x - fu^m. \quad (2.4)$$

Повний перелік $G^\sim$ -нееквівалентних рівнянь (2.40), що мають додаткові (лінійно незалежні з (4)) закони збереження, вичерпують такі випадки:

$$2. m = n \neq 1: F = u \int \Phi dx, \quad G = - \int \Phi dx (nu^{n-1}u_x + fu^n) + \Phi u^n,$$

$$3. n \neq 1, m = 0: F = xu, \quad G = -x(nu^{n-1}u_x + f) + u^n + \int f dx,$$

$$4. n \neq 1, m = 1, f = 1: F = (t+x)u, \quad G = -(t+x)(nu^{n-1}u_x + u) + u^n,$$

$$5. n \neq 1, m = 1, f = \varepsilon x: F = e^{\varepsilon t}xu, \quad G = -e^{\varepsilon t}x(nu^{n-1}u_x + xu) + e^{\varepsilon t}u^n,$$

$$6. n = 1, m = 0: F = \alpha u, \quad G = -\alpha(u_x + f) + \alpha_x u + \int \alpha_x f dx,$$

$$7. n = 1, m = 1: F = \beta u, \quad G = -\beta(u_x + fu) + \beta_x u,$$

де $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$, $\Phi = e^{\int f dx}$, $\alpha = \alpha(t, x)$, $\beta = \beta(t, x)$ задовольняють лінійні рівняння $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$ і $\beta_t + \beta_{xx} - f\beta_x = 0$.

Знайдені закони збереження дали змогу вичерпно прокласифікувати потенціальні симетрії рівнянь (2.40).

Також у другому розділі досліджено симетрійні властивості класів рівнянь Фішера $u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u(1 - u)$, $ab \neq 0$, Ньюела–Вайтхеда–Сегеля $u_t = a^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3$, $ac \neq 0$, й узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}$, $ng \neq 0$, з коефіцієнтами, що залежать від часу. Для кожного з цих класів знайдено групоїди еквівалентності, виконано вичерпні групові класифікації, побудовано сім'ї точних

розв'язків, а також знайдено критерії звідності таких рівнянь до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з тих самих класів. Класи рівнянь Фішера і Ньюела–Вайтхеда–Сегеля нормалізовані, тимчасом як клас рівнянь Бюргерса ненормалізований, але його можна розбити на неперетинні нормалізовані підкласи. У класі рівнянь Бюргерса виокремлено підклас лінеаризованих рівнянь. Для класу рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля вичерпно прокласифіковано не тільки ліївські, а й некласичні регулярні оператори редукції, що є нетривіальною задачею, оскільки визначальні рівняння на коефіцієнти операторів у цьому випадку є нелінійними. Список нееквівалентних рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля і відповідних операторів редукції такий:

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} - e^{\pm t} u^3: & \partial_t + \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{\pm \frac{1}{2}t} u \partial_x - \frac{1}{2} (3e^{\pm t} u^2 \mp \frac{1}{2}) u \partial_u; \\
 u_t &= u_{xx} - \varepsilon e^t u^3: & \partial_t - \frac{3}{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} x \right) \partial_x - \frac{3}{4} \left(\operatorname{th}^2 \left(\frac{1}{2} x \right) - \frac{1}{3} \right) u \partial_u, \\
 & & \partial_t - \frac{3}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} x \right) \partial_x - \frac{3}{4} \left(\operatorname{cth}^2 \left(\frac{1}{2} x \right) - \frac{1}{3} \right) u \partial_u; \\
 u_t &= u_{xx} - \varepsilon e^{-t} u^3: & \partial_t + \frac{3}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} x \right) \partial_x - \frac{3}{4} \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2} x \right) + \frac{1}{3} \right) u \partial_u; \\
 u_t &= u_{xx} - \varepsilon u^3: & \partial_t - \frac{3}{x} \partial_x - \frac{3}{x^2} u \partial_u.
 \end{aligned}$$

В останньому підрозділі другого розділу вичерпну групову класифікацію проведено для класу нелінійних рівнянь Колмогорова зі змінними коефіцієнтами:

$$u_t = f(t) u_{yy} - g(t) [K(u)]_x, \quad fgK_{uu} \neq 0. \quad (2.5)$$

Наведено класифікаційні переліки для двох можливих калібрувань довільних елементів $f = 1$ і $g = 1$. Калібрування $g = 1$ виявилось оптимальним, суттєво спростивши як процес розв'язання задачі групової класифікації, так і отриманий перелік розширень ліївської симетрії. Показано, що підклас класу (2.5), виокремлений умовою $g = 1$, допускає звичайну групу еквівалентності, а підклас, виокремлений умовою $f = 1$, — розширену узагальнену. Отже, групу еквівалентності й, зокрема, її тип можна використовувати як критерій оптимального калібрування. Це підтверджено

й іншими прикладами, наведеними у дисертації, зокрема, класів рівнянь Фішера й Кавахари зі змінними коефіцієнтами.

Третій розділ дисертації присвячено застосуванню групоїдів еквівалентності в груповому аналізі й дослідженні інтегровності рівнянь типу Кортевега–де Фріза та таких пов’язаних із ними моделей, як рівняння Кавахари і рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні.

Вичерпно описано групоїд еквівалентності ненормалізованого класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}: \quad u_t + f(t, x)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0, \quad fg \neq 0. \quad (2.6)$$

Виконано розбиття класу (2.6) на шість нормалізованих підкласів:

$$\mathcal{L}_1: \quad u_t + f(t)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0,$$

$$\mathcal{L}_2: \quad u_t + p(t)e^{q(t)x}uu_x + \frac{s(t) - \dot{q}(t)x}{q(t)^3}u_{xxx} = 0,$$

$$\mathcal{L}_3: \quad u_t + p(t)(x + q(t))^{r(t)}uu_x + \frac{(x + q(t))^3}{r(t)(r(t)^2 - 1)} \left(s(t) - \dot{r}(t) \ln(x + q(t)) + \frac{(1 - r(t))\dot{q}(t)}{x + q(t)} \right) u_{xxx} = 0,$$

де $r \neq 0, \pm 1$,

$$\mathcal{L}_4: \quad u_t + (p(t)x + q(t))uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0,$$

$$\mathcal{L}_5: \quad u_t + \frac{k(t)}{x + c}uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0,$$

і клас $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$, що є доповненням об’єднання підкласів $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, 5$, у класі $\mathcal{L}$.

Теорема 3.7. *Класи $\mathcal{L}_1$ – $\mathcal{L}_5$ нормалізовані у розширеному узагальненому сенсі, групоїди еквівалентності цих класів породжено перетвореннями з відповідних розширених узагальнених груп еквівалентності $\hat{G}_i^\sim$, $i = 1, \dots, 5$.*

Теорема 3.8. *Підклас $\mathcal{L}_0$ нормалізований у звичайному сенсі. Його група еквівалентності збігається зі звичайною групою еквівалентності $G^\sim$ усього класу $\mathcal{L}$.*

Після калібрування довільних елементів класів $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, 5$, відповідні підкласи класів $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_5$ стали нормалізованими у звичайному

сенсі. Трансформаційні властивості інших підкласів можна покращити методом відображення між класами, що проілюстровано на прикладі підкласу класу $\mathcal{L}_4$, для якого також виконано групову класифікацію.

У цьому самому розділі побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь довільного порядку, пов'язаних із рівняннями типу Кортевега–де Фріза і їхніми узагальненнями. Зокрема, доведено нормалізованість класу рівнянь

$$u_t = F(t)u_n + G(t, x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

$$F \neq 0, \quad G_{u_i u_{n-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Він точково- й до того ж контактно-нормалізований. Властивість нормалізованості й групу еквівалентності цього класу застосовано для пошуку групоїдів еквівалентності низки класів рівнянь, розглянутих у дисертації.

Для двох класів узагальнених рівнянь типу Кортевега–де Фріза (КдФ) і модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза (мКдФ) встановлено критерії звідності до класичних рівнянь КдФ і мКдФ. Виконано групову класифікацію рівнянь КдФ зі змінними коефіцієнтами $u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$, а також кількох класів рівнянь, подібних до цього класу відносно точкових перетворень. Наведено оригінальний алгоритм отримання всіх випадків розширення лівівської симетрії у класі диференціальних рівнянь із переліку, побудованого з точністю до відповідної груп еквівалентності.

У третьому розділі також виконано розширену групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Кавахари

$$u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxx} = 0, \quad \alpha\beta\sigma n \neq 0, \quad (3.7)$$

що включає побудову групоїда еквівалентності, класифікацію лівівських симетрій і відповідних редукцій, а також знаходження точних розв'язків. Доведено, що клас (3.7) ненормалізований, але його можна розбити на два нормалізовані підкласи, виокремлені умовами $n \neq 1$ і $n = 1$. Розмір-

ність максимальних алгебр лівської інваріантності не перевищує двох у випадку $n \neq 1$ і трьох у випадку $n = 1$. Доведено таку теорему.

Теорема 3.23. *Рівняння (3.7) зі змінними коефіцієнтами можна звести точковим перетворенням до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього самого класу тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти α , β , σ задовольняють умови*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t &= \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)_t = 0, \quad \text{якщо } n \neq 1, \\ \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t\right)_t &= 0, \quad \left(\frac{\sigma\alpha^2}{\beta^3}\right)_t = 0, \quad \text{якщо } n = 1. \end{aligned}$$

Побудовано чисельні розв'язки граничної задачі для узагальненого рівняння Кавахари зі степеневими коефіцієнтами $u_t + uu_x + \lambda t^{\frac{1}{2}}u_{xxx} + \delta t^{\frac{3}{2}}u_{xxxx} = 0$, що описує рух хвиль у морі, вкритому кригою, товщина якої збільшується з часом.

Також у третьому розділі досліджено допустимі перетворення, лівські симетрії й закони збереження нормалізованого класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0$, $gh \neq 0$, зі змінними коефіцієнтами. Доведено, що будь-яке рівняння з цього класу допускає один закон збереження. Якщо коефіцієнти рівняння задовольняють умову $((1/h)_t/g)_t = 0$ або умову $((f/g)_t/g)_t = 0$, то воно має два закони збереження. Якщо ж коефіцієнти задовольняють обидві наведені умови, то таке рівняння допускає три закони збереження.

В останньому підрозділі третього розділу показано, як групоїди еквівалентності можна використати для дослідження інтегровності. Для прикладу розглянуто клас

$$\begin{aligned} u_t + a(t)uu_{xxx} + b(t)u_xu_{xx} + c(t)u^2u_x + f(t)uu_x \\ + g(t)u_{xxxx} + h(t)u_{xxx} + m(t)u + n(t)u_x + k(t)xu_x = 0, \end{aligned}$$

де функції a , b , c , f , g , h , m , n , k — довільні гладкі функції змінної t , причому $g(a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$.

Серед виокремлених інтегровних рівнянь є, зокрема, рівняння

$$u_t + 10g\Upsilon uu_{xxx} + 25g\Upsilon u_x u_{xx} + 20g\Upsilon^2 u^2 u_x + gu_{xxxx} + tu + nu_x + kxu_x = 0,$$

де $\Upsilon = \nu e^{\int (m-2k) dt}$ з довільною ненульовою сталою ν . Для нього побудовано пару Лакса

$$\begin{aligned} L &= e^{\int k dt} (\partial_x^3 + 2\Upsilon u \partial_x + \Upsilon u_x), \\ P &= 9g \partial_x^5 + 30g\Upsilon u \partial_x^3 + 45g\Upsilon u_x \partial_x^2 \\ &\quad + (35g\Upsilon u_{xx} + 20g\Upsilon^2 u^2 - kx - n) \partial_x + 10g\Upsilon u_{xxx} + 20g\Upsilon^2 u u_x. \end{aligned}$$

Четвертий розділ дисертації присвячено алгебраїчному методу групової класифікації, що зазвичай застосовують до нормалізованих класів диференціальних рівнянь. У першому підрозділі групову класифікацію нормалізованого класу модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза

$$u_t + u^2 u_x + g(t) u_{xxx} + h(t) u = 0, \quad g \neq 0, \quad (3.8)$$

виконано із застосуванням алгебраїчної техніки. Спочатку знайдено групоїд еквівалентності класу і здійснено калібрування довільних елементів $h = 0$. Базис алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ нормалізованого підкласу $u_t + u^2 u_x + g(t) u_{xxx} = 0$ класу (3.8) складають оператори

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t - \frac{1}{2}u\partial_u - g\partial_g, \quad t\partial_t + x\partial_x + 2g\partial_g.$$

Групову класифікацію цього класу виконано алгебраїчним методом. За допомогою методу еквівалентності відновлено класифікаційний список лінійських симетрій у класі (3.8), а також виконано групову класифікацію ще одного подібного класу рівнянь із шістьма коефіцієнтами, залежними від часу.

У підрозділі 4.2 вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для ненормалізованого класу нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь

$$u_{tt} = f(x, u) u_{xx} + g(x, u), \quad (f_u, g_{uu}) \neq (0, 0). \quad (3.9)$$

Для цього використано нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь, що базується на класифікації допустимих перетворень у класі з точністю до групи еквівалентності цього класу, й побудові породжувальної множини допустимих перетворень. Зауважимо, що клас (3.9) не можна природно розбити на нормалізовані підкласи. Вичерпне розв'язання задачі групової класифікації включає виконання повної попередньої групової класифікації, а також побудову сингулярних розширень лівської симетрії, які не пов'язані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу.

Теорема 4.9. *Групу еквівалентності $G^\sim$ класу (3.9) складають перетворення*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= c_1 t + c_0, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = c_2 |\varphi_x|^{1/2} u + \psi(x), \quad \tilde{f} = \frac{\varphi_x^2}{c_1^2} f, \\ \tilde{g} &= \frac{c_2}{c_1^2} |\varphi_x|^{1/2} g - \frac{1}{c_1^2} \left(c_2 \frac{2\varphi_{xxx}\varphi_x - 3\varphi_{xx}^2}{4|\varphi_x|^{3/2}} u + \psi_{xx} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \psi_x \right) f,\end{aligned}$$

де c_0, c_1, c_2 — довільні сталі, що задовольняють умову $c_1 c_2 \neq 0$; φ, ψ — довільні гладкі функції змінної x , причому $\varphi_x \neq 0$.

Побудовано породжувальну множину допустимих перетворень цього класу з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

Теорема 4.12. *Породжувальну множину $\mathcal{B}$ допустимих перетворень класу (3.9), що є мінімальною і внутрішньо сумісною з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, утворюють такі сім'ї допустимих перетворень (де $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1$):*

$$\text{T1. } f_x = g_x = 0, \quad f_u \neq 0 \quad \text{або} \quad f = 1, \quad \tilde{f} = 1/f, \quad \tilde{g} = -g/f,$$

$$\Phi: \tilde{t} = x, \quad \tilde{x} = t, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T2. } f = \varepsilon u^{-4}, \quad g = \mu(x) u^{-3} + \sigma u, \quad \sigma \in \{-1, 0, 1\}, \quad \tilde{f} = \varepsilon \tilde{u}^{-4}, \quad \tilde{g} = \mu(\tilde{x}) \tilde{u}^{-3}, \\ \mu = \mu(x) \text{ — довільна гладка функція, причому } \mu_x \neq 0,$$

$$\text{а. } \Phi: \tilde{t} = t^{-1}, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = t^{-1} u, \quad \text{якщо } \sigma = 0;$$

$$\text{б. } \Phi: \tilde{t} = \frac{1}{2}e^{2t}, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = e^t u, \quad \text{якщо } \sigma = 1;$$

$$\text{в. } \Phi: \tilde{t} = \operatorname{tg} t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u \cos t, \quad \text{якщо } \sigma = -1;$$

$$\text{T3. } f = 1, \quad g = e^{-2x} g^2(u), \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = g^2(\tilde{u}),$$

$$\Phi: \tilde{t} = e^{-x} \operatorname{sh} t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \operatorname{ch} t, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T4. } f = 1, \quad g = g^1(x) g^2(u), \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = \tilde{x}^{-2} g^2(\tilde{u}),$$

$$\text{а. } g^1(x) = x^{-2}, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{t}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{б. } g^1(x) = \cos^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{\cos t}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{x} = \frac{\cos x}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{в. } g^1(x) = -\operatorname{ch}^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = e^t \operatorname{sh} x, \quad \tilde{x} = e^t \operatorname{ch} x, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{г. } g^1(x) = \operatorname{sh}^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = e^t \operatorname{ch} x, \quad \tilde{x} = e^t \operatorname{sh} x, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T5. } f = -1, \quad g = e^{-2x} g^2(u), \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = g^2(\tilde{u}),$$

$$\Phi: \tilde{t} = e^{-x} \sin t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \cos t, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T6. } f = -1, \quad g = g^1(x) g^2(u), \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \tilde{x}^{-2} g^2(\tilde{u}),$$

$$\text{а. } g^1(x) = x^{-2}, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{t}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{б. } g^1(x) = \cos^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = e^t \sin x, \quad \tilde{x} = e^t \cos x, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{в. } g^1(x) = \operatorname{sh}^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{\sin t}{\cos t + \operatorname{ch} x}, \quad \tilde{x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\cos t + \operatorname{ch} x}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T7. } f = -1, \quad g = g^2(u) \operatorname{ch}^{-2} x, \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = g^2(\tilde{u}) \operatorname{ch}^{-2} \tilde{x},$$

$$\Phi: \tilde{t} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} x + \cos \gamma \sin t}{\cos t},$$

$$\tilde{x} = \operatorname{arcth} \frac{\cos \gamma \operatorname{sh} x - \sin \gamma \sin t}{\operatorname{ch} x}, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in (0, 2\pi);$$

$$\text{T8. а. } f = \tilde{f} = 1, \quad g_x = 0, \quad \tilde{g} = g,$$

$$\Phi: \tilde{t} = t \operatorname{ch} \gamma + x \operatorname{sh} \gamma, \quad \tilde{x} = t \operatorname{sh} \gamma + x \operatorname{ch} \gamma, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0};$$

$$\text{б. } f = \tilde{f} = -1, \quad g_x = 0, \quad \tilde{g} = g, \quad \Phi: \tilde{t} = t \cos \gamma - x \sin \gamma,$$

$$\tilde{x} = t \sin \gamma + x \cos \gamma, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in (0, 2\pi);$$

Т9. $f = \varepsilon$, $g = \varepsilon' e^u$, $\tilde{f} = \varepsilon$, $\tilde{g} = \varepsilon' e^{\tilde{u}}$, $\Phi: \tilde{t} = T(t, x)$, $\tilde{x} = X(t, x)$, $\tilde{u} = u + \ln |T_t^2 - \varepsilon T_x^2|$, де $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, причому $\varepsilon' = 1$, якщо $\varepsilon = 1$, (T, X) пробігають множину представників класів еквівалентності розв'язків системи $T_t = X_x$, $X_t = \varepsilon T_x$ із $(T_{tt}, T_x) \neq (0, 0)$ за дією групи, яку складають перетворення $\hat{t} = c_1 t + c_0$, $\hat{x} = c_1 x + c_2$, $\hat{T} = \tilde{c}_1 T + \tilde{c}_0$, $\hat{X} = \tilde{c}_1 X + \tilde{c}_2$, де $c_0, c_1, c_2, \tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — довільні сталі, що задовольняють умову $c_1 \tilde{c}_1 \neq 0$.

Алгебраїчним методом спочатку знайдено всі регулярні випадки розширення лівської симетрії, що асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу. Також знайдено всі сингулярні випадки розширення лівської симетрії.

Лема 4.18. Повний перелік $G^\sim$ -нееквівалентних сингулярних розширень алгебри $\mathfrak{g}^\square = \langle \partial_t \rangle$ ядра основних груп лівської симетрії рівнянь з класу (3.9) вичерпують випадки рівнянь із довільними елементами виду $f = \varepsilon = \pm 1$, $g = g^1(x)g^2(u)$, наведеними в табл. 1.

Об'єднання регулярних і сингулярних випадків розширення лівської симетрії у класі (3.9) дає повний розв'язок задачі групової класифікації для цього класу.

В останньому підрозділі четвертого розділу досліджено лівські симетрії $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака

$$(i\sigma_2\partial_t + \sigma_1\partial_x - \sigma_3\partial_y)\Psi = \Phi, \quad \text{де} \quad \Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y)$ — залежні змінні, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ — довільні гладкі функції, що водночас не є лінійними за своїми аргументами, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Табл. 1: Сингулярні розширення ліївської симетрії у класі (3.9).

f	g	Базис розширення
ε	$\hat{g}(u)$	$\partial_x, x\partial_t + \varepsilon t\partial_x$
1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t})$
-1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t)$
ε	$\hat{g}(u)x^{-2}$	$t\partial_t + x\partial_x, (t^2 + \varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x$
1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \cos x), \mathcal{R}(\sin t \cos x)$
1	$-\hat{g}(u) \operatorname{ch}^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \operatorname{ch} x), \mathcal{R}(e^{-t} \operatorname{ch} x)$
1	$\hat{g}(u) \operatorname{sh}^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \operatorname{sh} x), \mathcal{R}(e^{-t} \operatorname{sh} x)$
-1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \cos x), \mathcal{R}(e^{-t} \cos x)$
-1	$\hat{g}(u) \operatorname{sh}^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \operatorname{sh} x), \mathcal{R}(\sin t \operatorname{sh} x)$
-1	$\hat{g}(u) \operatorname{ch}^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \operatorname{ch} x), \mathcal{R}(\sin t \operatorname{ch} x)$
ε	$\varepsilon' u ^q$	$\partial_x, t\partial_x + \varepsilon x\partial_t, (q-1)t\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t}), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
-1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
ε	$\varepsilon'e^u$	$\tau\partial_t + \xi\partial_x - 2\tau_t\partial_u$

Тут $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1 \bmod G^\sim$, q — довільна стала, причому $q \neq 0, 1$, $\mathcal{R}(\Phi) := \Phi_x \partial_t + \Phi_t \partial_x$; $\tau = \tau(t, x)$, $\xi = \xi(t, x)$ — довільні гладкі функції, що задовольняють систему $\tau_t = \xi_x$, $\xi_t = \varepsilon \tau_x$.

Встановлено, що алгебра ядра основних груп рівнянь Дірака (4.10) — це тривимірний алгебра $\langle \partial_t, \partial_x, \partial_y \rangle$. Знайдено всі нелінійності, для яких рівняння з класу (4.10) допускають чотиривимірні алгебри ліївської інваріантності. Проведено ліївську редукцію й побудовано певні точні розв'язки таких рівнянь.

Наприкінці дисертації наведено основні результати й висновки.

Результати, що ілюструють і доповнюють результати основної части-

ни, виокремлено у два додатки. У додатку А зібрано результати щодо класифікації ліівських і некласичних операторів редукції трьох підкласів класу квазілінійних рівнянь реакції–дифузії $f(x)u_t = g(x)u_{xx} + h(x)B(u)$, $fghB_{uu} \neq 0$. Зокрема, некласичні оператори редукції побудовано методом перетворень між класами для випадків, коли $B(u)$ — це степенева або експоненціальна функція. Вичерпний груповий аналіз проведено для двох підкласів, виокремлених, відповідно, умовами $f = g = 1$ або $B = e^{mu}$, де $m \neq 0$. Також додаток А містить класифікацію потенціальних симетрій нелінійних рівнянь дифузії $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$, $fgn \neq 0$.

У додатку Б наведено результати групового аналізу класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза третього і п'ятого порядків, а також узагальнених рівнянь Гарднера, $K(m, n)$ та Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з коефіцієнтами, залежними від часу. Знайдені ліівські симетрії застосовано для побудови точних розв'язків і розв'язання певних граничних задач для таких рівнянь. У всіх випадках повне розв'язання задач групової класифікації стало можливим завдяки використанню групоїдів еквівалентності.

Список наукових праць, де опубліковано результати дисертації, й інформацію щодо їхньої апробації наведено у додатку В.

Подяки. Авторка висловлює щирі вдячності науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та завідувачу відділу математичної фізики, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за постійну увагу й допомогу в роботі, доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку, доктору філософії, професору Крістодулосу Софоклеусу й іншим своїм співавторам за плідну довголітню співпрацю, а також співробітникам відділу математичної фізики за підтримання творчої атмосфери в відділі.

Розділ 1

Групоїди еквівалентності в класах диференціальних рівнянь

Відомо, що загальної теорії інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними не існує. Проте більшість випадків повного інтегрування або пошуку конкретних розв'язків пов'язано з відповідними замінами змінних. Невироджені точкові перетворення, які залишають диференціальне рівняння інваріантним і утворюють зв'язну групу Лі, називають ліївськими симетріями цього рівняння. Саме ці перетворення є найбільш вживаними. У багатьох випадках алгоритмічний метод ліївської редукції призводить до побудови інваріантних розв'язків розглядуваного диференціального рівняння. Методи, що базуються на використанні неvirоджених точкових перетворень, наразі є одними з найпотужніших аналітичних інструментів, доступних для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними [285].

Ще одна особливість ліївських симетрій полягає в тому, що вони дозволяють виокремити важливі для застосувань рівняння. Дійсно, всі основні рівняння математичної фізики, зокрема рівняння Ньютона, Лапласа, Ейлера–Лагранжа, д'Аламбера, Ламе, Гамільтона–Якобі, Максвелла, Шредінгера, володіють нетривіальними симетрійними властивостями [31]. Ця властивість вирізняє їх з-поміж інших диференціальних рівнянь. Виникає важлива задача виокремлення з класу диференціальних рівнянь тих, що допускають алгебри ліївської інваріантності максимально високих розмірностей. Цю задачу називають *задачею групової класифікації*. Розв'язання задачі групової класифікації передбачає виконання таких

кроків: 1) побудова групи еквівалентності заданого класу диференціальних рівнянь; 2) відшукування ядра основних груп (основної групи, яку допускає будь-яке рівняння з класу); 3) знаходження всіх нееквівалентних випадків розширення ядра основних груп. При цьому використовують інфінітезимальний підхід, розвинутий у роботах С. Лі: замість групи Лі точкових симетрій досліджуваного диференціального рівняння шукають відповідну алгебру Лі векторних полів [18, 23, 154].

Іншою важливою задачею є дослідження трансформаційних властивостей класів диференціальних рівнянь, тобто знаходження невироджених (точкових) перетворень, що пов'язують членів даного класу. Такі перетворення називають формозберігаючими [184], дозволеними [324] або допустимими [254]. Дійсно, якщо два диференціальних рівняння пов'язані цим перетворенням, то їхні точні розв'язки, локальні закони збереження та симетрії також пов'язані ним. Такі рівняння називають еквівалентними або, в термінології Л.В. Овсянникова, *подібними* [23]. Знання точного розв'язку для одного з двох еквівалентних рівнянь дозволяє побудувати відповідний точний розв'язок для іншого рівняння, використовуючи перетворення, що їх пов'язує. Низку точних розв'язків для рівнянь зі змінними коефіцієнтами побудовано методом еквівалентності, див., наприклад, [195, 264, 309]. При цьому невідроджені точкові перетворення є ефективними інструментами не тільки для знаходження точних розв'язків, а й для вичерпного розв'язання задач групової класифікації (див., зокрема, роботи [54, 195, 261] та посилання в них), розробки схем фізичної параметризації [256] та дослідження інтегровності [78, 137, 192, 192, 313].

У підрозділі 1.1 наведено основні поняття щодо допустимих перетворень у класах диференціальних рівнянь, які разом із іншими поняттями групового аналізу переформульовано у термінології групоїдів у підрозділі 1.2. Методи класифікації допустимих перетворень та ліївських симетрій представлено в підрозділі 1.3. Уперше введено поняття регулярних та сингулярних розширень ліївської симетрії в класі диференціальних рівнянь

та запропоновано модифікацію алгебраїчного методу для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [195, 301, 315].

1.1. Допустимі перетворення: загальні відомості

Систематичне вивчення трансформаційних властивостей класів диференціальних рівнянь розпочали в 1991 році Дж. Кінгстон і К. Софоклеус [182, 183, 285]. Пізніше вони назвали перетворення, що пов'язують два рівняння в класі, *формозберігаючими* [184], оскільки вони зберігають форму рівняння в класі та змінюють лише його довільні елементи. У 1992 році Ж.-П. Газо та П. Вінтерніц також почали досліджувати такі перетворення у класах диференціальних рівнянь, називаючи їх *дозволеними* [126, 324]. Строгі означення та розвинену теорію розроблено пізніше Р.О. Поповичем [254, 261]; ним запропоновано поняття *допустимих перетворень*. Допустиме перетворення — це впорядкована трійка, яку складають два фіксованих рівняння класу й перетворення, що їх пов'язує. Множина допустимих перетворень разом із стандартною операцією композиції перетворень має структуру групоїда; її називають групоїдом еквівалентності [256].

Перетворення еквівалентності є підмножиною множини допустимих перетворень. Важливо, що допустимі перетворення не обов'язково пов'язані з груповою структурою, тоді як перетворення еквівалентності завжди утворюють групу. Перетворення еквівалентності, застосоване до будь-якого рівняння з класу, завжди відображає його в інше рівняння з того ж класу. Іншими словами, перетворення еквівалентності зберігають диференціальну структуру всього класу, тоді як допустиме перетворення можливо існує лише для певної пари рівнянь з розглянутого класу. Наприклад, точкове перетворення $\tau: t' = e^{bt}/b, x' = x, u' = u - bt$ пов'язує рівняння $u_t = (e^u)_{xx} + ae^u + b$ і $u'_{t'} = (e^{u'})_{x'x'} + ae^{u'}$, де a, b —

довільні сталі, причому $b \neq 0$ [154]. Обидва ці рівняння є членами класу $\mathcal{L}$: $u_t = (e^u)_{xx} + K(u)$, де K — довільна гладка функція змінної u . Дія перетворення τ на інше рівняння класу, а саме $u_t = (e^u)_{xx} + e^{2u} + b$ призводить до рівняння $u'_t = (e^{u'})_{x'x'} + b t' e^{2u'}$, що не належить класу $\mathcal{L}$.

За означенням Л.В. Овсяннікова група еквівалентності класу диференціальних рівнянь складається з невідроджених точкових перетворень незалежних та залежних змінних, які входять до рівняння, та довільних елементів (сталіх та/або функцій) класу, що зберігають диференціальну структуру класу, але можуть змінювати довільні елементи. При цьому перетворення змінних не залежать від довільних елементів [23]. Тепер таку групу еквівалентності називають звичайною. Пізніше було введено поняття узагальненої групи еквівалентності [212, 261], перетворення незалежних та залежних змінних з якої можуть містити довільні елементи класу. Групи еквівалентності, в яких перетворення довільних елементів є нелокальними (наприклад, нові довільні функції є інтегралами від старих довільних функцій), називають розширеними [161, 261]. Розширена узагальнена група еквівалентності має обидві вищезазначені властивості. Приклади використання різних типів груп еквівалентності наведено, зокрема, у [162, 311]. Якщо будь-яке допустиме перетворення в класі диференціальних рівнянь породжено перетворенням з його групи еквівалентності (звичайної / узагальненої / розширеної / розширеної узагальненої), то цей клас називають нормалізованим у відповідному сенсі.

Розвинену теорію групоїдів еквівалентності запропоновано у роботі [301], що суттєво покращує попередні результати щодо допустимих перетворень у класах диференціальних рівнянь та їх класифікації алгебраїчним методом, наведені, зокрема, в [50, 54, 57, 102, 121, 126, 198, 240, 254, 261]. У наступному підрозділі існуючі поняття групового аналізу диференціальних рівнянь пов'язано з термінологією групоїдів.

1.2. Групоїди еквівалентності

Розглянемо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \{\mathcal{L}_{\theta} \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ систем диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_{\theta}$ з залежними змінними $u = (u^1, \dots, u^m)$ та незалежними змінними $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$ — набір довільних елементів класу. Тут $\mathcal{L}_{\theta}$ — система диференціальних рівнянь вигляду $L(x, u_{(r)}, \theta(x, u_{(r)})) = 0$ з фіксованим набором L диференціальних функцій від u порядку r , параметризованих θ , значення яких пробігають множину $\mathcal{S}$, $u_{(r)}$ — набір похідних залежних змінних u за незалежними змінними x до порядку r включно (разом з u як похідними нульового порядку). Множину $\mathcal{S}$ складають розв’язки допоміжної системи диференціальних рівнянь $S(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}) = 0$ і нерівностей $\Sigma(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}) \neq 0$ на θ , де змінні $(x, u_{(r)})$ з простору струменів порядку r є незалежними змінними, а набір $\theta_{(q)}$ утворено похідними θ за змінними $(x, u_{(r)})$ до порядку q включно. З точністю до калібрувальної еквівалентності систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ [261], яка зазвичай є тривіальною, відображення $\theta \mapsto \mathcal{L}_{\theta}$ з $\mathcal{S}$ у $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є бієктивним.

Групоїдом еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають малу категорію з множиною об’єктів $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ (або $\mathcal{S}$) і множиною стрілок, утвореною (локальними) дифеоморфізмами у просторі з координатами (x, u) між парами систем з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$:

$$\mathcal{G}^{\sim} = \{\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta}) \mid \theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}, \Phi \in \text{Diff}_{(x,u)}^{\text{loc}} : \Phi_* \mathcal{L}_{\theta} = \mathcal{L}_{\tilde{\theta}}\}.$$

Елементи групоїду еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ називають *допустимими (точковими) перетвореннями* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Підняття довільного елементу θ перетворенням Φ визначено як $\Phi_* \theta = \tilde{\theta}$, якщо $\Phi_* \mathcal{L}_{\theta} = \mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$.

Переформулюємо поняття, пов’язані з групоїдами еквівалентності, в термінах теорії категорій (див., наприклад, [19]). Відображення *початку* (ініціальне) й *кінця* (таргетальне) $s, t: \mathcal{G}^{\sim} \rightarrow \mathcal{S}$ визначають як $s(\mathcal{T}) = \theta$ і $t(\mathcal{T}) = \tilde{\theta}$ для будь-якого $\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta}) \in \mathcal{G}^{\sim}$, що породжує позначення $\mathcal{G}^{\sim} \rightrightarrows \mathcal{S}$, де символ “ $\rightrightarrows$ ” позначає пару відображень початку й кін-

ця. Допустимі перетворення $\mathcal{T}$ і $\mathcal{T}' = (\theta', \Phi', \tilde{\theta}')$ називають *компоновними* (або перемножуваними), якщо $\tilde{\theta} = \theta'$, і їх *композицією* є допустиме перетворення $\mathcal{T} \star \mathcal{T}' = (\theta, \Phi' \circ \Phi, \tilde{\theta}')$. Це визначає часткове множення на $\mathcal{G}^\sim$. Для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$ *одиниця в θ* — це допустимим перетворення $\text{id}_\theta := (\theta, \text{id}_{(x,u)}, \theta)$, де $\text{id}_{(x,u)}$ — тотожне перетворення змінних (x, u) . Це визначає *відображення вкладавання об'єктів* $\mathcal{S} \ni \theta \mapsto \text{id}_\theta \in \mathcal{G}^\sim$ у групоїд $\mathcal{G}^\sim$. Можна вважати, що множина об'єктів $\mathcal{S}$ співпадає з базовим групоїдом $\mathcal{S} \rightrightarrows \mathcal{S} := \{\text{id}_\theta \mid \theta \in \mathcal{S}\}$. *Оберненим до $\mathcal{T}$* є допустиме перетворення $\mathcal{T}^{-1} := (\tilde{\theta}, \Phi^{-1}, \theta)$, де Φ^{-1} — перетворення, обернене до Φ . Очевидно виконуються всі необхідні властивості, зокрема, асоціативність часткового множення, його узгодженість із відображеннями початку і кінця, властивості одиничних і обернених перетворень.

Множину можливих допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з початком θ називають *s-шаром над $\theta \in \mathcal{S}$* , $s^{-1}(\theta) \subseteq \mathcal{G}^\sim$. Аналогічно *t-шар над $\theta \in \mathcal{S}$* , $t^{-1}(\theta) \subseteq \mathcal{G}^\sim$, — множина можливих допустимих перетворень в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з кінцем θ . Підмножина $\mathcal{G}(\theta, \tilde{\theta}) := s^{-1}(\theta) \cap t^{-1}(\tilde{\theta})$ групоїда $\mathcal{G}^\sim$ з $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}$ відповідає множині точкових перетворень, що відображають систему $\mathcal{L}_\theta$ в систему $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$. *Вертексну групу $\mathcal{G}_\theta := \mathcal{G}(\theta, \theta) = s^{-1}(\theta) \cap t^{-1}(\theta)$* асоційовано з групою точкових симетрій G_θ системи $\mathcal{L}_\theta$:

$$G_\theta = \{\Phi \in \text{Diff}_{(x,u)}^{\text{loc}} \mid (\theta, \Phi, \theta) \in \mathcal{G}_\theta\}.$$

Орбітою $\mathcal{O}_\theta := t(s^{-1}(\theta))$ фіксованого значення набору довільних елементів θ називають таку підмножину значень цього набору, що відповідні системи в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є подібними системі $\mathcal{L}_\theta$ відносно точкових перетворень.

Позначимо через ϖ і ϖ^r проєкції простору з координатами $(x, u_{(r)}, \theta)$ на простори з координатами (x, u) і $(x, u_{(r)})$ відповідно.

Звичайною групою еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають (псевдо)групу точкових перетворень $\mathcal{T}$ у просторі з координатами $(x, u_{(r)}, \theta)$, що є проєктовними на простори з координатами (x, u) і $(x, u_{(r)})$, причому стандартні продовження $\varpi_*^r \mathcal{T}$ перетворень $\varpi_* \mathcal{T}$ на струмені $(x, u_{(r)})$ r -го

порядку відображають клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на себе. Якщо набір довільних елементів залежить лише від $(x, u_{(r')})$, то можна вважати, що група $G^{\sim}$ діє в просторі з координатами $(x, u_{(r')}, \theta)$, де $r' < r$. Поняття звичайної групи еквівалентності можна узагальнити кількома способами, послаблюючи умови на перетворення еквівалентності, а саме умову проєктовності на простір змінних системи й умову локальності відносно довільних елементів. Це призводить, відповідно, до понять узагальненої та розширеної групи еквівалентності, або до поняття розширеної узагальненої групи еквівалентності у випадку, якщо обидві ці умови не виконуються [162, 213, 240, 254, 261, 303, 309].

Групоїд дії

$$\mathcal{G}^{G^{\sim}} := \{(\theta, \varpi_* \mathcal{T}, \mathcal{T}_* \theta) \mid \theta \in \mathcal{S}, \mathcal{T} \in G^{\sim}\}$$

групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є підгрупоїдом групоїду еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ цього класу ($\mathcal{G}^{G^{\sim}} \subseteq \mathcal{G}^{\sim}$) з тією ж множиною об'єктів $\mathcal{S}$. Якщо $\mathcal{T} \in \mathcal{G}^{G^{\sim}}$, кажуть, що допустиме перетворення $\mathcal{T}$ у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ породжено перетворенням еквівалентності цього класу.

Фундаментальним групоїдом $\mathcal{G}^f$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є неперетинне об'єднання вертексних груп $\mathcal{G}_{\theta}$ за всіма $\theta \in \mathcal{S}$, а саме $\mathcal{G}^f = \sqcup_{\theta \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\theta}$. Оскільки він має ту саму множину об'єктів $\mathcal{S}$ і ті самі вертексні групи, як і групоїд $\mathcal{G}^{\sim}$, та $\mathcal{T}^{-1} \mathcal{G}_{\tilde{\theta}} \mathcal{T} = \mathcal{G}_{\theta}$ для будь-яких $\mathcal{T} \in \mathcal{G}(\theta, \tilde{\theta})$, то він є нормальним підгрупоїдом групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$, який також називають *фундаментальним підгрупоїдом* групоїда $\mathcal{G}^{\sim}$. Іншими словами, групоїд $\mathcal{G}^f := \{(\theta, \Phi, \theta) \mid \theta \in \mathcal{S}, \Phi \in G_{\theta}\}$ складають допустимі перетворення, породжені перетвореннями точкової симетрії систем класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Ядро груп точкових симетрій $G^{\cap} := \cap_{\theta \in \mathcal{S}} G_{\theta}$ систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, яке складають спільні точкові симетрії цих систем, можна асоціювати з нормальною підгрупою $\tilde{G}^{\cap}$ групи $G^{\sim}$, чий елементи отримано з елементів групи $G^{\cap}$ стандартним продовженням на струмені $(x, u_{(r')})$ порядку r' і тривіальним продовженням на множину довільних елементів θ , тобто $G^{\cap} = \varpi_* \tilde{G}^{\cap}$.

Визначимо s-дію, t-дію та дію спряження групи $G^\sim$ на групоїді $\mathcal{G}^\sim$ відповідно як $\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta}) \mapsto (\mathcal{T}_*\theta, \Phi \circ (\varpi_*\mathcal{T})^{-1}, \tilde{\theta}), (\theta, (\varpi_*\mathcal{T}) \circ \Phi, \mathcal{T}_*\tilde{\theta}), (\mathcal{T}_*\theta, (\varpi_*\mathcal{T}) \circ \Phi \circ (\varpi_*\mathcal{T})^{-1}, \mathcal{T}_*\tilde{\theta})$ для будь-яких $\mathcal{T} \in G^\sim$ і $\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta}) \in \mathcal{G}^\sim$. Ці дії породжують декілька відношень еквівалентності на $\mathcal{G}^\sim$ (s- $G^\sim$ -еквівалентність, t- $G^\sim$ -еквівалентність, $G^\sim$ -спряження і $G^\sim$ -еквівалентність).

Означення 1.1. Допустимі перетворення $\mathcal{T}^1 = (\theta^1, \Phi^1, \tilde{\theta}^1)$ і $\mathcal{T}^2 = (\theta^2, \Phi^2, \tilde{\theta}^2)$ у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *спряженими* відносно групи еквівалентності $G^\sim$ цього класу, якщо існує таке $\mathcal{T} \in G^\sim$, що $\theta^2 = \mathcal{T}_*\theta^1$, $\tilde{\theta}^2 = \mathcal{T}_*\tilde{\theta}^1$ і $\Phi^2 = (\varpi_*\mathcal{T}) \circ \Phi^1 \circ (\varpi_*\mathcal{T})^{-1}$. Допустимі перетворення $\mathcal{T}^1$ і $\mathcal{T}^2$ називають *$G^\sim$ -еквівалентними*, якщо існують такі $\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}} \in G^\sim$, що $\theta^2 = \mathcal{T}_*\theta^1$, $\tilde{\theta}^2 = \tilde{\mathcal{T}}_*\tilde{\theta}^1$ і $\Phi^2 = (\varpi_*\tilde{\mathcal{T}}) \circ \Phi^1 \circ (\varpi_*\mathcal{T})^{-1}$. Якщо додатково $\tilde{\mathcal{T}} = \text{id}_{(x, u_{(r)}, \theta)}$ (або $\mathcal{T} = \text{id}_{(x, u_{(r)}, \theta)}$), то допустимі перетворення $\mathcal{T}^1$ і $\mathcal{T}^2$ називають s- $G^\sim$ -еквівалентними (або t- $G^\sim$ -еквівалентними).

Допустиме перетворення в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ належить $\mathcal{G}^{G^\sim}$ тоді і тільки тоді, коли це перетворення є $G^\sim$ -еквівалентним у сенсі означення 1.1 тотожному допустимому перетворенню початкової системи.

Оскільки фундаментальний підгрупоїд $\mathcal{G}^f$ є нормальним підгрупоїдом групоїда $\mathcal{G}^\sim$, добуток Фробеніуса $\mathcal{G}^f \star \mathcal{G}^{G^\sim} = \{\mathcal{T} \star \mathcal{T}' \mid \mathcal{T} \in \mathcal{G}^f, \mathcal{T}' \in \mathcal{G}^{G^\sim}, t(\mathcal{T}) = s(\mathcal{T}')\}$ також є підгрупоїдом цього групоїда, що співпадає з образом групоїда $\mathcal{G}^f$ відносно s-дії (або t-дії) групи $G^\sim$ на групоїд $\mathcal{G}^\sim$.

Існують кілька типів класів рівнянь, для яких задачу групової класифікації зручно розв'язувати алгебраїчним методом [54, 198, 254, 261].

Означення 1.2. Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *нормалізованим*, якщо $\mathcal{G}^{G^\sim} = \mathcal{G}^\sim$, і *напівнормалізованим*, якщо $\mathcal{G}^f \star \mathcal{G}^{G^\sim} = \mathcal{G}^\sim$. Залежно від типу групи еквівалентності $G^\sim$ (звичайна, узагальнена, розширена, розширена узагальнена) класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, розрізняють (напів-)нормалізованість у звичайному, узагальненому, розширеному, розширеному узагальненому сенсі.

Означення 1.3. Нехай $\mathcal{G}^H$ — групоїд дії підгрупи H групи $G^\sim$, а сім'я підгруп $N_{\mathcal{S}} := \{N_\theta < G_\theta \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ груп точкової симетрії G_θ з відповід-

ними підгрупами $\mathcal{N}_\theta := \{(\theta, \Phi, \theta) \mid \theta \in \mathcal{S}, \Phi \in N_\theta\}$ вертексних груп $\mathcal{G}_\theta$ задовольняє властивість $\mathcal{T}\mathcal{N}_\theta = \mathcal{N}_{\mathcal{T}\theta}\mathcal{T}$ для всіх таких $\theta \in \mathcal{S}$ і $\mathcal{T} \in \mathcal{G}^H$, що $s(\mathcal{T}) = \theta$. Тоді добуток Фробеніуса

$$\mathcal{N}^f \star \mathcal{G}^H = \{\mathcal{T} \star \mathcal{T}' \mid \mathcal{T} \in \mathcal{N}^f, \mathcal{T}' \in \mathcal{G}^H, t(\mathcal{T}) = s(\mathcal{T}')\},$$

є підгрупоїдом групоїда $\mathcal{G}^\sim$, який співпадає з образом $\mathcal{N}^f := \sqcup_{\theta \in \mathcal{S}} \mathcal{N}_\theta$ підгрупоїда $\mathcal{N}^f$ відносно s -дії (або t -дії) підгрупи H на $\mathcal{G}^\sim$. Якщо $\mathcal{N}^f \star \mathcal{G}^H = \mathcal{G}^\sim$, то клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *напівнормалізованим* відносно підгрупи H групи $G^\sim$ і сім'ї підгруп $N_{\mathcal{S}}$ груп точкової симетрії. Якщо додатково $\mathcal{G}^H \cap \mathcal{N}^f = \mathcal{S} \rightrightarrows \mathcal{S}$, то клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *неперетинно напівнормалізованим* відносно підгрупи H групи $G^\sim$ і сім'ї підгруп $N_{\mathcal{S}}$ груп точкової симетрії.

Якщо $H = G^\sim$ і $N_\theta = \{\text{id}_{(x,u)}\}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, то клас, (неперетинно) напівнормалізований відносно дії групи H і сім'ї $N_{\mathcal{S}}$, є просто нормалізованим. Якщо $H = G^\sim$ і $N_\theta = G_\theta$ для будь якого $\theta \in \mathcal{S}$, то клас, напівнормалізований відносно дії групи H і сім'ї $N_{\mathcal{S}}$, є просто напівнормалізованим. Очевидно, що нормалізовані класи є напівнормалізованими.

Нижче описано методи класифікації допустимих перетворень і ліївських симетрій, зокрема, запропоновано нові техніки для ненормалізованих класів.

1.3. Класифікація допустимих перетворень і задачі групової класифікації

Найпотужнішим методом відшукування допустимих перетворень у класі диференціальних рівнянь досі залишається *прямий метод*. Застосування цього методу для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ передбачає дослідження пари довільних елементів $(\theta, \tilde{\theta}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ і точкового перетворення змінних (x, u) найзагальнішого вигляду $\Phi: \tilde{x} = X(x, u), \tilde{u} = U(x, u)$ з умовою невиродженості $|\partial(X, U)/\partial(x, u)|$ і припущення, що $\Phi_*\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$. Далі треба виразити похідні $\tilde{u}$ за $\tilde{x}$ через похідні u за x , використавши ланцюгове правило, і

підставити знайдені вирази в систему $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$, отримавши в результаті систему $(\Phi^{-1})_*\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$, що має бути тотожністю на розв'язках системи $\mathcal{L}_{\theta}$. Щоб урахувати цю умову, ранжуємо ті похідні u , що сумісні зі структурою $\mathcal{L}_{\theta}$, підставляємо вирази для головних похідних u системи $\mathcal{L}_{\theta}$ і її диференціальних наслідків в $(\Phi^{-1})_*\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ і розщеплюємо результуючу систему відносно параметричних похідних u . Отримуємо систему для виразів довільних елементів $\tilde{\theta}$ через (θ, X, U) і систему DE визначальних рівнянь на компоненти перетворення Φ . Система DE містить тільки набір довільних елементів θ (відповідно, $(\Phi^{-1})_*\tilde{\theta}$).

Припускаючи, що θ пробігає множину значень $\mathcal{S}$, з урахуванням допоміжної системи на $\mathcal{S}$ розщеплюємо рівняння з системи DE за похідними θ . Таким чином отримуємо систему $DE^{\sim}$ визначальних рівнянь на (x, u) -компоненти звичайних перетворень еквівалентності. Після знаходження (x, u) -компонент з системи $DE^{\sim}$, θ -компоненти звичайних перетворень еквівалентності отримуємо з рівнянь, що пов'язують θ і $\tilde{\theta}$. Це призводить до побудови звичайної групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Якщо множини розв'язків систем DE і $DE^{\sim}$ співпадають, то $\mathcal{G}^{\sim} = \mathcal{G}^{G^{\sim}}$, тобто клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є нормалізованим, що завершує опис групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$. Перший приклад такого опису в літературі представлено нормалізованим класом узагальнених рівнянь Бюргерса вигляду $u_t + uu_x + f(t, x)u_{xx} = 0$ у роботі [183], хоча властивість нормалізованості не було використано явно.

У інших випадках клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ не є нормалізованим, й інтегрування системи DE, яке можна виконувати з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності допустимих перетворень, є складною задачею. Для спрощення цієї задачі існують різноманітні техніки, наведемо деякі з них.

Розбиття класів на підкласи. Нехай множину $\mathcal{S}$ можна представити як неперетинне (диз'юнктне) об'єднання її підмножин, $\mathcal{S} = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{S}_{\gamma}$, де Γ — множина індексів, причому кожную підмножину $\mathcal{S}_{\gamma}$ виокремлено серед $\mathcal{S}$ додатковими умовами, що є диференціальними рівняннями або нерівно-

стями. Розбиття $\mathcal{S}$ еквівалентно розбиттю класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ на підкласи $\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$ з індексом γ , що пробігає множину значень Γ , а саме $\mathcal{L}|\mathcal{S} = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$. Позначимо групу еквівалентності і групоїд еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$ через $G_\gamma^\sim$ і $\mathcal{G}_\gamma^\sim$ відповідно.

Якщо системи з різних підкласів розбиття не пов'язані точковими перетвореннями, то розбиття класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ породжує розбиття $\mathcal{G}^\sim = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}_\gamma^\sim$ групоїда еквівалентності. При цьому структура групоїда певного підкласу може бути складнішою за структуру всього класу.

Попередній аналіз системи DE потрібен для зручного розбиття класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$, щоб для кожного $\gamma \in \Gamma$ структура групоїда $\mathcal{G}_\gamma^\sim$ була простішою за структуру групоїда $\mathcal{G}^\sim$. Тоді можна окремо знайти $\mathcal{G}_\gamma^\sim$ та об'єднати їх. Розбиття на нормалізовані підкласи є найкращим, оскільки для них $\mathcal{G}_\gamma^\sim = \mathcal{G}^{G_\gamma^\sim}$, а отже $\mathcal{G}^\sim = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{G}^{G_\gamma^\sim}$ [254, 261, 315].

Є кілька узагальнень техніки розбиття. Зокрема, неперетинні підкласи можуть бути пов'язані точковими перетвореннями і тоді розбиття класу на підкласи $\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$ не призводить до відповідного розбиття групоїда $\mathcal{G}^\sim$ на групоїди $\mathcal{G}_\gamma^\sim$. Розглянемо випадок, коли є розбиття класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ на нормалізовані підкласи $\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, і для будь-яких фіксованих $\gamma_0 \in \Gamma$, $\gamma \in \Gamma$ існує точкове перетворення Φ_γ , що відображає клас $\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$ на клас $\mathcal{L}|\mathcal{S}_{\gamma_0}$. При цьому можна припустити, що $\Phi_{\gamma_0} = \text{id}_{(x,u)}$. Для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ нормалізованість класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma$ впливає з нормалізованості класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}_{\gamma_0}$ й існування перетворення Φ_γ , причому

$$\mathcal{G}^\sim = \left\{ ((\Phi_\gamma^{-1})_* \theta, \Phi_{\gamma'}^{-1} \circ (\varpi \mathcal{T}) \circ \Phi_\gamma, (\Phi_{\gamma'})_*(\mathcal{T}_* \theta)) \mid \theta \in \mathcal{S}_{\gamma_0}, \mathcal{T} \in G_{\gamma_0}^\sim, \gamma, \gamma' \in \Gamma \right\}. \quad (1.1)$$

Зокрема, таку структуру має групоїд класу (4.43), де параметр σ виступає у якості γ .

Умову, що клас $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ є неперетинним об'єднанням відповідних підкласів, можна послабити, дозволивши перетини в підкласах об'єднання. Приклади розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані підкласи, що

мають спільну частину, наведено в роботах [303, 311] (дивись також підрозділ 2.2 дисертації). У цих роботах класи рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими або експоненціальними нелінійностями представлено у вигляді об'єднання нормалізованих класів, деякі з яких перетинаються. Групоїди цих класів складають допустимі перетворення з групоїдів дії підкласів з розбиття, а також композицій компонентних допустимих перетворень з групоїдів дії різних підкласів, що перетинаються.

Побудова узагальненої / розширеної / розширеної узагальненої груп еквівалентності. Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ не є нормалізованим у звичайному сенсі, можна спробувати описати групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$, розглянувши існуючі узагальнення групи еквівалентності, для яких клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є нормалізованим у відповідному сенсі [240, 261, 315].

Перетворення між класами. Припустимо, що існує клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ (систем) диференціальних рівнянь з тими самими незалежними і залежними змінними x, u , як і системи класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, і така сім'я точкових перетворень $\mathcal{F} = \{\Psi^{\theta} \mid \theta \in \mathcal{S}\}$, що $\Psi^{\theta}_* \mathcal{L}_{\theta} \in \mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, а також для будь-якого $\theta' \in \mathcal{S}'$ існує такий елемент $\theta \in \mathcal{S}$, для якого $\Psi^{\theta}_* \mathcal{L}_{\theta} = \mathcal{L}'_{\theta'}$. Тоді сім'я $\mathcal{F}$ породжує відображення $\mathcal{F}_*$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$, причому $\mathcal{F}_* \mathcal{L}_{\theta} := \Psi^{\theta}_* \mathcal{L}_{\theta}$, або, еквівалентно, відображення $\mathcal{F}_*: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ з умовою $\mathcal{F}_* \theta = \theta'$, якщо $\Psi^{\theta}_* \mathcal{L}_{\theta} = \mathcal{L}'_{\theta'}$ [261, 309]. Сім'я $\mathcal{F}$ також породжує відображення $\mathcal{F}_*: \mathcal{G}^{\sim} \rightarrow \mathcal{G}^{\sim'}$ групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ в групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim'}$ класу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$, визначене як

$$\mathcal{G}^{\sim} \ni \mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{F}_*} ((\Psi^{\theta})_* \theta, \Psi^{\tilde{\theta}} \circ \Phi \circ (\Psi^{\theta})^{-1}, (\Psi^{\tilde{\theta}})_* \tilde{\theta}) \in \mathcal{G}^{\sim'}.$$

Фактично це відображення є гомоморфізмом групоїдів, оскільки

$$\mathcal{F}_*(\mathcal{T}_1 \star \mathcal{T}_2) = (\mathcal{F}_* \mathcal{T}_1) \star (\mathcal{F}_* \mathcal{T}_2), \quad \mathcal{F}_*(\text{id}_{\theta}) = \text{id}_{\mathcal{F}_* \theta}, \quad \mathcal{F}_*(\mathcal{T}^{-1}) = (\mathcal{F}_* \mathcal{T})^{-1}$$

для будь-яких $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{G}^{\sim}$, $\theta \in \mathcal{S}$, $\mathcal{T} \in \mathcal{G}^{\sim}$. Цей гомоморфізм є сюр'єктивним. Дійсно, візьмемо будь-яке $\mathcal{T}' = (\theta', \Phi', \tilde{\theta}') \in \mathcal{G}^{\sim'}$. Завдяки

вибору сім'ї $\mathcal{F}$ існують такі $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}$, що $\mathcal{F}_*(\theta) = \theta'$, причому $\mathcal{F}_*(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}'$. Трійка $\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta})$ з $\Phi = (\Psi^{\tilde{\theta}})^{-1} \circ \Phi' \circ \Psi^\theta$ належить групоїду $\mathcal{G}^\sim$, причому $\mathcal{F}_*\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. При вдалому виборі $\mathcal{F}$, структура групоїда $\mathcal{G}^{\sim'}$ простіша, ніж групоїда $\mathcal{G}^\sim$. Тоді результати дослідження групоїда $\mathcal{G}^{\sim'}$ можна відобразити сім'єю перетворень $\mathcal{F}$ і таким чином одержати результати для $\mathcal{G}^\sim$. Інколи зручне розбиття класу на підкласи стає очевидним лише після відображення цього класу в інший [241]. Групову класифікацію класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності можна отримати з подібної класифікації для класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}'$, використавши обернені до $\mathcal{F}$ перетворення. Таким чином було прокласифіковано ліївські симетрії в класах $(1+1)$ -вимірних рівнянь Колмогорова й Фоккера–Планка з точністю до загальної точкової еквівалентності, використавши класифікацію для класу нелінійних рівнянь теплопровідності з потенціалами [262]. Застосування методу перетворень між класами для виконання групової класифікації з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності є складнішою задачею, однак цей метод дозволив вичерпно прокласифікувати ліївські симетрії квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі степеневою та експоненціальною нелінійністю [298, 309].

Важливим частинним випадком відображень між класами є відображення класів на їхні підкласи. Такі відображення породжено підгрупами відповідних груп еквівалентності класу. Нехай $\mathcal{S}'$ є підмножиною множини $\mathcal{S}$, яку виокремлено з $\mathcal{S}$ додатковими рівняннями або нерівностями на θ . Тоді $\mathcal{L}|\mathcal{S}'$ є підкласом класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$, а його групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim'}$ є підгрупоїдом групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$. Припустимо, що для деякої підгрупи H групи $G^\sim$ кожна орбіта групоїда дії $\mathcal{G}^H$ перетинає $\mathcal{S}'$ тільки для одного θ' . Позначимо через Ψ^θ таке точкове перетворення $\varpi_*\mathcal{T}$ з $\mathcal{T} \in H$, що $\mathcal{T}_*\theta \in \mathcal{S}'$. Тоді сім'я перетворень $\mathcal{F} = \{\Psi^\theta \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ задовольняє необхідні умови для генерування відповідного відображення $\mathcal{F}_*: \mathcal{L}|\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}|\mathcal{S}'$ і відповідного сюр'єктивного гомоморфізму $\mathcal{F}_*: \mathcal{G}^\sim \rightarrow \mathcal{G}^{\sim'}$. Ці відображення реалізують калібрування довільних елементів класу.

Умовні групи еквівалентності. Групи еквівалентності підкласів класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають умовними групами еквівалентності. Умовну групу еквівалентності $G^{\sim'}$ підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають максимальною, якщо для будь-якого підкласу класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, що містить $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, його група еквівалентності не містить $G^{\sim'}$ у якості підгрупи. Група еквівалентності $G^{\sim}$ всього класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ діє на підкласах класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ одночасно з їхніми групами еквівалентності, і множина максимальних умовних груп еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ замкнена під дією цієї групи. Отже, максимальні умовні групи еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна класифікувати з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності. Така класифікація може бути кроком в описі групоїда $\mathcal{G}^{\sim}$ [261]. Для деяких класів цей єдиний крок дає повний опис [239, 240]. Класифікацію максимальних умовних груп еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна комбінувати з розбиттям $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на підкласи, сумісні зі структурою множини таких групоїдів. Також можна розглядати узагальнені версії умовних груп еквівалентності [239, 315].

Породжувальна множина допустимих перетворень. Множину $\mathcal{B} = \{\mathcal{T}_{\gamma} \in \mathcal{G}^{\sim} \mid \gamma \in \Gamma\}$, де Γ — множина індексів, називають *породжувальною множиною допустимих перетворень* у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності, якщо будь-яке допустиме перетворення класу можна представити як композицію скінченної кількості елементів множини $\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}} \cup \mathcal{G}^{\mathcal{G}^{\sim}}$, де $\hat{\mathcal{B}} := \{\mathcal{T}^{-1} \mid \mathcal{T} \in \mathcal{B}\}$ — множина обернених перетворень з генеруючої множини. Щоб забезпечити мінімальність множини $\mathcal{B}$, її треба вибрати як підмножину множини $\mathcal{G}^{\sim} \setminus \mathcal{G}^{\mathcal{G}^{\sim}}$.

Якщо для деякого класу $G^{\sim}$ -еквівалентних допустимих перетворень можна вибрати їх канонічного представника, то саме цього представника треба включити в множину $\mathcal{B}$.

Допустимі перетворення $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *компоновними з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності*, якщо допустиме перетворення, що є $G^{\sim}$ -еквівалентним перетворенню $\mathcal{T}_1$, є компоновним з перетворенням $\mathcal{T}_2$, або якщо $\mathcal{T}_1$ є компоновним з допустимим перетворенням, що є

$G^\sim$ -еквівалентним перетворенню $\mathcal{T}_2$. Це має місце тоді і тільки тоді, коли існує таке $\mathcal{T} \in G^\sim$, що $\mathcal{T}_*(t(\mathcal{T}_1)) = s(\mathcal{T}_2)$. Підмножину $\mathcal{B}$ групоїда $\mathcal{G}^\sim$ називають *внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності*, якщо з компоновності елементів множини $\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності випливає їх звичайна компоновність. Необхідною умовою внутрішньої сумісності множини $\mathcal{B}$ є рівність

$$(s(\mathcal{B}) \times t(\mathcal{B})) \cap (s \times t)(\mathcal{G}^{G^\sim} \setminus \mathcal{G}^f) = \emptyset,$$

яка означає, що немає такого елемента групоїда дії $\mathcal{G}^{G^\sim}$ у множині з різними початком і кінцем. Якщо $\mathcal{B}$ є внутрішньо сумісною множиною групоїда $\mathcal{G}^\sim$ відносно $G^\sim$ -еквівалентності, то будь-який елемент групоїда $\mathcal{G}^\sim$ є $G^\sim$ -еквівалентним композиції скінченної кількості елементів множини $\mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}}$. Тоді для будь-якого $\mathcal{T} \in \mathcal{G}^\sim$ існує $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_{n+1} \in \mathcal{G}^{G^\sim}$ і такі $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n \in \mathcal{B} \cup \hat{\mathcal{B}}$, що $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \star \mathcal{T}_1 \star \dots \star \mathcal{T}_n \star \mathcal{T}_{n+1}$. Якщо додатково генеруюча множина $\mathcal{B}$ є мінімальною з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, то представлення для $\mathcal{T}$ є єдиним з точністю до перетворень

$$\tilde{\mathcal{T}}_0 = \mathcal{T}_0 \star \check{\mathcal{T}}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_{n+1} = \mathcal{T}_n^{-1} \star \dots \star \mathcal{T}_1^{-1} \star \check{\mathcal{T}}^{-1} \star \mathcal{T}_1 \star \dots \star \mathcal{T}_n \star \mathcal{T}_{n+1}$$

з довільним $\check{\mathcal{T}} \in \mathcal{G}_{t(\mathcal{T}_0)}$, якщо $n > 0$, і з умовою $\mathcal{T}_{n+1} = \text{id}_{t(\mathcal{T}_0)}$, якщо $n = 0$. *Метод розгалуженого розщеплення.* Цей метод запропоновано в роботі [20] як покращений варіант прямого методу групової класифікації. Він полягає у спеціальному розгляді системи визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів лівської симетрії систем з розглядуваного класу в залежності від кількості незалежних обмежень на довільні елементи θ , породжених цією системою. Тому цей підхід можна поширити на дослідження інших об'єктів, пов'язаних з класами систем диференціальних рівнянь, зокрема законів збереження [58], умовних груп еквівалентності [240] і породжувальних множин допустимих перетворень [301]. Метод розгалуженого розщеплення можна вдосконалити певними алгебраїчними техніками [56, 58].

Бієктивні функтори між групоїдами. Припустимо, що існує ізоморфізм між групоїдом $\mathcal{G}^\sim$ і групоїдом еквівалентності $\tilde{\mathcal{G}}^\sim$ класу $\tilde{\mathcal{L}}|_{\tilde{\mathcal{S}}}$, і при цьому групоїд $\tilde{\mathcal{G}}^\sim$ відомий або його простіше знайти, ніж групоїд $\mathcal{G}^\sim$. При цьому класи $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\tilde{\mathcal{L}}|_{\tilde{\mathcal{S}}}$ не обов'язково пов'язані точковими перетвореннями, але опис групоїда $\tilde{\mathcal{G}}^\sim$ призводить до опису групоїда $\mathcal{G}^\sim$. Цю техніку вперше успішно застосовано для дослідження групоїдів еквівалентності у роботі [301] (див. також підрозділ 4.2).

Групам G^θ , $G^\cap$ і $G^\sim$ відповідають алгебри Лі $\mathfrak{g}^\theta$, $\mathfrak{g}^\cap$ і $\mathfrak{g}^\sim$, утворені операторами локальних однопараметричних підгруп відповідних груп, які називають *максимальними алгебрами лівської інваріантності* систем $\mathcal{L}_\theta$, *алгеброю ядра основних груп* або *ядром максимальних алгебр лівської інваріантності* систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ та *алгеброю еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відповідно, причому $\mathfrak{g}^\cap = \bigcap_{\theta \in \mathcal{S}} \mathfrak{g}_\theta$.

Задача (повної) групової класифікації для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (або $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності) полягає у знаходженні алгебри ядра основних груп $\mathfrak{g}^\cap$ та вичерпного списку $G^\sim$ -нееквівалентних (або $\mathcal{G}^\sim$ -нееквівалентних) значень θ разом із максимальними алгебрами лівської симетрії $\mathfrak{g}_\theta$, для яких $\mathfrak{g}_\theta \neq \mathfrak{g}^\cap$.

Допустиме перетворення з групоїда $\mathcal{G}^\sim \setminus \mathcal{G}^{G^\sim}$ між системами з класифікаційного переліку, отриманого з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, називають *додатковим перетворенням еквівалентності*. Доповнення групової класифікації, виконаної з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, усіма додатковими перетвореннями еквівалентності призводить до групової класифікації з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності.

Будь-яка версія алгебраїчного методу групової класифікації передбачає класифікацію з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності певних підалгебр, що містяться в оболонці $\mathfrak{g}_{(\cdot)} := \langle \mathfrak{g}_\theta, \theta \in \mathcal{S} \rangle$. Ефективність алгебраїчного методу залежить від додаткових умов, накладених на клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, зокрема, наскільки оболонка $\mathfrak{g}_{(\cdot)}$ сумісна з $G^\sim$ -еквівалентністю [54, § 12]. Нормалізовані класи є найбільш зручними для групової класифікації алгебра-

їчним методом. Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, то $\mathfrak{g}_{\langle \rangle} \subseteq \varpi_* \mathfrak{g}^\sim$, і повне розв'язання задачі групової класифікації для нього впливає з класифікації підходящих підалгебр $\mathfrak{g}^\sim$, чиї підняття перетворенням ϖ є максимальними алгебрами лівської інваріантності систем класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Оскільки в такому випадку $G^\sim$ -еквівалентність співпадає із $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентністю, і додаткових перетворень еквівалентності між випадками класифікації, виконаної з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності не виникає.

Це також справедливо, якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є напівнормалізованим відносно підгрупи H групи еквівалентності $G^\sim$ і сім'ї підгруп $N_{\mathcal{S}}$ груп точкової симетрії, і додатково підгрупа H і сім'я $N_{\mathcal{S}}$ відомі. У цьому випадку клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *визначено напівнормалізованим*. Тоді пошук $G^\sim$ -нееквівалентних підалгебр $\mathfrak{g}^\sim$ в алгебраїчному методі можна замінити на пошук H -нееквівалентних підалгебр інфінітезимального відповідника $\mathfrak{h}$ підгрупи H [198]. Напівнормалізованість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ щонайменше гарантує, що групова класифікація класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності співпадає з класифікацією цього класу з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності.

Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є ненормалізованим, то деякі випадки розширень лівської симетрії в цьому класі не пов'язані з підалгебрами алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ цього класу.

Означення 1.4. Максимальну алгебру лівської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ системи $\mathcal{L}_\theta$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ називають *регулярною* в цьому класі, якщо існує така підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, що $\mathfrak{g}_\theta = \varpi_* \mathfrak{s}$, і *сингулярною* в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ в іншому випадку.

Якщо $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}^\cap$, то максимальна алгебра лівської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ є регулярною в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ оскільки $\mathfrak{g}^\cap \subseteq \varpi_* \mathfrak{g}^\sim$. Продовження алгебри ядра основних груп $\mathfrak{g}^\cap$ на змінні $u_{(r)}$ і довільні елементи θ [102] природно вкладається в алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$. Якщо $\mathfrak{g}_\theta \neq \mathfrak{g}^\cap$ і $\mathfrak{g}_\theta$ — регулярна (відповідно, сингулярна) максимальна алгебра лівської інваріантності для певної системи класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, то пару, яку складають значення набору довільних елементів і алгебра симетрії $\mathfrak{g}_\theta$, називають регулярним (сингулярним) розширенням ядра основних груп $\mathfrak{g}^\cap$ у цьому класі.

Очевидно, що кожна з множин регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії окремо є інваріантною відносно дії групи еквівалентності $G^\sim$, але не відносно дії $\mathcal{G}^\sim$. Іншими словами, регулярні розширення ліївської симетрії $G^\sim$ -нееквівалентні сингулярним, але можуть бути $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентні ним (див., наприклад, зауваження 4.14). Це також означає, що розширення ліївської симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$ з довільними елементами θ , що задовольняють умову $s^{-1}(\theta) \neq s^{-1}(\theta) \cap \mathcal{G}^{G^\sim}$ або, еквівалентно, $t^{-1}(\theta) \neq t^{-1}(\theta) \cap \mathcal{G}^{G^\sim}$ (тобто для системи, що є початком або кінцем допустимого перетворення, не породженого перетворенням еквівалентності в класі $\mathcal{L}|_S$) також може бути регулярним. Зокрема, це має місце у випадку, коли фактор-множина множини $s^{-1}(\theta)$ по відношенню еквівалентності допустимих перетворень $t\text{-}G^\sim$ є дискретною.

Використовуючи означення 1.4, запропоновано процедуру групової класифікації для ненормалізованого класу $\mathcal{L}|_S$ диференціальних рівнянь у рамках алгебраїчного методу, що складається з таких кроків:

1. Опис групоїду еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{L}|_S$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, наприклад, через побудову генеруючої множини $\mathcal{B}$ допустимих перетворень. Подальший розгляд спрощується, якщо множина $\mathcal{B}$ є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності.
2. Класифікація з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності ліївських симетрій систем $\mathcal{L}_\theta$ з θ , що задовольняють умову $s^{-1}(\theta) \neq s^{-1}(\theta) \cap \mathcal{G}^{G^\sim}$ або $t^{-1}(\theta) \neq t^{-1}(\theta) \cap \mathcal{G}^{G^\sim}$. Це дає повний список $\mathcal{G}^\sim$ -нееквівалентних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{L}|_S$, що є сингулярними або регулярними, але пов'язаними з іншими розширеннями ліївської симетрії, що належать $\mathcal{G}^\sim \setminus \mathcal{G}^{G^\sim}$. На цьому кроці можна використати як прямий, так і алгебраїчний метод групової класифікації.
3. Виконання (повної) попередньої групової класифікації класу $\mathcal{L}|_S$. Оптимізована версія такої класифікації включає класифікацію кандидатів на підходящі підалгебри алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ з точ-

ністю до $G^\sim$ -еквівалентності і побудову, якщо це можливо, систем із класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, що допускають проєкції знайдених кандидатів за допомогою ϖ_* у якості своїх алгебр ліівської інваріантності. Для кожної одержаної системи вибираємо кандидата, що є максимальним за включенням. Такий кандидат завжди існує.

4. Об'єднання переліків, отриманих на кроках 2 і 3, та виключення повторень з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності дають повний список розширень ліівської симетрії в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з точністю до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності.
5. Розширення частини отриманого на кроці 4 переліку, що стосується випадків з кроку 2, композиціями допустимих перетворень з множини $\mathcal{B}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Це дає повний перелік розширень ліівської симетрії в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Всі можливі додаткові перетворення еквівалентності між випадками цього переліку породжено елементами з множини $\mathcal{B}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

Порядок кроків або навіть окремих операцій може змінюватись у залежності від конкретного класу диференціальних рівнянь.

Застосування цієї техніки продемонстровано в підрозділі 4.2.

Розділ 2

Групоїди еквівалентності в груповому аналізі нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку

Еволюційні рівняння другого порядку в розмірності $1+1$ моделюють чимало фізичних і біологічних процесів та виникають у найрізноманітніших галузях науки, зокрема у квантовій теорії поля [108, с. 294–341], фізиці надротових пристроїв і напівпровідників [95], популяційній генетиці [221].

Моделльні рівняння, що зустрічаються у застосуваннях, часто містять сталі або функціональні параметри, а отже складають класи рівнянь. Важливою задачею є дослідження трансформаційних властивостей таких класів, а саме опис невироджених точкових перетворень між членами класу. Якщо дві системи диференціальних рівнянь пов'язані таким перетворенням, то їх називають еквівалентними або подібними [23]. Відповідно є еквівалентними між собою простори локальних законів збереження, симетрії різних типів і сім'ї інваріантних розв'язків таких систем. Зокрема, метод еквівалентності дозволяє побудувати розв'язки системи з відомих розв'язків еквівалентної системи [299, 300, 302]. Використання допустимих перетворень дозволяє суттєво спростити класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь [198, 242, 261, 299, 300, 302], зокрема класифікації різних типів симетрій, побудову локальних законів збереження і точних розв'язків, а також дослідження інтегровності [78, 172, 192, 313]. Також важливо, що нормалізовані класи мають простіші трансформаційні властивості та є зручнішими для дослідження. Отже, важливими задачами групового аналізу, окрім безпосереднього

розв'язання задач групової класифікації, пошуку різних типів симетрій та точних розв'язків, є також побудова групоїдів еквівалентності для класів рівнянь, що є цікавими для застосувань, та дослідження властивості нормалізованості таких класів.

Однією з основних задач групового аналізу диференціальних рівнянь є класифікація операторів редукції диференціальних рівнянь [175]. У випадку ліівських симетрій цю задачу називають класифікацією операторів редукції. Оператор редукції $(1+1)$ -вимірного диференціального рівняння з частинними похідними з незалежними змінними t, x і залежною змінною u — це такий лінійний диференціальний оператор першого порядку $Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u$ з $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, що загальний розв'язок відповідної умови інваріантної поверхні $Q[u] := \eta - \tau u_t - \xi u_x = 0$ є анзацом, який редукує кількість незалежних змінних на одну змінну. У випадку $(1+1)$ -вимірного диференціального рівняння з частинними похідними відбувається редукція до звичайного диференціального рівняння.

Алгоритмічний метод редукції є дієвим інструментом пошуку точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, загальної теорії інтегрування яких не існує. Найвідомішими методами редукції є метод ліівської редукції, що походить з робіт С. Лі, і неklasичний метод, запропонований у роботах [61, 68]. Критерій неklasичної інваріантності вперше сформульовано у роботі В.І. Фуцича й І.М. Цифри [118], *теорію сингулярних і регулярних модулів редукції* розвинуто в [75]. Некласичні оператори редукції також називають *неklasичними симетріями* [236], *умовними симетріями* [203], а також *Q -умовними симетріями* [33] (див. огляд [194], а також статті [115, 116, 119, 132, 230, 237, 331] і монографію [88]).

Існує також прямий метод редукції, що передбачає безпосередню підстановку анзацу в рівняння [29, 92]. У роботах [75, 343] запропоновано строге означення редукції та доведено, що найбільш загальний прямий метод редукції еквівалентний методу неklasичної (умовної) редукції [75].

Отже, виникає задача класифікації операторів редукції для важливих у застосуваннях класів диференціальних рівнянь з частинними похідними. Головна перевага ліївського методу полягає в тому, що визначальні рівняння на коефіцієнти ліївських операторів редукції є лінійними. Тому побудова операторів ліївської симетрії для фіксованого рівняння є рутинною задачею, яку в більшості випадків можна розв'язати із використанням пакетів символьних обчислень, наприклад пакету GEM [89, 90] або команди Infinitesimals пакету PDEtools програми Maple. На жаль, задачі групової класифікації, які стосуються класів диференціальних рівнянь, можна розв'язати із використанням пакетів символьних обчислень тільки для найпростіших класів. Більшість класів потребує застосування таких методів сучасного групового аналізу, як калібрування довільних елементів класу, використання перетворень з узагальнених та розширених груп еквівалентності, методу перетворень між класами, метод розбиття на нормалізовані підкласи та інших (див., наприклад, [195, 242, 258, 309, 311]).

Класифікація неklasичних операторів редукції є складнішою задачею, оскільки у цьому випадку визначальні рівняння є нелінійними. Розрізняють регулярні й сингулярні неklasичні оператори редукції. Задача відшукування сингулярних операторів редукції для $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь є “no-go” проблемою, оскільки вона зводиться до розв'язання вихідного рівняння, тому зазвичай розгляд обмежують регулярними неklasичними операторами редукції [75, 117, 193, 253, 255, 341]. Але, зважаючи на нелінійність визначальних рівнянь, навіть регулярні оператори редукції є складними для дослідження. Їх важко описати навіть для фіксованих рівнянь, не кажучи про класи рівнянь. Відомими є класифікації регулярних неklasичних операторів редукції для класів рівнянь дифузії з нелінійним джерелом $u_t = u_{xx} + f(u)$ [25, 32, 46, 93], нелінійних рівнянь реакції–дифузії $u_t = (D(u)u_x)_x + f(u)$ для степеневих та експоненціальних коефіцієнтів дифузії [45], нелінійних рівнянь фільтрації $u_t = f(u_x)u_{xx}$ [265], рівнянь Гакслі зі змінними коефіцієнтами $u_t = u_{xx} + k(x)u^2(1 - u)$ [77, 167], а

також узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t = uu_x + f(t, x)u_{xx}$ [248] (див. також класи, розглянуті в [87, 88]).

Цей розділ дисертації присвячено пошуку групоїдів еквівалентності та класифікації ліївських та некласичних операторів редукції в класах $(1+1)$ - і $(2+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку.

У підрозділі 2.1 досліджено трансформаційні властивості загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку $u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx})$, $H_{u_{xx}} \neq 0$, та побудовано ланцюжок його вкладених нормалізованих підкласів. Знайдено групоїди еквівалентності цих підкласів. Особливу увагу приділено важливому для застосувань класу рівнянь типу реакції–дифузії–конвекції зі змінними коефіцієнтами.

Групову класифікацію класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями $f(x)u_t = (g(x)e^{nu_x})_x + h(x)e^{mu}$ виконано у підрозділі 2.2. Групоїд еквівалентності цього класу вичерпно описано через розбиття на нормалізовані підкласи й максимальні умовні групи еквівалентності. Досліджено граничні переходи (контракції) між рівняннями реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями і такими самими рівняннями з експоненціальними нелінійностями, а також між їх алгебрами ліївської симетрії, відповідними ліївськими анзацами, точними розв’язками та законами збереження.

У підрозділі 2.3 прокласифіковано закони збереження і потенціальні симетрії рівнянь дифузії у пористому середовищі $u_t = ((u^n)_x + f(x)u^m)_x$.

Клас узагальнених рівнянь Фішера з залежними від часу коефіцієнтами $u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u(1 - u)$, $ab \neq 0$, досліджено з точки зору ліївської симетрії в підрозділі 2.4. Знайдено групоїд еквівалентності та виконано вичерпну групову класифікацію цього класу. Точні розв’язки побудовано за допомогою методів еквівалентності й відображень між класами.

Клас рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля, $u_t = a^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3$, $ac \neq 0$, які також називають узагальненими рівняннями Фішера або рівняннями Ньюела–Вайтхеда, досліджено з точки зору ліївської й “некла-

сичної” симетрії в підрозділі 2.5. Виконано класифікації лівських і регулярних неklasичних операторів редукції. Вичерпно описано допустимі перетворення класу. Знайдено критерій звідності рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами до подібних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Побудовано широкі сім’ї точних розв’язків для рівнянь зі змінними коефіцієнтами з цього класу.

У підрозділі 2.6 виконано групові класифікації двох класів узагальнених рівнянь Бюргерса. Результати групової класифікації класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінною в’язкістю $u_t + a(u^n)_x = g(t)u_{xx}$, $ag \neq 0$, $n \geq 2$, застосовано до розв’язання крайової задачі для таких рівнянь, а також для отримання групової класифікації класу узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним уповільненням і залежними від часу коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}$, $ng \neq 0$. При цьому використано метод еквівалентності, запропонований у [299].

Підрозділ 2.7 присвячено груповому аналізу класу $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова $u_t = f(t)u_{yy} - g(t)[K(u)]_x$, $fgK_{uu} \neq 0$. Класифікаційні списки отримано для двох можливих калібрувань довільних елементів. Показано, що групу еквівалентності класу й, зокрема, її тип можна використовувати для вибору оптимального калібрування.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [5, 6, 166, 224, 249, 302, 305, 316].

2.1. Групоїди еквівалентності класів $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку

У цьому підрозділі розглянуто загальний клас $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}), \quad H_{u_{xx}} \neq 0, \quad (2.1)$$

та досліджено його трансформаційні властивості. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу та знайдено відповідні групоїди еквівалентності. Також розглянуто класи узагальнених рівнянь реакції-дифузії, що є підкласами класу (2.1), але при цьому не є нормалізованими. Побудовано їх групи еквівалентності.

2.1.1. Групоїди еквівалентності еволюційних рівнянь. Добре відомо, що будь-яке не вироджене точкове перетворення $\mathcal{T}$ між рівняннями $u_t = H$ і $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{H}$ з класу (2.1) має вид $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{x} = X(t, x, u)$, $\tilde{u} = U(t, x, u)$, задовольняє умову $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$ і продовжується на частинні похідні за ланцюговим правилом:

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \frac{D_t U D_x X - D_x U D_t X}{T_t D_x X}, \quad \tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{D_x U}{D_x X}, \quad \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{1}{D_x X} D_x \left(\frac{D_x U}{D_x X} \right),$$

де $D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{tt} \partial_{u_t} + u_{tx} \partial_{u_x} + \dots$, $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \dots$ — оператори повної похідної за змінними t, x [182, 184]. Нормалізованість класу (2.1) встановлено в роботі [263].

Теорема 2.1 ([263]). *Клас (2.1) є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групи еквівалентності складають перетворення*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \quad (2.2)$$

$$\tilde{H} = \frac{X_x U_u - X_u U_x}{T_t D_x X} H + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X}, \quad (2.3)$$

де $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$.

Тут і далі всі функції є довільними гладкими функціями своїх аргументів, що задовольняють лише явно вказані додаткові умови. Підклас квазілінійних еволюційних рівнянь можна виокремити з усього класу (2.1) умовою $H_{u_{xx}u_{xx}} = 0$, з якої випливає, що в цьому випадку можна репараметризувати клас (2.1), беручи дві інші функції як довільні елементи. Справедлива теорема.

Теорема 2.2. Клас квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку

$$u_t = G(t, x, u, u_x)u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad G \neq 0, \quad (2.4)$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності утворюють не вироджені точкові перетворення, де компоненти для змінних мають вигляд (2.2), а довільні елементи перетворюються таким чином:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \frac{(D_x X)^2}{T_t} G, \quad \tilde{F} = \frac{X_x U_u - X_u U_x}{T_t D_x X} F + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X} \\ &+ \frac{(X_{xx} + 2X_{xu}u_x + X_{uu}u_x^2)D_x U - (U_{xx} + 2U_{xu}u_x + U_{uu}u_x^2)D_x X}{T_t D_x X} G. \end{aligned}$$

Оскільки $D_x X = X_x + X_u u_x$, з вигляду компоненти перетворень для довільного елемента G впливає, що $X_u = 0$, якщо G не залежить від u_x . Доведено більш строге твердження, ніж лема 1, наведена в роботі [162].

Теорема 2.3. Клас рівнянь

$$u_t = G(t, x, u)u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad G \neq 0, \quad (2.5)$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \quad \tilde{G} = \frac{X_x^2}{T_t} G, \quad (2.6)$$

$$\tilde{F} = \frac{U_u}{T_t} F + \frac{U_t X_x - X_t D_x U}{T_t X_x} + \frac{X_{xx} D_x U - (U_{xx} + 2U_{xu}u_x + U_{uu}u_x^2)X_x}{T_t X_x} G,$$

де $T_t X_x U_u \neq 0$.

Важливим підкласом класу (2.5) є підклас, де функція F є поліномом степеня n за змінною u_x . Справедлива теорема.

Теорема 2.4. Клас рівнянь вигляду

$$u_t = G(t, x, u)u_{xx} + \sum_{k=0}^n F^k(t, x, u)u_x^k, \quad G \neq 0, \quad (2.7)$$

де $n \geq 2$, є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення, де компоненти для змінних t, x, u і довільного елемента G мають вигляд (2.6), а компоненти для довільних елементів F^k , $k = 0, \dots, n$, є розв'язками алгебраїчної системи рівнянь, що відрізняється для кожного фіксованого значення n і виникає після розщеплення рівняння

$$\sum_{k=0}^n \tilde{F}^k \left(\frac{U_u}{X_x} u_x + \frac{U_x}{X_x} \right)^k = \frac{1}{T_t X_x} [X_x U_u \sum_{k=0}^n F^k u_x^k + U_t X_x - X_t D_x U + (X_{xx} D_x U - (U_{xx} + 2U_{xu} u_x + U_{uu} u_x^2) X_x) G].$$

за різними степенями u_x .

Для фіксованих значень n усі формули перетворень довільних елементів можна виписати в явному вигляді. Розглянемо окремо важливі випадки, коли довільний елемент F в класі (2.5) є квадратичною або лінійною функцією за змінною u_x , тобто рівняння (2.7) з $n = 2$ та $n = 1$.

Теорема 2.5. *Клас рівнянь вигляду*

$$u_t = G(t, x, u) u_{xx} + F^2(t, x, u) u_x^2 + F^1(t, x, u) u_x + F^0(t, x, u), \quad (2.8)$$

де $G \neq 0$, є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \quad T_t X_x U_u \neq 0, \\ \tilde{G} &= \frac{X_x^2}{T_t} G, \quad \tilde{F}^2 = \frac{X_x^2}{T_t U_u^2} (U_u F^2 - U_{uu} G), \quad \tilde{F}^1 = \frac{1}{T_t U_u} \left[X_x U_u F^1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{X_x U_x}{U_u} (U_{uu} G - U_u F^2) - X_t U_u + (X_{xx} U_u - 2U_{xu} X_x) G \right], \\ \tilde{F}^0 &= \frac{1}{T_t} \left[\frac{U_x^2}{U_u} F^2 - U_x F^1 + U_u F^0 + U_t + \left(2 \frac{U_x}{U_u} U_{xu} - U_{xx} - \frac{U_x^2}{U_u^2} U_{uu} \right) G \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо підклас класу (2.8), який виокремлено умовою $F^2 = 0$. Його група еквівалентності є підгрупою групи еквівалентності нормалі-

зованого класу (2.8). Обмеження на перетворення знаходимо, покладаючи $\tilde{F}^2 = 0$ і $F^2 = 0$ у відповідній формулі, наведеній у теоремі 2.5. Це призводить до умови $U_{uu} = 0$. Справедлива теорема.

Теорема 2.6. *Клас рівнянь вигляду*

$$u_t = G(t, x, u)u_{xx} + F^1(t, x, u)u_x + F^0(t, x, u), \quad G \neq 0, \quad (2.9)$$

є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності утворюють перетворення

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U^1(t, x)u + U^0(t, x), \quad T_t X_x U^1 \neq 0, \quad (2.10)$$

$$\tilde{G} = \frac{X_x^2}{T_t} G, \quad \tilde{F}^1 = \frac{1}{T_t U^1} (X_x U^1 F^1 - X_t U^1 + (X_{xx} U^1 - 2U_x^1 X_x) G),$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^0 = \frac{1}{T_t} & \left[U^1 F^0 - (U_x^1 u + U_x^0) F^1 + U_t^1 u + U_t^0 \right. \\ & \left. + \left(2 \frac{U_x^1}{U^1} (U_x^1 u + U_x^0) - U_{xx}^1 u - U_{xx}^0 \right) G \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо ще один підклас класу (2.8), для якого умова $U_{uu} = 0$ також вірна для допустимих перетворень. Це підклас, виокремлений умовою $F^2 = G_u$, вигляду

$$u_t = (G(t, x, u)u_x)_x + K(t, x, u)u_x + P(t, x, u), \quad G \neq 0. \quad (2.11)$$

Рівняння з класу (2.11) можна подати у вигляді

$$u_t = G u_{xx} + G_u u_x^2 + (G_x + K) u_x + P,$$

де зв'язки між довільними елементами цього класу та класу (2.8) задаються формулами $F^2 = G_u$, $F^1 = G_x + K$, $F^0 = P$. Оскільки рівняння з класу (2.11) містять похідні довільного елемента G , вони природно виникають у компонентах перетворень еквівалентності для довільних елементів. Таку групу еквівалентності можна вважати звичайною, якщо розширити набір довільних елементів похідними G_u , G_x і продовжити перетворення

з групи на ці нові довільні елементи

$$\tilde{G}_{\tilde{x}} = \frac{X_x}{T_t} G_x + 2 \frac{X_{xx}}{T_t} G, \quad \tilde{G}_{\tilde{u}} = \frac{X_x^2}{T_t U^1} G_u.$$

Це легко пояснити, якщо зобразити клас (2.11) у вигляді

$$u_t = G u_{xx} + G^1 u_x^2 + (G^2 + K) u_x + P$$

з додатковими довільними елементами $G^1 = G_u$, $G^2 = G_x$. Для такого репараметризованого класу перетворення еквівалентності вже не містять похідні довільних елементів.

Теорема 2.7. *Клас (2.11) після репараметризації є нормалізованим у звичайному сенсі. Його групу еквівалентності складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U^1(t, x)u + U^0(t, x), \quad T_t X_x U^1 \neq 0, \\ \tilde{G} &= \frac{X_x^2}{T_t} G, \quad \tilde{K} = \frac{X_x}{T_t} \left[K - \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2 \frac{U_x^1}{U^1} \right) G - 2(U_x^1 u + U_x^0) \frac{G_u}{U^1} - \frac{X_t}{X_x} \right], \\ \tilde{P} &= \frac{1}{T_t} \left[U^1 P + \frac{(U_x^1 u + U_x^0)^2}{U^1} G_u - (U_x^1 u + U_x^0)(G_x + K) + U_t^1 u + U_t^0 \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{U_x^1}{U^1} (U_x^1 u + U_x^0) - U_{xx}^1 u - U_{xx}^0 \right) G \right]. \end{aligned}$$

Підклас класу (2.11), виокремлений умовою $K = 0$, має вигляд

$$u_t = (G(t, x, u) u_x)_x + P(t, x, u), \quad G \neq 0. \quad (2.12)$$

Цей клас не є нормалізованим на відміну від усіх класів, розглянутих до цього. Обмеження на вигляд допустимих перетворень у класі (2.11) можна отримати, якщо покласти $K = 0$ і $\tilde{K} = 0$ в перетвореннях, наведених у теоремі 2.7. У результаті отримуємо рівняння

$$2 \left(\frac{U_x^1}{U^1} u + \frac{U_x^0}{U^1} \right) G_u + \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2 \frac{U_x^1}{U^1} \right) G + \frac{X_t}{X_x} = 0.$$

Подальші обмеження на функції X , U^1 , U^0 залежать від значень функції G . Якщо ця функція не задовольняє рівняння $(au + b)G_u + cG + d = 0$,

де a, b, c, d — функції, що залежать від t і x , то точкові перетворення між рівняннями з цього класу задовольняють умови $X_t = X_{xx} = U_x^1 = U_x^0 = 0$, а такий підклас класу (2.12) є нормалізованим у звичайному сенсі. Доведена теорема.

Теорема 2.8. *Група еквівалентності класу (2.12) є звичайною і складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0(t), \quad T_t U^1 \delta_1 \neq 0, \\ \tilde{G} &= \frac{\delta_1^2}{T_t} G, \quad \tilde{P} = \frac{1}{T_t} (U^1 P + U_t^1 u + U_t^0).\end{aligned}$$

Повний опис групоїда еквівалентності в ненормалізованому класі (2.12) потребує додаткового дослідження.

Класи еволюційних рівнянь зі змінним коефіцієнтом біля u_t часто виникають у застосуваннях. Тому розглянемо узагальнення рівнянь (2.11) вигляду

$$S(t, x)u_t = (G(t, x, u)u_x)_x + K(t, x, u)u_x + P(t, x, u), \quad SG \neq 0. \quad (2.13)$$

Зокрема, підкласами цього класу є рівняння реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u), \quad fgA \neq 0, \quad (2.14)$$

та рівняння конвекції-дифузії зі змінними коефіцієнтами

$$f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u)u_x, \quad fgA \neq 0. \quad (2.15)$$

Рівняння з цих класів моделюють багато фізичних, хімічних та біологічних процесів реального світу. Розширений груповий аналіз класу (2.15) виконано у роботах [159, 162–165].

Хоча коефіцієнт $S(t, x)$ можна відкалібрувати в одиницю сім'єю точкових перетворень

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int_{x_0}^x S(t, y) dy, \quad \tilde{u} = u,$$

клас (2.13) розглянуто окремо, оскільки його трансформаційні властивості є складнішими, ніж у класу (2.11). Справедлива теорема.

Теорема 2.9. *Будь-яке точкове перетворення між двома рівняннями з класу (2.13) має вигляд (2.10). Тоді відповідні довільні елементи пов'язані формулами*

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{K} + \tilde{G}_{\tilde{x}}}{\tilde{S}} &= \frac{X_x}{T_t S} \left[K + G_x + \left(\frac{X_{xx}}{X_x} - 2 \frac{U_x^1}{U^1} \right) G - 2(U_x^1 u + U_x^0) \frac{G_u}{U^1} - \frac{X_t}{X_x} S \right], \\ \frac{\tilde{G}}{\tilde{S}} &= \frac{X_x^2 G}{T_t S}, \quad \frac{\tilde{P}}{\tilde{S}} = \frac{1}{T_t S} \left[U^1 P + \frac{(U_x^1 u + U_x^0)^2}{U^1} G_u + (U_t^1 u + U_t^0) S \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{U_x^1}{U^1} (U_x^1 u + U_x^0) - U_{xx}^1 u - U_{xx}^0 \right) G - (U_x^1 u + U_x^0)(K + G_x) \right].\end{aligned}$$

Бачимо, що для класу (2.13) компоненти перетворень з групи еквівалентності для довільних елементів визначені лише для відношень цих елементів. Це можна пояснити наявністю специфічного калібрувального перетворення еквівалентності, яке не змінює незалежні і залежні змінні, а змінює лише вигляд довільних елементів класу, а саме

$$\tilde{S} = Z(t, x, S), \quad \tilde{G} = \frac{G}{S} Z, \quad \tilde{K} = \frac{K}{S} Z - G \left(\frac{Z}{S} \right)_x, \quad \tilde{P} = \frac{P}{S} Z,$$

де Z — довільна гладка функція своїх змінних, причому $Z_S \neq 0$.

Теорема 2.10. *Групу еквівалентності класу (2.13) складають перетворення*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U^1(t, x)u + U^0(t, x), \quad T_t X_x U^1 \neq 0, \\ \tilde{S} &= Z(t, x, S), \quad \tilde{G} = \frac{X_x^2 G}{T_t S} Z, \\ \tilde{K} &= \frac{X_x Z}{T_t S} \left[K - \left(\frac{X_{xx}}{X_x} + 2 \frac{U_x^1}{U^1} \right) G - 2 \mathcal{U} \frac{G_u}{U^1} - \frac{X_t}{X_x} S \right] - \frac{X_x}{T_t} G \left(\frac{Z}{S} \right)_x, \\ \tilde{P} &= \frac{Z}{T_t S} \left[U^1 P + \frac{\mathcal{U}^2}{U^1} G_u - \mathcal{U}(K + G_x) + (U_t^1 u + U_t^0) S \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{U_x^1}{U^1} \mathcal{U} - U_{xx}^1 u - U_{xx}^0 \right) G \right],\end{aligned}$$

де $\mathcal{U} = U_x^1 u + U_x^0$. Клас (2.13) нормалізований.

Клас (2.13) можна вважати нормалізованим у звичайному сенсі, оскільки його можна подати у вигляді $Su_t = Gu_{xx} + G^1u_x^2 + G^2u_x + P$ додатковими довільними елементами $G^1 = G_u$, $G^2 = K + G_x$.

Зауважимо, що підклас класу (2.13), який виокремлено умовою $K = 0$, тобто клас

$$S(t, x)u_t = (G(t, x, u)u_x)_x + P(t, x, u), \quad SG \neq 0, \quad (2.16)$$

не є нормалізованим. На відміну від класу (2.13), для класу (2.16) коефіцієнт S є суттєвим. Калібрувальні перетворення еквівалентності досить прості у цьому випадку, а саме: кожен коефіцієнт можна домножувати на ненульову гладку функцію змінної t , позначимо її $\psi(t)$. Група еквівалентності класу (2.16) ширша за групу еквівалентності його підкласу, виокремленого умовою $S = 1$.

Теорема 2.11. *Групу еквівалентності класу (2.16) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(x), \quad \tilde{u} = U^1(t)u + U^0(t), \quad T_t X_x U^1 \neq 0, \\ \tilde{S} &= \psi(t) \frac{T_t}{X_x} S, \quad \tilde{G} = \psi(t) X_x G, \quad \tilde{P} = \frac{\psi(t)}{X_x} (U^1 P + (U_t^1 u + U_t^0) S). \end{aligned}$$

Повний опис групоїду еквівалентності в ненормалізованому класі (2.16) потребує додаткового дослідження.

Отже, побудовано ланцюжок вкладених підкласів загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Для цих підкласів знайдено групи еквівалентності. Доведено, що всі розглянуті підкласи, крім двох, є нормалізованими, а тому для всіх нормалізованих підкласів вичерпно описано їх групоїди еквівалентності. Отримані результати можуть бути застосовані у розширеному груповому аналізі класів рівнянь, що є підкласами класів рівнянь, розглянутих у цьому підрозділі.

Зауважимо, що групову класифікацію загального класу $(1+1)$ -вимірних квазілінійних рівнянь другого порядку (2.4) виконано у [50].

Однак класифікаційні результати, представлені з точністю до найширшої точкової еквівалентності, незручні для отримання результатів групової класифікації для підкласів цього класу, розглянутих у підрозділах 2.2, 2.4–2.6. А отже ці підкласи потребують окремого дослідження їх трансформаційних, у тому числі й симетрійних, властивостей.

2.2. Розширений груповий аналіз класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями

Розширений груповий аналіз класу (2.14) розпочато у роботах [303, 309] з дослідження випадку степеневих коефіцієнтів A і B , а саме класу рівнянь

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m, \quad (2.17)$$

де $fg \neq 0$ і $(n, mh) \neq (0, 0)$. Класифікації лівських симетрій деяких підкласів класу (2.17) представлено в роботах [8, 21, 113, 287], найбільш важливі дослідження щодо неklasичних операторів редукції — в роботах [25, 32, 45, 46, 93, 255, 308, 310]. Цей підрозділ присвячено розширеному груповому аналізу підкласу класу (2.14) з експоненціальними A і B , а саме класу рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu}, \quad (2.18)$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x , причому $fg \neq 0$, n і m — довільні сталі. Випадок $n = m = 0$, що відповідає лінійним рівнянням з класу (2.18), виключено з розгляду. Підклас квазілінійних рівнянь (2.18), виокремлений умовами $n = 0$ і $m \neq 0$, досліджено у роботах [298, 310], відповідні результати наведено у додатку А дисертації. Нелінійні рівняння з класу (2.18) (випадок $n \neq 0$) не пов'язані з лінійними і квазілінійними рівняннями з цього ж класу. Цей підрозділ присвячено нелінійним рівнянням (2.18), отже надалі під класом (2.18) будемо розуміти сукупність цих рівнянь з додатковою умовою з $fgn \neq 0$.

2.2.1. Групоїд еквівалентності. Допустимі перетворення в класі (2.18) досліджено прямим методом [184]. При дослідженні виникають такі суттєво різні випадки

$$1) \quad m \neq 0, n; \quad 2) \quad m = 0; \quad 3) \quad m = n.$$

Також спеціальним є випадок $h = 0$, оскільки тоді m невизначено, але його можна об'єднати з випадком $m = n$. Тому у перших двох випадках вважатимемо, що $h \neq 0$. Одержані результати підсумовано в теоремах 2.12, 2.13 і 2.14.

Теорема 2.12. *Розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^\sim$ класу (2.18) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \psi(x), \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_0 \delta_1}{\varphi_x} \Psi f, \quad \tilde{g} = \delta_0 \varphi_x \Psi^2 g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0 \delta_3}{\varphi_x} e^{-\frac{m}{\delta_3} \psi} \Psi h, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_3}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{\delta_3}, \end{aligned}$$

де φ — довільна гладка функція змінної x , причому $\varphi_x \neq 0$; ψ і Ψ визначено формулами:

$$\psi(x) = -\frac{\delta_3}{n} \ln |\Psi(x)|, \quad \Psi(x) = \delta_4 \int \frac{dx}{g(x)} + \delta_5;$$

$\delta_j, j = 0, \dots, 5$, — дійсні сталі, що задовольняють умови $\delta_0 \delta_1 \delta_3 \neq 0$, $(\delta_4, \delta_5) \neq (0, 0)$.

Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (2.18) є підгрупою розширеної узагальненої групи еквівалентності $\hat{G}^\sim$, яку можна виокремити умовою $\delta_4 = 0$.

Теорема 2.13. *Група еквівалентності $G_{m=n}^\sim$ класу*

$$f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{nu}, \quad nfg \neq 0, \quad (2.19)$$

є звичайною. Її утворюють перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \psi(x), \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_0 \delta_1}{\varphi_x} \Psi f, \quad \tilde{g} = \delta_0 \varphi_x \Psi^2 g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0 \delta_3}{n \varphi_x} [nh\Psi + (g\Psi_x)_x] \Psi, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_3}, \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, — дійсні сталі, що задовольняють умову $\delta_0\delta_1\delta_3 \neq 0$, φ, ψ — довільні гладкі функції змінної x , причому $\varphi_x \neq 0$, $\Psi(x) = e^{-\frac{n\psi(x)}{\delta_3}}$.

Група $G_{m=n}^\sim$ є нетривіальною максимальною умовною групою еквівалентності класу (2.18).

У випадку $m = 0$ нетривіальна умовна група еквівалентності виникає лише за додаткової умови $(h/f)_x = 0$.

Теорема 2.14. Підклас класу (2.18), виокремлений умовами $m = 0$ і $(h/f)_x = 0$, допускає розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_{m=0, (h/f)_x=0}^\sim$, що складається з перетворень

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \psi(t, x), \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_0}{\varphi_x} \Psi f, \quad \tilde{g} = \delta_0 \varphi_x \Psi^2 g, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_3},\end{aligned}$$

де функцію $T = T(t)$ визначено за формулами:

$$\begin{aligned}\mu\tilde{\mu} \neq 0: \quad \frac{e^{\tilde{n}\tilde{\mu}T} - 1}{\tilde{n}\tilde{\mu}} &= \delta_1 \frac{e^{n\mu t} - 1}{n\mu} + \delta_2, \quad \mu = 0, \tilde{\mu} \neq 0: \quad \frac{e^{\tilde{n}\tilde{\mu}T} - 1}{\tilde{n}\tilde{\mu}} = \delta_1 t + \delta_2, \\ \mu \neq 0, \tilde{\mu} = 0: \quad T &= \delta_1 \frac{e^{n\mu t} - 1}{n\mu} + \delta_2, \quad \mu = \tilde{\mu} = 0: \quad T = \delta_1 t + \delta_2,\end{aligned}$$

де $\mu = h/f$ і $\tilde{\mu} = \tilde{h}/\tilde{f}$ — ненульові дійсні сталі, φ — довільна гладка функція змінної x , причому $\varphi_x \neq 0$;

$$\psi(t, x) = -\frac{\delta_3}{n} \ln |T_t(t)\Psi(x)|, \quad \Psi(x) = \delta_4 \int \frac{dx}{g(x)} + \delta_5;$$

δ_j , $j = 0, \dots, 5$, — дійсні сталі, що задовольняють умови $\delta_0\delta_1\delta_3 \neq 0$ і $(\delta_4, \delta_5) \neq (0, 0)$.

Група еквівалентності $\hat{G}_{m=0, (h/f)_x=0}^\sim$ є узагальненою навіть для фіксованого n , оскільки компонента перетворень часової змінної залежить від сталої частки довільних елементів h і f . На відміну від групи $G_{m=n}^\sim$, яку буде використано під час групової класифікації відповідного підкласу (2.19), групу $\hat{G}_{m=0, (h/f)_x=0}^\sim$ не буде застосовано, оскільки її вплив не є

вирішальним для одержання результатів, однак перетворення з цієї групи зіграють роль додаткових перетворень еквівалентності в отриманому класифікаційному списку.

Результати опису групоїда еквівалентності класу (2.18) підсумовано в теоремах 2.15 і 2.16.

Теорема 2.15. *Нехай два рівняння*

$$f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu} \text{ і } \tilde{f}(\tilde{x})u_t = (\tilde{g}(\tilde{x})e^{\tilde{n}\tilde{u}}u_x)_x + \tilde{h}(\tilde{x})e^{\tilde{m}\tilde{u}}$$

пов'язані точковим перетворенням $\mathcal{T}$ змінних t, x, u . Тоді

$$\text{або } \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} = \frac{m}{n}, \quad \text{або } (m, \tilde{m}) = (0, \tilde{n}), \quad \text{або } (m, \tilde{m}) = (n, 0).$$

Перетворення $\mathcal{T}$ породжено перетворенням з групи

- a) $\hat{G}^\sim$, якщо або $m \neq 0, n$ або $m = 0, (h/f)_x \neq 0$;
- b) $G_{m=n}^\sim$, якщо $m = n$ і $\tilde{m} \neq 0$, тоді також $\tilde{m} = \tilde{n}$;
- c) $\hat{G}_{m=0, (h/f)_x=0}^\sim$, якщо $m = \tilde{m} = 0, (h/f)_x = 0$, тоді $(\tilde{h}/\tilde{f})_x = 0$.

Якщо $m = 0$ і $\tilde{m} = \tilde{n}$, тоді $(h/f)_x = 0$ і перетворення $\mathcal{T}$ є композицією перетворень з груп $\hat{G}_{m=0, (h/f)_x=0}^\sim$ і $G_{m=n}^\sim$, через проміжне рівняння з $h = 0$.

Випадок $m = n$ і $\tilde{m} = 0$ є подібним до попереднього випадку.

Теорема 2.16. *Клас (2.18) можна представити, як об'єднання його трьох нормалізованих підкласів, виокремлених умовами:*

1. $(h \neq 0, m \neq 0, n)$ або $(m = 0, (h/f)_x \neq 0)$;
2. $m = 0, (h/f)_x = 0$; 3. $m = n$.

Останні два підкласи мають непорожній перетин, який є нормалізованим підкласом класу (2.18) з $h = 0$.

Умови з першого випадку теореми 2.16 можна записати у вигляді однієї нерівності $(m - n)h(m^2 + ((h/f)_x)^2) \neq 0$.

2.2.2. Калібрування довільних елементів. З теореми 2.12 випливає, що сім'я перетворень еквівалентності:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)}, \quad \tilde{u} = u, \quad (2.20)$$

параметризована довільним елементом g , відображає клас (2.18) на його підклас з $\tilde{g} = 1$, що складається з рівнянь вигляду $\tilde{f}\tilde{u}_{\tilde{t}} = (e^{\tilde{n}\tilde{u}}\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{h}e^{\tilde{m}\tilde{u}}$.

Нові й старі довільні елементи пов'язано формулами: $\tilde{m} = m$, $\tilde{n} = n$, $\tilde{f} = fg$, $\tilde{h} = gh$. Отже, не втрачаючи загальності, можна обмежити розгляд класом

$$f(x)u_t = (e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu}, \quad nf \neq 0, \quad (2.21)$$

замість класу (2.18), оскільки всі результати щодо симетрій, розв'язків та законів збереження, отримані для підкласу (2.21), можна поширити на весь клас (2.18) перетвореннями (2.20). Іншими словами, перетвореннями з групи $\hat{G}^\sim$ виконано калібрування $g = 1$ довільних елементів класу (2.18). Зауважимо, що довільний елемент n також можна відкалібрувати в одиницю простим масштабуванням $u' = nu$, але для зручності подальшого використання результатів цього не робитимемо.

Наслідками теорем 2.12 і 2.13 є такі твердження.

Наслідок 2.17. *Узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу (2.21) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \frac{\delta_6 x + \delta_7}{\delta_4 x + \delta_5}, \quad \tilde{u} = \delta_3 u - \frac{\delta_3}{n} \ln |\delta_4 x + \delta_5|, \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_1}{\Delta^2} |\delta_4 x + \delta_5|^3 f, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_3}{\Delta^2} |\delta_4 x + \delta_5|^{\frac{m}{n}+3} h, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_3}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{\delta_3}, \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 7$, — дійсні сталі, що задовольняють умови $\delta_1 \delta_3 \neq 0$, $\Delta = \delta_5 \delta_6 - \delta_4 \delta_7 \neq 0$, причому набір сталих $(\delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7)$ визначено з точністю до ненульового множника, тобто $\Delta = \pm 1$.

Наслідок 2.18. *Клас рівнянь вигляду*

$$f(x)u_t = (e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{nu}, \quad nf \neq 0, \quad (2.22)$$

допускає узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_{1,m=n}^{\sim}$, що складається з перетворень

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \frac{\delta_3}{2n} \ln |\delta_0^2 \varphi_x|, \\ \tilde{f} &= \delta_0 \delta_1 |\varphi_x|^{-\frac{3}{2}} f, \quad \tilde{h} = \delta_3 \varphi_x^{-2} h + \frac{\delta_3}{n} |\varphi_x|^{-\frac{3}{2}} (|\varphi_x|^{-\frac{1}{2}})_{xx}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_3},\end{aligned}\quad (2.23)$$

де δ_j , $j = 0, \dots, 3$, — дійсні сталі, що задовольняють умову $\delta_0 \delta_1 \delta_3 \neq 0$, $\varphi = \varphi(x)$ — довільна гладка функція свого аргументу, причому $\varphi_x \neq 0$.

Перетвореннями з групи еквівалентності $\hat{G}_{1,m=n}^{\sim}$ клас (2.22) можна відобразити на його підклас з лише одним довільним елементом, що залежить від x . Найзручнішими калібруваннями довільних елементів класу (2.22) є $f = 1$ або $h = 0$. Перше калібрування реалізує перетворення

$$\tilde{t} = \text{sign}(f)t, \quad \tilde{x} = \int_{x_0}^x f(y)^{\frac{2}{3}} dy, \quad \tilde{u} = u + \frac{1}{3n} \ln |f|, \quad (2.24)$$

що відображає рівняння вигляду (2.22) у такі рівняння такого самого вигляду з $\tilde{f} = 1$, тобто $\tilde{u}_{\tilde{t}} = (e^{\tilde{n}\tilde{u}} \tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{h} e^{\tilde{n}\tilde{u}}$. Довільні елементи h і n перетворюються за формулами $\tilde{h} = f^{-1} \left(f^{-\frac{1}{3}} h + n^{-1} (f^{-\frac{1}{3}})_{xx} \right)$, $\tilde{n} = n$.

Теорема 2.19. Узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_{f=g=1,m=n}^{\sim}$ класу рівнянь вигляду

$$u_t = (e^{nu} u_x)_x + h(x) e^{nu}, \quad n \neq 0, \quad (2.25)$$

утворюють перетворення

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_4 x + \delta_5, \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \frac{\delta_3}{n} \ln \frac{\delta_4^2}{\delta_1}, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_3}{\delta_4^2} h, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_3},$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 5$ — дійсні сталі, що задовольняють умови $\delta_1 \delta_3 \delta_4 \neq 0$, $\delta_1 > 0$.

Калібрування $h = 0$ в класі (2.22) реалізує перетворення (2.23), де $\delta_1 = \delta_3 = 1$, $\delta_2 = 0$, а функція φ задовольняє рівняння $(|\varphi_x|^{-\frac{1}{2}})_{xx} + nh|\varphi_x|^{-\frac{1}{2}} = 0$.

Теорема 2.20. *Узагальненою групою еквівалентності $\hat{G}_{1,h=0}^\sim$ класу рівнянь вигляду*

$$f(x)u_t = (e^{nu}u_x)_x, \quad nf \neq 0, \quad (2.26)$$

є проєкція групи $\hat{G}_1^\sim$ на простір змінних (t, x, u, f, n) .

Серед цих двох калібрувань для виконання групової класифікації класу (2.22) зручнішим є калібрування $f = 1$.

2.2.3. Класифікація лівських симетрій. Групову класифікацію класу (2.18) виконано класичним методом Лі–Овсянникова [23, 235], розширеного методами розбиття на нормалізовані підкласи і калібрування довільних елементів, а також розглядом узагальнених груп еквівалентності замість звичайних. Це призводить до спрощення класифікації і зменшення кількості нееквівалентних випадків. Також використано метод розгалуженого розщеплення [20, 162]. Деталі доведення наведено в [311].

Твердження 2.21. *Ядром максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (2.21) (і класу (2.18)) є одновимірною алгеброю $A^\cap = \langle \partial_t \rangle$.*

Результати групової класифікації (2.18) наведено у табл. 2.1. Існують додаткові перетворення еквівалентності між випадками класифікаційного списку. Так, точкове перетворення з групи еквівалентності $\hat{G}_{m=0,(h/f)_x=0}^\sim$

$$t' = \frac{1}{\varepsilon n} e^{\varepsilon n t}, \quad x' = x, \quad u' = u - \varepsilon t \quad (2.27)$$

пов'язує $f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + \varepsilon f(x)$ і $f(x')u'_{t'} = (g(x')e^{nu'}u'_{x'})_{x'}$. Це перетворення зводить вип. 4–6 табл. 2.1 к випадкам з $m = n$ або $h = 0$. Доведено теорему.

Теорема 2.22. *З точністю до всіх точкових перетворень повний список розширень лівської симетрії в класі (2.18) вичерпується випадками 1–3 і 7–10 таблиці 2.1.*

Табл. 2.1: Групова класифікація класу (2.18) із калібруванням $g = 1$.

№	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
Загальний випадок m			
1	$\forall$	$\forall$	∂_t
2	$f_1(x)$	$h_1(x)$	$\partial_t, (d + 2b - pn)t\partial_t + (nax^2 + bx + c)\partial_x + (ax + p)\partial_u$
3	1	ε	$\partial_t, \partial_x, 2mt\partial_t + (m - n)x\partial_x - 2\partial_u$
$m = 0, \quad h \neq 0, \quad (h/f)_x = 0$			
4	$\forall$	$\varepsilon f(x)$	$\partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon\partial_u)$
5	$f_1(x)$	$\varepsilon f_1(x)$	$\partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon\partial_u), n(nax^2 + bx + c)\partial_x + (nax + 2b + d)\partial_u$
6	1	ε	$\partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon\partial_u), \partial_x, nx\partial_x + 2\partial_u$
$m = n \quad \text{або} \quad h = 0$			
7	$\forall$	$\forall$	$\partial_t, nt\partial_t - \partial_u$
8	1	αx^{-2}	$\partial_t, nt\partial_t - \partial_u, nx\partial_x + 2\partial_u$
9	1	ε	$\partial_t, nt\partial_t - \partial_u, \partial_x$
10	1	0	$\partial_t, nt\partial_t - \partial_u, \partial_x, nx\partial_x + 2\partial_u$

Тут n, α, ε — ненульові сталі, $n = 1 \bmod \hat{G}_1^\sim, \varepsilon = \pm 1 \bmod \hat{G}_1^\sim$,

$$f_1(x) = \exp\left(\int \frac{-3nax+d}{nax^2+bx+c} dx\right), \quad h_1(x) = \varepsilon \exp\left(-\int \frac{(3n+m)ax+2b+(m-n)p}{nax^2+bx+c} dx\right),$$

причому, з точністю до $\hat{G}_1^\sim$ -еквівалентності, набір параметрів (a, b, c, d, p) приймає значення з множини $\{(0, 1, 0, \bar{d}, (\bar{q} + 2)/(n - m)), (0, 0, 1, 1, \bar{p}), (0, 0, 1, 0, 1), (1/n, 0, 1, \hat{d}, \hat{p})\}$, де $(\bar{d}, \bar{q}) \neq (0, 0), (-3, -3 - m/n)$ і по модулю $\hat{G}_1^\sim$ можна також вважати, що $\bar{d} \geq -3/2$ і, якщо $\bar{d} = -3/2$, то $\bar{q} \geq -3/2 - m/(2n)$; $\hat{d} \geq 0$ і, якщо $\hat{d} = 0$, то $\hat{p} \geq 0$. У вип. 5 параметром p можна знехтувати. У вип. 7 довільний елемент f (або h) можна додатково відкалібрувати перетвореннями з групи $\hat{G}_{1,m=n}^\sim$, наприклад, можна покласти $f = 1$.

Отже, максимальна розмірність алгебри ліївської інваріантності для рівнянь з класу (2.18) дорівнює чотирьом, а у випадку $m \neq 0, n$ — трьом.

Твердження 2.23. *Якщо рівняння з класу (2.18) інваріантне відносно чотиривимірної алгебри Лі, то воно точково-еквівалентне рівнянню $u_t = (e^u u_x)_x$ з цього класу.*

Твердження 2.24. *Якщо рівняння з класу (2.18) з $m \neq 0, n$ допускає*

тривимірну алгебру лівської інваріантності, то перетвореннями еквівалентності його можна звести до рівняння $u_t = (e^u u_x)_x \pm e^{mu}$.

2.2.4. Контракції. Приклади нетривіальних граничних переходів між рівняннями, що допускають розширення лівської симетрії, відомі давно. Наприклад, у [72] рівняння з експоненціальними нелінійностями були виключені зі списку групової класифікації нелінійних рівнянь дифузії і просто розглядалися як *граничний випадок* рівнянь зі степеневими нелінійностями. Однак краще включати такі випадки до класифікаційних списків, а потім вказувати зв'язки між різними випадками класифікації через граничні переходи. Використовуючи аналогію з теорією алгебр Лі, такі зв'язки називають *контракціями*. Теоретичне підґрунтя щодо редукцій диференціальних рівнянь, їх алгебр лівської симетрії та відповідних розв'язків запропоновано у роботі [163].

У цій секції за допомогою редукцій пов'язано класифікаційні списки, отримані для класу (2.18), з класифікаційним списком для класу (2.17) [303, табл. 1]. Контракції також використано для побудови точних розв'язків і законів збереження рівнянь з класу (2.18) з відповідних розв'язків і законів збереження рівнянь з класу (2.17).

Контракції рівнянь і алгебр лівської інваріантності. Для виконання контракції спочатку застосуємо перетворення

$$\tilde{t} = \delta t, \quad \tilde{x} = \sqrt{\delta} x, \quad \tilde{u} = \delta(u - 1), \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{\delta}, \quad (2.28)$$

параметризоване додатною сталою δ , до рівнянь з класу (2.17) зі значеннями довільних елементів $g = 1$, а f і h набувають значень, наведених у табл. 1 [303]. Сталі параметри a, b, c, d, p, α перетворюються за формулами:

$$\tilde{a} = a, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{\delta}}, \quad \tilde{c} = c, \quad \tilde{d} = \frac{d}{\sqrt{\delta}}, \quad \tilde{p} = \sqrt{\delta} p, \quad \tilde{\alpha} = \delta \alpha \quad (2.29)$$

там, де вони виникають. В отриманому рівнянні переходимо до границі $\delta \rightarrow +\infty$. В результаті отримуємо рівняння з класу (2.21) зі значеннями f

і h , наведеними у табл. 2.1. Та ж сама процедура встановлює зв'язки між відповідними операторами максимальних алгебр ліївської симетрії. Використаємо позначення $II.2 \rightarrow I.2$, де II відповідає випадкам з табл. 1 роботи [303], а I — випадкам з табл. 2.1, а числа після крапки позначають номер випадку з відповідної таблиці. Повний список контракцій, що пов'язує випадки розширення ліївської симетрії в класах (2.18) і (2.17) є таким:

$$\begin{aligned} II.1 \rightarrow I.1, \quad II.2 \rightarrow I.2, \quad II.3 \rightarrow I.3, \quad II.4 \rightarrow I.4, \quad II.5 \rightarrow I.5, \\ II.6 \rightarrow I.6, \quad II.8 \rightarrow I.7, \quad II.9 \rightarrow I.8, \quad II.10 \rightarrow I.9, \quad II.11 \rightarrow I.10. \end{aligned}$$

Контракції анзаців, редукованих рівнянь і точних розв'язків.

У роботі [303] проведено ліївську редукцію й побудовано точні розв'язки рівнянь (2.17) зі значеннями довільних елементів, наведених у випадках 9 і 12 табл. 1 в роботі [303]. Ці рівняння допускають тривимірні алгебри ліївської інваріантності. Щойно показано, що є контракція вип. 9 з [303, табл. 1] до вип. 8 табл. 2.1, а саме між рівняннями вигляду

$$u_t = (u^n u_x)_x + \alpha x^{-2} u^{n+1}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = (e^{\tilde{n}\tilde{u}} \tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{\alpha} \tilde{x}^{-2} e^{\tilde{n}\tilde{u}}, \quad (2.31)$$

чиї максимальні алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}$, генеруються операторами $X_1 = \partial_t$, $X_2 = nt\partial_t - u\partial_u$, $X_3 = nx\partial_x + 2u\partial_u$, і $\tilde{X}_1 = \partial_{\tilde{t}}$, $\tilde{X}_2 = n\tilde{t}\partial_{\tilde{t}} - \partial_{\tilde{u}}$, $\tilde{X}_3 = n\tilde{x}\partial_{\tilde{x}} + 2\partial_{\tilde{u}}$, відповідно. Контракцію $II.9 \rightarrow I.8$ можна реалізувати простішим перетворенням

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = \delta(u - 1), \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta}, \quad \tilde{\alpha} = \delta\alpha, \quad (2.32)$$

ніж перетворення (2.28). При цьому алгебра $\mathfrak{g}$ контракує в алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$, а саме $X_1 \rightarrow \tilde{X}_1$, $X_2 \rightarrow \tilde{X}_2$, $X_3 \rightarrow \tilde{X}_3$.

Виконаємо контракції ліївських редукцій рівняння (2.30) до таких редукцій рівняння (2.31). Нееквівалентні ліївські редукції рівняння (2.31) за одновимірними підалгебрами з оптимальної системи підалгебр наведено

Табл. 2.2: Ліівські редукції випадку 8 з таблиці 2.1.

№	X	ω	$u =$	Редуковане рівняння
1	$X_2 - \mu X_3$	$x t ^\mu$	$\varphi(\omega) - \frac{1+2\mu}{n} \ln t $	$(e^{n\varphi})_{\omega\omega} - \mu n \varepsilon \omega \varphi_\omega + (1+2\mu)\varepsilon + \alpha n \omega^{-2} e^{n\varphi} = 0,$ $\varepsilon = \text{sign } t$
2	X_3	t	$\varphi(\omega) + \frac{2}{n} \ln x $	$n\varphi_\omega - (\alpha n + 2)e^{n\varphi} = 0$
3	$X_3 \pm X_1$	$x e^{\mp t}$	$\varphi(\omega) \pm \frac{2}{n} t$	$(e^{n\varphi})_{\omega\omega} \pm n \omega \varphi_\omega \mp 2 + \alpha n \omega^{-2} e^{n\varphi} = 0$
4	X_1	x	$\varphi(\omega)$	$(e^{n\varphi})_{\omega\omega} + \alpha n \omega^{-2} e^{n\varphi} = 0$

в табл. 2.2. Перетворення інваріантних змінних, індуковане перетворенням (2.32), є таким $\tilde{\varphi} = \delta(\varphi - 1)$, $\tilde{\omega} = \omega$ для всіх випадків 9.1–9.4 з табл. 2 в [303]. Розглянемо вип. 9.1 [303, табл. 2] детально. Анзац $u = |t|^{-\frac{1+2\mu}{n}} \varphi(\omega)$ після перетворення і контракції має вигляд:

$$\left(1 + \frac{\tilde{u}}{\delta}\right)^{\delta\tilde{n}} = |\tilde{t}|^{-(1+2\mu)} \left(1 + \frac{\tilde{\varphi}}{\delta}\right)^{\delta\tilde{n}} \rightarrow e^{\tilde{n}\tilde{u}} = |\tilde{t}|^{-(1+2\mu)} e^{\tilde{n}\tilde{\varphi}}, \text{ коли } \delta \rightarrow +\infty.$$

У результаті отримуємо анзац вигляду $\tilde{u} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}) - \frac{1+2\mu}{\tilde{n}} \ln |\tilde{t}|$. Редуковане рівняння з вип. 9.1 [303, табл. 2] перетворенням (2.32) зводиться до рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{n}}{\delta\tilde{n}+1} \left[\left(1 + \frac{\tilde{\varphi}}{\delta}\right)^{\delta\tilde{n}+1} \right]_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} - \mu\tilde{n}\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\varphi}_{\tilde{\omega}} \\ + (1+2\mu)\varepsilon \left(1 + \frac{\tilde{\varphi}}{\delta}\right) + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{n}}{\tilde{\omega}^2} \left(1 + \frac{\tilde{\varphi}}{\delta}\right)^{\delta\tilde{n}+1} = 0. \end{aligned}$$

Граничний перехід при $\delta \rightarrow +\infty$ призводить до редукованого рівняння

$$(e^{\tilde{n}\tilde{\varphi}})_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} - \mu\tilde{n}\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\varphi}_{\tilde{\omega}} + (1+2\mu)\varepsilon + \tilde{\alpha}\tilde{n}\tilde{\omega}^{-2} e^{\tilde{n}\tilde{\varphi}} = 0$$

рівняння (2.31) (вип. 1, табл. 2.2). Контракції інших редукцій проводяться аналогічно. Для випадків 9.2 і 9.4 [303, табл. 2] розв'язки редукованих рівнянь призвели до побудови таких точних розв'язків рівняння (2.30):

$$u = \left| \frac{x^2}{C - (\alpha n + 2 + 4n^{-1})t} \right|^{\frac{1}{n}}, \quad (2.33)$$

$$u = \begin{cases} |C_1 \sqrt{x} \ln x + C_2 \sqrt{x}|^{\frac{1}{n+1}}, & \alpha' = 0, \\ |C_1 x^{\varkappa_1} + C_2 x^{\varkappa_2}|^{\frac{1}{n+1}}, & \alpha' > 0, \\ |C_1 \sqrt{x} \sin(\sigma \ln x) + C_2 \sqrt{x} \cos(\sigma \ln x)|^{\frac{1}{n+1}}, & \alpha' < 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

де $\alpha' = 1 - 4\alpha(n+1)$, $\varkappa_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\alpha'}}{2}$, $\sigma = \frac{\sqrt{-\alpha'}}{2}$. Тут і надалі C , C_1 , C_2 — довільні сталі. Застосувавши перетворення (2.32) до розв'язку (2.33), переходимо до границі при $\delta \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\tilde{u}}{\delta}\right)^{\delta \tilde{n}} &= \tilde{x}^2 \left(C - \left(\tilde{\alpha} \tilde{n} + 2 + \frac{4}{\tilde{n} \delta}\right) \tilde{t}\right)^{-1} \rightarrow \\ e^{\tilde{n} \tilde{u}} &= \tilde{x}^2 (C - (\tilde{\alpha} \tilde{n} + 2) \tilde{t})^{-1}. \end{aligned}$$

В результаті отримаємо точний розв'язок

$$\tilde{u} = \frac{1}{\tilde{n}} \ln \left| \frac{\tilde{x}^2}{C - (\tilde{\alpha} \tilde{n} + 2) \tilde{t}} \right|$$

рівняння (2.31). Контрактуючи розв'язки (2.34), одержуємо стаціонарні розв'язки рівняння (2.31):

$$\tilde{u} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{n}} \ln |C_1 \sqrt{\tilde{x}} \ln \tilde{x} + C_2 \sqrt{\tilde{x}}|, & \tilde{\alpha}' = 0, \\ \frac{1}{\tilde{n}} \ln |C_1 \tilde{x}^{\varkappa_1} + C_2 \tilde{x}^{\varkappa_2}|, & \tilde{\alpha}' > 0, \\ \frac{1}{\tilde{n}} \ln |C_1 \sqrt{\tilde{x}} \sin(\sigma \ln \tilde{x}) + C_2 \sqrt{\tilde{x}} \cos(\sigma \ln \tilde{x})|, & \tilde{\alpha}' < 0, \end{cases}$$

де $\tilde{\alpha}' = 1 - 4\tilde{\alpha}\tilde{n}$, $\varkappa_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\tilde{\alpha}'}}{2}$, $\sigma = \frac{\sqrt{-\tilde{\alpha}'}}{2}$.

Контракції законів збереження. Контракції також можна застосувати для побудови законів збереження рівнянь з класу (2.18) з $g = 1$, використавши відомі результати щодо законів збереження рівнянь з класу (2.17) з тим самим калібруванням, отримані в роботі [303].

Нагадаємо, що законом збереження системи диференціальних рівнянь $\mathcal{L}$ називають дивергентний вираз, що дорівнює нулю на множині розв'язків цієї системи. Так у випадку диференціального рівняння з залежною змінною u і двома незалежними змінними t , x загальний вигляд

закону збереження такий: $D_t F(t, x, u_{(r)}) + D_x G(t, x, u_{(r)}) = 0$ для всіх u , що є розв'язками рівняння $\mathcal{L}$. Тоді (F, G) називають збереженим струмом. Два збережених струми (F, G) і (F', G') – еквівалентні, якщо існують такі функції $\hat{F}$, $\hat{G}$ та H , що залежать від t, x, u і похідних u , що $\hat{F}$ і $\hat{G}$ занолюються на множині розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, а також виконуються умови $F' = F + \hat{F} + D_x H$, $G' = G + \hat{G} - D_t H$. Збережений струм називають тривіальним, якщо він еквівалентний нульовому збереженому струму [235].

У роботі [303] встановлено, що існують три підкласи класу (2.17) з $g = 1$, рівняння з яких допускають нетривіальні закони збереження. Кожне рівняння з класу (2.17), для якого виконуються умови 1. $m = n + 1$, 2. $m = 1$, $h = \mu f$, і 3. $m = 0$, допускає два нееквівалентні закони збереження. Ці випадки контракують до випадків 1. $m = n$, 2. $h = 0$, і 3. $m = 0$ класу (2.18), відповідно. Вигляд законів збереження рівнянь з класу (2.17) є різним в кожному з трьох випадків, в залежності чи $n = -1$, чи ні. Для виконання контракцій значення n має варіюватися, а отже для контракцій підходять лише випадки $n \neq -1$.

Є три можливості для контракції законів збереження: контракції характеристик, контракції збережених струмів, або контракції законів збереження як дивергентних виразів. Проілюструємо це на прикладі. Розглянемо рівняння

$$f(x)u_t = (u^n u_x)_x + \alpha f(x)u \quad (2.35)$$

з $n \neq -1$, що допускає такі закони збереження

$$n \neq -1: \quad \begin{pmatrix} x e^{-\mu t} f u, & e^{-\mu t} \left(-x u^n u_x + \frac{u^{n+1}}{n+1} \right) \end{pmatrix}, \quad \lambda^1 = x e^{-\mu t}, \\ \begin{pmatrix} e^{-\mu t} f u, & -e^{-\mu t} u^n u_x \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = e^{-\mu t}. \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Застосуємо перетворення

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = \delta(u - 1), \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta}, \quad \tilde{\mu} = \delta^2 \mu \quad (2.37)$$

до першого збереженого струму (2.36) і до рівняння (2.35) та виконаємо граничний перехід при $\delta \rightarrow +\infty$. В результаті отримаємо клас рівнянь

$$f(x)u_t = (e^{nu} u_x)_x, \quad (2.38)$$

тобто, рівняння з класу (2.21) з $h = 0$. Для образу $\tilde{\lambda}^1$ характеристики $\lambda^1 = xe^{-\mu t}$ відносно перетворення (2.32) маємо $\tilde{\lambda}^1 \rightarrow x$, коли $\delta \rightarrow +\infty$. Тепер ми можемо побудувати закон збереження рівняння (2.38), використовуючи характеристику у якості інтегруючого множника. Після множення на x рівняння (2.38) можна записати у такій дивергентній формі

$$D_t(xfu) + D_x\left(-xe^{nu}u_x + \frac{1}{n}e^{nu}\right) = 0. \quad (2.39)$$

Отже, у цьому випадку закон збереження (2.39) рівняння (2.38) побудовано контракцією характеристики закона збереження. Також можна контрагувати безпосередньо дивергентний вираз. Закон збереження

$$D_t(xe^{-\mu t}fu) + D_x\left(-e^{-\mu t}xu^n u_x + e^{-\mu t}\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = 0$$

рівняння (2.35) з $n \neq -1$ після перетворення (2.32) має вигляд

$$D_{\tilde{t}}\left(\tilde{x}e^{-\frac{\tilde{\mu}}{\delta^2}\tilde{t}}f\left(\frac{\tilde{u}}{\delta}+1\right)\right) + D_{\tilde{x}}\left(-e^{-\frac{\tilde{\mu}}{\delta^2}\tilde{t}}\tilde{x}\left(\frac{\tilde{u}}{\delta}+1\right)^{\tilde{n}\delta}\frac{\tilde{u}_{\tilde{x}}}{\delta} + e^{-\frac{\tilde{\mu}}{\delta^2}\tilde{t}}\frac{1}{\tilde{n}\delta+1}\left(\frac{\tilde{u}}{\delta}+1\right)^{\tilde{n}\delta+1}\right) = 0.$$

Домножуючи отриманий вираз на δ і додаючи член $-\tilde{x}f\delta$ у виразі, на який діє $D_{\tilde{t}}$ (це можна зробити, оскільки член $-\tilde{x}f\delta$ залежить тільки від $\tilde{x}$ і він занулюється при диференціюванні за $\tilde{t}$), переходимо до границі, коли $\delta \rightarrow +\infty$, в результаті отримуємо закон збереження (2.39).

Контракція збереженого струму виконується аналогічним чином, використовуючи факт, що можна додати вираз, який залежить лише від $\tilde{x}$, до першої компоненти збереженого струму (густини) з точністю до еквівалентності збережених струмів.

З контракцій усіх законів збереження, наведених у роботі [303], разом із відповідними рівняннями, впливає таке твердження, яке перевірено також прямим методом знаходження законів збереження.

Теорема 2.25. *Перелік рівнянь з класу (2.2) з $g = 1$, що допускають нетривіальні закони збереження, є таким:*

1. $m = n$: $(\varphi^i f u, -\varphi^i e^{nu} u_x + \frac{1}{n} \varphi_x^i e^{nu}), \varphi^i, i = 1, 2.$
2. $m = 0$: $(x f u, -x e^{nu} u_x + \frac{1}{n} e^{nu} - \int x h dx), x;$
 $(f u, -e^{nu} u_x - \int h dx), 1.$

Тут функції $\varphi^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, пробігають множину розв'язків лінійного звичайного диференціального рівняння $\varphi_{xx} + n h \varphi = 0$.

Зауваження 2.26. Випадок $h = 0$:

$$(x f u, -x e^{nu} u_x + \frac{1}{n} e^{nu}), x; \quad (f u, -e^{nu} u_x), 1$$

виникає як частковий випадок випадку 1 теореми 2.25.

Отже, для знаходження лівських редукцій, точних розв'язків, законів збереження рівнянь з класу (2.2) використано метод граничних переходів (контракцій). Показано, що цим методом також можна отримати повну групову класифікацію цього класу, використавши відомі результати для таких рівнянь зі степеневими нелінійностями.

2.3. Потенціальні симетрії одного класу рівнянь дифузії

У роботах Дж. Блумана [71, 72] було запропоновано новий метод пошуку нелівських симетрій для таких систем диференціальних рівнянь $\Delta(x, u)$, що допускають хоча б один закон збереження.

Якщо ми введемо потенціальні змінні v для рівнянь, записаних у збереженому вигляді, у якості нових невідомих функцій, то отримаємо систему $Z(x, u, v)$. Будь-яка лівська симетрія системи $Z(x, u, v)$ породжує симетрію системи $\Delta(x, u)$. Коли принаймні один з коефіцієнтів лівських операторів редукції, що відповідають змінним x і u , явно залежить від потенціалів, то локальна симетрія системи $Z(x, u, v)$ індукує нелокальну симетрію системи $\Delta(x, u)$. Ці нелокальні симетрії називають *потенціальними симетріями*. Детальніше про потенціальні симетрії та їх застосування можна знайти у роботах [63, 64, 66, 71]. Потенціальні симетрії

досліджувались для досить загальних класів диференціальних рівнянь. Задачу пошуку критеріїв існування потенціальних симетрій для класів диференціальних рівнянь було поставлено в роботі [266], де було отримано деякі корисні критерії для $(1+1)$ -вимірних рівнянь з частинними похідними. Некласичні потенціальні симетрії таких рівнянь обговорювалися в роботі [274].

У роботі [123] стверджувалось, що для кількох класів диференціальних рівнянь типу дифузії побудовано приховані потенціальні симетрії. В роботі [166] було показано, що ці симетрії є звичаними потенціальними симетріями досліджуваних рівнянь.

Повну класифікацію потенціальних симетрій можна отримати лише шляхом врахування всіх потенціальних систем, що відповідають законам збереження. Відомо [258], що група еквівалентності класу систем диференціальних рівнянь або група симетрій однієї системи може бути розширена до потенціальних змінних. Цілком природно використовувати ці подовжені групи еквівалентності для класифікації потенціальних симетрій. З огляду на це будемо класифікувати потенціальні симетрії рівнянь дифузії з точністю до (тривіального) подовження їх груп еквівалентності на відповідні потенціали.

Першим кроком в дослідженні потенціальних симетрій є відшукання законів збереження. Традиційний симетрійний підхід для цього засновано на теоремі Нетер [227], але він не може бути використаний безпосередньо для еволюційних рівнянь, оскільки не існує лагранжиана, для якого еволюційне рівняння є рівнянням Ейлера–Лагранжа. Отже, застосування теореми Нетер в цьому випадку можливо тільки для конкретних рівнянь і застосування спеціальних технік. У той же час саме означення законів збереження породжує метод знаходження законів збереження, яка називають *прямим* і який можна застосовувати до будь-якої системи диференціальних рівнянь без обмеження на її вигляд. Методика розрахунків, яка використовується в рамках цього методу, аналогічна класичному ме-

тоду Лі для пошуку симетрій диференціальних рівнянь. У літературі виділяють чотири версії цього методу в залежності від способу врахування розглянутих систем і визначення збережених струмів чи характеристик законів збереження (див., наприклад, [43, 44, 260], де докладно описані ці методи). Необхідне теоретичне обґрунтування дано в [235]. У роботі [166] використано версію прямого методу, наведену у роботі [260], що заснована на безпосередньому розв’язанні визначальних рівнянь на компоненти збережених струмів на многовидах розв’язків досліджуваних систем в поєднанні з методами, що включають перетворення еквівалентності.

У роботі [122] було розглянуто задачу пошуку потенціальних симетрій рівняння дифузії у пористому середовищі вигляду

$$u_t = ((u^n)_x + f(x)u^m)_x, \quad n \neq 0, \quad (2.40)$$

та зроблено твердження, що виконана повна класифікація таких симетрій. Зауважимо, що

1) у роботі [122] випадок $m = 0$ не розглядався, оскільки досліджувалось інше представлення (2.40). В той самий час відповідний підклас класу (2.40) включає важливі рівняння, зокрема, рівняння, що лінеаризується $u_t = (u^{-2}u_x)_x + 1$. Більш того випадки $m = 0$ і $m \neq 0$ пов’язані точковими перетвореннями;

2) опис потенціальних симетрій в роботі [122] не є класифікацією, оскільки не було введено відношення еквівалентності;

3) тільки найпростіші потенціальні симетрії, що виникають при розгляді “природних” потенціальних систем, було знайдено.

Використаємо клас рівнянь (2.40) у якості прикладу, щоб навести основні необхідні кроки для вичерпної класифікації потенціальних симетрій. Спочатку шукаємо допустимі перетворення в класі (2.40).

Твердження 2.27. *Групу еквівалентності $G^\sim$ класу (2.40) складають перетворення*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_1^{-\frac{1}{n-1}} \delta_3^{\frac{2}{n-1}} u,$$

$$\tilde{f} = \delta_1^{\frac{m-n}{n-1}} \delta_3^{\frac{n-2m+1}{n-1}} f, \quad \tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Зауважимо, що підклас класу (2.40), виокремлений умовою $m = n$, відображається перетворенням

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int e^{\int f(x) dx} dx, \quad \tilde{u} = e^{\frac{1}{n} \int f(x) dx} u \quad (2.41)$$

в підклас $e^{-\frac{n+1}{n} \int f(x) dx} \tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{u}^n)_{\tilde{x}\tilde{x}}$ класу (A.51), чий закони збереження і потенціальні симетрії наведено у додатку А.

Тепер прямим методом знаходимо закони збереження рівнянь (2.40).

Теорема 2.28. *Будь-яке рівняння (2.40) допускає закон збереження $D_t F + D_x G = 0$ із компонентами F і G вигляду*

$$1. F = u, \quad G = -nu^{n-1}u_x - fu^m. \quad (4)$$

Повний перелік $G^\sim$ -нееквівалентних рівнянь (2.40), що мають додаткові (лінійно незалежні з (4)) закони збереження, вичерпують випадки:

$$2. m = n \neq 1: F = u \int \Phi dx, \quad G = - \int \Phi dx (nu^{n-1}u_x + fu^n) + \Phi u^n,$$

$$3. n \neq 1, m = 0: F = xu, \quad G = -x(nu^{n-1}u_x + f) + u^n + \int f dx,$$

$$4. n \neq 1, m = 1, f = 1: F = (t+x)u, \quad G = -(t+x)(nu^{n-1}u_x + u) + u^n,$$

$$5. n \neq 1, m = 1, f = \varepsilon x: F = e^{\varepsilon t}xu, \quad G = -e^{\varepsilon t}x(nu^{n-1}u_x + xu) + e^{\varepsilon t}u^n,$$

$$6. n = 1, m = 0: F = \alpha u, \quad G = -\alpha(u_x + f) + \alpha_x u + \int \alpha_x f dx,$$

$$7. n = 1, m = 1: F = \beta u, \quad G = -\beta(u_x + fu) + \beta_x u,$$

де $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$, $\Phi = e^{\int f dx}$, $\alpha = \alpha(t, x)$, $\beta = \beta(t, x)$ задовольняють лінійні рівняння $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$ і $\beta_t + \beta_{xx} - f\beta_x = 0$.

Ці закони збереження можна використати для побудови потенціальних систем, що призводять до потенціальних симетрій рівнянь (2.40). Пов'язані характеристики дорівнюють коефіцієнтам при u у представлених виразах для F . Тут ми розглянемо лише найпростіші потенціальні

системи (тобто потенціальні системи з однією потенціальною змінною, побудовані із використанням одиничних збережених векторів базових законів збереження) рівняння класу (2.40), що мають вигляд $v_x = F$, $v_t = -G$. Випадки 6 і 7 теореми 2.28 можна виключити з розгляду, оскільки вони стосуються лінійних рівнянь, досліджених у роботі [262]. Рівняння з випадку 2 зводяться до рівнянь (A.51) перетворенням (2.41). Рівняння з випадків 4 і 5 зводяться до рівнянь дифузії зі сталими коефіцієнтами $\tilde{u}_t = (\tilde{u}^n)_{\tilde{x}\tilde{x}}$ перетворенням Галілея

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + t, \quad \tilde{u} = u$$

і перетворенням

$$\tilde{t} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon(n+1)} e^{\varepsilon(n+1)t}, & n \neq -1, \\ t, & n = -1, \end{cases} \quad \tilde{x} = e^{\varepsilon t} x, \quad \tilde{u} = e^{-\varepsilon t} u,$$

відповідно.

Отже, залишилось розглянути дві потенціальні системи

$$v_x = u, \quad v_t = nu^{n-1}u_x + fu^m, \quad (2.42)$$

$$v_x^* = xu, \quad v_t^* = x(nu^{n-1}u_x + f) - u^n - \int f dx, \quad (2.43)$$

що відповідають випадкам 1 і 3 теореми 2.28 (позначимо потенціал другої системи v^*).

Ліівські симетрії системи (2.42) породжують нетривіальні потенціальні симетрії рівняння (2.40) у таких випадках:

1. $f = x^{-2}$, $n = -1$, $m = -2$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, x\partial_x - u\partial_u, \\ 12t\partial_t + (3\ln x - v)x\partial_x + (3 - 3\ln x + xu + v)u\partial_u + 2(3v - t)\partial_v \rangle;$$

2. $f = \varepsilon x \ln |x|$, $\varepsilon = \pm 1$, $n = -1$, $m = 1$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, e^{-\varepsilon t}(x\partial_x - u\partial_u), e^{-\varepsilon t}(-\varepsilon xv\partial_x + \varepsilon(xu^2 + uv)\partial_u + 2\partial_v) \rangle;$$

3. $f = x$, $n = -1$, $m = 0$:

- $\langle \partial_t, \partial_v, \partial_x + t\partial_v, 2t\partial_t - x\partial_x + 2u\partial_u + v\partial_v, \\ t^2\partial_t + (v - tx)\partial_x + (2t - u)u\partial_u + tv\partial_v \rangle;$
4. $f = 0, n = -1, m = 0:$
- $\langle \partial_t, \partial_v, x\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v, vx\partial_x - (v + xu)u\partial_u + 2t\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + (v^2 - 2t)x\partial_x - (v^2 + 2vxu - 6t)u\partial_u + 4tv\partial_v, \beta\partial_x - \beta_v u^2\partial_u \rangle;$
5. $f = 1, n = -1, m = 1:$
- $\langle \partial_t, \partial_v, (x + t)\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t + 2x\partial_x - u\partial_u + v\partial_v, \beta\partial_x - \beta_v u^2\partial_u, \\ v(x + t)\partial_x - [(x + t)u + v]u\partial_u + 2t\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + [(x + t)v^2 - 2tx - 6t^2]\partial_x - [v^2 - 6t + 2(x + t)vu]u\partial_u + 4tv\partial_v \rangle;$
6. $f = \varepsilon x, \varepsilon = \pm 1, n = -1, m = 1:$
- $\langle \partial_t, \partial_v, x\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t - 2\varepsilon tx\partial_x + (1 + 2\varepsilon t)u\partial_u + v\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + (v^2 - 2t - 4\varepsilon t^2)x\partial_x - (v^2 - 6t + 2xvu - 4\varepsilon t^2)u\partial_u + 4tv\partial_v, \\ vx\partial_x - (xu + v)u\partial_u + 2t\partial_v, e^{-\varepsilon t}(\beta\partial_x - \beta_v u^2\partial_u) \rangle;$
7. $n = -1, m = -1:$
- $\langle \partial_t, \partial_v, \psi\partial_x - (1 - f\psi)u\partial_u, 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + (v^2 - 2t)\psi\partial_x - [2\psi vu + (v^2 - 2t)(1 - f\psi) - 4t]u\partial_u + 4tv\partial_v, \\ \psi v\partial_x - ((1 - f\psi)v + \psi u)u\partial_u + 2t\partial_v, \varphi(\beta\partial_x - (\beta_v u^2 - f\beta u)\partial_u) \rangle;$
8. $f = 1, n = 1, m = 2:$
- $\langle \partial_t, \partial_x, \partial_v, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - 2(2tu + x)\partial_u - (2t + x^2)\partial_v, \\ 2t\partial_x - \partial_u - x\partial_v, e^{-v}[(\alpha u - \alpha_x)\partial_u - \alpha\partial_v] \rangle.$

Тут $\alpha = \alpha(t, x)$ і $\beta = \beta(t, v)$ пробігають множини розв'язків лінійних рівнянь $\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \beta_t + \beta_{vv} = 0, \varphi(x) = e^{-\int f dx}, \psi(x) = e^{-\int f dx} \int e^{\int f dx} dx$.

Зауваження 2.29. Рівняння з класу (2.40) з $n = -1, m = 0$ і $f \in \{0, 1\}$ є різними представленням однакових рівнянь. Потенціальні симетрії, що пов'язані перетворенням $\tilde{v} = v + t$ потенціальної змінної v . Це перетворення відображає випадок 4 у випадок

$$f = 1, n = -1, m = 0:$$

$$\langle \partial_t, \partial_{\tilde{v}}, x\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t + u\partial_u + (t + \tilde{v})\partial_{\tilde{v}},$$

$$4t^2\partial_t + [(\tilde{v} - t)^2 - 2t]x\partial_x - [(\tilde{v} - t)^2 + 2(\tilde{v} - t)xu - 6t]u\partial_u + 4t\tilde{v}\partial_{\tilde{v}},$$

$$(\tilde{v} - t)x\partial_x - (\tilde{v} - t + xu)u\partial_u + 2t\partial_{\tilde{v}}, e^{\frac{t}{4} - \frac{\tilde{v}}{2}}[\tilde{\beta}\partial_x - (\tilde{\beta}_{\tilde{v}} - \frac{1}{2}\tilde{\beta})u^2\partial_u],$$

де функція $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(t, \tilde{v})$ пробігає множину розв'язків лінійного рівняння $\tilde{\beta}_t + \tilde{\beta}_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0$.

Зауваження 2.30. Випадки 5, 6, 7 зводяться до випадку 4 точковими перетвореннями $\{\tilde{x} = x + t, \tilde{u} = u\}$, $\{\tilde{x} = e^{\varepsilon t}x, \tilde{u} = e^{-\varepsilon t}u\}$ і (2.41), відповідно.

У роботі [122] випадки 3, 4 не розглядались, а отже є новими. Окрім цього потенціальні симетрії рівнянь (2.40) асоційовані із потенціальною системою (2.42) також прокласифіковано вперше.

Ліівські симетрії системи (2.43) дають нетривіальні потенціальні симетрії рівнянь (2.40), тільки в одному випадку, а саме $f = x$, $n = -1$, $m = 0$. Алгебра Лі потенціальних симетрій в цьому випадку:

9. $f = x$, $n = -1$, $m = 0$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, 2t\partial_t - x\partial_x + 2u\partial_u, e^{-v^*/2}(2x\partial_x + (x^2u - 2)u\partial_u - 4\partial_{v^*}) \rangle.$$

Наведемо також приклад потенціальних симетрій рівнянь з класу (2.40) з $f \neq 0$, які включають два потенціали. Їх можна побудувати за допомогою перетворення (2.41) з потенціальних симетрій, наведених у підрозділі A.4 додатку А. Так, рівняння $x^{-6}u_t = (u^{-2/3}u_x)_x$ з класу (A.51) (випадок 3.4, $f = x^{-6}$, $n = -2/3$) перетворенням $\tilde{t} = \frac{3}{4}t$, $\tilde{x} = |x|^{-1/2}$, $\tilde{u} = |x|^{-9/2}u$ відображається у рівняння

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = ((\tilde{u}^{1/3})_{\tilde{x}} - 3\tilde{x}^{-1}\tilde{u}^{1/3})_{\tilde{x}} \quad (2.44)$$

з класу (2.40), де $\tilde{n} = \tilde{m} = 1/3$ і $\tilde{f} = -3\tilde{x}^{-1}$. Щоб спростити коефіцієнти, використано комбінацію перетворення (2.41) із масштабним перетворенням. Потенціальна система другого порядку (2.44), побудована із (A.53) перетворенням, продовженим на потенціали $\tilde{v} = -v^1/2$ і $\tilde{w} = w/4$, має вигляд

$$\tilde{v}_{\tilde{x}} = \tilde{u}, \quad \tilde{w}_{\tilde{x}} = \tilde{x}^{-3}\tilde{v}, \quad \tilde{w}_{\tilde{t}} = \tilde{x}^{-3}\tilde{u}^{1/3}.$$

Відповідна алгебра потенціальної симетрії (2.44) має вигляд

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t, \partial_w, 2\partial_v - x^2\partial_w, 2t\partial_t + 3u\partial_u + 3v\partial_v + 3w\partial_w, \\ &x\partial_x - 3u\partial_u - 2v\partial_v - 4w\partial_w, \\ &x^{-1}\partial_x + 3x^{-2}u\partial_u + 2(2w + x^{-2}v)\partial_v - 2x^{-2}w\partial_w, \\ &xw\partial_x - 3(x^{-2}v + w)u\partial_u - (x^{-2}v + 2w)v\partial_v - 2w^2\partial_w \rangle. \end{aligned}$$

2.4. Групова класифікація рівняння Фішера зі змінними коефіцієнтами

Класичне рівняння Фішера

$$u_t = bu_{xx} + au(1 - u), \quad ab \neq 0, \quad (2.45)$$

було запропоновано у 1937 році в контексті динаміки популяції, щоб описати просторове поширення вигідного алеля [110]. Розв'язки типу біжучої хвилі рівняння (2.45) було побудовано у роботі [39] (дивись також [84, 98, 188, 226]). Теореми щодо існування і єдиності обмежених розв'язків для більш загального класу рівнянь $u_t = u_{xx} + F(t, x, u)$ доведено в роботі [15].

Пізніше було запропоновано узагальнену модель, а саме рівняння Фішера зі змінними коефіцієнтами:

$$u_t = b(t)u_{xx} + a(t)u(1 - u), \quad (2.46)$$

де $a(t)$, $b(t)$ — довільні гладкі функції змінної часу [140]. Завдяки таким коефіцієнтам можна взяти до уваги довготермінові зміни клімату або короткострокову сезонність. Деякі розв'язки рівнянь з цього класу було знайдено в роботах [140, 231]. У цьому підрозділі наведено групову класифікацію класу (2.46) і точні розв'язки таких рівнянь [6, 312].

2.4.1. Групоїд еквівалентності. Для того, щоб виконати вичерпну групову класифікацію рівнянь з такого класу, спочатку дослідже-

но допустимі точкові перетворення прямим методом [184]. Доведено твердження.

Теорема 2.31. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ класу (2.46) складають перетворення*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \varepsilon u + \frac{1 - \varepsilon}{2}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{T_t \varepsilon}, \quad \tilde{b} = \frac{\delta_1^2}{T_t} b,$$

де $T(t)$ — довільна гладка функція, що задовольняє умову $T_t \neq 0$, δ_1, δ_2 — довільні сталі, причому $\delta_1 \neq 0$ і $\varepsilon = \pm 1$.

Зауваження 2.32. З точністю до композиції одне з іншим і з неперервними перетвореннями еквівалентності, група еквівалентності $G^\sim$ містить три незалежні дискретні перетворення

$$\mathcal{T}_1: (t, x, u, a, b) \mapsto (-t, x, u, -a, -b),$$

$$\mathcal{T}_2: (t, x, u, a, b) \mapsto (t, -x, u, a, b),$$

$$\mathcal{T}_3: (t, x, u, a, b) \mapsto (t, x, 1 - u, -a, b).$$

Теорема 2.33. *Клас (2.46) є нормалізованим. Його розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^\sim$ складають перетворення*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \omega(t)u + \theta(t),$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{T_t \omega}, \quad \tilde{b} = \frac{\delta_1^2}{T_t} b,$$

де $T(t)$ — довільна гладка функція, $T_t \neq 0$, δ_1, δ_2 — довільні сталі, причому $\delta_1 \neq 0$,

$$\omega = \frac{(\alpha e^{\int a dt} + \beta)(\gamma e^{\int a dt} + \delta)}{(\alpha \delta - \beta \gamma) e^{\int a dt}}, \quad \theta = -\gamma \frac{\alpha e^{\int a dt} + \beta}{\alpha \delta - \beta \gamma},$$

пари сталих (α, β) та (γ, δ) визначені з точністю до ненульового множника та $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$.

Доведення цих тверджень наведено у роботі [312]. Очевидно, що існують рівняння (2.46), що є $\hat{G}^\sim$ -еквівалентними, але при цьому $G^\sim$ -нееквівалентними. Тому використання розширеної узагальненої групи

еквівалентності $\hat{G}^\sim$ є кращим для виконання групової класифікації класу (2.46).

Використовуючи теорему 2.33 можна встановити критерій звідності узагальнених рівнянь Фішера до класичного рівняння Фішера.

Наслідок 2.34. Рівняння (2.46) зводиться точковим перетворенням до рівняння

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u) \quad (2.47)$$

тоді і тільки тоді, коли для деякої додатної сталої λ коефіцієнти a і b задовольняють умову

$$\lambda b^2 - 2\frac{b_{tt}}{b} + 3\frac{b_t^2}{b^2} = a^2 - 2\frac{a_{tt}}{a} + 3\frac{a_t^2}{a^2}. \quad (2.48)$$

Зауваження 2.35. Довільні елементи класу задовольняють умову (2.48) тоді і тільки тоді, коли b має вигляд

$$b = \frac{\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)ae^{\int a dt}}{(\alpha e^{\int a dt} + \beta)(\gamma e^{\int a dt} + \delta)},$$

де λ — додатна стала, пари сталих (α, β) і (γ, δ) визначені з точністю до ненульових множників і $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

2.4.2. Калібрування довільних елементів. Перетворення еквівалентності дають змогу спростити задачу групової класифікації, відкалібрувавши довільні елементи класу. Завдяки тому, що перетворення з груп $G^\sim$ і $\hat{G}^\sim$ параметризовані довільною функцією $T(t)$, один з довільних елементів a, b в класі (2.46) можна звести до сталою значення, наприклад, до одиниці. Перетворення еквівалентності $\tilde{t} = \int b dt, \tilde{x} = x, \tilde{u} = u$, з групи $G^\sim$ відображає клас (2.46) на його підклас, виокремлений умовою $b = 1$. Єдиний довільний елемент у класі-образі виражається через старі довільні елементи за формулою $\tilde{a} = a/b$. Калібрування $a = 1$ можна виконати аналогічним перетворенням з групи $G^\sim$ $\tilde{t} = \int a dt, \tilde{x} = x, \tilde{u} = u$. Тоді нові довільні елементи матимуть вигляд $\tilde{a} = 1, \tilde{b} = b/a$.

Оскільки клас (2.46) є нормалізованим, хоча й лише в розширеному узагальненому сенсі, легко знайти групи еквівалентності його підкласу з $b = 1$ (або $a = 1$). Для цього покладаємо $\tilde{b} = b = 1$ (або $\tilde{a} = a = 1$) у перетвореннях з групи $\hat{G}^\sim$ і таким чином отримуємо наслідки теореми 2.33.

Наслідок 2.36. *Клас рівнянь*

$$u_t = u_{xx} + a(t)u(1 - u), \quad a \neq 0 \quad (2.49)$$

нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_a^\sim$ цього класу складають перетворення

$$\tilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \omega(t)u + \theta(t), \quad \tilde{a} = \frac{a}{\delta_1^2 \omega},$$

де δ_i , $i = 0, 1, 2$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \neq 0$,

$$\omega = \frac{(\alpha e^{\int a dt} + \beta)(\gamma e^{\int a dt} + \delta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)e^{\int a dt}}, \quad \theta = -\gamma \frac{\alpha e^{\int a dt} + \beta}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

пари сталих (α, β) і (γ, δ) визначені з точністю до ненульового множника $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Наслідок 2.37. *Клас рівнянь*

$$u_t = b(t)u_{xx} + u(1 - u), \quad (2.50)$$

нормалізований у звичайному сенсі. Звичайну групу еквівалентності $G_b^\sim$ класу складають перетворення

$$\tilde{t} = \ln \frac{\alpha e^t + \beta}{\gamma e^t + \delta}, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \\ \tilde{u} = \frac{(\alpha e^t + \beta)(\gamma e^t + \delta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)e^t} u - \gamma \frac{\alpha e^t + \beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \tilde{b} = \frac{\delta_1^2 (\alpha e^t + \beta)(\gamma e^t + \delta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)e^t} b,$$

де δ_j , $j = 1, 2$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \neq 0$, четвірка сталих $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ визначена з точністю до ненульового множника і $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Зауваження 2.38. Група еквівалентності $G_b^\sim$ містить два дискретні перетворення еквівалентності

$$\mathcal{T}': (t, x, u, b) \mapsto (t, -x, u, b), \quad \mathcal{T}'': (t, x, u, b) \mapsto (-t, x, 1 - u, -b).$$

Клас (2.50) нормалізований у звичайному сенсі, а клас (2.49) — в розширеному узагальненому. Тому можна очікувати, що групову класифікацію легше виконувати для класу (2.50). Критерій звідності рівнянь з цього класу до класичного рівняння Фішера є таким.

Наслідок 2.39. Рівняння з класу (2.50) зводиться до класичного рівняння Фішера (2.47) точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт b має вигляд

$$b(t) = \frac{\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)e^t}{(\alpha e^t + \beta)(\gamma e^t + \delta)},$$

де λ — додатна стала, четвірка сталих $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ визначена з точністю до ненульового множника і $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

2.4.3. Групова класифікація. З використанням класичного підходу [23] виконуємо групову класифікацію класу (2.50). Фіксуємо рівняння $\mathcal{L}$ з класу (2.50) і шукаємо векторні поля вигляду

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u,$$

що генерують однопараметричні групи ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}$. З критерію інфінітезимальної інваріантності випливають визначальні рівняння, розв'язавши найпростіші з них отримуємо $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t, x)$. Це повністю узгоджується із результатами роботи [184] і підрозділу 2.1. Залишається розв'язати такі визначальні рівняння

$$\begin{aligned} \eta_{uu} &= 0, \quad 2b\xi_x = (b\tau)_t, \quad 2b\eta_{xu} = b\xi_{xx} - \xi_t, \\ \eta - \eta_t + b\eta_{xx} + (\tau_t - 2\eta - \eta_u)u + (\eta_u - \tau_t)u^2 &= 0. \end{aligned}$$

З перших двох рівнянь випливає, що

$$\xi = \frac{(b\tau)_t}{2b}x + \zeta(t) \quad \text{і} \quad \eta = \eta^1(t, x)u + \eta^0(t, x),$$

де ζ, η^1, η^0 — довільні гладкі функції своїх аргументів. Тоді третє рівняння набуває вигляду

$$\left(\frac{1}{2b}(b\tau)_t \right)_t x + \zeta_t + 2b\eta_x^1 = 0. \quad (2.51)$$

Після підстановки $\eta = \eta^1(t, x)u + \eta^0(t, x)$ у четверте рівняння системи і розщеплення за різними степенями u отримуємо

$$\eta^1 = -\tau_t, \quad \eta_t^0 - b\eta_{xx}^0 - \eta^0 = 0, \quad 2\eta^0 = \tau_t + b\eta_{xx}^1 - \eta_t^1.$$

З цієї системи випливає, що η^1 і η^0 не залежать від x , а саме $\eta^1 = -\tau_t$, $\eta^0 = \frac{1}{2}(\tau_t + \tau_{tt})$. Функція τ задовольняє рівняння $\tau_{ttt} - \tau_t = 0$, тобто $\tau = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3$, де c_1, c_2, c_3 — довільні сталі. Враховуючи отримані обмеження на форми коефіцієнтів, розщеплюємо рівняння (2.51) за різними степенями x . Таким чином знаходимо $\zeta = c_0 = \text{const}$ і класифікуюче рівняння $((b\tau)_t/b)_t = 0$, яке можна записати як

$$(c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3)b_t = (-c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_4)b, \quad (2.52)$$

де c_4 — ще одна довільна стала. Для того, щоб знайти ядро основних груп лівської інваріантності в класі (2.50), розщеплюємо рівняння (2.52) за b і b_t , що призводить до умов $c_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Єдина ненульова стала c_0 відповідає оператору ∂_x (випадок 0 табл. 2.3).

Використаємо метод розгалуженого розщеплення. Множина V_b наборів коефіцієнтів рівнянь вигляду (2.52) при фіксованих значеннях функції b є лінійним простором. Розмірність k_b цього простору співпадає з розмірністю розширення лівської симетрії для такого самого значення b . Легко показати, що $k_b < 3$ і, якщо $k_b = 2$, будь-який елемент V_b задовольняє рівняння $c_4^2 = c_3^2 - 4c_1c_2$.

Щонайменше одновимірне розширення лівської симетрії має місце для рівнянь з довільним коефіцієнтом b , що задовольняє (2.52) з $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$, тобто, якщо

$$b(t) = c_5 \exp \left(\int \frac{-c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_4}{c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3} dt \right) \quad (2.53)$$

для деякої ненульової сталої c_5 . Відповідний оператор з розширення має вигляд

$$X_2 = (c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3) \partial_t + \frac{c_4}{2} x \partial_x + [(c_2 e^{-t} - c_1 e^t)u + c_1 e^t] \partial_u.$$

Інтегрування рівняння (2.53) дає такі значення b :

$$b = \frac{c_5}{c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3} \left| \frac{2c_1 e^t + c_3 - \nu}{2c_1 e^t + c_3 + \nu} \right|^{\frac{c_4}{\nu}}, \quad \text{якщо } D > 0, c_1 \neq 0,$$

$$b = \frac{c_5 e^{\frac{c_4}{c_3} t}}{(c_2 e^{-t} + c_3)^{1 - \frac{c_4}{c_3}}}, \quad \text{якщо } D > 0, c_1 = 0,$$

$$b = \frac{c_5}{c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3} \exp \left(-\frac{2c_4}{2c_1 e^t + c_3} \right), \quad \text{якщо } D = 0, c_1 \neq 0,$$

$$b = c_5 \exp \left(t + \frac{c_4}{c_2} e^t \right), \quad \text{якщо } D = 0, c_1 = 0,$$

$$b = \frac{c_5}{c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3} \exp \left(\frac{2c_4}{\nu} \operatorname{arctg} \frac{2c_1 e^t + c_3}{\nu} \right), \quad \text{якщо } D < 0,$$

де $D = c_3^2 - 4c_1 c_2$ і $\nu = \sqrt{|D|}$. Перетвореннями розтягу за змінною x , стали c_5 можна звести до $\operatorname{sign} c_5$, тобто, $c_5 = \pm 1 \bmod G_b^\sim$.

Наведені вирази для b можна спростити перетвореннями з групи $G_b^\sim$. З точністю до $G_b^\sim$ -еквівалентності четвірка параметрів (c_1, c_2, c_3, c_4) набуває значень з множини

$$\{(0, 0, 1, \sigma), (0, 1, 0, \kappa), (1, 1, 0, \rho) \mid \sigma \geq 0, \kappa = \pm 1, \rho \in \mathbb{R}\}.$$

Таким чином з точністю до $G_b^\sim$ -еквівалентності, що співпадає з загальною точковою еквівалентністю, існують три форми рівнянь з класу (2.46),

Табл. 2.3: Результати групової класифікації класу (2.50).

№	b	Базис алгебри $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	$\varepsilon e^{\sigma t}$	$\partial_x, \quad \partial_t + \frac{\sigma}{2} x \partial_x$
2	$\varepsilon \exp(t + \kappa e^t)$	$\partial_x, \quad e^{-t} \partial_t + \frac{\kappa}{2} x \partial_x + e^{-t} u \partial_u$
3	$\frac{\varepsilon}{\operatorname{ch} t} \exp(\rho \operatorname{arctg} e^t)$	$\partial_x, \quad 2 \operatorname{ch} t \partial_t + \frac{\rho}{2} x \partial_x + (e^t - 2 \operatorname{sh} t u) \partial_u$
4	εe^t	$\partial_x, \quad \partial_t + \frac{1}{2} x \partial_x, \quad e^{-t}(\partial_t + u \partial_u)$

Тут $\varepsilon, \sigma, \kappa, \rho$ — сталі, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_b^\sim$, $\sigma \geq 0 \bmod G_b^\sim$, $\sigma \neq 1$ та $\kappa = \pm 1 \bmod G_b^\sim$.

що допускають двовимірні алгебри лівської інваріантності (випадки 1–3 табл. 2.3). З умови $c_4^2 = c_3^2 - 4c_1c_2$ випливає, що будь-який випадок розширення алгебри ядра на два лінійно-незалежні оператори, зводиться точковими перетвореннями до випадку 4 табл. 2.3, де $b = \pm e^t$. Оскільки клас (2.50) нормалізований, немає інших перетворень еквівалентності між випадками таблиці. Доведена теорема.

Теорема 2.40. *Алгебра ядра основних груп рівнянь з класу (2.50) — це алгебра $A^\cap = \langle \partial_x \rangle$. $G_b^\sim$ -нееквівалентні розширення лівської симетрії в класі (2.50) вичерпуються випадками, наведеними в табл. 2.3.*

Класифікаційний список з таблиці 2.3 представляє також результати групової класифікації для класу (2.46) з точністю до $\hat{G}^\sim$ -еквівалентності.

2.4.4. Точні розв'язки. Для побудови точних розв'язків рівнянь Фішера зі змінними коефіцієнтами застосовано методи, що базуються на використанні не вироджених точкових перетворень, а саме метод еквівалентності та метод перетворень між класами диференціальних рівнянь [6].

З критерію (2.48) випливає, що підклас рівнянь (2.46) вигляду

$$u_t = \frac{\lambda \Delta a(t) h(t)}{(\alpha h(t) + \beta)(\gamma h(t) + \delta)} u_{xx} + a(t) u(1 - u), \quad (2.54)$$

де $h(t) = e^{\int a(t)dt}$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, зводиться точковими перетвореннями до класичного рівняння Фішера (2.47). З теореми 2.33 знаходимо сім'ю точкових перетворень, що відображає рівняння (2.54) у рівняння (2.47), вигляду

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \ln \frac{\alpha h(t) + \beta}{\gamma h(t) + \delta} + c_1, & \tilde{x} &= \frac{x}{\sqrt{\lambda}} + c_2, \\ \tilde{u} &= \frac{(\alpha h(t) + \beta)(\gamma h(t) + \delta)}{h(t)\Delta} u - \gamma \frac{\alpha h(t) + \beta}{\Delta},\end{aligned}\tag{2.55}$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. Застосуємо знайдені перетворення до відомих розв'язків класичного рівняння Фішера (2.54) і отримаємо таку сім'ю точкових розв'язків рівняння (2.54):

$$u = \frac{h\Delta \exp\left(\frac{5}{3}\tilde{t} + \frac{\sqrt{6}}{3}\tilde{x}\right) \wp\left(\exp\left(\frac{5}{6}\tilde{t} + \frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{x}\right) + \tilde{C}, 0, \hat{C}\right)}{(\alpha h + \beta)(\gamma h + \delta)} + \frac{\gamma h}{\gamma h + \delta},$$

частинним випадком якої в елементарних функціях є

$$u = \frac{h\Delta}{(\alpha h + \beta)(\gamma h + \delta)} \frac{1}{\left(C \exp\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{x} - \frac{5}{6}\tilde{t}\right) \pm 1\right)^2} + \frac{\gamma h}{\gamma h + \delta},$$

де $\tilde{t}, \tilde{x}$ визначені формулою (2.55), $\wp(z, k_1, k_2)$ — еліптична функція Вейерштраса, $c_1, c_2, C, \tilde{C}, \hat{C}$ — довільні сталі, причому $C \neq 0$. Оскільки рівняння Фішера допускають дискретне перетворення симетрії $x \mapsto -x$, всі отримані розв'язки з протилежними знаками x також задовольняють рівняння (2.54).

Окрім перетворень еквівалентності, що не змінюють структуру класу диференціальних рівнянь, а лише переводять одне рівняння з класу у інше рівняння з цього ж класу, можливо також розглянути невироджені точкові перетворення між класами диференціальних рівнянь. Цей метод було запропоновано у роботі [309] для виконання групової класифікації квазілінійних рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневою нелінійністю. Пізніше цим методом було досліджено з симетрійної

точки зору і інші класи рівнянь (див., [298], а також [315] та посилання там). Застосуємо метод перетворень між класами диференціальних рівнянь для побудови точних розв'язків.

Доведено, що сім'я точкових перетворень, параметризованих довільним елементом $a(t)$ класу (2.46),

$$\tilde{t} = \int a(t) e^{\int a(t) dt} dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = -e^{-\int a(t) dt} u, \quad (2.56)$$

відображає клас (2.46) у клас квазілінійних рівнянь реакції–дифузії з квадратичною нелінійністю та одним довільним елементом, що залежить від змінної часу. Для рівняння $u_t = u_{xx} + u^2$ відомі кілька точних розв'язків (див. [49, 226] і [252, с. 157]). Використовуючи їх та перетворення (2.56), знаходимо нові точні розв'язки узагальненого рівняння Фішера

$$u_t = a(t) e^{\int a(t) dt} u_{xx} + a(t) u(1 - u):$$

$$u = \frac{12(4 \pm \sqrt{6})x(x + c_1) + 120(12 \pm 5\sqrt{6})\Theta(t) + 12(2 \pm \sqrt{6})c_2 + 6c_1^2}{e^{-\int a(t) dt} (x^2 + c_1x + 10(3 \pm \sqrt{6})\Theta(t) + c_2)^2},$$

$$u = e^{\int a(t) dt} \wp\left(\frac{x}{\sqrt{6}}, 0, \hat{C}\right),$$

де $\Theta(t) = \int a(t) e^{\int a(t) dt} dt$, c_1 , c_2 , $\hat{C}$ — довільні сталі.

2.5. Класифікація ліївських і некласичних симетрій рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами

У цьому підрозділі виконано класифікації ліївських і регулярних некласичних операторів редукції для класу рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами

$$u_t = a^2(t) u_{xx} + b(t) u - c(t) u^3, \quad (2.57)$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — довільні гладкі функції, причому $ac \neq 0$. Такі рівняння інколи також називають рівняннями Ньюела–Вайтхеда або узагальненими рівняннями Фішера.

Класичне рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля $u_t = u_{xx} + u - u^3$ вперше з'явилося у роботах [225, 278]. Воно є частинним випадком узагальнених рівнянь Фішера

$$u_t = (u^m u_x)_x + u^p(1 - u^q), \quad (2.58)$$

що виникають як моделі математичної біології (див. рівняння (13.40) у монографії [221]). Тут t , x — часова і просторова змінні, u — густина популяції, p , q , m — додатні сталі параметри.

Рівняння (2.57) з $b(t) = c(t) = 1$ досліджено у роботі [231] з використанням методу усіченого розвинення побудовано певні точні розв'язки цих рівнянь. Клас (2.57) було розглянуто в роботі [295]. Виявилось, що всі розв'язки знайдені в [295] є стаціонарними і більш того не задовольняють відповідні рівняння через помилки в знаках сталих. У роботі [302] окрім побудови точних розв'язків також виконано повні класифікації не тільки ліівських, але й некласичних операторів редукції.

2.5.1. Групоїд еквівалентності. Використовуючи прямий метод, доведено, що групоїд еквівалентності класу (2.57) породжено звичайними перетвореннями еквівалентності цього класу.

Теорема 2.41. *Групу еквівалентності $G^\sim$ класу (2.57) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \varphi(t)u, \\ \tilde{a}^2(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1^2}{\theta_t} a^2(t), \quad \tilde{b}(\tilde{t}) = \frac{1}{\varphi \theta_t} (\varphi b(t) + \varphi_t), \quad \tilde{c}(\tilde{t}) = \frac{1}{\varphi^2 \theta_t} c(t), \end{aligned} \quad (2.59)$$

де δ_1 та δ_2 — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \neq 0$, а функції $\theta(t)$ та $\varphi(t)$ — довільні гладкі функції, причому $\theta_t \varphi \neq 0$.

Перетворення еквівалентності з групи $G^\sim$ породжують групоїд еквівалентності класу (2.57).

З використанням теореми 2.41 знайдено умови на коефіцієнти a , b , c , для яких рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами зводяться точковими перетвореннями до рівнянь з цього самого класу зі сталими коефіцієнтами.

Теорема 2.42. *Рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами (2.57) зводяться точковим перетворенням до рівняння з цього самого класу зі сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли для деякої сталої λ відповідні коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$ і $c(t)$ задовольняють умову*

$$\frac{b}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{(c/a^2)_t}{c} = \lambda. \quad (2.60)$$

Перетворення еквівалентності дозволяють суттєво спростити вихідний клас. Довільний елемент $b(t)$ можна звести до нуля, а $a(t)$ до ненульової сталої, наприклад, до одиниці. Дійсно, перетворення

$$\tilde{t} = \int a^2(t) dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = e^{-\int b(t) dt} u \quad (2.61)$$

відображає клас (2.57) на його підклас

$$u_t = u_{xx} - c(t)u^3. \quad (2.62)$$

Критерій (2.60) є надзвичайно корисним для перевірки, чи зводиться певне рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами до рівняння з цього класу зі сталими коефіцієнтами. У роботі [295] “розв’язки” знайдено для рівнянь (2.57) з коефіцієнтами $b(t) = c_1 k^2 a^2(t)$, $c(t) = c_2 k^2 a^2(t)$, де c_1 , c_2 , k — ненульові сталі. Легко бачити, що такі коефіцієнти $b(t)$ і $c(t)$ задовольняють умову (2.60). У параграфі 2.5.4 з використанням методу еквівалентності знайдено кілька сімей нестационарних розв’язків для підкласу класу (2.57), виокремленого умовою (2.60).

Допустимі перетворення класу (2.62) можна знайти з теореми 2.41, де в формулах перетворень довільних елементів покладаємо $\tilde{a}^2 = a^2 = 1$ і $\tilde{b} = b = 0$. Це гарантує повноту результату, оскільки надклас (2.57) класу (2.62) є нормалізованим. Справедливе таке твердження.

Теорема 2.43. Клас (2.62) є нормалізованим. Групоїд еквівалентності класу (2.62) генерується перетвореннями з його звичайної групи еквівалентності $G_1^\sim$:

$$\tilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \quad \tilde{c}(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta_1^2 \delta_3^2} c(t),$$

де δ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Отже, задача класифікації операторів редукції для класу (2.57) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності зводиться до подібної задачі для класу (2.62) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності.

2.5.2. Групова класифікація. Групову класифікацію класу (2.62) виконано з використанням стандартного підходу Лі–Овсянникова [23, 235]. Шукаються оператори вигляду

$$Q = \tau(t, x, u) \partial_t + \xi(t, x, u) \partial_x + \eta(t, x, u) \partial_u, \quad (2.63)$$

що генерують однопараметричні групи Лі точкових перетворень для рівнянь з класу (2.62). Критерій ліївської інваріантності вимагає виконання тотожності $Q^{(2)}(u_t - u_{xx} + c(t)u^3) = 0$ на многовиді рівнянь (2.62), де $Q^{(2)}$ — друге продовження оператора Q [235]. Доведено теорему.

Теорема 2.44. Ядром максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (2.62) є одновимірна алгебра $\langle \partial_x \rangle$. Список $G^\sim$ -нееквівалентних розширень ліївської симетрії рівнянь з класу (2.62) вичерпують випадки 1–3 таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 представляє також результати групової класифікації для класу (2.57) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. У всіх випадках $a^2(t) = 1 \bmod G^\sim$, $b(t) = 0 \bmod G^\sim$.

Для подальшого застосування корисно також мати список випадків розширення ліївської симетрії без спрощення рівнянь перетвореннями

Табл. 2.4: Групова класифікація класу (2.62) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності.

№	$c(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - (\rho + 1)u\partial_u$
2	$\varepsilon e^{\pm t}$	$\partial_x, 2\partial_t \mp u\partial_u$
3	ε	$\partial_x, \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут ρ — довільна ненульова стала, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_1^\sim$.

еквівалентності. Для того, щоб отримати такий список, використаємо алгоритм, запропонований у роботі [299]. Спочатку випишемо найбільш загальні форми функції $c(t)$, для яких відповідні рівняння з класу (2.62) допускають розширення лівської симетрії. Ці коефіцієнти мають вигляд:

- 1) $c(t) = \mu(\gamma t + \delta)^\rho$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 2(\gamma t + \delta)\partial_t + \gamma x\partial_x - \gamma(\rho + 1)u\partial_u \rangle$;
- 2) $c(t) = \mu e^{\sigma t}$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 2\partial_t - \sigma u\partial_u \rangle$;
- 3) $c(t) = \mu$: $A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle$.

Тут $\mu, \gamma, \rho, \sigma$ — довільні ненульові сталі, а δ — довільна стала.

Використовуючи перетворення (2.61) і наведений класифікаційний список для класу (2.57), отримуємо класифікацію рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами, де довільні елементи не спрощувались перетвореннями еквівалентності. Результати наведено у табл. 2.5. Отже, виокремлено ті рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля, що допускають розширення лівської симетрії в класі (2.57) і потенційно цікавіші для застосувань. Це також необхідна передумова дослідження некласичних операторів редукції, щоб знайти дійсно нетривіальні оператори редукції, які нееквівалентні лівським.

2.5.3. Некласичний метод. Для $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь з незалежними змінними t, x і залежною змінною u , оператори редукції

Табл. 2.5: Всі випадки розширення лівської симетрії в класі (2.57).

№	$c(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	$\mu a^2 e^{-2 \int b dt} (\gamma T + \delta)^\rho$	$\partial_x, \frac{2}{a^2} (\gamma T + \delta) \partial_t + \gamma x \partial_x + \left(\frac{2}{a^2} (\gamma T + \delta) b - (\rho + 1) \gamma \right) u \partial_u$
2	$\mu a^2 e^{\sigma T - 2 \int b dt}$	$\partial_x, \frac{2}{a^2} \partial_t + \left(\frac{2b}{a^2} - \sigma \right) u \partial_u$
3	$\mu a^2 e^{-2 \int b dt}$	$\partial_x, \frac{1}{a^2} (\partial_t + b u \partial_u), \frac{2}{a^2} \partial_t + x \partial_x + \left(\frac{2b}{a^2} - 1 \right) u \partial_u$

Тут $a = a(t)$, $b = b(t)$ — довільні ненульові гладкі функції, $T = \int a^2(t) dt$; $\mu, \sigma, \gamma, \delta, \rho$ — довільні сталі, що задовольняють умову $\mu \sigma \gamma \rho \neq 0$.

ції мають загальний вигляд (2.63), де $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$. Оператори редукції (2.63) з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t є регулярними, а оператори з нульовими коефіцієнтами при ∂_t є сингулярними [193]; дивись також [75]. Сингулярний випадок $\tau = 0$ вичерпно досліджено в роботах [193, 341].

Розглянемо випадок $\tau \neq 0$. З точністю до звичайної еквівалентності неklasичних операторів редукції можна покласти $\tau = 1$. Це відношення еквівалентності означає, що оператори Q та $\tilde{Q}$ є еквівалентними, якщо $\tilde{Q} = \Lambda(t, x, u)Q$, де $\Lambda(t, x, u)$ — ненульова гладка функція своїх аргументів. Критерій неklasичної інваріантності призводить до таких визначальних рівнянь на коефіцієнти ξ, η , а також довільного елемента $c(t)$:

$$\begin{aligned}
 \xi_{uu} &= 0, \quad \eta_{uu} = 2(\xi_{xu} - \xi \xi_u), \\
 \eta_t - \eta_{xx} + 2\xi_x \eta + (2\xi_x - \eta_u) c u^3 + 3\eta c u^2 + c_t u^3 &= 0, \\
 \xi_t - \xi_{xx} + 2\xi \xi_x - 2\xi_u \eta + 2\eta_{xu} - 3\xi_u c u^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Інтегрування перших двох рівнянь системи (2.64) дає вирази для коефіцієнтів ξ, η : $\xi = fu + g$, $\eta = -\frac{1}{3}f^2 u^3 + (f_x - fg)u^2 + hu + k$, де $f = f(t, x)$, $g = g(t, x)$, $h = h(t, x)$, $k = k(t, x)$. Підставляємо ці вирази в інші два рівняння системи (2.64), які після цього рощеплюємо за змінною u . Таким чином отримуємо дев'ять визначальних рівнянь, що включають коефіці-

енти f, g, h, k , а також довільний елемент $c(t)$ класу. Одне з визначальних рівнянь має вид $f(9c - 2f^2) = 0$. Отже, є два суттєво різні випадки: $f \neq 0$ і $f = 0$.

I. Якщо $f \neq 0$, то $9c - 2f^2 = 0$, з чого випливає $f_x = 0$, тобто f залежить лише від t . Тоді з решти визначальних рівнянь знаходимо $g = k = 0$, $h = \alpha$, $f = \beta e^{2\alpha t}$, $c = \frac{2}{9}\beta^2 e^{4\alpha t}$, де $\alpha, \beta \neq 0$ — сталі. Отже, рівняння

$$u_t = u_{xx} - \frac{2}{9}\beta^2 e^{4\alpha t} u^3 \quad (2.65)$$

допускає неklasичний оператор редукції

$$Q_1 = \partial_t + \beta e^{2\alpha t} u \partial_x + \left(\alpha - \frac{1}{3}\beta^2 e^{4\alpha t} u^2 \right) u \partial_u.$$

Сталі α і β можна додатково відкалібрувати перетвореннями еквівалентності (див. випадок 1 табл. 2.6).

II. Якщо $f = 0$, то $k = 0$, $h = -g_x - \frac{1}{2}\frac{\dot{c}}{c}$ і решта визначальних рівнянь такі

$$g_t + 2gg_x - 3g_{xx} = 0, \quad g_{tx} + 2g_x^2 - g_{xxx} + \frac{\dot{c}}{c}g_x + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = 0.$$

Ця система двох рівнянь на функцію $g(t, x)$, одне з яких містить довільний елемент $c(t)$ класу. З дослідження сумісності цієї системи випливає, що функція $c(t)$ може бути лише степеневою, експоненціальною або сталою, інакше система несумісна. Дійсно неklasичні оператори редукції виникають лише тоді, коли $c(t)$ є експоненціальною або сталою. Список рівнянь, що допускають нетривіальні неklasичні оператори редукції з $\xi_u = 0$, і відповідних операторів такий:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \mu u^3: \\ Q_2 &= \partial_t - \frac{3}{x}\partial_x - \frac{3}{x^2}u\partial_u. \\ u_t &= u_{xx} - \mu e^{\sigma t} u^3: \\ Q_3 &= \partial_t - \frac{3}{2}\sqrt{\sigma} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}\sigma\left(\operatorname{th}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}x\right) - \frac{1}{3}\right)u\partial_u, \quad \sigma > 0; \end{aligned} \quad (2.66)$$

Табл. 2.6: Некласичні оператори редукції (2.62).

№	$c(t)$	Оператори редукції
$1_{a,b}$	$e^{\pm t}$	$\partial_t + \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{\pm \frac{1}{2}t}u\partial_x - \frac{1}{2}(3e^{\pm t}u^2 \mp \frac{1}{2})u\partial_u$
1_a	εe^t	$\partial_t - \frac{3}{2}\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}\left(\operatorname{th}^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3}\right)u\partial_u$ $\partial_t - \frac{3}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}\left(\operatorname{cth}^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3}\right)u\partial_u$
1_b	εe^{-t}	$\partial_t + \frac{3}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{3}\right)u\partial_u$
2	ε	$\partial_t - \frac{3}{x}\partial_x - \frac{3}{x^2}u\partial_u$

$$Q_4 = \partial_t - \frac{3}{2}\sqrt{\sigma}\operatorname{cth}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}\sigma\left(\operatorname{cth}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}x\right) - \frac{1}{3}\right)u\partial_u, \quad \sigma > 0;$$

$$Q_5 = \partial_t + \frac{3}{2}\sqrt{-\sigma}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{-\sigma}}{2}x\right)\partial_x + \frac{3}{4}\sigma\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\sqrt{-\sigma}}{2}x\right) + \frac{1}{3}\right)u\partial_u, \quad \sigma < 0.$$

Тут μ, σ — довільні ненульові сталі. Їх можна відкалібрувати в 1 або -1 в залежності від їхніх знаків, а саме $\mu \mapsto \operatorname{sign} \mu, \sigma \mapsto \operatorname{sign} \sigma$.

Результати класифікації неklasичних операторів редукції для рівнянь (2.62) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності наведено в таблиці 2.6. У всіх випадках цієї таблиці $\varepsilon = \pm 1$. Ця ж таблиця представляє результати класифікації неklasичних операторів редукції рівнянь (2.57) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (в цьому випадку $a(t) = 1 \bmod G^\sim$ та $b(t) = 0 \bmod G^\sim$).

З теореми 2.42 випливає, що рівняння (2.65) і (2.66) зводяться до рівнянь з класу (2.57) зі сталими коефіцієнтами перетвореннями еквівалентності з групи $G^\sim$. Дійсно, перетворення $\tilde{t} = t, \tilde{x} = x, \tilde{u} = e^{\frac{\sigma}{2}t}u$ відображає рівняння (2.66) до рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{\sigma}{2}\tilde{u} - \mu\tilde{u}^3$. Це означає, що безпосередня редукція рівнянь (2.65) і (2.66) з використанням знайдених операторів не є оптимальним шляхом побудови їхніх точних розв'язків. Зручніше виконати редукцію рівнянь зі сталими коефіцієнтами, отримати їхні точні розв'язки, а потім відобразити їх відповідними перетвореннями [264]. Отже, розв'язки шукатимемо методом еквівалентності.

2.5.4. Точні розв'язки. З теореми 2.42 випливає, що рівняння вигляду

$$u_t = a^2(t)u_{xx} + \left(\lambda a^2(t) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{2} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \right) u - c(t)u^3, \quad (2.67)$$

де $a(t)$, $c(t)$ — довільні ненульові гладкі функції, а λ — ненульова стала, зводяться до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_t = u_{xx} + \varepsilon u - u^3 \quad (2.68)$$

з $\varepsilon = \text{sign } \lambda$. Для цього рівняння відомі кілька точних розв'язків, дивись, зокрема, довідник [252, р. 177], роботу [309], і посилання там. Подібність рівнянь (2.67) і (2.68) встановлюють перетворення

$$\tilde{t} = |\lambda| \int a^2(t) dt, \quad \tilde{x} = \sqrt{|\lambda|} x, \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{c(t)}}{a(t)\sqrt{|\lambda|}} u. \quad (2.69)$$

для випадку $\lambda \neq 0$ і перетворення

$$\tilde{t} = \int a^2(t) dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{c(t)}}{a(t)} u, \quad (2.70)$$

в іншому випадку. Існують очевидні обмеження на ці перетворення, щоб вони пов'язували дійсні розв'язки для випадку $t > 0$, а саме функція $c(t)$ має бути додатною для $t > 0$.

Проілюструємо процедуру знаходження точних розв'язків для рівнянь (2.67) таким прикладом. Перетворення (2.69) відображає відомий розв'язок $u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{th} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x - \frac{3}{4} t \right)$ рівняння (2.68) з $\varepsilon = 1$ [322] у новий розв'язок

$$u = \frac{1}{2} a(t) \sqrt{\frac{\lambda}{c(t)}} \left(1 - \text{th} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{4} x - \frac{3}{4} \lambda \int a^2(t) dt \right) \right)$$

рівняння (2.67) з $\lambda > 0$ і $c(t) > 0$ для $t > 0$.

Низку точних розв'язків рівняння (2.68) наведено у [226, 252, 309]. Розгляньмо точні розв'язки рівняння (2.68) з роботи [309] і застосуємо до них перетворення (2.69), якщо $\lambda \neq 0$ або перетворення (2.70), якщо $\lambda = 0$. Таким чином знаходимо точні розв'язки рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами (2.67).

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
u &= a(t) \sqrt{\frac{\lambda}{c(t)}} \frac{C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) - C'_1 \exp\left(-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right)}{C_2 e^{-\frac{3}{2}T} + C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C'_1 \exp\left(-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right)}, \\
u &= \frac{C_1 \sqrt{\lambda} a(t)}{\sqrt{c(t)}} e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) \operatorname{ds}\left(C_1 e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
u &= \frac{C_1 \sqrt{\lambda} a(t)}{\sqrt{c(t)}} e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) \operatorname{ds}\left(C_1 e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
u &= \frac{C_1 \sqrt{\lambda} a(t)}{2\sqrt{c(t)}} e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) \frac{1 + \operatorname{cn}\left(C_1 e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(C_1 e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}, \\
u &= \frac{C_1 \sqrt{\lambda} a(t)}{2\sqrt{c(t)}} e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) \frac{1 + \operatorname{cn}\left(C_1 e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(C_1 e^{\frac{3}{2}T} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
u &= a(t) \sqrt{\frac{-\lambda}{c(t)}} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right)}{C_2 e^{\frac{3}{2}T} + \cos\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right)}, \\
u &= a(t) \sqrt{\frac{-\lambda}{c(t)}} C_1 e^{-\frac{3}{2}T} \sin\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right) \operatorname{ds}\left(C_1 e^{-\frac{3}{2}T} \cos\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
u &= \frac{C_1 a(t) e^{-\frac{3}{2}T}}{2} \sqrt{\frac{-\lambda}{c(t)}} \cos\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right) \frac{1 + \operatorname{cn}\left(C_1 e^{-\frac{3}{2}T} \sin\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(C_1 e^{-\frac{3}{2}T} \sin\left(\frac{\sqrt{-2\lambda}}{2}x\right) + C_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
u &= 2\sqrt{2}x \frac{a(t)}{\sqrt{c(t)}} \operatorname{ds}\left(x^2 + 6 \int a^2(t) dt, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
u &= \sqrt{2}x \frac{a(t)}{\sqrt{c(t)}} \frac{1 + \operatorname{cn}\left(x^2 + 6 \int a^2(t) dt, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(x^2 + 6 \int a^2(t) dt, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)},
\end{aligned}$$

$$u = \frac{a(t)}{\sqrt{c(t)}} \frac{2\sqrt{2}x}{x^2 + 6 \int a^2(t)dt}, \quad u = \frac{a(t)}{\sqrt{c(t)}} \frac{\sqrt{2}}{x},$$

$$u = \sqrt{2} \frac{a(t)}{\sqrt{c(t)}} \operatorname{ds} \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad u = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a(t)}{\sqrt{c(t)}} \frac{1 + \operatorname{cn} \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\operatorname{sn} \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}.$$

Тут $T = |\lambda| \int a^2(t)dt$; $\operatorname{cn}(z, k)$, $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{ds}(z, k)$ — еліптичні функції Якобі [40, 325].

Зауважимо, що рівняння (2.62) допускають дискретне перетворення еквівалентності заміни знаку $u \mapsto -u$, тому всі наведені розв'язки можуть мати також протилежний знак.

2.6. Ліївські симетрії узагальнених рівнянь

Бюргерса й їх застосування до розв'язання крайових задач

Ліївські симетрії відіграють важливу роль у розв'язанні нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними і дають алгоритмічний метод виконання ліївських редукцій. Існує кілька способів застосування ліївських симетрій до редукції крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними до відповідних задач для звичайних диференціальних рівнянь. Класичний підхід — вимагати, щоб і рівняння, і крайові умови залишалися інваріантними під дією однопараметричної групи Лі перетворень. Зрозуміло, що частіше застосовують інфінітезимальний підхід, тобто замість скінченних перетворень відповідної групи ліївських симетрій використовують базисні оператори алгебри ліївської інваріантності (див., наприклад, [65, секція 4.4]). Перші роботи в цьому напрямку з'явилися наприкінці 1960-х років (див., наприклад, [62, 68, 219, 220]). Дж. Блуман [62, 68] запропонував підхід, який можна назвати “прямим”, а саме: на першому етапі визначити симетрії диференціального рівняння з частинними похідними, а потім перевірити, чи залишаються інваріан-

тними крайові умови під дією знайдених операторів симетрії. Якщо так, то крайова задача для диференціального рівняння з частинними похідними зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. У рамках цього підходу було розв'язано низку крайових задач (див., наприклад, [80, 232, 289, 290]).

Метод, запропонований Мораном і Гаджіолі [220], використовує спеціальні однопараметричні групи Лі перетворень незалежних та залежних змінних системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також усіх довільних елементів, що присутні в рівняннях, початкових та крайових умовах. А саме, розглядаються лише групи розтягів та зсувів, які приводять до автомодельних розв'язків або розв'язків типу біжучої хвилі. Після визначення допустимих груп Лі розтягів і/або зсувів слід знайти повний набір абсолютних інваріантів. Як результат — крайова задача для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними зводиться до аналогічної, але простішої задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь. Такий підхід застосовано до низки інженерних задач (див., наприклад, [35] та посилання у цій роботі).

Існує також підхід, при якому одночасно виконують групову класифікацію системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та пов'язаних з нею крайових умов (див., наприклад, [12, 13]). Ліївські симетрії використовують навіть у випадках, коли крайові умови не є інваріантними відносно відповідної групи ліївських перетворень [127].

2.6.1. Клас узагальнених рівнянь Бюргерса. У цьому параграфі продемонструємо, що “прямий” підхід набагато простіший, ніж запропонований у [220] і використаний, наприклад, у [35]. Для ілюстрації цього розглянемо узагальнене рівняння Бюргерса вигляду

$$u_t + a(u^n)_x = g(t)u_{xx}, \quad (2.71)$$

де a — ненульова стала, g — довільна гладка функція змінної t , що не має нулів, а число $n \neq 0, 1$. Якщо $n = 2$, $a = 1/2$ та g — ненульова стала, то

рівняння (2.71) є добре відомим рівнянням Бюргерса $u_t + uu_x + \nu u_{xx} = 0$ — одним з найпростіших нелінійних $(1 + 1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, що є точно розв’язним. Це рівняння має давню історію: воно було відоме А. Форсайту [112], а пізніше розглядалося Г. Бейтманом [52]. Однак найбільшим внеском у вивчення цього рівняння є внесок Дж. Бюргерса, тому рівняння й отримало його ім’я [81]. Рівняння Бюргерса використовують для опису багатьох процесів у гідродинаміці та інших, досить розрізнених областях фізики. Ще одна особливість цього рівняння — воно зводиться до стандартного рівняння теплопровідності за допомогою перетворення Коула–Хопфа [94, 144]. Тому його називають C -інтегровним [82].

Узагальнені рівняння Бюргерса (2.71) з $n = 2$ й несталою функцією g отримано в [139] для опису поширення слабонелінійних акустичних хвиль під впливом геометричного розповсюдження та термов’язкої дифузії. Ліівські симетрії таких рівнянь вивчалися в роботах [103, 319]; це та інші узагальнення рівнянь Бюргерса обговорено, наприклад, у [275, 276].

Розв’яжемо задачу групової класифікації для класу (2.71) в рамках сучасного групового аналізу. Після цього розглянемо клас крайових задач і розв’яжемо конкретну крайову задачу, що задовольняє вимогу інваріантності відносно отриманих ліівських симетрій. На відміну від роботи [35], для розв’язання рівняння з відповідними крайовими умовами ми використаємо “прямий” підхід [65, 68] та покажемо, що цей підхід більш прозорий і легкий у реалізації.

Групоїд еквівалентності. Опишемо допустимі перетворення в класі (2.71). Виявляється, всі вони вичерпується перетвореннями еквівалентності. Результати дослідження зібрано в наступних твердженнях.

Теорема 2.45. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (2.71) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, & \tilde{x} &= \delta_3 x + \delta_4, & \tilde{u} &= \delta_5 u, \\ \tilde{a} &= \frac{\delta_3}{\delta_1} \delta_5^{1-n} a, & \tilde{g} &= \frac{\delta_3^2}{\delta_1} g, & \tilde{n} &= n, \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 5$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \delta_5 \neq 0$.

Якщо $n = 2$, то клас (2.71) допускає нетривіальну групу умовної еквівалентності, яка є ширшою, ніж $G^\sim$.

Теорема 2.46. *Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_2^\sim$ класу*

$$u_t + a(u^2)_x = g(t)u_{xx} \quad (2.72)$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{\sigma}, \\ \tilde{u} &= \frac{\sigma}{2a(\alpha\delta - \beta\gamma)} (2a\kappa(\gamma t + \delta)u - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma), \quad \tilde{g} = \frac{\kappa^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}g, \end{aligned}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \mu_1, \mu_0, \sigma$ — сталі, визначені з точністю до ненульового множника, причому $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ та $\kappa\sigma \neq 0$.

Теорема 2.47. *Нехай два рівняння з класу (2.71), $u_t + a(u^n)_x = g(t)u_{xx}$ та $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{a}(\tilde{u}^{\tilde{n}})_{\tilde{x}} = \tilde{g}(\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$, пов'язані точковим перетворенням $\mathcal{T}$ зі змінними t, x та u . Тоді перетворення $\mathcal{T}$ є проекцією деякого перетворення з групи $G^\sim$ (при $n \neq 2$) або з групи $\hat{G}_2^\sim$ (при $n = 2$) на простір (t, x, u) .*

Ліівські симетрії. Групову класифікацію класу (2.71) виконуємо в рамках класичного підходу С. Лі [23, 235]. Для всього класу (2.71) її зручно провести з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, а для його підкласу (2.72) — з точністю до $\hat{G}_2^\sim$ -еквівалентності.

Теорема 2.48. *Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу (2.71) з $n \neq 2$ співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Усі можливі $G^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальної алгебри ліівської інваріантності вичерпуються випадками 2–4 таблиці 2.8.*

Теорема 2.49. *Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу (2.72) співпадає з двовимірною абелевою алгеброю $\langle \partial_x, 2at\partial_x + \partial_u \rangle$. Усі можливі $\hat{G}_2^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальної алгебри ліівської інваріантності вичерпуються випадками 6–9 таблиці 2.8.*

Табл. 2.8: Групова класифікація класу $u_t + a(u^n)_x = g(t)u_{xx}$, $n \neq 0, 1$.

№	n	g	Базисні оператори $A^{\max}$
1	$\neq 2$	$\forall$	∂_x
2	$\neq 2$	εt^ρ	$\partial_x, \quad 2t\partial_t + (\rho + 1)x\partial_x + \frac{\rho - 1}{n - 1}u\partial_u$
3	$\neq 2$	εe^t	$\partial_x, \quad 2\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{n-1}u\partial_u$
4	$\neq 2$	1	$\partial_x, \quad \partial_t, \quad 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{n-1}u\partial_u$
5	2	$\forall$	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u$
6	2	εt^ρ	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad 2t\partial_t + (\rho + 1)x\partial_x + (\rho - 1)u\partial_u$
7	2	εe^t	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
8	2	$\varepsilon e^{2\rho \arctg t}$	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad (t^2 + 1)\partial_t + (t + \rho)x\partial_x + (x + (\rho - t)u)\partial_u$
9	2	1	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad \partial_t, \quad 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \quad t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u$

Тут $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$, ρ — ненульова стала. В усіх випадках $a = 1/n \bmod G^\sim$. У випадку 6 з точністю до $\hat{G}_2^\sim$ завжди можна покласти $\rho > 0$ або $\rho < 0$.

Зауважимо, що максимальну алгебру лівської інваріантності класичного рівняння Бюргерса, яка є п'ятивимірною нерозв'язною алгеброю Лі типу $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \in 2A_1$, було знайдено у роботі [11] (випадок 9 табл. 2.8). У роботі [224] показано, що базисні оператори цієї алгебри можна побудувати як реалізацію алгебри Галілея $A\bar{G}_3(1)$.

Побудова розв'язків крайової задачі з використанням лівських симетрій. Розглянемо клас крайових задач

$$\begin{aligned}
u_t + a(u^n)_x &= g(t)u_{xx}, \quad x \in [0, +\infty), \quad t > 0, \\
\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) &= 0, \quad x \in (0, +\infty), \\
u(t, 0) &= q(t), \quad t > 0, \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) &= 0, \quad t > 0,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

де a — ненульова стала, $n \neq 0, 1$, g та q — довільні гладкі функції, що не мають нулів. Знайдемо ті задачі з цього класу, для розв'язання яких можна використати “прямий” підхід, запропонований Дж. Блуманом [65, 68].

Ми отримали лівські симетрії для рівняння (2.71) зі змінним коефіцієнтом, а тепер вивчимо, які з цих симетрій залишаються інваріантними початкову та крайові умови задачі (2.73). Процедура починається з припущення існування симетрії загального вигляду

$$X = \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i, \quad (2.74)$$

де m — кількість базисних операторів максимальної алгебри лівської симетрії даного рівняння; α_i , $i = 1, \dots, m$ — сталі, які слід визначити.

Лівські симетрії рівняння (2.71) наведено в таблиці 2.8. У випадку 2, для якого $g(t) = \varepsilon t^\rho$, оператор (2.74) набуває вигляду

$$X = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \left(2t \partial_t + (\rho + 1)x \partial_x + \frac{\rho - 1}{n - 1} u \partial_u \right).$$

Застосувавши оператор X до першої крайової умови, записаної у вигляді $x = 0$ та $u(t, 0) = q(t)$, отримаємо

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{та} \quad \alpha_2 \left(-2t \frac{dq}{dt} + \frac{\rho - 1}{n - 1} q \right) = 0.$$

Для ненульових α_2 знаходимо

$$q(t) = \gamma t^{\frac{\rho-1}{2n-2}},$$

де $\gamma > 0$ — стала. Можна показати, що симетрія X з $\alpha_1 = 0$ залишає інваріантними й інші крайові умови. Отже, допустиму лівську симетрію можна використати, щоб звести крайову задачу (2.73) до задачі для звичайного диференціального рівняння. Насправді лівська симетрія $2t \partial_t + (\rho + 1)x \partial_x + ((\rho - 1)/(n - 1)) u \partial_u$ породжує анзац

$$u = t^{\frac{\rho-1}{2n-2}} \phi(\eta), \quad \text{де} \quad \eta = xt^{-\frac{\rho+1}{2}}, \quad (2.75)$$

який редукує (2.73) до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$2\varepsilon \phi'' + (\rho + 1)\eta \phi' - 2a(\phi^n)' - \frac{\rho - 1}{n - 1} \phi = 0, \quad \eta \in [0, +\infty), \quad (2.76)$$

$$\phi(0) = \gamma, \quad (2.77)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \phi(\eta) = 0. \quad (2.78)$$

Нехай $\rho = (2 - n)/n$. Тоді (2.76) набуває вигляду $\varepsilon\phi'' + (\eta\phi' + \phi)/n - a(\phi^n)' = 0$, і після інтегрування маємо $\varepsilon\phi' + \eta\phi/n - a\phi^n + c = 0$, де c — стала інтегрування. Якщо покласти $c = 0$, це рівняння перетворюється в рівняння Бернуллі, що заміною $\phi^{1-n} = z$ лінеаризується до вигляду

$$\frac{\varepsilon}{1-n} z' + \frac{1}{n} \eta z - a = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$z = e^{-\frac{1-n}{2n\varepsilon}\eta^2} \left(C + \frac{a(1-n)}{\varepsilon} \int_0^\eta e^{\frac{1-n}{2n\varepsilon}\theta^2} d\theta \right),$$

де C — довільна стала. Якщо $\varepsilon n(n-1) > 0$, то розв'язок можна записати в термінах функції помилок як

$$z = e^{\frac{\eta^2}{\sigma^2}} \left(C + \frac{a(1-n)\sqrt{\pi}}{2\varepsilon\sigma} \operatorname{erf}(\sigma\eta) \right),$$

де $\sigma = \sqrt{\frac{n-1}{2\varepsilon n}}$, $\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-s^2} ds$. Тому частковим розв'язком звичайного диференціального рівняння другого порядку з невідомою функцією ϕ є

$$\phi = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2\varepsilon n}\eta^2} \left(C + \frac{a(1-n)}{\varepsilon} \int_0^\eta e^{\frac{1-n}{2n\varepsilon}\theta^2} d\theta \right)^{\frac{1}{1-n}}, & \varepsilon n(n-1) < 0, \\ e^{-\frac{1}{2\varepsilon n}\eta^2} \left(C + \frac{a(1-n)\sqrt{\pi}}{2\varepsilon\sigma} \operatorname{erf}(\sigma\eta) \right)^{\frac{1}{1-n}}, & \varepsilon n(n-1) > 0, \end{cases} \quad (2.79)$$

де $\sigma = \sqrt{(n-1)/(2\varepsilon n)}$. Це розв'язок крайової задачі (2.76)–(2.78) з $\rho = (2 - n)/n$, коли $C = \gamma^{1-n}$ та $\varepsilon n > 0$. Його типова поведінка наведена на рис. 2.1.

Якщо використати анзац (2.75), отримаємо розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} u_t + a(u^n)_x &= \varepsilon t^{\frac{2-n}{n}} u_{xx}, \quad x \in [0, +\infty), \quad t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) &= 0, \quad x \in (0, +\infty), \\ u(t, 0) &= \gamma t^{-\frac{1}{n}}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

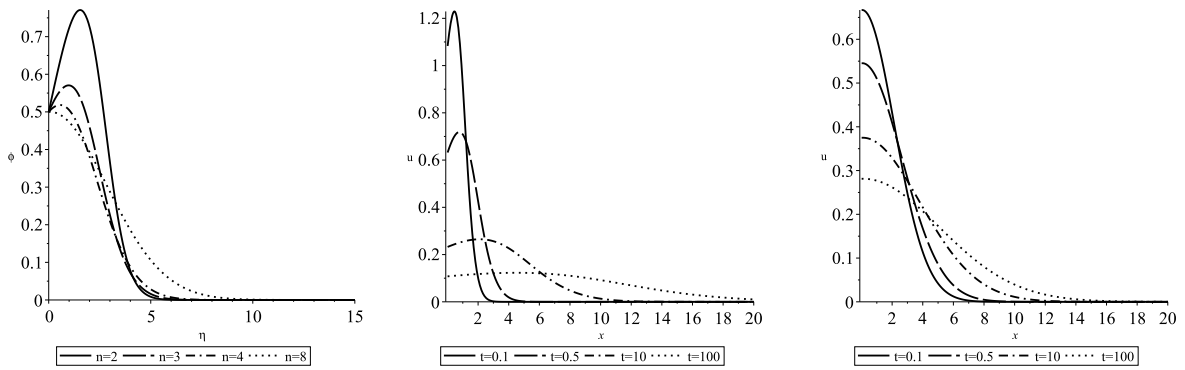


Рис. 2.1: Розв'язок (2.79) при $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0.5$, $a = 1$ та різних n .
 Рис. 2.2: Розв'язок (2.81) при $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0.5$, $a = 1$ та $n = 3$ (еволюція в часі).
 Рис. 2.3: Розв'язок (2.81) при $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0.5$, $a = 1$ та $n = 8$ (еволюція в часі).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0.$$

При $\varepsilon > 0$ та $n > 1$ розв'язок має вигляд

$$u = t^{-\frac{1}{n}} \exp \left[-\frac{1}{2\varepsilon n} x^2 t^{-\frac{2}{n}} \right] \left(\gamma^{1-n} + \frac{a(1-n)\sqrt{\pi}}{2\varepsilon\sigma} \operatorname{erf}(\sigma x t^{-\frac{1}{n}}) \right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad (2.81)$$

де $\sigma = \sqrt{\frac{n-1}{2n\varepsilon}}$. Зауважимо, що при $a < 0$ цей розв'язок задовольняє крайову задачу (2.80) для всіх додатних значень γ . Якщо ж $a > 0$, то параметри мають задовольняти нерівність $\gamma^{1-n} > a(n-1)\sqrt{\pi}/(2\varepsilon\sigma)$.

Типову поведінку останнього розв'язку при $n = 3$ та $n = 8$ наведено на рисунках 2.2 та 2.3, відповідно.

Описану процедуру можна застосувати для інших випадків, які наведено в таблиці 2.8. Окрім випадку 9 (який є добре відомим рівнянням Бюргерса), і випадку 4 зі сталим коефіцієнтом лінійської симетрії, що залишає інваріантними початкову та крайові умови, існує тільки у випадку 6. Проте результати для цього випадку можна отримати із наведених вище, поклавши $n = 2$. Тоді крайова задача (2.80) зводиться до крайової задачі з постійним коефіцієнтом в основному рівнянні.

Дослідники у галузях фізики та інженерних наук часто зустрічаються з крайовими задачами для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Важливо вибрати такий метод їх розв'язання, що є найлегшим у реалізації і призводить до більш загальних результатів,

ніж інші методи. Деякі з аналітичних методів базуються на використанні груп ліївських симетрій. Ми застосували класичний “прямий” підхід, що використовує ліївські симетрії диференціальних рівнянь з частинними похідними [65], до класу крайових задач для узагальнених рівнянь Бюргерса з коефіцієнтом в’язкості, залежним від часу, і знайшли розв’язок для часткового випадку таких задач. Розглянутий метод більш простий, ніж метод, запропонований у роботі [220]. Ще одним недоліком техніки [220] є те, що вона використовує лише розтяги та зсуви. Очевидно, що групи ліївських симетрій певних крайових задач є ширшими, тобто не вичерпуються лише розтягами та зсувами (див., наприклад, [13]). Отже, “прямий” підхід є більш загальним. Однак, як показано вище, даний метод можна використовувати лише для деяких виглядів функцій $g(t)$ та $q(t)$ в (2.73). Іншими словами, метод має свої обмеження, але його можна використовувати для розв’язання певних нелінійних задач. Інші приклади його успішного використання можна знайти в роботах [195, 307].

Список ліївських симетрій класу (2.71) доповнює існуючі на сьогодні результати [103, 319] та вичерпує всі нееквівалентні випадки, для яких можна використовувати алгоритмічний метод ліївської редукції.

2.6.2. Клас узагальнених рівнянь Бюргерса з лінійним затуханням. У цьому параграфі наведемо результати класифікації, отримані в роботі [249] для іншого класу узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами та лінійним затуханням вигляду

$$u_t + u^n u_x + h(t)u = g(t)u_{xx}, \quad ng \neq 0. \quad (2.82)$$

Тут $h(t)$ та $g(t)$ — довільні гладкі функції, причому $g \neq 0$; n — довільна ненульова стала.

Теорема 2.50. *Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^\sim$ класу (2.82) складається з перетворень*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_0, \quad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{T_t} \right)^{\frac{1}{n}} u,$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{T_t}h + \frac{T_{tt}}{nT_t^2}, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_1^2}{T_t}g, \quad \tilde{n} = n,$$

де δ_1 та δ_0 — довільні сталі, $T = T(t)$ — довільна гладка функція, причому $\delta_1 T_t > 0$. Групоїд еквівалентності підкласу класу (2.82), виокремленого умовою $n \neq 1$, породжується елементами $\hat{G}^\sim$, тобто цей підклас нормалізований в узагальненому сенсі.

Наслідок 2.51. Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_{h=\text{const}}^\sim$ класу (2.82) з $h = \text{const}$ складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_0, \quad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} e^{ht - \tilde{h}T} u, \\ \tilde{g} &= \frac{\delta_1^2}{\alpha} e^{nht - n\tilde{h}T} g, \quad \tilde{n} = n, \end{aligned}$$

де функція $T = T(t)$ залежить від h та $\tilde{h}$, які визначаються формулами

$$\begin{aligned} h\tilde{h} \neq 0: \quad & \frac{e^{-n\tilde{h}T} - 1}{-n\tilde{h}} = \alpha \frac{e^{-nht} - 1}{-nh} + \beta, \\ h \neq 0, \tilde{h} = 0: \quad & T = \alpha \frac{e^{-nht} - 1}{-nh} + \beta, \\ h = 0, \tilde{h} \neq 0: \quad & \frac{e^{-n\tilde{h}T} - 1}{-n\tilde{h}} = \alpha t + \beta, \\ h = \tilde{h} = 0: \quad & T = \alpha t + \beta. \end{aligned}$$

Тут α , β , δ_0 та δ_1 — довільні сталі, причому $\alpha\delta_1 > 0$.

Теорема 2.52. Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_{n=1}^\sim$ класу рівнянь

$$u_t + uu_x + h(t)u = g(t)u_{xx} \tag{2.83}$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = (x + \delta_1)X^1 + \delta_0, \quad \tilde{u} = \frac{X^1}{T_t} \left(u + (x + \delta_1) \frac{X_t^1}{X^1} \right), \\ \tilde{h} &= \frac{1}{T_t} \left(h + \frac{T_{tt}}{T_t} - 2 \frac{X_t^1}{X^1} \right), \quad \tilde{g} = \frac{(X^1)^2}{T_t} g. \end{aligned}$$

Тут δ_0, δ_1 — довільні сталі; $T = T(t)$ — довільна гладка функція, $T_t \neq 0$;
 $X^1 = \left(\gamma \int e^{-\int h(t) dt} dt + \delta \right)^{-1}$.

Клас (2.83) є нормалізованим у розширеному узагальненому сенсі.

Таким чином, допустимі перетворення в класі (2.82) вичерпно описано. Має місце твердження.

Теорема 2.53. Клас (2.82), де показник степеня n змінний, не є нормалізованим. Його можна розбити на нормалізовані підкласи, кожен з яких виокремлюється фіксованим значенням n , причому ці підкласи не пов'язані точковими перетвореннями. Кожний підклас класу (2.82) з фіксованим значенням n , $n \neq 1$, нормалізований у звичайному сенсі, тоді як підклас (2.83), де $n = 1$, нормалізований лише в розширеному узагальненому сенсі. Кожне об'єднання будь-якої кількості підкласів (2.82) з $n \neq 1$ є нормалізованим в узагальненому сенсі.

Перетворення з групи $\hat{G}^\sim$ параметризуються довільною функцією $T = T(t)$. Це дозволяє відкалібрувати один з довільних елементів — g або h — до деякого сталого значення: наприклад, можна покласти g рівним одиниці або h рівним нулю. Калібрування $h = 0$ зручніше, оскільки в цьому випадку клас (2.82) зводиться до іншого класу, для якого задачу групової класифікації розв'язано в попередньому параграфі. Це калібрування реалізується за допомогою перетворення

$$\mathcal{T}: \quad \hat{t} = \int e^{-n \int h(t) dt} dt, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{u} = e^{\int h(t) dt} u \quad (2.84)$$

з групи $\hat{G}^\sim$, яке пов'язує клас (2.82) з класом $\hat{u}_t + \hat{u}^n \hat{u}_{\hat{x}} = \hat{g}(\hat{t}) \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$, де новий довільний елемент $\hat{g}$ залежить від h та g як

$$\hat{g} = e^{n \int h(t) dt} g.$$

Зауважимо, що задачі групової класифікації для деяких підкласів класу (2.82) з $h = 0$ розглянуто в [103, 296, 297, 319]; повну групову класифікацію цього класу отримано в [316].

Табл. 2.10: Повний список розширень ліівської симетрії для класу (2.82).

№	g	Базисні оператори $A^{\max}$
$n \neq 1$		
1	$\forall$	∂_x
2	$\lambda T_t(\alpha T + \beta)^\rho$	$\partial_x, 2n(\alpha T + \beta)T_t^{-1}\partial_t + \alpha n(\rho+1)x\partial_x$ $+ (\alpha(\rho-1) - 2nh(t)(\alpha T + \beta)T_t^{-1})u\partial_u$
3	$\lambda T_t e^{\alpha T}$	$\partial_x, 2nT_t^{-1}\partial_t + \alpha n x\partial_x + (\alpha - 2nh(t)T_t^{-1})u\partial_u$
4	λT_t	$\partial_x, T_t^{-1}\partial_t - h(t)T_t^{-1}u\partial_u,$ $2nTT_t^{-1}\partial_t + nx\partial_x - (2nh(t)TT_t^{-1} + 1)u\partial_u$
$n = 1$		
5	$\forall$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u$
6	$\lambda T_t \left(\frac{\alpha T + \beta}{\gamma T + \delta} \right)^\rho$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, (\alpha T + \beta)(\gamma T + \delta)T_t^{-1}\partial_t$ $+ \left(\frac{1}{2}(\rho-1)\Delta + \alpha(\gamma T + \delta) \right)x\partial_x + \left(\alpha\gamma T_t x \right.$ $\left. + [-\alpha(\gamma T + \delta) - h(t)(\alpha T + \beta)(\gamma T + \delta)T_t^{-1} + \frac{1}{2}(\rho+1)\Delta]u \right)\partial_u$
7	$\lambda T_t e^{\frac{\alpha T + \beta}{\gamma T + \delta}}$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u,$ $(\gamma T + \delta)^2 T_t^{-1}\partial_t + (\gamma(\gamma T + \delta) + \frac{1}{2}\Delta)x\partial_x$ $+ ([-\gamma(\gamma T + \delta) - h(t)(\gamma T + \delta)^2 T_t^{-1} + \frac{1}{2}\Delta]u + \gamma^2 T_t x)\partial_u$
8	$\lambda T_t e^{2\rho \arctg(\alpha T + \beta)}$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u,$ $((\alpha T + \beta)^2 + 1)T_t^{-1}\partial_t + \alpha(\alpha T + \rho + \beta)x\partial_x$ $+ ([\alpha(-\alpha T + \rho - \beta) - h(t)((\alpha T + \beta)^2 + 1)T_t^{-1}]u + \alpha^2 T_t x)\partial_u$
9	λT_t	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, 2TT_t^{-1}\partial_t + x\partial_x - (2h(t)TT_t^{-1} + 1)u\partial_u,$ $T_t^{-1}\partial_t - h(t)T_t^{-1}u\partial_u,$ $T^2T_t^{-1}\partial_t + Tx\partial_x + (T_t x - (h(t)T^2T_t^{-1} + T)u)\partial_u$

Тут $T = T(t) = \int e^{-n \int h(t) dt} dt$, функція $h(t)$ — довільна у всіх випадках; λ та ρ — ненульові сталі. У випадку 2 стала $\alpha = \pm 1$, у випадках 3 і 8 стала $\alpha \neq 0$. У випадках 6 та 7 довільні сталі α, β, γ та δ визначені з точністю до ненульового множника (з додатковою можливістю масштабування у випадку 6), причому $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. У випадку 7 можна покласти $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{(\alpha', 0, 0, 1), (0, \beta', 1, \delta')\}$.

Зрозуміло, що перетворення $\mathcal{T}$ — не єдине, що приводить до цього калібрування. При $n \neq 1$ найбільш загальне перетворення має вигляд

$$\hat{t} = \alpha \int e^{-n \int h(t) dt} dt + \beta, \quad \hat{x} = \delta_1 x + \delta_0, \quad \hat{u} = \left(\frac{\delta_1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n}} e^{\int h(t) dt} u,$$

де $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_0$ — довільні сталі, причому $\alpha\delta_1 \neq 0$. При $n = 1$ найбільш загальне перетворення набуває вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\alpha\hat{t} + \beta}{\gamma\hat{t} + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{x + \mu_1\hat{t} + \mu_0}{\gamma\hat{t} + \delta}, \\ \tilde{u} &= \frac{(\gamma\hat{t} + \delta)e^{\int h(t) dt} u - \gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \end{aligned}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu_0, \mu_1$ — довільні сталі, що задовольняють умову $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\hat{t} = \int e^{-n \int h(t) dt} dt$.

Якщо h є ненульовою сталою, то перетворення $\mathcal{T}$, яке калібрує h до нуля, має вигляд $\hat{t} = -\frac{1}{nh}e^{-nht}$, $\hat{x} = x$, $\hat{u} = e^{ht}u$.

Зауваження 2.54. Альтернативне калібрування $g = 1$ можна отримати, використавши параметризовану сім'ю точкових перетворень, які є проєкціями перетворень з групи $\hat{G}^\sim$ на простір незалежних та залежних змінних, тобто

$$\hat{t} = \int g(t) dt, \quad \hat{x} = x \operatorname{sgn} g(t), \quad \hat{u} = |g(t)|^{-\frac{1}{n}} u.$$

Ця сім'я перетворень відображає клас (2.82) у клас $\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}^n \hat{u}_{\hat{x}} + \hat{h}(\hat{t})\hat{u} = \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}$, де новий довільний елемент $\hat{h}$ залежить від h і g як $\hat{h} = \frac{h}{g} + \frac{g_t}{ng^2}$.

Теореми 2.50, 2.52 та 2.53 вичерпно описують групоїд еквівалентності класу (2.82).

Повний перелік розширень ліївської симетрії для рівнянь (2.82) подано в таблиці 2.10. Перелік точково-нееквівалентних випадків розширення ліївської симетрії не наводимо, оскільки він співпадає з випадками, представленими в таблиці 2.8. Зауважимо, що випадки $n \neq 2$ та $n = 2$ для рівнянь (2.71) відповідають випадкам $n \neq 1$ та $n = 1$ для рівнянь (2.82),

відповідно. Класифікаційний список, наведений у таблиці 2.10, отримано методом, що базується на використанні перетворень еквівалентності, запропонованим в роботі [299].

У роботі [316] отримано розв'язки рівнянь з початкового класу (2.82) з довільними значеннями $h(t)$ і фіксованими значеннями $g(t)$:

$$(i) \quad u_t + u^n u_x + h(t)u = \varepsilon T^{\frac{1-n}{1+n}} e^{-n \int h(t) dt} u_{xx} :$$

$$u = \frac{T^{-\frac{1}{n+1}} \exp\left(-\frac{\mu}{n} x^2 T^{-\frac{2}{n+1}}\right) e^{-\int h(t) dt}}{\left(c_1 - 2\mu T^{-\frac{1}{n+1}} \int e^{-\mu x^2 T^{-\frac{2}{n+1}}} dx\right)^{\frac{1}{n}}},$$

$$(ii) \quad u_t + u^n u_x + h(t)u = e^{-n \int h(t) dt} u_{xx} :$$

$$u = \left(\frac{a(n+1)}{1 + c_1 e^{an(x-aT)}} \right)^{\frac{1}{n}} e^{-\int h(t) dt},$$

$$u = \left(\frac{n+1}{c_1 - nx} \right)^{\frac{1}{n}} e^{-\int h(t) dt},$$

$$(iii) \quad u_t + uu_x + h(t)u = g(t)u_{xx} \quad \forall g :$$

$$u = \frac{x + c_0}{\int e^{-\int h(t) dt} dt + a} e^{-\int h(t) dt}.$$

Тут a, c — довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$, $\mu = \frac{n}{2\varepsilon(n+1)}$; функція $T = T(t) = \int e^{-n \int h(t) dt} dt$.

Рівняння (ii) можна записати у вигляді

$$u_t + u^n u_x - \frac{1}{n} \frac{k_t}{k} u = k u_{xx}, \quad (2.85)$$

де функції $k(t)$ та $h(t)$ пов'язані формулою $k = e^{-n \int h(t) dt}$. При $n = 1$ рівняння (2.85) співпадає з рівнянням (3.262) роботи [275, с. 90], яке виникає у моделі Бюргерса для турбулентності зі змінною дифузійністю (використовується при моделюванні акустичних хвиль в атмосфері). Отримано дві сім'ї точних розв'язків рівняння (ii). Поведінку розв'язку

$$u = \left(\frac{a(n+1)}{1 + c_1 e^{an(x-aT)}} \right)^{\frac{1}{n}} e^{-\int h(t) dt} \quad (2.86)$$

для двох різних значень n і випадків змінного коефіцієнта дифузійності h наведено на рис. 2.4.

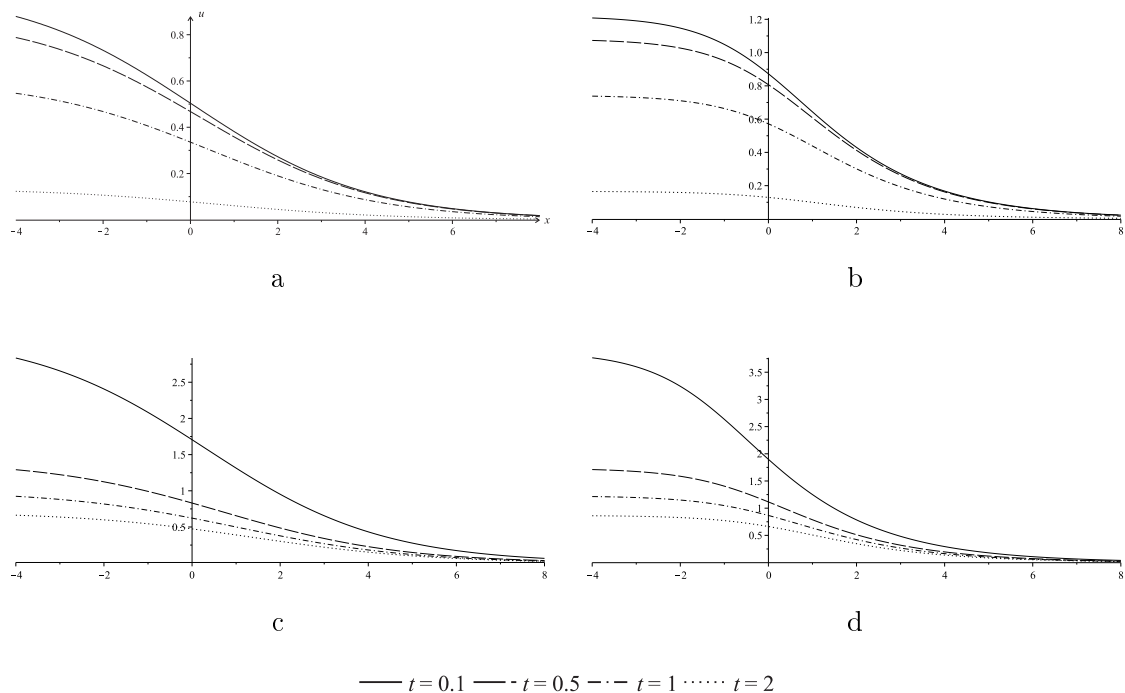


Рис. 2.4: Поведінка розв'язку (2.86) при $c_1 = 1$, $a = 0,5$. На графіку а) $n = 1$ та $h = t$; на графіку б) $n = 2$ та $h = t$; на графіку с) $n = 1$ та $h = (2t)^{-1}$; на графіку d) $n = 2$ та $h = (2t)^{-1}$.

Також показано, що всі рівняння з класу (2.82), які лінеаризуються до рівняння теплопровідності

$$\hat{v}_{\hat{t}} = \lambda \hat{v}_{\hat{x}\hat{x}}, \quad (2.87)$$

мають вигляд

$$u_t + uu_x + h(t)u = \lambda e^{-\int h(t) dt} u_{xx}. \quad (2.88)$$

Відповідне перетворення

$$\hat{t} = \int e^{-\int h(t) dt} dt, \quad \hat{x} = x, \quad -2\lambda \frac{\hat{v}_{\hat{x}}}{\hat{v}} = e^{\int h(t) dt} u$$

дає формулу для побудови розв'язків рівняння (2.88) з розв'язків рівняння теплопровідності:

$$u(t, x) = -2\lambda e^{-\int h(t) dt} \frac{\hat{v}_x(\hat{t}, x)}{\hat{v}(\hat{t}, x)}, \quad \text{де} \quad \hat{t} = \int e^{-\int h(t) dt} dt.$$

Розглянемо, наприклад, точний розв'язок $\hat{v} = ce^{a\hat{x}+a^2\lambda\hat{t}}(\hat{x} + 2a\lambda\hat{t})$ рівняння теплопровідності (2.87). Тут c та a — довільні ненульові сталі. Використовуючи останнє перетворення, отримуємо точний розв'язок рівняння (2.88):

$$u(t, x) = -2\lambda \frac{ax + 2a^2\lambda \int e^{-\int h(t) dt} dt + 1}{x + 2a\lambda \int e^{-\int h(t) dt} dt} e^{-\int h(t) dt}.$$

2.7. Групова класифікація (2+1)-вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова

Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку вигляду

$$u_t = Du_{yy} + \nu [K(u)]_x, \quad (2.89)$$

де D та ν — ненульові сталі, K — гладка нелінійна функція від залежної змінної u , зустрічаються в різних застосуваннях. Зокрема, вони описують дифузійно-конвекційні процеси [107], моделюють взаємодію частинок двома типів на решітці [41], виникають у математичних фінансах при прийнятті рішень агентів в умовах ризику [91, 201, 244]. Рівняння (2.89) в літературі називають рівняннями дифузії–адвекції, нелінійними ультрапараболічними рівняннями та нелінійними рівняннями Колмогорова.

Ліївські симетрії рівнянь (2.89) і відповідні групові інваріантні розв'язки були прокласифіковані Е. Демітроу зі співавторами в [99]. Також досліджувалися ліївські симетрії лінійних рівнянь Колмогорова [14, 27] і нелінійних рівнянь Колмогорова зі сталими коефіцієнтами вигляду $u_t - u_{yy} - uu_x = f(u)$ [26] і $u_t - u_{yy} + g(u)u_x = f(u)$ [267].

Спробу групової класифікації класу нелінійних рівнянь Колмогорова, що узагальнюють рівняння (2.89), а саме рівняння із залежними від часу коефіцієнтами,

$$u_t = f(t)u_{yy} - g(t)[K(u)]_x, \quad fgK_{uu} \neq 0, \quad (2.90)$$

було зроблено нещодавно в роботі [191]. Тут f та g — це гладкі незмінні функції від змінної t , K — гладка нелінійна функція від u . На жаль, повної класифікації ліївських симетрій класу (2.90) не було досягнуто в [191], зокрема, випадок $K = u \ln u$ було пропущено, розмірності максимальних алгебр ліївських симетрій, а також деякі їх базисні елементи для інших випадків розширень були подані неправильно. Випадок $K = u^2$, що є важливим для застосувань, взагалі не вивчався з точки зору ліївських симетрій.

У цій секції ми виконуємо повну групову класифікацію рівнянь (2.90). Оскільки клас (2.90) параметризовано трьома довільними елементами, $K(u)$, $f(t)$ та $g(t)$, задача групової класифікації видається надто складною, щоб її розв'язати повністю без сучасних підходів, заснованих на використанні точкових перетворень еквівалентності (див. також [305]). Одним із таких інструментів є калібрування довільних елементів за допомогою перетворень еквівалентності (тобто зведення класу до підкласу з меншою кількістю довільних елементів). У секції 2.7.3 обговорюється, як вибрати оптимальне калібрування серед можливих. Щоб проілюструвати оптимальність вибраного калібрування, також представлено результати групової класифікації класу (2.90) з альтернативним калібруванням.

2.7.1. Допустимі перетворення. Для пошуку допустимих перетворень використовуємо прямий метод [184]. З метою стислості викладу деталі розрахунків опущено. Оскільки для вивчення ліївської симетрії зручніше розглянути еквівалентну форму вищевказаного класу,

$$u_t = f(t)u_{yy} - g(t)k(u)u_x, \quad fgk_u \neq 0, \quad (2.91)$$

в теоремах нижче представляємо перетворення для обох функцій K та $k = K_u$.

Теорема 2.55. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}^\sim$ класу (2.90) (відповідно (2.91)) утворюється за допомогою перетворень*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2 \int g(t) dt + \delta_3, \quad \tilde{y} = \delta_4 y + \delta_5,$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \delta_6 u + \delta_7, \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\delta_4^2}{T_t} f(t), \quad \tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{\varepsilon_1}{T_t} g(t), \\ \tilde{K}(\tilde{u}) &= \frac{\delta_6}{\varepsilon_1} (\delta_1 K(u) + \delta_2 u + \varepsilon_2), \quad \left(\text{resp. } \tilde{k}(\tilde{u}) = \frac{1}{\varepsilon_1} (\delta_1 k(u) + \delta_2), \right) \end{aligned}$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 7$, ε_1 та ε_2 є довільними сталими, $\delta_1 \delta_4 \delta_6 \varepsilon_1 \neq 0$, $T(t)$ — довільна гладка функція, $T_t \neq 0$.

Звичайна група еквівалентності класу (2.90) (відповідно (2.91)) складається з наведених перетворень з $\delta_2 = 0$.

Група $\hat{G}^\sim$ містить підгрупу калібрувальних перетворень еквівалентності, тобто перетворення, які змінюють лише довільні елементи, тоді як незалежні та залежні змінні залишаються незмінними [261]. Ця підгрупа утворюється перетвореннями $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{f} = f$, $\tilde{g} = \varepsilon_1 g$, $\tilde{K} = (K + \varepsilon_2)/\varepsilon_1$ (відповідно $\tilde{k} = k/\varepsilon_1$). Зручніше розглядати клас (2.91), ніж клас (2.90), оскільки в цьому випадку зменшується розмірність підгрупи еквівалентності, яка відповідає перетворенням калібрування.

Виявляється, підклас рівнянь (2.90) з функцією K квадратичною відносно u (відповідно (2.91) з функцією k лінійною відносно u) допускає ширшу групу еквівалентності. З точністю до $\hat{G}^\sim$ -еквівалентності, ми можемо розглянути випадок $K = u^2$ (відповідно $k = u$).

Теорема 2.56. Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу

$$u_t = f(t)u_{yy} - g(t)uu_x, \quad fg \neq 0, \quad (2.92)$$

включає перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t)x + \delta_3 \int g(t)X(t)^2 dt + \delta_4, \quad \tilde{y} = \delta_1 y + \delta_2, \\ \tilde{u} &= \delta_5 \left(\frac{u}{X(t)} - \delta_6 x + \delta_3 \right), \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^2}{\delta_5 T_t} f(t), \quad \tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{X(t)^2}{\delta_5 T_t} g(t), \end{aligned}$$

де $X(t) = (\delta_6 \int g(t) dt + \delta_7)^{-1}$, δ_i , $i = 1, \dots, 7$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_5 (\delta_6^2 + \delta_7^2) \neq 0$, $T(t)$ — довільна гладка функція, $T_t \neq 0$.

Звичайна група еквівалентності класу (2.92) складається з наведених перетворень з $\delta_3 = \delta_6 = 0$.

Оскільки перетворення з групи $\hat{G}^\sim$ включають одну довільну функцію $T(t)$, то можна один з довільних елементів f чи g початкового класу покласти рівним сталій. Виконаємо калібрування $g = 1$ за допомогою перетворення $\tilde{t} = \int g(t) dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$. Тоді будь-яке рівняння з класу (2.90) (відповідно (2.91)) відображається в рівняння з підкласу, виокремленого умовою $g = 1$. Без обмеження загальності, можна обмежитися вивченням класу (2.90) з $g = 1$ або, що зручніше, його еквівалентної форми

$$u_t = f(t)u_{yy} - k(u)u_x, \quad f k_u \neq 0. \quad (2.93)$$

Узагальнені розширені групи еквівалентності класу (2.93) та його підкласу з $k = u$ співпадають зі своїми звичайними групами еквівалентності.

Теорема 2.57. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (2.93) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \varepsilon_1 t + \varepsilon_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2 t + \delta_3, \quad \tilde{y} = \delta_4 y + \delta_5, \quad \tilde{u} = \delta_6 u + \delta_7, \\ \tilde{f}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_4^2}{\varepsilon_1} f(t), \quad \tilde{k}(\tilde{u}) = \frac{1}{\varepsilon_1} (\delta_1 k(u) + \delta_2), \end{aligned}$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 7$, ε_1 і ε_0 — довільні сталі, $\delta_1 \delta_4 \delta_6 \varepsilon_1 \neq 0$.

Теорема 2.58. *Звичайна група еквівалентності $G_1^\sim$ класу*

$$u_t = f(t)u_{yy} - uu_x, \quad f \neq 0, \quad (2.94)$$

утворюється за допомогою перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu t + \nu}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{y} = \lambda y + \varepsilon, \\ \tilde{u} &= \frac{1}{\Delta} (\kappa(\gamma t + \delta)u - \kappa\gamma x + \delta\mu - \gamma\nu), \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\lambda^2}{\Delta} (\gamma t + \delta)^2 f(t), \end{aligned}$$

де α , β , γ , δ , κ , μ , та ν є довільними сталими, визначеними до ненульового множника $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\kappa \neq 0$; λ та ε — довільні сталі, $\lambda \neq 0$.

З теореми 2.58 випливає, що будь-яке рівняння (2.94) з $f = a(t+b)^{-2}$, де $a \neq 0$ та b — сталі, відображається точковим перетворенням в рівняння зі сталими коефіцієнтами з того ж класу.

Також представимо перетворення еквівалентності для підкласу класу (2.91), що виокремлено умовою $f = 1$, яку ми будемо використовувати для порівняння випадків $f = 1$ та $g = 1$ в секції 2.7.3.

Теорема 2.59. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}_2^\sim$ класу*

$$u_t = u_{yy} - g(t)k(u)u_x, \quad gk_u \neq 0, \quad (2.95)$$

включає перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_4^2 t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2 \int g(t) dt + \delta_3, \quad \tilde{y} = \delta_4 y + \delta_5, \\ \tilde{u} &= \delta_6 u + \delta_7, \quad \tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{\varepsilon_1}{\delta_4^2} g(t), \quad \tilde{k}(\tilde{u}) = \frac{1}{\varepsilon_1} (\delta_1 k(u) + \delta_2), \end{aligned}$$

де δ_i , $i = 0, 1, \dots, 7$, та ε_1 — довільні сталі з $\delta_1 \delta_4 \delta_6 \varepsilon_1 \neq 0$.

Теорема 2.60. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}_3^\sim$ класу*

$$u_t = u_{yy} - g(t)uu_x, \quad g \neq 0, \quad (2.96)$$

містить перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \frac{1}{\theta(t)}(x + \delta_4) + \delta_5, \quad \tilde{y} = \delta_1 y + \delta_3, \\ \tilde{u} &= \delta_6(\theta(t)u - \gamma_1(x + \delta_4)), \quad \tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{g(t)}{\delta_1^2 \delta_6 \theta(t)^2}, \end{aligned}$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 6$, $\theta(t) = \gamma_1 \int g(t) dt + \gamma_2$, γ_1 та γ_2 — довільні сталі з $\delta_1 \delta_6 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \neq 0$.

2.7.2. Ліївські симетрії. Задача групової класифікації для класу (2.91), з точністю до $\hat{G}^\sim$ -еквівалентності, зводиться до аналогічної задачі для класу (2.93), з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (відповідно задача групової класифікації для класу (2.92), з точністю до $\hat{G}_1^\sim$ -еквівалентності, зводиться до задачі групової класифікації класу (2.94) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності). Для розв'язання задачі групової класифікації для класу (2.93) використовуємо класичний підхід, що базується на інтегруванні визначальних рівнянь, що отримуються з критерію інваріантності [23]. Шукаємо оператори симетрії вигляду

$Q = \tau(t, x, y, u)\partial_t + \xi(t, x, y, u)\partial_x + \eta(t, x, y, u)\partial_y + \theta(t, x, y, u)\partial_u$, які генерують однопараметричні групи Лі перетворень, які залишають рівняння (2.93) інваріантними [23, 235]. Це вимагає, що дія другого продовженням $Q^{(2)}$ оператора Q на рівняння (2.93) дорівнювала нулю на многовиді рівняння (2.93),

$$Q^{(2)}\{u_t - f(t)u_{yy} + k(u)u_x\}|_{u_t=f(t)u_{yy}-k(u)u_x} = 0. \quad (2.97)$$

Інфінітезимальний критерій інваріантності (2.97) приводить до визначальних рівнянь, після спрощення яких отримуємо

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(t), \quad \xi = \xi(t, x), \quad \eta = \eta^1(t)y + \eta^0(t), \\ \theta &= \varphi(t, x, y)u + \psi(t, x, y), \end{aligned}$$

де τ , ξ , η^1 , η^0 , φ та ψ є довільними гладкими функціями від їх змінних. Тоді решта визначальних рівнянь набуває вигляду

$$\tau f_t = (2\eta^1 - \tau_t)f, \quad 2f\varphi_y = -\eta_t^1 y - \eta_t^0, \quad (2.98)$$

$$(\varphi u + \psi)k_u + (\tau_t - \xi_x)k = \xi_t, \quad (2.99)$$

$$(\varphi_x u + \psi_x)k + (\varphi_t - f\varphi_{yy})u + \psi_t - f\psi_{yy} = 0. \quad (2.100)$$

Спершу інтегруємо рівняння (2.99) та (2.100) на функцію k з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, беручи до уваги те, що $k_u \neq 0$. Далі використовується метод розгалуженого розщеплення [20, 162]. Для будь-якого оператора $Q \in A^{\max}$ рівняння (2.99) дає рівняння на функцію k загальної вигляду

$$(au + b)k_u + ck = d, \quad (2.101)$$

де a , b , c , d — сталі. Число s таких незалежних рівнянь не більше двох, бо інакше вони утворюють несумісну систему на функцію k . Якщо $s = 0$, то (2.101) не є рівнянням на функцію k , але це тотожність, яка відповідає випадку довільної функції k . Якщо $s = 1$, то інтегрування (2.101), з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, розпадається на три різні випадки: (i) $k = u^n$,

$n \neq 0, 1$; (ii) $k = e^u$; (iii) $k = \ln u$. Якщо $s = 2$, то функція k — лінійна відносно u , $k = u \bmod G^\sim$.

З визначального рівняння (2.100) випливає, що існує два принципово різні випадки класифікації: I. $k_{uu} \neq 0$ та II. $k_{uu} = 0$ ($k = u \bmod G^\sim$). Розглянемо спочатку випадок довільної функції k . У цьому випадку рівняння (2.99) та (2.100) слід розщепити відносно k та k_u . Після розщеплення отримуємо $\varphi = \psi = \xi_t = \tau_t - \xi_x = 0$. Тому $\tau = c_1 t + c_2$, $\xi = c_1 x + c_3$. Якщо $\varphi = 0$, то з другого рівняння (2.98) випливає, що $\eta_t^1 = \eta_t^0 = 0$, тобто $\eta^1 = c_4$, та $\eta^0 = c_5$. Тут c_i , $i = 1, \dots, 5$, — довільні сталі. Тоді загальний вигляд інфінітезимального генератора є наступним: $Q = (c_1 t + c_2) \partial_t + (c_1 x + c_3) \partial_x + (c_4 y + c_5) \partial_y$, та перше рівняння в (2.98) набуває вигляду

$$(c_1 t + c_2) f_t = (2c_4 - c_1) f. \quad (2.102)$$

Це класифікуюче рівняння для f . Якщо f є довільною ненульовою гладкою функцією, то останнє рівняння слід розщепити відносно f та її похідної, що приводить до $c_1 = c_2 = c_4 = 0$. Тому, ядром $A^\cap$ максимальної ліївської алгебри інваріантності рівнянь з класу (2.93) є $A^\cap = \langle \partial_x, \partial_y \rangle$ (випадок 1 таблиці 2.11). Для подальшої класифікації інтегруємо рівняння (2.102) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Всі $G^\sim$ -нееквівалентні значення f , які забезпечують розширення ліївських симетрій для рівнянь класу (2.93) з довільною функцією k , вичерпуються наступними значеннями: $f = t^\rho$, $\rho \neq 0$; $f = e^t$; $f = 1$. Відповідні базиси максимальних ліївських алгебр інваріантності представлені випадками 2–4 таблиці 2.11.

Якщо $k = u^n$, $n \neq 0, 1$, тоді розщеплюючи рівняння (2.99) та (2.100) відносно різних степенів u , отримуємо систему $\xi_t = \psi = \varphi_x = 0$, $\varphi_t = f \varphi_{yy}$, $n \varphi + \tau_t - \xi_x = 0$. З цих рівнянь та рівняння (2.98) випливає, що $\tau = c_1 t + c_2$, $\xi = (c_1 + n c_6) x + c_3$, $\eta = c_4 y + c_5$, $\varphi = c_6$, де c_i , $i = 1, \dots, 6$, — довільні сталі. Класифікуюче рівняння для f набуває вигляду (2.102). Тому, випадки розширення ліївської симетрії визначаються такими ж виглядами функції f , як в попередньому випадку, а саме,

Табл. 2.11: Групова класифікація класу (2.93) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

по.	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
Довільна k		
1	$\forall$	∂_x, ∂_y
2	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, 2t\partial_t + 2x\partial_x + (\rho + 1)y\partial_y$
3	e^t	$\partial_x, \partial_y, 2\partial_t + y\partial_y$
4	1	$\partial_x, \partial_y, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$
$k = u^n, n \neq 0, 1$		
5	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u$
6	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u, 2t\partial_t + 2x\partial_x + (\rho + 1)y\partial_y$
7	e^t	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u, 2\partial_t + y\partial_y$
8	1	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$
$k = e^u$		
9	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u$
10	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + 2x\partial_x + (\rho + 1)y\partial_y$
11	e^t	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u, 2\partial_t + y\partial_y$
12	1	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$
$k = \ln u$		
13	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, t\partial_x + u\partial_u$
14	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, t\partial_x + u\partial_u, 2t\partial_t + 2x\partial_x + (\rho + 1)y\partial_y$
15	e^t	$\partial_x, \partial_y, t\partial_x + u\partial_u, 2\partial_t + y\partial_y$
16	1	$\partial_x, \partial_y, t\partial_x + u\partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$

Тут n та ρ — довільні ненульові сталі, та $n \neq 1$.

довільна, степенева, експоненціальна та стала. Дивись випадки 5–8 таблиці 2.11. Розмірності відповідних алгебр лівських симетрій збільшуються на одиницю порівняно з випадком для довільної функції k . Найбільша розмірність — це п'ять, а не шість, як було зазначено в роботі [191].

Дослідження випадків $k = e^u$ та $k = \ln u$ подібне до випадку $k = u^n$, $n \neq 0, 1$, тому, опускаємо деталі розрахунків. Результати класифікації представлені у випадках 9–16 таблиці 2.11.

Розглянемо випадок лінійного k , тоді, з точністю до еквівалентності,

Табл. 2.12: Групова класифікація класу (2.94) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності.

но.	$f(t)$	базис $A^{\max}$
1	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u$
2	$\frac{e^{\sigma \arctg t}}{t^2 + 1}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u, (t^2 + 1)\partial_t + tx\partial_x + \frac{1}{2}\sigma y\partial_y + (x - tu)\partial_u$
3	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + (\rho + 1)y\partial_y - 2u\partial_u$
4	e^t	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u, 2\partial_t + y\partial_y$
5	1	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + y\partial_y - 2u\partial_u$

Тут ρ та σ — довільні сталі $\rho \neq 0, -2$. Крім того, $\rho \leq -1 \bmod G_1^\sim$.

можна покласти $k = u$. Ми підставляємо $k = u$ в рівняння (2.99) та (2.100) і далі розщеплюючи їх відносно різних степенів u . У результаті приходимо до системи $\psi = \xi_t, \tau_t - \xi_x + \varphi = 0, \varphi_x = 0, \psi_x + \varphi_t - f\varphi_{yy} = 0$, та $\psi_t - f\psi_{yy} = 0$. Диференціюємо перше та друге рівняння цієї системи відносно змінної y і отримуємо додаткові умови $\varphi_y = \psi_y = 0$. Тоді також $\psi_t = \psi_{xx} = \varphi_{tt} = 0$, і з другого рівняння (2.98) отримуємо $\eta_t^1 = \eta_t^0 = 0$. Загальним вигляд інфінітезимального оператора Q є наступним: $Q = (c_2t^2 + c_1t + c_0)\partial_t + ((c_2t + c_4)x + c_3t + c_5)\partial_x + (c_6y + c_7)\partial_y + ((c_4 - c_1 - c_2t)u + c_2x + c_3)\partial_u$, де $c_i, i = 0, \dots, 7$, — довільні сталі. Класифікуюче рівняння набуває вигляду

$$(c_2t^2 + c_1t + c_0)f_t = (2c_6 - c_1 - 2c_2t)f. \quad (2.103)$$

Якщо це не рівняння на f , а тотожність, то тоді $c_0 = c_1 = c_2 = c_6 = 0$. У цьому випадку сталі c_3, c_4, c_5, c_7 в інфінітезимальному генераторі Q є довільними та максимальна алгебра лівської інваріантності рівнянь (2.94) з довільною функцією f є чотиривимірною алгеброю $\langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u \rangle$ (випадок 1 таблиці 2.12).

Подальша групова класифікація рівнянь (2.93) з $k = u$, тобто рівняння (2.94), еквівалентна інтегруванню рівняння на функцію f :

$$(at^2 + bt + c)f_t = (d - 2at)f, \quad (2.104)$$

де a, b, c та d — довільні сталі, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. З точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності можна вважати, що четвірка параметрів (a, b, c, d) нале-

жать до набору $\{(1, 0, 1, \sigma), (0, 1, 0, \rho), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\}$, де σ, ρ — ненульові сталі, $\rho \leq -1$. Доведення цього факту подібне до доведення представленого в роботах [311, 316]. Воно базується на тому, що перетворення з групи еквівалентності $G_1^\sim$, можна розширити на коефіцієнти a, b, c та d наступним чином

$$\tilde{a} = \mu(a\delta^2 - b\gamma\delta + c\gamma^2), \quad \tilde{b} = \mu(-2a\beta\delta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - 2c\alpha\gamma),$$

$$\tilde{c} = \mu(a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2), \quad \tilde{d} = \mu(d\Delta + 2a\beta\delta - 2b\beta\gamma + 2c\alpha\gamma),$$

де $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ та μ — довільна ненульова стала.

Інтегрування рівняння (2.104) для чотирьох нееквівалентних випадків четвірки (a, b, c, d) приводить відповідно до випадків: $f = \frac{e^{\sigma \arctg t}}{t^2 + 1}$, $f = t^\rho$, $\rho \neq 0$, $f = e^t$ та $f = 1$. Далі підставляємо отримані нееквівалентні значення функції f у рівняння (2.103) і знаходимо відповідні значення сталих c_i та, звідти, загальні вигляди для інфінітезимальних операторів. Результати групової класифікації класу (2.94) представлені в таблиці 2.12.

Класифікаційні списки, представлені в таблицях 2.11 та 2.12, дають вичерпну групову класифікацію класу нелінійних рівнянь Колмогорова (2.91) зі змінними коефіцієнтами та нелінійними функціями k та класу рівнянь (2.92) з точністю до $\hat{G}^\sim$ - та $\hat{G}_1^\sim$ -еквівалентностей, відповідно.

2.7.3. Обговорення оптимального калібрування. Вдалий вибір калібрування довільних елементів є вирішальним кроком у розв’язанні задач групової класифікації. Калібрування $f = 1$ може здатися більш зручним, якщо шукати визначальні рівняння для знаходження ліївських симетрій. Для класу (2.95) вони мають вигляд

$$\begin{aligned} 2\eta_y = \tau_t, \quad \eta_{yy} - \eta_t = 2\varphi_y, \quad (\varphi u + \psi)gk_u + [\tau g_t + (\tau_t - \xi_x)g]k = \xi_t, \\ (\varphi_x u + \psi_x)gk + (\varphi_t - \varphi_{yy})u + \psi_t - \psi_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Для класу $k \neq u$ різниця в класифікації не така суттєва (пор. таблицю 2.11 з таблицею 2.13). Хоча можна побачити, що для $k = \ln u$ оператор $t\partial_x + u\partial_u$, що з’являється у випадках 13–16 таблиці 2.11, перетворюється

до різних форм у відповідних випадках таблиці 2.13. Для випадку $k = u$ складність групової класифікації класу (2.91) з $f = 1$ істотно зростає порівняно з калібруванням $g = 1$. Розв'язування визначальних рівнянь приводить до наступного вигляду інфінітезимального оператора

$$Q = (c_1 t + c_0) \partial_t + [(c_2 x + c_3) \int g(t) dt + c_4 x + c_5] \partial_x + \\ + (\frac{1}{2} c_1 y + c_6) \partial_y + [(c_7 - c_2 \int g(t) dt) u + c_2 x + c_3] \partial_u,$$

де $c_i, i = 0, \dots, 7$, — довільні сталі. Класифікуюче рівняння є інтегрально-диференціальним рівнянням: $(c_1 t + c_0) g_t = (c_4 - c_1 - c_7 + 2c_2 \int g(t) dt) g$ (див. класифікуюче рівняння (2.103) для f , яке є набагато простішим). Результати групової класифікації класу (2.96) представлені в таблиці 2.14. При порівнянні таблиць 2.12 та 2.14 можна зробити висновок, що вигляди базових операторів максимальної алгебри лівської інваріантності більш громіздкі в таблиці 2.14.

Зв'язки між рівняннями вигляду (2.96) також складніші, ніж між рівняннями з класу (2.94). Наприклад, рівняння

$$u_t = u_{yy} - \frac{1}{t \operatorname{ch}^2(\nu \ln t)} u u_x,$$

де змінний коефіцієнт може бути представлений у вигляді $\frac{4}{t(t^\nu + t^{-\nu})^2}$, допускає п'ятивимірну максимальну алгебру лівської інваріантності з базисними операторами $\partial_x, \partial_y, \operatorname{th}(\nu \ln t) \partial_x + \nu \partial_u, x \partial_x + u \partial_u$, та $t \partial_t - \nu x \operatorname{th}(\nu \ln t) \partial_x + \frac{1}{2} y \partial_y - \nu(\nu x - \operatorname{th}(\nu \ln t) u) \partial_u$. Еквівалентність цього рівняння та рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} - \tilde{t}^{2\nu-1} \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}}$ з того ж класу не є очевидною. Тим не менш, існує перетворення з групи еквівалентності $\hat{G}_3^\sim$,

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \frac{1}{4} x (t^{2\nu} + 1), \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{u} = \frac{u}{t^{2\nu} + 1} + \frac{\nu}{2} x,$$

що встановлює зв'язок між цими рівняннями. Це показує, що розрізнення нееквівалентних випадків розширення лівських симетрій для класу (2.96) є також складнішим завданням, ніж для класу (2.94).

Табл. 2.13: Групова класифікація класу (2.95) з точністю до $\hat{G}_2$ -еквівалентності.

по.	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
Довільна k		
1	$\forall$	∂_x, ∂_y
2	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, 2t\partial_t + 2(\rho + 1)x\partial_x + y\partial_y$
3	e^t	$\partial_x, \partial_y, \partial_t + x\partial_x$
4	1	$\partial_x, \partial_y, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$
$k = u^n, n \neq 0, 1$		
5	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u$
6	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u, 2t\partial_t + 2(\rho + 1)x\partial_x + y\partial_y$
7	e^t	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u, \partial_t + x\partial_x$
8	1	$\partial_x, \partial_y, nx\partial_x + u\partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$
$k = e^u$		
9	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u$
10	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + 2(\rho + 1)x\partial_x + y\partial_y$
11	e^t	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u, \partial_t + x\partial_x$
12	1	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$
$k = \ln u$		
13	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, \int g(t) dt \partial_x + u\partial_u$
14 _a	$t^\rho, \rho \neq -1$	$\partial_x, \partial_y, t^{\rho+1}\partial_x + (\rho + 1)u\partial_u, 2t\partial_t + 2(\rho + 1)x\partial_x + y\partial_y$
14 _b	t^{-1}	$\partial_x, \partial_y, \ln t \partial_x + u\partial_u, 2t\partial_t + y\partial_y$
15	e^t	$\partial_x, \partial_y, e^t\partial_x + u\partial_u, \partial_t + x\partial_x$
16	1	$\partial_x, \partial_y, t\partial_x + u\partial_u, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y, \partial_t$

Тут n та ρ — довільні ненульові сталі.

Тому, без сумніву, калібрування $g = 1$ є вдалим для групової класифікації класу (2.91) і особливо для його підкласу (2.92).

Отже, чи існує регулярний спосіб, який може допомогти обрати краще калібрування серед декількох можливих? Групи еквівалентності, як виявляється, є індикаторами, що показують правильний вибір калібрування. Дійсно, порівняння груп еквівалентності, представлених у теоремах 2.57 та 2.58, із групами, наведеними в теоремах 2.59 та 2.60, показує,

Табл. 2.14: Групова класифікація класу (2.96) з точністю до $\hat{G}_3^\sim$ -еквівалентності.

но.	$g(t)$	базис $A^{\max}$
1	$\forall$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, \int g(t) dt \partial_x + \partial_u$
2	$\frac{1}{t \cos^2(\nu \ln t)}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, \operatorname{tg}(\nu \ln t)\partial_x + \nu\partial_u,$ $t\partial_t + \nu x \operatorname{tg}(\nu \ln t)\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_y + \nu(\nu x - \operatorname{tg}(\nu \ln t)u)\partial_u$
3	$\frac{1}{\cos^2 t}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, \operatorname{tg} t \partial_x + \partial_u, \partial_t + x \operatorname{tg} t \partial_x + (x - u \operatorname{tg} t)\partial_u$
4 _a	t^ρ	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t^{\rho+1}\partial_x + (\rho+1)\partial_u, 2t\partial_t + 2(\rho+1)x\partial_x + y\partial_y$
4 _b	t^{-1}	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, \ln t \partial_x + \partial_u, 2t\partial_t + y\partial_y$
5	e^t	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, e^t\partial_x + \partial_u, \partial_t + x\partial_x$
6	1	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + u\partial_u, t\partial_x + \partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y$

Тут ρ та ν — довільні сталі з $\nu \neq 0, \rho \neq -2, -1, 0$. Більше того $\rho < -1 \bmod \hat{G}_3^\sim$.

що групи еквівалентності класу (2.93) та його підкласу (2.94) є звичайними, тоді як групи еквівалентності класу (2.95) та його підкласу (2.96) є розширеними узагальненими. Перетворення з розширених узагальнених груп стають точковими лише після фіксації довільних елементів та інтегралів від функції g , що природно з'являються у компонентах операторів ліївських симетрій і навіть у класифікуючому рівнянні. Це, звичайно, ускладнює розрахунки. Отже, найширшу групу еквівалентності слід обов'язково знайти ще до застосування ліївського критерію інваріантності до досліджуваних рівнянь для того, щоб вибрати оптимальне калібрування та оптимізувати весь процес групової класифікації.

Значення довільного елементу K класу (2.90) можна отримати, використовуючи значення довільного елементу k класу (2.91), що наведені в таблицях 2.11 і 2.13, а саме: $k = u^n, n \neq 0, -1, \leftrightarrow K = u^{n+1}; k = u^{-1} \leftrightarrow K = \ln u; k = e^u \leftrightarrow K = e^u; k = \ln u \leftrightarrow K = u \ln u$.

Застосування найширших (розширених узагальнених) груп еквівалентності дозволило записати класифікаційні списки в оптимальному вигляді.

Розділ 3

Групоїди еквівалентності у дослідженні рівнянь типу Кортевега–де Фріза й пов'язаних моделей

Класичне рівняння Кортевега–де Фріза (КдФ) і його узагальнення моделюють різноманітні хвильові процеси, включаючи хвилі мілкої води, гравітаційні хвилі, іонно-звукові хвилі в плазмі й хвилі на решітках [128, 168, 185]. Зокрема, рівняння КдФ виникає при моделюванні одновимірних плоских хвиль в холодній квазінейтральній безколізійній плазмі, які розповсюджуються вздовж x -напрямку в присутності однорідного магнітного поля [173]. Рівняння КдФ, таким чином, є загальновизнаною моделлю для опису нелінійних довгих хвиль у багатьох областях фізики.

В останні десятиліття великий інтерес представляють моделі зі змінними коефіцієнтами, які в багатьох випадках описують явища реального світу з більшою точністю. Класифікації лівських симетрій є звичайними задачами при вивченні таких моделей. Це пов'язано з тим, що лівські симетрії дозволяють не тільки звести модельне диференціальне рівняння з частинними похідними до такого рівняння з меншою кількістю незалежних змінних або до звичайного диференціального рівняння, але також виокремити випадки, які потенційно цікавіші для застосувань [31].

Підрозділ 3.1 присвячено опису групоїда еквівалентності в класі рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами $u_t + f(t, x)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. Доведено, що цей клас ненормалізований, але його можна зобразити як об'єднання шести неперетинних нормалізова-

них підкласів. Знайдено максимально широкі групи еквівалентності для кожного підкласу, які виявились розширеними узагальненими в п'яти випадках. Запропоновано способи поліпшення трансформаційних властивостей підкласів з використанням калібрувань довільних елементів і методу відображень між класами. Групову класифікацію одного з викоремлених підкласів наведено в якості ілюстративного прикладу.

У підрозділі 3.2 побудовано ієрархію нормалізованих підкласів загального класу $(1 + 1)$ -вимірних еволюційних рівнянь третього порядку, які містять рівняння Кортевега–де Фріза й їхні узагальнення. Це дає повний опис групоїдів еквівалентності в цих класах. Для двох класів рівнянь Кортевега–де Фріза (КдФ) і модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза (мКдФ) зі змінними коефіцієнтами отримано необхідні й достатні умови звідності таких рівнянь до стандартних рівнянь КдФ і мКдФ, відповідно. Також виконано вичерпний груповий аналіз нормалізованого класу рівнянь КдФ зі змінними коефіцієнтами $u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$.

Підрозділ 3.3 присвячено дослідженню узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами $u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0$. Виконано вичерпну групову класифікацію цих рівнянь й проведено відповідні лівські редукції рівнянь Кавахари до звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано певні точні й чисельні розв'язки, зокрема, для рівняння Кавахари, що описує хвилі в морі, вкритому кригою, товщина якої збільшується з часом. У підрозділі 3.4 досліджено рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні (ББМ), які моделюють поширення помірно довгих хвиль з невеликою амплітудою в системах з нелінійними й дисперсійними ефектами. Групову класифікацію рівнянь ББМ з залежними від часу коефіцієнтами $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0$, $gh \neq 0$, здійснено за допомогою методу відображень між класами. Також знайдено закони збереження таких рівнянь.

У підрозділі 3.5 показано, як точкові перетворення можна використовувати для дослідження інтегровності, зокрема, для виокремлення класів

інтегровних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Знайдено групоїди еквівалентності декількох вкладених нормалізованих підкласів класу $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь n -го порядку. В рамках запропонованого підходу досліджено клас рівнянь типу КдФ п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами. Виокремлено його підкласи, що є інтегровними й побудовано пари Лакса для них.

Результати цього розділу опубліковано в [4, 195, 224, 264, 313–315].

3.1. Групоїд еквівалентності одного класу рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Один з перших класів, чиї трансформаційні властивості були предметом дослідження, — клас рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$\mathcal{L}: \quad u_t + f(t, x)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0, \quad fg \neq 0. \quad (3.1)$$

Класичне рівняння Кортвега–де Фріза і його узагальнення моделюють різні фізичні явища, зокрема, класичні хвилі на воді, гравітаційні хвилі, хвилі у плазмі й хвилі на решітках [85, 128, 129, 168]. Існує ряд робіт, в яких рівняння з класу $\mathcal{L}$ були досліджені з різних точок зору. Згадаємо тільки ті роботи, які найбільше пов'язані з нашим дослідженням. У роботах [143, 192] було проведено Пенлеве аналіз рівнянь (3.1). Було показано, що такі рівняння проходять тест Пенлеве тільки в тому випадку, якщо коефіцієнти f і g задовольняють умовам $f_x = g_x = 0$, і $(g/f)_t/f = \text{const}$. Ці умови збігаються з умовами звідності рівнянь зі змінними коефіцієнтами (3.1) до стандартного рівняння Кортвега–де Фріза. Зауважимо, що в роботі [133] було виконано групову класифікацію більш загального класу рівнянь, ніж клас $\mathcal{L}$, але ці результати, отримані з точністю до дуже широкої групи еквівалентності, незручні для виокремлення класифікаційного списку для рівнянь (3.1) (див. також результати роботи [280]).

Ліївські симетрії й допустимі перетворення рівнянь з класу $\mathcal{L}$ вивчалися в роботах [126, 134, 324]. У цьому підрозділі представлено розширені результати щодо трансформаційних властивостей цих рівнянь. У роботах [126, 324] було правильно показано, що існує шість різних підкласів класу (3.1), які відрізняються за своїми трансформаційними властивостями. Існує кілька причин для перегляду класифікації допустимих перетворень у цьому класі:

- Розгляд в роботах [126, 324] обмежувався певним типом точкових перетворень, де перетворення незалежних змінних залежать лише від незалежних змінних, без доведення того, що перетворення такого роду вичерпують всі можливі допустимі точкові перетворення. У цьому розділі показано, що не тільки точкові, але й контактні допустимі перетворення вичерпуються таким типом перетворень.
- Коли шість підкласів, які відрізняються за своїми трансформаційними властивостями, були виокремлені в [126, 324], довільні елементи калібрувалися з самого початку. Отже, допустимі перетворення вказані для спрощених (відаліброваних) форм довільних елементів класу. Наша стратегія полягає в тому, щоб спочатку розглянути підкласи без спрощення, а лише потім — відкалібровані.
- Тільки компоненти перетворення для незалежних і залежних змінних були наведені в [126, 324] без формул перетворення довільних елементів. Ми формулюємо результати в термінах груп еквівалентності відповідних типів (звичайних або розширених узагальнених), де представлені перетворення як для незалежних, так і для залежних змінних t , x , u і довільних елементів f , g .
- Деякі допустимі перетворення були знайдені в [126, 324] в неявній формі, вони включали функції, які задовольняють певним звичайним диференціальним рівнянням. Ми прагнемо представити всі результати в явному вигляді.

Концепція нормалізованих класів дозволяє пояснити, чому підкласи

з різними трансформаційними властивостями виникають в процесі дослідження. Фактично вони є максимально нормалізованими підкласами в досліджуваному класі. Тому всі результати в рамках сучасного підходу стають повними і зрозумілими.

3.1.1. Класифікація допустимих перетворень. Хоча вивчення трансформаційних властивостей в класах диференціальних рівнянь найчастіше обмежується точковими допустимими перетвореннями, можна також розглянути контактні допустимі перетворення і відповідний групоїд контактної еквівалентності. В роботі [313] показано, що для нормалізованого класу еволюційних рівнянь виду $\bar{\mathcal{L}}: u_t = F(t, x, u, u_x)u_n + G(t, x, u, u_1, \dots, u_{n-1})$ для $n \geq 3$ його групоїд контактної еквівалентності збігається з відповідним групоїдом точкової еквівалентності, тобто будь-яке контактне допустиме перетворення між двома рівняннями з класу $\bar{\mathcal{L}}$ є першим продовженням точкового перетворення між цими рівняннями. Тому для підкласу (3.1) класу $\bar{\mathcal{L}}$ достатньо досліджувати тільки точкові допустимі перетворення.

Добре відомо, що будь-яке не вироджене точкове перетворення $\mathcal{T}$, що пов'язує два фіксованих (1+1)-вимірних еволюційних рівняння, має вигляд $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{x} = X(t, x, u)$, $\tilde{u} = U(t, x, u)$, причому $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$. Частинні похідні, які присутні в рівняннях (3.1), перетворюються в такий спосіб:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\tilde{t}} &= \frac{1}{T_t} \left(D_t U - \frac{D_t X}{D_x X} D_x U \right), \quad \tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{D_x U}{D_x X}, \\ \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= \frac{1}{D_x X} D_x \left(\frac{1}{D_x X} D_x \left(\frac{D_x U}{D_x X} \right) \right),\end{aligned}$$

$D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{tt} \partial_{u_t} + u_{tx} \partial_{u_x} + \dots$ і $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \dots$ — оператори повних похідних за змінними t і x , відповідно. Тут і надалі нижні індекси функцій позначають частинні похідні за відповідним змінними. Підставляємо ці вирази в рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0$ й отримуємо рівняння в термінах початкових змінних. Щоб обмежити це

рівняння на многовид, визначений рівнянням (3.1) у просторі струменів третього порядку з незалежними змінними (t, x) і залежною змінною u , ми додатково підставимо в нього вираз $u_t = -f(t, x)uu_x - g(t, x)u_{xxx}$. Розщеплення отриманої тотожності за похідними від u призводить до визначальних рівнянь на функції T, X, U . Зокрема, коефіцієнт при u_{xxx} має вигляд $(\tilde{g}T_t - g(X_x + X_u u_x)^3)(X_x U_u - X_u U_x)$. Прирівнюємо його до нуля і, враховуючи умову невиродженості $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$, отримуємо $\tilde{g}T_t - g(X_x + X_u u_x)^3 = 0$. Подальше розщеплення за різними степенями u_x призводить до умов $X_u = 0$ і $\tilde{g}T_t = gX_x^3$. Отже, $X = X(t, x)$, а це значить, що немає інших допустимих перетворень крім тих, де компоненти перетворень для незалежних змінних залежать тільки від незалежних змінних. Це узгоджується з результатами робіт [184, 313], отриманих для більш загальних класів еволюційних рівнянь.

Умова $X_u = 0$ призводить до суттєвого спрощення визначальних рівнянь, з яких отримуємо додаткові обмеження на вигляд коефіцієнтів X і U : $U_{uu} = U_{xu} = X_{xx} = 0$. Отже, компоненти допустимих перетворень для незалежних і залежних змінних мають вигляд

$$\tilde{t} = \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \psi(t, x), \quad (3.2)$$

де $\theta, \alpha, \beta, \varphi, \psi$ — довільні гладкі функції своїх змінних, причому $\dot{\theta}\alpha\varphi \neq 0$.
Формули

$$\tilde{f} = \frac{\alpha}{\dot{\theta}\varphi}f, \quad \tilde{g} = \frac{\alpha^3}{\dot{\theta}}g, \quad (3.3)$$

де $\dot{\theta} = \frac{d\theta(t)}{dt}$, встановлюють зв'язок між значеннями довільних елементів початкового й кінцевого рівнянь.

Класифікувальні рівняння, що містять функції $\theta, \alpha, \beta, \varphi, \psi$, довільні функції f, g та їхні похідні, мають вигляд

$$f\psi_x + \dot{\varphi} = 0, \quad (3.4)$$

$$f\alpha\psi = \varphi(\dot{\alpha}x + \dot{\beta}), \quad (3.5)$$

$$\psi_t + g\psi_{xxx} = 0. \quad (3.6)$$

Для знаходження групи еквівалентності класу (3.1) розщеплюємо рівняння (3.4)–(3.6) за довільними елементами f і g . Це призводить до рівнянь $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{\varphi} = \psi = 0$. Доведена теорема.

Теорема 3.1. *Клас $\mathcal{L}$ рівнянь (3.1) допускає звичайну групу еквівалентності $G^\sim$, що складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \\ \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\delta_1}{\delta_3 \dot{\theta}(t)} f(t, x), \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\delta_1^3}{\dot{\theta}(t)} g(t, x), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$, δ_j , $j = 1, 2, 3$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Клас $\mathcal{L}$ не є нормалізованим ні в звичайному, ані в іншому сенсі. Існують підкласи цього класу, виокремлені додатковими обмеженнями на вигляд довільних елементів f і g , що допускають групи еквівалентності ширші за групу $G^\sim$. Ці підкласи й відповідні максимальні умовні групи еквівалентності [261, означення 7] можна знайти, дослідивши систему (3.4)–(3.6).

З рівняння (3.4) випливає, що $\psi = \frac{1}{f} \frac{\varphi}{\alpha} (\dot{\alpha} x + \dot{\beta})$, тоді рівняння (3.5) набуває вигляду

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} x + \frac{\dot{\beta}}{\alpha} \right) f_x = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) f.$$

Існує три можливості, щоб функція $f(t, x)$ задовольняла це рівняння: I. $f = f(t) \neq 0$; II. $f = p(t)e^{q(t)x}$, $pq \neq 0$; III. $f = p(t)(x + q(t))^{r(t)}$, $pr \neq 0$. Розгляньмо кожен випадок окремо.

I. Нехай $f = f(t) \neq 0$. Підставляємо f в рівняння (3.4)–(3.6), що призводить до умов $\psi_t = \psi_{xx} = 0$, а отже $\psi = c_1 x + c_2$, де c_1, c_2 — довільні сталі. Рівняння (3.6) стає тотожністю, це означає, що функція g довільна.

З рівнянь (3.4), (3.5) випливає система рівнянь на функції α , β , φ : $\dot{\varphi} = -c_1 f$, $\varphi \dot{\alpha} = c_1 f \alpha$, $\varphi \dot{\beta} = c_2 f \alpha$. Загальний розв'язок цієї системи разом із формулами (3.3) дають повний опис допустимих перетворень підкласу класу (3.1), виокремленого умовою $f_x = 0$. Після перепозначення сталих $c_1 = -\delta_3$, $c_2 = -\delta_2 \delta_3 / \delta_1$ сформулюємо твердження.

Теорема 3.2. *Розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу*

$$\mathcal{L}_1: \quad u_t + f(t)u u_x + g(t, x)u_{xxx} = 0, \quad (3.7)$$

складають перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \frac{\delta_1 x + \delta_2}{\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4} + \delta_5, \\ \tilde{u} &= (\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4) u - \delta_3 x - \delta_2 \delta_3 \delta_1^{-1}, \\ \tilde{f}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1 f(t)}{\dot{\theta}(t)(\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4)^2}, \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\delta_1^3 g(t, x)}{\dot{\theta}(t)(\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4)^3}, \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$, δ_j , $j = 1, \dots, 5$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

Звичайна група еквівалентності класу (3.7) збігається з групою еквівалентності $G^\sim$ його надкласу (3.1).

II. Нехай $f = p(t)e^{q(t)x}$, де $pq \neq 0$. В цьому випадку ми фактично маємо репараметризацію класу, оскільки замість довільного елемента $f(t, x)$ є два довільних елементи $p(t)$ і $q(t)$. Перетворення еквівалентності для них задаються $\tilde{q} = \frac{q}{\alpha}$, і $\tilde{p} = \frac{p\alpha}{\varphi\dot{\theta}} \exp(-q\beta/\alpha)$. Рівняння (3.4)–(3.6) призводять до умов $\psi = \frac{\dot{\varphi}}{pq} e^{-qx}$, $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = \frac{\dot{\varphi}\alpha}{\varphi q}$. Функція g має вигляд $g = \frac{s(t) - \dot{q}x}{q^3}$ з додатковим обмеженням $s = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} - \frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{q}}{q}$. Тепер функція g також репараметризована, а функцію s можна розглядати як додатковий довільний елемент. Допустимі перетворення у виокремленому підкласі описано в наступній теоремі.

Теорема 3.3. *Клас рівнянь*

$$\mathcal{L}_2: \quad u_t + p(t)e^{q(t)x}uu_x + \frac{s(t) - \dot{q}(t)x}{q(t)^3}u_{xxx} = 0 \quad (3.8)$$

допускає розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_2^\sim$, що складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \frac{\dot{\varphi}(t)}{p(t)q(t)}e^{-q(t)x}, \\ \tilde{p}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1 p(t)}{\dot{\theta}(t)\varphi(t)}e^{-\frac{1}{\delta_1}\beta(t)q(t)}, \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = \frac{q(t)}{\delta_1}, \quad \tilde{s}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1 s(t) + \dot{q}(t)\beta(t)}{\delta_1 \dot{\theta}(t)}, \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\beta(t) = \delta_1 \delta_3 \int \frac{p(t)e^{\int s(t) dt}}{\varphi(t)} dt + \delta_2, \quad \varphi(t) = \delta_3 \int p(t)q(t)e^{\int s(t) dt} dt + \delta_4.$$

Тут δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

III. Нехай $f = p(t)(x + q(t))^{r(t)}$, причому $pr \neq 0$. У цьому випадку з рівняння (3.5) випливає $\psi = \frac{\varphi(\dot{\alpha}x + \dot{\beta})}{\alpha p(x + q)^r}$, тоді рівняння (3.4) призводить до умов $\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = (r - 1)\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ і $\dot{\beta} = q\dot{\alpha}$. З допомогою останньої умови, функцію ψ можна переписати у вигляді $\psi = \frac{\varphi \dot{\alpha}}{p \alpha}(x + q)^{1-r}$. Тоді рівняння (3.6) набуває вигляду $r(r^2 - 1)g = (x + q)^3 \left(s - \dot{r} \ln(x + q) + \frac{(1 - r)\dot{q}}{x + q} \right)$, де функцію s можна вважати новим довільним елементом, що задовольняє рівняння $s \frac{\varphi \dot{\alpha}}{p \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi \dot{\alpha}}{p \alpha} \right)$. Легко бачити, що у двох спеціальних випадках $r = 1$ і $r = -1$, функція g залишається довільною. Розглянемо випадки $r \neq \pm 1$, $r = 1$ і $r = -1$ окремо. Загальний розв'язок визначальних рівнянь дає у кожному з цих випадків вичерпний опис допустимих перетворень у відповідних підкласах класу (3.1). Результати наведено в теоремах 3.4, 3.5 і 3.6. Зауважимо, що у випадку $r = -1$ нетривіальна група еквівалентності,

що є ширшою за групу $G^\sim$, існує тільки тоді, коли $q(t) = c$, де c — довільна стала. У цьому випадку виконаємо ще одну репараметризацію, ввівши таку нову функцію $k = 1/p$, що f набуває вигляду $f = k(t)/(x + c)$.

Теорема 3.4. *Розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_3^\sim$ класу*

$$\mathcal{L}_3: \quad u_t + p(t)(x + q(t))^{r(t)} u u_x + \frac{(x + q(t))^3}{r(t)(r(t)^2 - 1)} \left(s(t) - \dot{r}(t) \ln(x + q(t)) + \frac{(1 - r(t))\dot{q}(t)}{x + q(t)} \right) u_{xxx} = 0,$$

$r \neq 0, \pm 1$, утворюють перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \delta_1 e^{\int s(t) dt} (x + q(t))^{1-r(t)}, \\ \tilde{p}(\tilde{t}) &= \frac{\alpha(t)^{1-r(t)}}{\phi(t)\dot{\theta}(t)} p(t), \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t)\alpha(t) - \beta(t), \\ \tilde{s}(\tilde{t}) &= \frac{1}{\dot{\theta}(t)} (s(t) + \dot{r}(t) \ln \alpha(t)), \quad \tilde{r}(\tilde{t}) = r(t), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , що не є сталою, тобто $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \delta_1 \int p(t)(r(t) - 1) e^{\int s(t) dt} dt + \delta_2, \\ \alpha(t) &= \delta_3 \exp \left[\delta_1 \int \frac{p(t)}{\varphi(t)} e^{\int s(t) dt} dt \right], \quad \beta(t) = \int q(t) \dot{\alpha}(t) dt + \delta_4, \end{aligned}$$

δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $(\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3 \neq 0$.

Зауважимо, якщо $r \neq 0, \pm 1$ — стала, то коефіцієнт α має вигляд $\alpha(t) = \delta_3 \varphi(t)^{\frac{1}{r-1}}$.

Теорема 3.5. *Клас рівнянь вигляду*

$$\mathcal{L}_4: \quad u_t + (p(t)x + q(t))u u_x + g(t, x)u_{xxx} = 0 \tag{3.9}$$

допускає розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_4^\sim$, утворену перетвореннями

$$\tilde{t} = \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \delta_1(u + \delta_2), \quad \tilde{p}(\tilde{t}) = \frac{p(t)}{\delta_1 \dot{\theta}(t)},$$

$$\tilde{q}(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta_1 \dot{\theta}(t)} (\alpha(t)q(t) - \beta(t)p(t)), \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\alpha(t)^3}{\dot{\theta}(t)} g(t, x),$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\alpha(t) = \delta_3 e^{\delta_2 \int p(t) dt}, \quad \beta(t) = \delta_2 \delta_3 \int q(t) e^{\delta_2 \int p(t) dt} dt + \delta_4,$$

δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Теорема 3.6. Розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_5^\sim$ класу

$$\mathcal{L}_5: \quad u_t + \frac{k(t)}{x+c} u u_x + g(t, x) u_{xxx} = 0 \quad (3.10)$$

складають перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)(x+c) + \delta_2, \quad \tilde{u} = \frac{\delta_1}{\alpha(t)^2} u - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 (x+c)^2, \\ \tilde{k}(\tilde{t}) &= \frac{\alpha(t)^4}{\delta_1 \dot{\theta}(t)} k(t), \quad \tilde{c} = -\delta_2, \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\alpha(t)^3}{\dot{\theta}(t)} g(t, x), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , що не є сталою, тобто $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\alpha(t) = \pm \left(\delta_3 \int k(t) dt + \delta_4 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

Теорема 3.7. Класи $\mathcal{L}_1$ – $\mathcal{L}_5$ нормалізовані у розширеному узагальненому сенсі, групоїди еквівалентності цих класів породжено перетвореннями з відповідних розширених узагальнених груп еквівалентності $\hat{G}_i^\sim$, $i = 1, \dots, 5$.

Теорема 3.8. Підклас $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$ нормалізований у звичайному сенсі. Його група еквівалентності збігається зі звичайною групою еквівалентності $G^\sim$ усього класу $\mathcal{L}$.

Немає точкових перетворень між рівняннями з різних підкласів $\mathcal{L}_i$, $i = 0, \dots, 5$, класу (3.1).

3.1.2. Калібрування довільних елементів в підкласах $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_5$.

З використанням перетворень еквівалентності можна виконати калібрування довільних елементів, що залежать від змінної t , в кожному підкласі $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_5$ класу $\mathcal{L}$, а отже, зменшити кількість довільних елементів в цих підкласах. Розглянемо кожен підклас окремо.

$\mathcal{L}_1$. Перетворення еквівалентності $\tilde{t} = \int f(t)dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$, що належить групі $\hat{G}_1^\sim$, зводить кожне рівняння з класу (3.7) до рівняння з того самого класу, у якому $\tilde{f} = 1$. Отже, не втрачаючи загальності, можна досліджувати клас

$$\check{\mathcal{L}}_1: \quad u_t + uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$$

замість класу $\mathcal{L}_1$. Оскільки клас $\mathcal{L}_1$ нормалізований, легко знайти групу еквівалентності його підкласу $\check{\mathcal{L}}_1$. Покладемо $\tilde{f} = f = 1$ в перетвореннях з групи $\hat{G}_1^\sim$ і отримаємо рівняння на θ , а саме $\dot{\theta} = \delta_1/(\delta_3 t + \delta_4)^2$. Для того, щоб записати перетворення еквівалентності однотипно для обох випадків $\delta_3 = 0$ і $\delta_3 \neq 0$ перепозначимо сталі і отримаємо наслідок теореми 3.2.

Наслідок 3.9. *Клас $\check{\mathcal{L}}_1$ допускає звичайну групу еквівалентності, що складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \\ \tilde{u} &= \frac{\kappa(\gamma t + \delta) - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\kappa^3}{\alpha\delta - \beta\gamma} \frac{g(t, x)}{\gamma t + \delta}, \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \mu_1, \mu_0$ — сталі, визначені до ненульового сталого множника, причому $\kappa(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$, можна вважати, що $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$.

Ця група співпадає з групою еквівалентності підкласу класу $\check{\mathcal{L}}_1$, виокремленого умовою $g_x = 0$, знайдену у роботі [264].

$\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_4$. Будь-яке рівняння з класів $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$, зводиться до рівнянь з відповідних класів, в яких $\tilde{p} = 1$ перетворенням еквівалентності $\tilde{t} = \int p(t) dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$. Групи еквівалентності відкаліброваних підкласів можна знайти, покладаючи $\tilde{p} = p = 1$ в перетвореннях, наведених у теоремах 3.3, 3.4 і 3.5. Наведемо наслідки 3.10, 3.11 і 3.12 цих теорем.

Наслідок 3.10. Розширену узагальнену групу еквівалентності класу

$$\check{\mathcal{L}}_2: \quad u_t + e^{q(t)x} u u_x + \frac{s(t) - \dot{q}(t)x}{q(t)^3} u_{xxx} = 0$$

складають перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 \int \frac{1}{\varphi(t)} e^{-\frac{1}{\delta_1} \beta(t) q(t)} dt + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \beta(t), \\ \tilde{u} &= \varphi(t) u + \delta_3 e^{-q(t)x + \int s(t) dt}, \\ \tilde{q}(\tilde{t}) &= \frac{q(t)}{\delta_1}, \quad \tilde{s}(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta_1^2} \varphi(t) e^{\frac{1}{\delta_1} \beta(t) q(t)} (\delta_1 s(t) + \dot{q}(t) \beta(t)), \end{aligned}$$

де $\beta(t) = \delta_1 \delta_3 \int \frac{e^{\int s(t) dt}}{\varphi(t)} dt + \delta_2$, $\varphi(t) = \delta_3 \int q(t) e^{\int s(t) dt} dt + \delta_4$; δ_j , $j = 0, \dots, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

Наслідок 3.11. Розширену узагальнену групу еквівалентності класу

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{L}}_3: \quad & u_t + (x + q(t))^{r(t)} u u_x + \\ & \frac{(x + q(t))^3}{r(t)(r(t)^2 - 1)} \left(s(t) - \dot{r}(t) \ln(x + q(t)) + \frac{(1 - r(t))\dot{q}(t)}{x + q(t)} \right) u_{xxx} = 0, \end{aligned}$$

утворюють перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \delta_1 e^{\int s(t) dt} (x + q(t))^{1-r(t)}, \\ \tilde{q}(\tilde{t}) &= q(t)\alpha(t) - \beta(t), \quad \tilde{s}(\tilde{t}) = \alpha(t)^{r(t)-1} \varphi(t) (s(t) + \dot{r}(t) \ln \alpha(t)), \\ \tilde{r}(\tilde{t}) &= r(t), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , що не є сталою, тобто $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \delta_1 \int (r(t) - 1) e^{\int s(t) dt} dt + \delta_2, \\ \alpha(t) &= \delta_3 \exp \left[\delta_1 \int \frac{e^{\int s(t) dt}}{\varphi(t)} dt \right], \quad \beta(t) = \int q(t) \dot{\alpha}(t) dt + \delta_4, \end{aligned}$$

δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $(\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3 \neq 0$.

Наслідок 3.12. Клас рівнянь

$$\check{\mathcal{L}}_4: \quad u_t + (x + q(t)) u u_x + g(t, x) u_{xxx} = 0 \quad (3.11)$$

допускає розширену узагальнену групу еквівалентності $\check{G}_4^\sim$, що складається з перетворень

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{1}{\delta_1}t + \delta_0, & \tilde{x} &= \delta_3 e^{\delta_2 t} x + \delta_2 \delta_3 \int q(t) e^{\delta_2 t} dt + \delta_4, & \tilde{u} &= \delta_1(u + \delta_2), \\ \tilde{q}(\tilde{t}) &= \delta_3 e^{\delta_2 t} q(t) - \delta_2 \delta_3 \int q(t) e^{\delta_2 t} dt - \delta_4, & \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \delta_1 \delta_3^3 e^{3\delta_2 t} g(t, x),\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 0, \dots, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

$\mathcal{L}_5$. У випадку підкласу $\mathcal{L}_5$ класу (3.1) можна відкалібрувати два довільні елементи: функцію $k(t)$ можна звести до одиниці, а сталу c до нуля. Це калібрування можна здійснити перетворенням $\tilde{t} = \int k(t) dt$, $\tilde{x} = x + c$, $\tilde{u} = u$. Справедливе таке твердження щодо групи еквівалентності класу

$$\check{\mathcal{L}}_5: \quad u_t + \frac{1}{x} u u_x + g(t, x) u_{xxx} = 0.$$

Наслідок 3.13. Клас $\check{\mathcal{L}}_5$ допускає звичайну групу еквівалентності, утворену перетвореннями

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, & \tilde{x} &= (\gamma t + \delta)^{-\frac{1}{2}} x, & \tilde{u} &= \frac{1}{\alpha \delta - \beta \gamma} \left((\gamma t + \delta) u - \frac{1}{2} \gamma x^2 \right), \\ \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{(\gamma t + \delta)^{\frac{1}{2}}}{\alpha \delta - \beta \gamma} g(t, x),\end{aligned}$$

де α , β , γ , δ — сталі, визначені до ненульового множника, причому $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$, не втрачаючи загальності, можна вважати $\alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$.

Усі класи після калібрування залишаються нормалізованими. Їхні групи еквівалентності породжено відповідними групами еквівалентності, наведеними у твердженнях 3.9–3.13. Справедлива теорема.

Теорема 3.14. Класи $\check{\mathcal{L}}_1$ і $\check{\mathcal{L}}_5$ нормалізовані у звичайному сенсі. Класи $\check{\mathcal{L}}_2$, $\check{\mathcal{L}}_3$, $\check{\mathcal{L}}_4$ нормалізовані у розширеному узагальненому сенсі.

З цієї теореми випливає, що трансформаційні властивості класів $\check{\mathcal{L}}_1$ і $\check{\mathcal{L}}_5$ кращі, ніж у їхніх надкласів $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_5$. Отже, ці класи вже є зручними для дослідження їхніх симетрійних властивостей. Класи $\check{\mathcal{L}}_2$, $\check{\mathcal{L}}_3$, $\check{\mathcal{L}}_4$

Табл. 3.1: Групова класифікація класу $u_t + xuu_x + h(t)u_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $hg \neq 0$.

№	Рівняння	Обмеження	Базис алгебри $A^{\max}$
1	$u_t + xuu_x + t^{m-1}u_x + t^{3m-1}\Phi(x/t^m)u_{xxx} = 0$	$\Phi(z) \neq \lambda z^2$, якщо $m = 1$	$t\partial_t + mx\partial_x - u\partial_u$
2	$u_t + xuu_x + e^{\frac{\varepsilon}{2}t^2}u_x + e^{\frac{3\varepsilon}{2}t^2}\Phi\left(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)u_{xxx} = 0$		$\partial_t + \varepsilon tx\partial_x + \varepsilon\partial_u$
3	$u_t + xuu_x + u_x + \Phi(x)u_{xxx} = 0$	$\Phi(x) \neq \lambda x^2$	∂_t
4	$u_t + xuu_x + u_x + \lambda x^2u_{xxx} = 0$		$\partial_t, t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_4^\sim$, λ — довільна ненульова стала, m — довільна стала.

нормалізовані лише у розширеному узагальненому сенсі, як і їхні надкласи $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$. Отже зв'язки між рівняннями з класу досить складні, що завдає труднощів при їх дослідженні. Задачі групової класифікації для таких класів можна спростити, зостосувавши, якщо можливо, метод відображень між класами [309].

3.1.3. Покращення трансформаційних властивостей класів диференціальних рівнянь методом відображень. Проілюструємо застосування методу перетворень між класами диференціальних рівнянь на прикладі класу $\check{\mathcal{L}}_4$. Цей клас можна відобразити на подібний клас рівнянь типу Кортвега–де Фріза

$$u_t + xuu_x + h(t)u_x + g(t, x)u_{xxx} = 0 \quad (3.12)$$

сім'єю точкових перетворень

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x} = x + q(t), \quad \hat{u} = u, \quad (3.13)$$

параметризованою довільним елементом q класу $\check{\mathcal{L}}_4$. Довільний елемент h у класі-образі (3.12) пов'язаний з довільним елементом q класу $\check{\mathcal{L}}_4$ за формулою $h(t) = \dot{q}(t)$. Отже, випадок $q = \text{const}$ відповідає випадку $h = 0$. На відміну від класу $\check{\mathcal{L}}_4$, що нормалізований у розширеному узагальненому сенсі, клас (3.12) нормалізований у звичайному сенсі. Групоїд еквівалентності класу (3.12) породжений перетвореннями з його звичайної

Табл. 3.2: Групова класифікація класу $u_t + xuu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $g \neq 0$.

№	Рівняння	Обмеження	Базис алгебри $A^{\max}$
1	$u_t + xuu_x + \Phi(x)u_{xxx} = 0$	$\Phi(x) \neq \lambda x^m$	∂_t
2	$u_t + xuu_x + t^{3m-1}\Phi(x/t^m)u_{xxx} = 0$	$\Phi(z) \neq \lambda z^3, \lambda z^{\frac{3m-1}{m}}$	$t\partial_t + mx\partial_x - u\partial_u$
3	$u_t + xuu_x + e^{\frac{3\varepsilon}{2}t^2}\Phi\left(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)u_{xxx} = 0$	$\Phi(z) \neq \lambda z^3$	$\partial_t + \varepsilon tx\partial_x + \varepsilon\partial_u$
4	$u_t + xuu_x + x^m u_{xxx} = 0$	$m \neq 3$	$\partial_t, t\partial_t + \frac{1}{3-m}x\partial_x - u\partial_u$
5	$u_t + xuu_x + \Phi(t)x^3u_{xxx} = 0$	$\Phi(t) \neq \lambda, \frac{1}{\lambda t + \nu}$	$x\partial_x, tx\partial_x + \partial_u$
6	$u_t + xuu_x + x^3u_{xxx} = 0$		$\partial_t, x\partial_x, tx\partial_x + \partial_u$
7	$u_t + xuu_x + \lambda \frac{x^3}{t}u_{xxx} = 0$		$x\partial_x, t\partial_t - u\partial_u, tx\partial_x + \partial_u$

Тут $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_4^\sim$, m, λ, ν — довільні сталі, причому $\lambda \neq 0$.

групи еквівалентності $G_4^\sim$:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 e^{\delta_4 t} x, \quad \tilde{u} = \frac{1}{\delta_1}(u + \delta_4), \\ \tilde{h}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_3}{\delta_1} e^{\delta_4 t} h(t), \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\delta_3^3}{\delta_1} e^{3\delta_4 t} g(t, x),\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Групову класифікацію класу (3.12) можна виконати з використанням класичного методу Лі-Овсянникова [23], що ґрунтується на інтегруванні визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора лівьської симетрії з точністю до $G_4^\sim$ -еквівалентності. Результати групової класифікації рівнянь (3.12) з $h \neq 0$ і $h = 0$ наведено, відповідно, в табл. 3.1 і табл. 3.2. Класифікаційний список для рівнянь (3.11) з $q = \text{const}$ співпадає з таким списком для рівнянь (3.12) з $h = 0$, а отже він також представлений у табл. 3.2. Групову класифікацію рівнянь (3.11) з $q \neq \text{const}$ можна відновити з класифікаційного списку, отриманому для рівнянь (3.12) з $h \neq 0$ з використанням перетворення (3.13). Результати представлено в табл. 3.3.

Concluding Remarks. We have shown that the class (3.1) is not normalized. Its equivalence groupoid has a complicated structure, namely, the class (3.1)

Табл. 3.3: Групова класифікація класу $u_t + (x + q(t))uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $\dot{q}g \neq 0$.

№	Рівняння	Базис алгебри $A^{\max}$
1	$u_t + (x + t^m)uu_x + t^{3m-1}\Phi\left(\frac{x}{t^m}\right)u_{xxx} = 0$	$t\partial_t + mx\partial_x - u\partial_u$
2	$u_t + (x + \ln t)uu_x + t^{-1}\Phi(x + \ln t)u_{xxx} = 0$	$t\partial_t - \partial_x - u\partial_u$
3	$u_t + \omega uu_x + e^{\frac{3\varepsilon}{2}t^2}\Phi\left(\omega e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)u_{xxx} = 0$	$\partial_t + \left(\varepsilon t\omega - e^{\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)\partial_x + \varepsilon\partial_u$
4	$u_t + (x + t)uu_x + \Phi(x + t)u_{xxx} = 0$	$\partial_t - \partial_x$
5	$u_t + (x + t)uu_x + \lambda(x + t)^2u_{xxx} = 0$	$\partial_t - \partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Here $\omega = x + \int e^{\frac{\varepsilon}{2}t^2}dt$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod \check{G}_4$, λ and m are arbitrary nonzero constants.

In Case 1 $\Phi(z) \neq \lambda(z+1)^2$ if $m = 1$. In Case 4 $\Phi(z) \neq \lambda z^2$.

can be partitioned into the six disjoint normalized subclasses:

- the subclass $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$ is normalized in the usual sense, the set of its admissible transformations is generated by point transformations from the usual equivalence group $G^\sim$ of the entire class (3.1) adduced in Theorem 3.1;
- the subclasses $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, 5$, which are normalized in the generalized extended sense, the sets of their admissible transformations are generated by transformations from the corresponding generalized extended groups $\hat{G}_i^\sim$ presented in Theorems 3.2–3.6.

3.2. Груповий аналіз рівнянь Кортевега–де Фріза з коефіцієнтами, залежними від часу

3.2.1. Допустимі точкові перетворення в класах узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза. Слідуючи [261], почнемо з загального класу еволюційних рівнянь третього порядку і побудуємо ієрархію вкладених нормалізованих підкласів цього класу, які складаються з різних узагальнень рівнянь Кортевега–де Фріза і модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза. Таким чином буде описано всі набори допустимих

точкових перетворень (групоїдів еквівалентності) цих підкласів.

Розглянемо загальний клас $\mathcal{E}^3$ еволюційних рівнянь третього порядку. Вони мають вигляд

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}),$$

де $H_{u_{xxx}} \neq 0$. Щоб знайти набір допустимих перетворень класу $\mathcal{E}^3$ та його повну групу еквівалентності, що включає як дискретні, так і неперервні перетворення еквівалентності, застосовуємо прямий метод. Розрахунки спрощуються з урахуванням того факту, що вираз для t у будь-якому точковому (і навіть контактному) перетворенні, що пов'язує два $(1+1)$ -вимірні еволюційні рівняння, залежить тільки від t [184, 210]. Таким чином, точкове перетворення відображає рівняння з $\mathcal{E}^3$ у рівняння з того ж класу тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u). \quad (3.14)$$

Функції T , X та U повинні задовольняти умову невиродженості $T_t \Delta \neq 0$, де $\Delta = X_x U_u - X_u U_x$. Група еквівалентності $G_0^\sim$ класу $\mathcal{E}^3$ складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \\ \tilde{H} &= \frac{\Delta}{T_t D_x X} H + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

де T , X та U — гладкі функції, що задовольняють цю умову невиродженості; $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \dots$ — оператор повного диференціювання за змінною x . Отже, клас $\mathcal{E}^3$ є нормалізованим.

Підклас $\mathcal{E}_{0,1}^3$, виокремлений із $\mathcal{E}^3$ умовою $H_{u_{xxx}u_{xxx}} = 0$, має ту ж саму групу еквівалентності $G_0^\sim$, а отже також є нормалізованим. Це ж твердження справедливо і для підкласу $\mathcal{E}_{0,2}^3$ класу $\mathcal{E}_{0,1}^3$, виокремленого обмеженням $H_{u_{xxx}u_{xx}} = 0$.

Якщо накласти додаткове обмеження $H_{u_{xxx}u_x} = 0$, маємо нормалізований підклас $\mathcal{E}_{1,1}^3$ класу $\mathcal{E}_{0,2}^3$, група еквівалентності якого $G_1^\sim$ є власною

підгрупою $G_0^\sim$, і складається з перетворень (3.15), де $X_u = 0$. Нормалізований підклас $\mathcal{E}_{1.2}^3$, виокремлений із $\mathcal{E}_{1.1}^3$ умовою $H_{u_{xxx}u} = 0$, має ту ж саму групу еквівалентності $G_1^\sim$.

Група еквівалентності $G_2^\sim$ нормалізованого підкласу $\mathcal{E}_2^3$, вкладеного в $\mathcal{E}_{1.2}^3$ і виокремленого обмеженням $H_{u_{xxx}x} = 0$, міститься у $G_1^\sim$. Її елементи додатково задовольняють умову $X_{xx} = 0$.

Якщо ж накласти на підклас $\mathcal{E}_{0.1}^3$ обмеження $H_{u_{xx}} = 0$, отриманий нормалізований підклас $\mathcal{E}_3^3$ матиме групу еквівалентності $G_3^\sim$, що складається з перетворень (3.15), для яких $X_u = 0$, $U_{uu} = 0$ та $2U_{ux}X_x = U_uX_{xx}$.

Тоді підклас $\mathcal{E}_4^3 = \mathcal{E}_2^3 \cap \mathcal{E}_3^3$ є нормалізованим і його група еквівалентності $G_4^\sim = G_2^\sim \cap G_3^\sim$. Інтегруючи весь набір обмежень, накладених на довільний елемент H , та умов, отриманих для елементів $G_4^\sim$, приходимо до висновку, що рівняння з класу $\mathcal{E}_4^3$ мають вигляд

$$u_t + g(t)u_{xxx} = F(t, x, u, u_x),$$

де $g \neq 0$. Група еквівалентності $G_4^\sim$ складається з таких перетворень (випишемо лише компоненти, що відповідають змінним рівняння):

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \Phi(t, x), \quad (3.16)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ та Φ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $\alpha_t\beta\theta \neq 0$.

Далі розглянемо ще два підкласи класу $\mathcal{E}_4^3$. Перший — підклас рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} \\ + h(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x + k(t)x + l(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

де всі параметри є довільними гладкими функціями від t , $fg \neq 0$. Цей підклас є нормалізованим. Його групу еквівалентності (з точки зору довільного елемента H) можна виокремити з групи $G_4^\sim$ умовою $\Phi_{xx} = 0$. Отже, компоненти перетворень, що відповідають змінним рівняння, мають простий загальний вигляд

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \varphi(t)x + \psi(t), \quad (3.18)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$ та ψ — гладкі функції від t , причому $\alpha_t \beta \theta \neq 0$. Довільні елементи рівняння (3.17) перетворюються таким чином:

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{\beta}{\alpha_t \theta} f, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\alpha_t} \left(h - \frac{\varphi}{\theta} f - \frac{\theta_t}{\theta} \right), \\ \tilde{q} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(q - \frac{\varphi}{\theta} f + \frac{\beta_t}{\beta} \right), \quad \tilde{p} = \frac{1}{\alpha_t} \left(\beta p - \gamma q + \frac{\gamma \varphi - \beta \psi}{\theta} f + \gamma_t - \gamma \frac{\beta_t}{\beta} \right), \\ \tilde{k} &= \frac{1}{\alpha_t \beta} \left(\theta k - \varphi(h + q) + \frac{\varphi^2}{\theta} f - \varphi_t + \varphi \frac{\theta_t}{\theta} \right), \quad \tilde{l} = -\frac{\varphi p + \psi_t}{\alpha_t} \\ &+ \frac{1}{\alpha_t} \left(\theta l - \frac{\gamma}{\beta} \left(\theta k - \varphi(h + q) + \frac{\varphi^2}{\theta} f - \varphi_t + \varphi \frac{\theta_t}{\theta} \right) - \psi \left(h - \frac{\varphi}{\theta} f - \frac{\theta_t}{\theta} \right) \right).\end{aligned}$$

Будь-яке рівняння з класу (3.17) можна звести точковими перетвореннями до вигляду (3.23) з $g = 1$, а також до вигляду (3.25) і (3.28). Необхідною і достатньою умовою подібності таких рівнянь до стандартного рівняння Кортевега–де Фріза є умова

$$s_t = 2gs^2 - 3qs + \frac{f}{g}k, \quad \text{де} \quad s := \frac{2q - h}{g} + \frac{f_t g - f g_t}{f g^2}. \quad (3.19)$$

Другий підклас складається з модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned}u_t + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u \\ + (p(t) + q(t)x)u_x + k(t)uu_x + l(t) = 0,\end{aligned} \quad (3.20)$$

де всі параметри також є довільними гладкими функціями від t , причому $fg \neq 0$. Цей підклас також нормалізований. Його групу еквівалентності (з точки зору довільного елемента H) виокремлено з $G_4^\sim$ умовою $\Phi_x = 0$, тобто компоненти перетворень, що відповідають змінним рівняння, мають вигляд (3.18) при $\varphi = 0$, де $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ та ψ — гладкі функції від t , причому $\alpha\beta\theta \neq 0$. Довільні елементи (3.20) перетворюються за формулами

$$\tilde{f} = \frac{\beta}{\alpha_t \theta^2} f, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\alpha_t} \left(h - \frac{\theta_t}{\theta} \right), \quad \tilde{q} = \frac{1}{\alpha_t} \left(q + \frac{\beta_t}{\beta} \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(\beta p - \gamma q + \beta \frac{\psi^2}{\theta^2} f - \beta \frac{\psi}{\theta} k + \gamma_t - \gamma \frac{\beta_t}{\beta} \right), \\ \tilde{k} &= \frac{\beta}{\alpha_t \theta} \left(k - 2 \frac{\psi}{\theta} f \right), \quad \tilde{l} = \frac{1}{\alpha_t} \left(\theta l - \psi h - \psi_t + \psi \frac{\theta_t}{\theta} \right).\end{aligned}\tag{3.21}$$

П'ять довільних елементів можна відкалібрувати до простих сталих. Наприклад, можна покласти $g = 1$ та $h = p = q = l = 0$.

Твердження 3.15. *Рівняння вигляду (3.20) подібне до стандартного модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза (зі сталими коефіцієнтами) тоді і лише тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умови*

$$2h - 2q = \frac{f_t}{f} - \frac{g_t}{g}, \quad 2lf = k_t + kh - k \frac{f_t}{f}.\tag{3.22}$$

У наступному розділі наведемо приклади подібності рівнянь з класів (3.17) та (3.20) до стандартних рівнянь Кортевега–де Фріза та модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза. Також розв'яжемо декілька задач групової класифікації для класів рівнянь типу Кортевега–де Фріза.

3.2.2. Груповий аналіз класу рівнянь Кортевега–де Фріза. Спочатку дослідимо клас рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + f(t)u u_x + g(t)u_{xxx} = 0,\tag{3.23}$$

де f та g — довільні (гладкі) функції від t , $fg \neq 0$.

Як показано в розділі 3.2.1, для загальних значень функцій-параметрів (довільних елементів) f та g рівняння (3.23) не еквівалентне стандартному рівнянню Кортевега–де Фріза з точністю до точкових перетворень. Але принаймні один з параметрів (f або g) можна покласти рівним 1 за допомогою точкових перетворень. Рівняння вигляду (3.23) при $g = 1$ називаються перехідними рівняннями Кортевега–де Фріза [83]. Таким чином, після перетворення

$$\tilde{t} = \int f(t) dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u\tag{3.24}$$

рівняння (3.23) набуває такого ж вигляду з $\tilde{f}(\tilde{t}) = 1$ та $\tilde{g}(\tilde{t}) = g(t)/f(t)$.

Отже, не втрачаючи загальності, можна розглядати клас рівнянь

$$u_t + uu_x + g(t)u_{xxx} = 0, \quad (3.25)$$

оскільки цей клас є образом класу (3.23) при відображенні, породженим сім'єю точкових перетворень (3.24) (відповідні означення див. у [261, 309]). Тут g — довільна (гладка) функція від t , що не має нулів.

Проведемо вичерпну групову класифікацію класу (3.25).

Окремий розгляд підкласу (3.25) виправдано тим, що він володіє кращими трансформаційними властивостями, ніж надкласи (3.23) і, особливо, (3.1).

Група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.25) складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{at + b}{ct + d}, \quad \tilde{x} = \frac{e_2x + e_1t + e_0}{ct + d}, \\ \tilde{u} &= \frac{e_2(ct + d)u - e_2cx - e_0c + e_1d}{\varepsilon}, \quad \tilde{g} = \frac{e_2^3}{ct + d} \frac{g}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

де a, b, c, d, e_0, e_1 та e_2 — довільні сталі, причому $\varepsilon = ad - bc \neq 0$ та $e_2 \neq 0$, а набір $(a, b, c, d, e_0, e_1, e_2)$ визначено з точністю до ненульового множника, а отже без обмеження загальності можна вважати, що $\varepsilon = \pm 1$.

Рівняння з класу (3.25) подібні лише при умові, що вони $G^\sim$ -еквівалентні. Більше того, всі допустимі перетворення в цьому класі породжуються перетвореннями з групи $G^\sim$, тобто клас (3.25) є нормалізованим у звичайному сенсі. (Початковий клас (3.23) є нормалізованим лише відносно розширеної узагальненої групи еквівалентності, і його надклас (3.1) не володіє властивістю нормалізованості.)

З цього випливає таке твердження: рівняння вигляду (3.25) подібне до рівняння Кортевега–де Фріза тоді і лише тоді, коли $g_{tt} = 0$. Будь-яке перетворення, що реалізує цю подібність, належить до $G^\sim$.

Тому рівняння вигляду (3.23) зводиться до рівняння Кортевега–де Фріза точковим перетворенням тоді і лише тоді, коли

$$g(t) = f(t) \left(c_1 \int f(t) dt + c_0 \right), \quad (3.27)$$

Табл. 3.4: Групова класифікація класу $u_t + uu_x + g u_{xxx} = 0$, $g \neq 0$.

№	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u$
1	t^n	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3t\partial_t + (n+1)x\partial_x + (n-2)u\partial_u$
2	e^t	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
3	$e^{\delta \arctg t \sqrt{t^2+1}}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3(t^2+1)\partial_t + (3t+\delta)x\partial_x + ((-3t+\delta)u+3x)\partial_u$
4	1	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u, \partial_t$

Тут n, δ — довільні сталі, $n \geq 1/2$, $n \neq 1$, $\delta \geq 0 \bmod G_0^\sim$.

де c_0 та c_1 — сталі, причому $(c_0, c_1) \neq (0, 0)$ [129], що добре узгоджується з теоремою 3 роботи [324] (див. також рівняння (3.19)). Рівняння (3.27) співпадає з обмеженням на довільні елементи рівнянь з класу (3.23), які мають властивість Пенлеве [172].

Ядром $A^\cap = \cap_{g \neq 0} A^g$ максимальної алгебри лівської інваріантності рівнянь з класу (3.25) є $A^\cap = \langle \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$. Усі $G^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення лівської симетрії вичерпуються випадками 1–4 таблиці 3.4.

Наведена групова класифікація дає всі нееквівалентні значення f та g , для яких можна ефективно застосувати класичний метод лівської редукції.

Клас (3.23) можна також відобразити у клас

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + h(\tilde{t})\tilde{u} = 0 \quad (3.28)$$

сім'єю точкових перетворень $\tilde{t} = \int g(t) dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = \frac{f}{g}u$. Довільний елемент h відображеного класу виражається через довільні елементи f та g як

$$h(\tilde{t}) = \frac{f(t)g_t(t) - f_t(t)g(t)}{f(t)(g(t))^2}.$$

Таким чином, рівняння (3.25) з $g = t$ відображається у циліндричне рівняння Кортевега–де Фріза ($h = (2t)^{-1}$), подібність якого до стандартного

рівняння Кортевега–де Фріза давно відома [209]. Аналогічно, значення $g = e^t$ відповідає сферичному рівнянню Кортевега–де Фріза ($h = t^{-1}$), яке не є інтегровним.

Наведемо ще кілька прикладів подібності рівнянь Кортевега–де Фріза.

Приклад 3.16. Деякі розв’язки типу біжучої хвилі “комбінованого рівняння Кортевега–де Фріза з модифікованим рівнянням Кортевега–де Фріза”

$$u_t + (\alpha + \beta u)uu_x + \gamma u_{xxx} = 0, \quad (3.29)$$

де α , β та γ — дійсні сталі, $\beta\gamma \neq 0$, було побудовано в [106, 158, 283, 326, 333, 338, 340]. Це рівняння називається рівнянням Гарднера (α слід відмасштабувати до стандартного значення) і, очевидно, подібне до модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза $\tilde{u}_t + \varepsilon \tilde{u}^2 \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0$, $\varepsilon = \text{sign}(\beta\gamma)$, відносно точкового перетворення

$$\tilde{t} = \gamma t, \quad \tilde{x} = x + \frac{\alpha^2}{4\beta} t, \quad \tilde{u} = \sqrt{\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|} \left(u + \frac{\alpha}{2\beta}\right)$$

відомого досить давно [215]. Тому кожний розв’язок рівняння (3.29) можна подати у вигляді

$$u(t, x) = \sqrt{\left|\frac{\gamma}{\beta}\right|} \tilde{u} \left(\gamma t, x + \frac{\alpha^2}{4\beta} t \right) - \frac{\alpha}{2\beta},$$

де $\tilde{u}$ є розв’язком модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза, а для будь-якого розв’язку модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза такий вигляд рівняння дає розв’язок (3.29).

Інший близький клас рівнянь

$$u_t + u_x + \alpha u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.30)$$

де α пробігає набір дійсних ненульових сталих, розглянуто в [336]. За допомогою так званого “експоненційного методу” було знайдено лише окремі

його розв'язки типу біжучої хвилі. Будь-яке рівняння вигляду (3.30) тривіальним точковим перетворенням $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x - t$, $\tilde{u} = \sqrt{|\alpha|}u$ зводиться до модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \varepsilon \tilde{u}^2 \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0$, де $\varepsilon = \text{sign } \alpha$. Рівняння (3.30) з $\alpha = 1$ також було досліджено за допомогою “розширеного методу F-розширення” [208].

Приклад 3.17. Автори роботи [273] застосовують “узагальнений метод розширення” для знаходження точних розв'язків узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\begin{aligned} u_t + g(t)(6uu_x + u_{xxx}) + 6f(t)g(t)u \\ = x(f_t(t) + 12g(t)f^2(t)) + M(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

при $g \neq 0$.

Весь клас (3.31) можна відобразити у рівняння Кортевега–де Фріза $\tilde{u}_{\tilde{t}} + 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0$ сім'єю точкових перетворень

$$\tilde{t} = \int g\gamma^3 dt, \quad \tilde{x} = \gamma x - 6 \int g\gamma^3 \beta dt, \quad \tilde{u} = \frac{u - fx}{\gamma^2} - \beta,$$

де $\gamma = e^{-6 \int f g dt}$ та $\beta = \int M\gamma^{-2} dt$. Це означає, що функція $u = u(t, x)$ задовольняє рівняння (3.31) тоді і тільки тоді, коли вона пов'язана з розв'язком $\tilde{u}$ рівняння Кортевега–де Фріза співвідношенням

$$u = \gamma^2 \tilde{u} \left(\int g\gamma^3 dt, \gamma x - 6 \int g\gamma^3 \beta dt \right) + fx + \gamma^2 \beta.$$

Підклас рівнянь (3.31) з $g = 1$ та $M = 0$ згадано в [294], де вивчалися симетрійні властивості таких рівнянь. Також у цій роботі зазначено, що отримані результати можна поширити на рівняння більш загального вигляду, а саме

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 6f(t)u = x(f_t(t) + 12f^2(t)) + h_t(t) + 12f(t)h(t).$$

Сім'я точкових перетворень, які відображають останній клас у рівняння Кортевега–де Фріза, складається з перетворень

$$\tilde{t} = \int \gamma^3 dt, \quad \tilde{x} = \gamma x - 6 \int h\gamma dt, \quad \tilde{u} = \frac{u - fx - h}{\gamma^2},$$

де $\gamma = e^{-6 \int f dt}$.

Подібність диференціальних рівнянь можна застосовувати не лише для отримання нових розв'язків із відомих та спрощення розрахунків. Цей підхід легко поширюється на різні локальні об'єкти та властивості, пов'язані з диференціальними рівняннями, наприклад, ліівські та точкові симетрії [23, 261, 309], закони збереження та потенціальні симетрії [259, 260, 262], оператори редукції (некласичні симетрії) [265, 309], перетворення Беклунда тощо.

3.2.3. Груповий аналіз класу рівнянь типу Кортвега–де Фріза з використанням методу еквівалентності. Виконаємо групову класифікацію класу рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами, використовуючи підхід, що ґрунтується на еквівалентності. А саме, дослідимо симетрійні властивості та точні розв'язки рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + uu_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u = 0, \quad (3.32)$$

де g та h — довільні гладкі функції змінної t , $g \neq 0$.

Групову класифікацію класу (3.32) з $h = 0$ — проведено в попередньому розділі. Важлива властивість класу (3.32) — його нормалізованість. Таким чином, використовуючи відомий класифікаційний список і перетворення еквівалентності, групову класифікацію початкового класу (3.32) можна отримати без прямих обчислень. Нещодавно часткову групову класифікацію класу (3.32) здійснено у роботі [169] (де замість h та g використано позначення a та b , відповідно). Але при цьому не використано перетворення еквівалентності, що є суттєвим недоліком вказаної роботи. В ній знайдено лише деякі випадки розширень ліівської симетрії, а саме випадки з $h = \text{const}$, $h = 1/t$ та $h = 2/t$.

Насправді задачу групової класифікації класу (3.32) з точністю до його групи еквівалентності вже розв'язано, оскільки цей клас зводиться до класу (3.32) з $h = 0$ (клас (3.25)) групову класифікацію якого проведено в [264] (див. попередній розділ). Використовуючи відомий класифі-

каційний список та перетворення еквівалентності, групову класифікацію класу (3.32) отримуємо без спрощення рівнянь, які допускають розширення алгебри лівської симетрії, і власне цих алгебр перетвореннями еквівалентності. Розширений класифікаційний список може бути корисним для застосування, крім того він зручний для порівняння результатів з [169].

Клас (3.32) є підкласом класу (3.17), виокремленим умовами $f = 1$ та $p = q = k = l = 0$. Підставляючи ці значення функцій f, p, q, k та l в (3.19), отримаємо твердження.

Наслідок 3.18. *Рівняння з класу (3.32) зводиться до стандартного рівняння Кортевега–де Фріза точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли існують сталі c_0 та $\varepsilon \in \{0, 1\}$ такі, що*

$$h = \frac{\varepsilon}{2} \frac{g}{\int g \, dt + c_0} - \frac{g_t}{g}. \quad (3.33)$$

Клас (3.32) допускає розширену узагальнену групу еквівалентності і нормалізований лише в узагальненому сенсі. Має місце твердження.

Теорема 3.19. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу (3.32) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \alpha, & \tilde{x} &= \beta x + \gamma, & \tilde{u} &= \lambda(\beta u + \beta_t x + \gamma_t), \\ \tilde{h} &= \lambda h - 2\lambda \frac{\beta_t}{\beta} - \lambda_t, & \tilde{g} &= \beta^3 \lambda g, \end{aligned}$$

де $\beta = (\delta_1 \int e^{-\int h \, dt} dt + \delta_2)^{-1}$, $\gamma = \delta_3 \int \beta^2 e^{-\int h \, dt} dt + \delta_4$; $\delta_1, \dots, \delta_4$ — довільні сталі, причому $(\delta_1, \delta_2) \neq (0, 0)$; α — довільна гладка функція від t , причому $\alpha_t \neq 0$; функція $\lambda = 1/\alpha_t$.

Звичайна група еквівалентності $G_1^\sim$ класу (3.32) — це підгрупа розширеної узагальненої групи еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$, виокремлена умовами $\delta_1 = \delta_3 = 0$.

Калібрування $h = 0$ в класі (3.32) можна здійснити за допомогою перетворення еквівалентності

$$\hat{t} = \int e^{-\int h(t) \, dt} dt, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{u} = e^{\int h(t) \, dt} u, \quad (3.34)$$

що пов'язує рівняння (3.32) з рівнянням $\hat{u}_t + \hat{u}\hat{u}_x + \hat{g}(t)\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = 0$. Новий довільний елемент $\hat{g}$ виражається через g та h як $\hat{g}(t) = e^{\int h(t) dt} g(t)$.

Кожному рівнянню з класу (3.32) при перетворенні (3.34) відповідає рівняння-образ у класі (3.25). Група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.25), задана перетвореннями (3.47), породжується групою еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу (3.32), яка, в свою чергу, породжується групою еквівалентності її надкласу (3.17). Це гарантія того, що у таблиці 3.4 міститься і класифікаційний список класу (3.32) з точністю до $\hat{G}_1^\sim$ -еквівалентності (відповідно, класу (3.17) з точністю до його групи еквівалентності). Оскільки всі перераховані класи нормалізовані, можна стверджувати, що отримано класифікації лівських симетрій цих класів з точністю до загальної точкової еквівалентності. Це призводить до твердження.

Твердження 3.20. *Рівняння з класу (3.32) (відповідно, (3.17)) допускає чотиривимірну алгебру лівської інваріантності тоді і тільки тоді, коли воно зводиться точковим перетворенням до рівняння Кортевега–де Фріза зі сталими коефіцієнтами, тобто виконується умова (3.33) (відповідно, (3.19)).*

Щоб вивести групову класифікацію класу (3.32), який не спрощено перетвореннями еквівалентності, використаємо алгоритм побудови повного списку розширень лівської симетрії зі списку нееквівалентних розширень, запропонований у [299]. Спочатку до класифікаційного списку, наведеного в таблиці 3.4, застосуємо перетворення з групи $G^\sim$. Отримаємо розширений список:

0. Довільний $\hat{g}$: $\langle \partial_{\hat{x}}, \hat{t}\partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{u}} \rangle$;

1. $\hat{g} = c_0(a\hat{t} + b)^n(c\hat{t} + d)^{1-n}$, $n \neq 0, 1$: $\langle \partial_{\hat{x}}, \hat{t}\partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{u}}, X_3 \rangle$, де
 $X_3 = 3(a\hat{t} + b)(c\hat{t} + d)\partial_{\hat{t}} + (3ac\hat{t} + ad(n + 1) + bc(2 - n))\hat{x}\partial_{\hat{x}}$
 $+ [3ac\hat{x} - (3ac\hat{t} + ad(2 - n) + bc(n + 1))\hat{u}]\partial_{\hat{u}}$;

2. $\hat{g} = c_0(c\hat{t} + d) \exp\left(\frac{a\hat{t} + b}{c\hat{t} + d}\right)$: $\langle \partial_{\hat{x}}, \hat{t}\partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{u}}, X_3 \rangle$, де
 $X_3 = 3(c\hat{t} + d)^2\partial_{\hat{t}} + (3c(c\hat{t} + d) + \varepsilon)\hat{x}\partial_{\hat{x}} + [3c^2\hat{x} + (\varepsilon - 3c(c\hat{t} + d))\hat{u}]\partial_{\hat{u}}$;

3. $\hat{g} = c_0 e^{\delta \arctg(\frac{a\hat{t}+b}{c\hat{t}+d})} \sqrt{(a\hat{t}+b)^2 + (c\hat{t}+d)^2}$: $\langle \partial_{\hat{x}}, \hat{t}\partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{u}}, X_3 \rangle$, де
 $X_3 = 3((a\hat{t}+b)^2 + (c\hat{t}+d)^2) \partial_{\hat{t}} + (3a(a\hat{t}+b) + 3c(c\hat{t}+d) + \varepsilon\delta) \hat{x}\partial_{\hat{x}} + (3(a^2 + c^2)\hat{x} - (3a(a\hat{t}+b) + 3c(c\hat{t}+d) - \varepsilon\delta)\hat{u}) \partial_{\hat{u}}$;
 4a. $\hat{g} = c_0 \neq 0$: $\langle \partial_{\hat{x}}, \hat{t}\partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{u}}, \partial_{\hat{t}}, 3\hat{t}\partial_{\hat{t}} + \hat{x}\partial_{\hat{x}} - 2\hat{u}\partial_{\hat{u}} \rangle$;
 4b. $\hat{g} = c\hat{t} + d, c \neq 0$: $\langle \partial_{\hat{x}}, \hat{t}\partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{u}}, 3(c\hat{t} + d)\partial_{\hat{t}} + 2c\hat{x}\partial_{\hat{x}} - c\hat{u}\partial_{\hat{u}}, X_4 \rangle$,
 де $X_4 = (c\hat{t} + d)^2 \partial_{\hat{t}} + c(c\hat{t} + d)\hat{x}\partial_{\hat{x}} + c(c\hat{x} - (c\hat{t} + d)\hat{u})\partial_{\hat{u}}$.

Тут c_0, a, b, c, d та δ — довільні сталі, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \neq 0, \varepsilon = ad - bc, c_0 \neq 0$.

Потім знаходимо прообрази рівнянь з класу $\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} + \hat{g}(\hat{t})\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = 0$ при перетворенні (3.34) з довільними елементами, зібраними в наведеному списку. Останній крок — перетворення базисних операторів відповідних алгебр лівської симетрії. Результати зібрано в таблиці 3.5.

Розмноження точних розв'язків. Ще у 1970-х роках Хіртою [24] побудовано N -солітонний розв'язок рівняння Кортевега–де Фріза в канонічній формі

$$U_t - 6UU_x + U_{xxx} = 0. \quad (3.35)$$

Двосолітонний розв'язок рівняння (3.35) має вигляд

$$U = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln (1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + A b_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2}), \quad (3.36)$$

де a_i, b_i — довільні сталі, $\theta_i = a_i x - a_i^3 t, i = 1, 2; A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2$.

Комбінуючи просте перетворення $\hat{u} = -6U$, яке пов'язує (3.35) з рівнянням Кортевега–де Фріза у вигляді

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} + \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = 0, \quad (3.37)$$

та перетворення (3.34), отримуємо формулу

$$u = -6e^{-\int h(t) dt} U \left(\int e^{-\int h(t) dt} dt, x \right)$$

для породження точних розв'язків рівнянь загального вигляду

$$u_t + uu_x + e^{-\int h(t) dt} u_{xxx} + h(t)u = 0. \quad (3.38)$$

Табл. 3.5: Повний список розширень ліівської симетрії в класі (3.32).

№	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u$
1	$c_0 T_t (aT + b)^n (cT + d)^{1-n}$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, 3T_t^{-1}(aT + b)(cT + d)\partial_t + [3acT + ad(n + 1) + bc(2 - n)]x\partial_x + (3acxT_t - [3acT + 3hT_t^{-1}(aT + b)(cT + d) + bc(n + 1) + ad(2 - n)]u)\partial_u$
2	$c_0 T_t (cT + d) \exp\left(\frac{aT+b}{cT+d}\right)$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, 3T_t^{-1}(cT + d)^2\partial_t + (3c(cT + d) + \varepsilon)x\partial_x + [3c^2xT_t + (\varepsilon - 3(cT + d)(c + h(cT + d)T_t^{-1}))u]\partial_u$
3	$c_0 T_t e^{\delta \arctg(\frac{aT+b}{cT+d})} G(t)$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, 3T_t^{-1}G^2\partial_t + [3a(aT + b) + 3c(cT + d) + \varepsilon\delta]x\partial_x + [3(a^2 + c^2)xT_t - (3a(aT + b) + 3c(cT + d) - \varepsilon\delta + 3hT_t^{-1}G^2)u]\partial_u$
4a	$c_0 T_t$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, T_t^{-1}(\partial_t - hu\partial_u), 3TT_t^{-1}\partial_t + x\partial_x - (2 + 3TT_t^{-1}h)u\partial_u$
4b	$(cT + d)T_t$	$\partial_x, T\partial_x + T_t\partial_u, T_t^{-1}(cT + d)^2\partial_t + c(cT + d)x\partial_x + [c^2xT_t - (cT + d)(c + T_t^{-1}(cT + d)h)u]\partial_u, 3T_t^{-1}(cT + d)\partial_t + 2cx\partial_x - (c + 3T_t^{-1}(cT + d)h)u\partial_u$

Тут $T = \int e^{-\int h(t) dt} dt$, $T_t = e^{-\int h(t) dt}$, $G = \sqrt{(aT + b)^2 + (cT + d)^2}$; n, c_0, a, b, c, d та δ — довільні сталі, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \neq 0$, $\varepsilon = ad - bc$, $c_0 \neq 0$, $n \neq 0, 1$. У випадку (4b) $c \neq 0$. Функція h — довільна у всіх випадках.

Ці рівняння є прообразами рівняння (3.37) при перетворенні (3.34). Тут h — довільна гладка функція змінної t , що не має нулів.

Двосолітонний розв'язок (3.36) приводить до розв'язку

$$u = 12e^{-\int h(t) dt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1 + b_1 e^{\theta_1} + b_2 e^{\theta_2} + Ab_1 b_2 e^{\theta_1 + \theta_2})$$

рівняння (3.38), де a_i, b_i — довільні сталі, $\theta_i = a_i x - a_i^3 \int e^{-\int h(t) dt} dt$, $i = 1, 2$; $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$. Аналогічно, використовуючи інші відомі розв'язки класичного рівняння Кортевега–де Фріза, можна побудувати й інші типи

розв'язків для рівнянь з класу (3.38).

3.3. Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами

У цьому розділі з точки зору лівських симетрій досліджено узагальнені рівняння Кавахари з коефіцієнтами, залежними від часу:

$$u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxx} = 0. \quad (3.39)$$

Тут n — довільне ненульове ціле число, α , β та σ — гладкі функції від t , що не мають нулів. У випадку сталих α , β та σ рівняння (3.39) є класичними моделями теорії солітонних хвиль. Зробимо короткий огляд застосувань рівнянь Кавахари і пов'язаних з ними результатів.

У звичайному сенсі, солітонні хвилі — це нелінійні хвилі постійної форми, які швидко (зазвичай експоненційно) спадають у своїх хвостових областях. Однак за критичних умов у дисперсійних системах відбувається несподіване зростання слабонелокальних солітонних хвиль (наприклад, магніто-акустичні хвилі в плазмах, хвилі з поверхневим натягом тощо). Ці хвилі складаються з центральної частини (яка подібна до центральної частини класичних солітонних хвиль) і коливних хвостів з ненульовою сталою амплітудою, які простягаються нескінченно далеко від центральної частини. Щоб з'ясувати і описати властивості цих хвиль, Т. Кавахара запропонував узагальнені нелінійні дисперсійні рівняння, які мають вигляд рівняння Кортевега–де Фріза з додатковим членом з п'ятою похідною, тобто

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxxx} = 0,$$

де α , β та σ — ненульові сталі [141, 181]. Це рівняння було ретельно вивчено з різних точок зору. Його точний солітонний розв'язок наведено в [328]. У роботі [149] показано існування розв'язку типу біжучої хвилі

для рівняння Кавахари, що розглядається як формальне асимптотичне наближення хвиль на воді з поверхневим натягом.

У роботі [74] виконано різноманітні чисельні розрахунки як для неперіодичних, так і для просторово-періодичних розв'язків одновимірного хвильового рівняння, яке моделює капілярно-гравітаційні хвилі. В [131] з використанням методів експоненційної асимптотики показано, що солітонні хвильові розв'язки рівняння Кавахари утворюють однопараметричну сім'ю, яка характеризується фазовим зсувом коливних хвостів. У цій роботі отримано явну асимптотичну формулу, що пов'язує амплітуду коливань із зсувом фази. Розв'язність задачі Коші (її локальне і глобальне існування) для рівняння Кавахари вивчено в [97, 156]. Поведінку розв'язків рівнянь Кавахари досліджено, наприклад, у [2, 48, 101, 104, 135, 329]. У [318] прокласифіковано узагальнені і формальні симетрії, а також локальні закони збереження рівнянь Кавахари зі сталими коефіцієнтами з довільною нелінійністю $u_t + f(u)u_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxxx} = 0$, де $f_u \beta \sigma \neq 0$.

Узагальнені моделі зі сталими коефіцієнтами, пов'язані з рівнянням Кавахари, з'явилися пізніше. Наприклад, довгі хвилі на мілкій рідині під крижаним покривом при наявності розтягування або стиснення описано рівнянням $u_t + u_x + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxxx} = 0$ [28, 211]. Це рівняння зводиться до класичного рівняння Кавахари за допомогою простої заміни змінних: $\tilde{x} = x - t$ (t та u не перетворюються) або $\tilde{u} = 1 + \alpha u$ (t та x не перетворюються). У [177, 178] досліджено стабільність солітонів, описаних модифікованими рівняннями Кавахари $u_t + \alpha u^n u_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxxx} = 0$, де α , β та σ — ненульові сталі, а число $n \in \mathbb{N}$. Виявилося, що солітони стабільні при $n < 8$.

Відзначимо, що ні класичне рівняння Кавахари, ні наведене вище його узагальнення не є інтегровними методом оберненого розсіяння [214, 281].

Останнім часом багато уваги приділяли моделям зі змінними коефіцієнтами — таким як рівняння Кортевега–де Фріза, Бюргерса і Шредінгера [264]. Це пов'язано з тим, що рівняння зі змінними коефіцієнтами

моделюють деякі фізичні явища з більшою точністю, ніж їхні аналоги зі сталими коефіцієнтами,

У недавній роботі [180] для знаходження точних розв'язків класичного і модифікованого рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами вигляду (3.39) з $n = 1$ та $n = 2$, відповідно, застосовано ліївські симетрії. Наявність трьох довільних коефіцієнтів, що залежать від t , робить задачу повного знаходження ліївських симетрій занадто важкою. Ось чому в [180] отримано лише кілька результатів щодо ліївських симетрій (слід було зменшити кількість коефіцієнтів за допомогою перетворень еквівалентності). У цій роботі ми покажемо, що використання таких перетворень є запорукою повного розв'язання задачі.

3.3.1. Допустимі перетворення. Допустимі перетворення в класі (3.39) знайдено прямим методом [184]. В результаті отримано твердження, наведені в теоремах 3.21 і 3.22.

Теорема 3.21. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.39) складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \\ \tilde{\alpha}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1}{\delta_3^n T_t} \alpha(t), \quad \tilde{\beta}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^3}{T_t} \beta(t), \quad \tilde{\sigma}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^5}{T_t} \sigma(t), \quad \tilde{n} = n,\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$; T — довільна гладка функція з $T_t \neq 0$.

Теорема 3.22. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_{n=1}^\sim$ класу рівнянь*

$$u_t + \alpha(t) u u_x + \beta(t) u_{xxx} + \sigma(t) u_{xxxx} = 0 \quad (3.40)$$

складається з перетворень

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = (x + \delta_1) X^1 + \delta_0, \quad \tilde{u} = \frac{\delta_2}{X^1} u - \delta_2 \delta_3 (x + \delta_1),$$

$$\tilde{\alpha}(\tilde{t}) = \frac{(X^1)^2}{\delta_2 T_t} \alpha(t), \quad \tilde{\beta}(\tilde{t}) = \frac{(X^1)^3}{T_t} \beta(t), \quad \tilde{\sigma}(\tilde{t}) = \frac{(X^1)^5}{T_t} \sigma(t),$$

де $X^1 = (\delta_3 \int \alpha(t) dt + \delta_4)^{-1}$; δ_j , $j = 0, \dots, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_2(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$; $T = T(t)$ є гладкою функцією з $T_t \neq 0$. Звичайна група еквівалентності $G_{n=1}^\sim$ класу (3.40) включає вищезазначені перетворення при $\delta_1 = \delta_3 = 0$.

Теорема 3.23. Рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (3.39) зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього ж класу тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти α , β та σ задовольняють умови

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)_t = 0, \quad \text{якщо } n \neq 1, \quad (3.41)$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_t\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\sigma \alpha^2}{\beta^3}\right)_t = 0, \quad \text{якщо } n = 1. \quad (3.42)$$

Наявність довільної функції $T(t)$ у перетвореннях еквівалентності, наведених у теоремах 1 і 2, дозволяє відкалібрувати одну з довільних функцій α , β чи σ до простого сталого значення, наприклад до 1.

Яке ж з трьох можливих калібрувань зручніше для подальшого розгляду? При $\beta = 1$ або $\sigma = 1$ клас (3.40), як і раніше, нормалізований лише в розширеному узагальненому сенсі, оскільки перетворення незалежних і залежних змінних все ще містять $\int \alpha(t) dt$. Натомість при $\alpha = 1$ він нормалізований відносно своєї звичайної групи еквівалентності, оскільки X^1 з теореми 3.22 в цьому випадку набуває вигляду $X^1 = (\delta_3 t + \delta_4)^{-1}$.

Тому можна очікувати, що у випадку $n = 1$ групову класифікацію легше провести з калібруванням $\alpha = 1$. Якщо ж $n \neq 1$, всі три запропоновані калібрування виглядають однаково зручними, тому оберемо калібрування $\alpha = 1$, щоб подати групову класифікацію уніфікованим чином.

Калібрування $\alpha = 1$ реалізується точковим перетворенням

$$\hat{t} = \int \alpha(t) dt, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{u} = u. \quad (3.43)$$

Після цього клас (3.39) слід відобразити у свій підклас за допомогою перетворення $\hat{\alpha} = 1$, $\hat{\beta} = \beta/\alpha$ та $\hat{\sigma} = \sigma/\alpha$. Отже, не втрачаючи загальності,

можна обмежитися вивченням класу

$$u_t + u^n u_x + \beta(t) u_{xxx} + \sigma(t) u_{xxxx} = 0, \quad (3.44)$$

оскільки всі результати щодо симетрій, законів збереження, класичних розв'язків та інших пов'язаних об'єктів для рівнянь (3.39) можна знайти, використавши аналогічні результати, отримані для рівнянь з класу (3.44).

Щоб отримати групу еквівалентності для підкласу класу (3.39) при $\alpha = 1$, покладемо $\tilde{\alpha} = \alpha = 1$ в перетвореннях, наведених у теоремах 3.21 і 3.22.

Наслідок 3.24. *Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_{\alpha=1}^{\sim}$ класу (3.44) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 \delta_3^{-n} t + \delta_0, & \tilde{x} &= \delta_1 x + \delta_2, & \tilde{u} &= \delta_3 u, \\ \tilde{\beta}(\tilde{t}) &= \delta_1^2 \delta_3^n \beta(t), & \tilde{\sigma}(\tilde{t}) &= \delta_1^4 \delta_3^n \sigma(t), & \tilde{n} &= n, \end{aligned} \quad (3.45)$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Зауваження 3.25. Якщо сталу n у класі (3.44) вважати змінною, то група еквівалентності $\hat{G}_{\alpha=1}^{\sim}$ — узагальнена, оскільки n входить у перетворення змінної t . З іншого боку, n є інваріантом відносно перетворень з групи еквівалентності, тому клас (3.44) можна розглядати як об'єднання всіх його підкласів з фіксованими n . Для кожного такого підкласу група $\hat{G}_{\alpha=1}^{\sim}$ є звичайною групою еквівалентності.

У випадку $n = 1$ покладемо в перетвореннях теореми 3.22 $\alpha = \tilde{\alpha} = 1$ і перепозначимо сталі δ_j , $j = 0, \dots, 4$, щоб записати перетворення в більш компактній формі.

Наслідок 3.26. *Звичайна група еквівалентності $G_{\alpha=n=1}^{\sim}$ класу*

$$u_t + u u_x + \beta(t) u_{xxx} + \sigma(t) u_{xxxx} = 0 \quad (3.46)$$

складається з перетворень

$$\tilde{t} = \frac{at + b}{ct + d}, \quad \tilde{x} = \frac{e_2 x + e_1 t + e_0}{ct + d}, \quad \tilde{u} = \frac{e_2(ct + d)u - e_2 cx - e_0 c + e_1 d}{\Delta},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{e_2^3}{ct+d} \frac{\beta}{\Delta}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{e_2^5}{(ct+d)^3} \frac{\sigma}{\Delta}, \quad (3.47)$$

де a, b, c, d, e_0, e_1 та e_2 — довільні сталі, причому $\Delta = ad - bc \neq 0$ та $e_2 \neq 0$; набір $(a, b, c, d, e_0, e_1, e_2)$ визначається з точністю до ненульового множника, а отже без обмеження загальності можна вважати, що $\Delta = \pm 1$.

3.3.2. Ліівські симетрії. Групова класифікація рівнянь вигляду (3.44) при $n \neq 1$ з точністю до $G_{\alpha=1}^{\sim}$ -еквівалентності (відповідно, з точністю до $G_{\alpha=n=1}^{\sim}$ -еквівалентності при $n = 1$) співпадає з груповою класифікацією рівнянь вигляду (3.39) при $n \neq 1$ з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності (відповідно, з точністю до $\hat{G}^{\sim}$ -еквівалентності при $n = 1$). Доведено твердження:

Теорема 3.27. *Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу (3.44) (відповідно, (3.39)) при $n \neq 1$ співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Всі можливі $\hat{G}_{\alpha=1}^{\sim}$ -нееквівалентні (відповідно, $G^{\sim}$ -нееквівалентні) випадки розширення максимальних алгебр ліівської інваріантності вичерпуються випадками 1–3 таблиці 3.6.*

Теорема 3.28. *Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу (3.46) (відповідно, (3.40)) співпадає з двовимірною алгеброю $\langle \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$. Всі можливі $G_{\alpha=n=1}^{\sim}$ -нееквівалентні (відповідно, $\hat{G}_{n=1}^{\sim}$ -нееквівалентні) випадки розширення максимальних алгебр ліівської інваріантності вичерпуються випадками 1'–4' з таблиці 3.6.*

Щоб отримати повний список розширень ліівської симетрії для всього класу (3.39), де довільні елементи не спрощено точковими перетвореннями, використаємо підхід [299], що ґрунтується на еквівалентності. Результати наведено в таблиці 3.7.

Зауважимо, що максимальна алгебра ліівської інваріантності класичного рівняння Кавахари (вип. 3' табл. 3.6) є ізоморфною алгебрі Галілея

Табл. 3.6: Групова класифікація класу (3.39).

№	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис $A^{\max}$
$n \neq 1$. Цей випадок класифікується з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.			
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, 3nt\partial_t + (\rho+1)nx\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u$
3	λ	δ	∂_x, ∂_t
$n = 1$. Цей випадок класифікується з точністю до $\hat{G}^\sim$ -еквівалентності.			
0'	$\forall$	$\forall$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u$
1'	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2'	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
3'	λ	δ	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, \partial_t$
4'	$\lambda(t^2+1)^{\frac{1}{2}}e^{3\nu \arctg t}$	$\delta(t^2+1)^{\frac{3}{2}}e^{5\nu \arctg t}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u,$ $(t^2+1)\partial_t + (t+\nu)x\partial_x + ((\nu-t)u+x)\partial_u$

Тут $\alpha = 1 \bmod G^\sim$, ρ та ν — довільні сталі, $\rho \geq 1/2$, $\nu \geq 0$; δ та λ — ненульові сталі, $\delta = \pm 1 \bmod G^\sim$.

$A\bar{G}_1(1)$. Базисні оператори, наведені у випадку 1' табл. 3.6, можна побудувати як реалізацію деформованої алгебри Галілея $A\bar{G}_1^q(1)$ для значень $q = 1$, $\alpha = \frac{\rho-2}{\rho+1}$ [224].

3.3.3. Симетрійні редукції і точні розв'язки. Оператори ліівської симетрії, отримані в результаті розв'язання задачі групової класифікації, можна застосувати для побудови точних розв'язків відповідних рівнянь. Метод редукції за підалгебрами алгебри ліівської інваріантності є алгоритмічним і добре відомим (класичні підручники — [23, 235]). Щоб отримати оптимальну систему інваріантних розв'язків, редукції слід виконувати за підалгебрами оптимальної системи [235, Section 3.3].

Розглянемо спочатку структуру двох- і тривимірних алгебр Лі, поро-

Табл. 3.7: Групова класифікація класу (3.39) без використання еквівалентностей.

№	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис $A^{\max}$
$n \neq 1$			
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	$\lambda_1 \alpha(T+l)^\rho$	$\lambda_2 \alpha(T+l)^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, 3n(T+l)\alpha^{-1}\partial_t$ $+ n(\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	$\lambda_1 \alpha e^{mT}$	$\lambda_2 \alpha e^{\frac{5}{3}mT}$	$\partial_x, 3n\alpha^{-1}\partial_t + nm x\partial_x + mu\partial_u$
3	$\lambda_1 \alpha$	$\lambda_2 \alpha$	$\partial_x, \alpha^{-1}\partial_t$
$n = 1$			
0'	$\forall$	$\forall$	$\partial_x, T\partial_x + \partial_u$
1'	$\lambda_1 \alpha(aT+b)^\rho$ $\times (cT+d)^{1-\rho}$	$\lambda_2 \alpha(aT+b)^{\frac{5\rho+2}{3}}$ $\times (cT+d)^{\frac{7-5\rho}{3}}$	$\partial_x, T\partial_x + \partial_u, 3(aT+b)(cT+d)\alpha^{-1}\partial_t$ $+ (3acT+ad(\rho+1)+bc(2-\rho))x\partial_x$ $+ (3acx-(3acT+ad(2-\rho)+bc(\rho+1))u)\partial_u$
2'	$\lambda_1 \alpha(cT+d)e^{\frac{aT+b}{cT+d}}$	$\lambda_2 \alpha(cT+d)^3 e^{\frac{5}{3}\frac{aT+b}{cT+d}}$	$\partial_x, T\partial_x + \partial_u, 3(cT+d)^2\alpha^{-1}\partial_t$ $+ (3c(cT+d)+\Delta)x\partial_x$ $+ (3c^2x+(\Delta-3c(cT+d))u)\partial_u$
3'	$\lambda_1 \alpha(cT+d)$	$\lambda_2 \alpha(cT+d)^3$	$\partial_x, T\partial_x + \partial_u, (cT+d)^2\alpha^{-1}\partial_t +$ $c(cT+d)x\partial_x + c(cx-(cT+d)u)\partial_u$
4'	$\lambda_1 \alpha e^{3\nu \operatorname{arctg} \frac{aT+b}{cT+d}}$ $\times ((aT+b)^2+(cT+d)^2)^{\frac{1}{2}}$	$\lambda_2 \alpha e^{5\nu \operatorname{arctg} \frac{aT+b}{cT+d}}$ $\times ((aT+b)^2+(cT+d)^2)^{\frac{3}{2}}$	$\partial_x, T\partial_x + \partial_u,$ $((aT+b)^2+(cT+d)^2)\alpha^{-1}\partial_t$ $+ (a(aT+b)+c(cT+d)+\Delta\nu)x\partial_x$ $+ [-(a(aT+b)+c(cT+d)-\Delta\nu)u$ $+ (a^2+c^2)x]\partial_u$

Тут $\lambda_1, \lambda_2, a, b, c, d, l, m, \rho$ та ν — довільні сталі, причому $\lambda_1 \lambda_2 (c^2 + d^2) \neq 0, \Delta = ad - bc \neq 0$; α — довільна гладка функція від t , що не має нулів; $T = \int \alpha(t) dt$.

джених операторами, наведеними в таблиці 3.6, використовуючи позначення [245]. У випадках 1–3 й у випадку 0' максимальні алгебри лівської інваріантності двовимірні. У випадку 0', випадку 1 при $\rho = -1$ та ви-

Табл. 3.8: Оптимальні системи одновимірних підалгебр $A^{\max}$ з таблиці 3.6.

№	Оптимальна система
$1_{\rho \neq -1}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.1} = \langle 3nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 2)u\partial_u \rangle$
$1_{\rho = -1}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.2}^a = \langle nt\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$
2	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_2 = \langle 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle$
3	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_3^a = \langle \partial_t + a\partial_x \rangle$
$0'$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{0'}^a = \langle (t + a)\partial_x + \partial_u \rangle$
$1'_{\rho \neq -1, 2}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{0'}^\sigma = \langle (t + \sigma)\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1'.1} = \langle 3t\partial_t + (\rho + 1)x\partial_x + (\rho - 2)u\partial_u \rangle$
$1'_{\rho = -1}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{0'}^\sigma = \langle (t + \sigma)\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1'.2}^a = \langle t\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle,$
$1'_{\rho = 2}$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{0'}^\sigma = \langle (t + \sigma)\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1'.3}^a = \langle t\partial_t + (x + at)\partial_x + a\partial_u \rangle,$
$2'$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{0'} = \langle t\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2'} = \langle 3\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle,$
$3'$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{3'.1} = \langle \partial_t \rangle, \quad \mathfrak{g}_{3'.2}^a = \langle a\partial_t + 2t\partial_x + 2\partial_u \rangle$
$4'$	$\mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{4'} = \langle (t^2 + 1)\partial_t + (t + \nu)x\partial_x + (x + (\nu - t)u)\partial_u \rangle$

У всіх випадках $a \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$.

падку 3 вони абелеві ($2A_1$); у випадку 1 при $\rho \neq -1$ та у випадку 2 — неабелеві (A_2). Алгебри з базисними операторами, наведеними у випадках $1'-4'$, — тривимірні. У випадку $1'$ при $\rho \neq -1, 2$ максимальна алгебра лівської інваріантності належить до типу $A_{3.4}$ (якщо $\rho = 1/2$) або до типу $A_{3.5}^a$ (при $\rho > 1/2$, де $a = \frac{\rho-2}{\rho+1}$, і при $\rho < 1/2$, де $a = \frac{\rho+1}{\rho-2}$).

При $\rho = -1$ або $\rho = 2$ $A^{\max}$ з випадку $1'$ дорівнює $A_1 \oplus A_2$. В інших випадках максимальні алгебри лівської інваріантності належать до типів: випадок $2'$ — $A_{3.2}$; випадок $3'$ — алгебра Вейля $A_{3.1}$; випадок $4'$ — $A_{3.7}^a$, де $a = |\nu|$.

Якщо одновимірна алгебра інваріантності породжується оператором $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$, то анзац, який редукує відповідне диференціальне рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними до звичайного диференціального рівняння, знаходять як розв'язок умови інваріантності поверхні $Q[u] := \tau u_t + \xi u_x - \eta = 0$. На практиці необхідно

Табл. 3.9: Ліівські редукції рівнянь (3.39) з $\alpha = 1$ та $n\beta\sigma \neq 0$.

Випадок	$\mathfrak{g}$	ω	Анзац, $u =$	Редуковане рівняння
Редукції для довільних ненульових n				
$1_{\rho \neq -1}$	$\mathfrak{g}_{1.1}$	$xt^{-\frac{\rho+1}{3}}$	$t^{\frac{\rho-2}{3n}}\varphi(\omega)$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{\rho+1}{3}\omega\right)\varphi' + \frac{\rho-2}{3n}\varphi = 0$
$1_{\rho=-1}$	$\mathfrak{g}_{1.2}^a$	$x - \frac{a}{n} \ln t$	$t^{-\frac{1}{n}}\varphi(\omega)$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{a}{n}\right)\varphi' - \frac{1}{n}\varphi = 0$
2	$\mathfrak{g}_2$	$xe^{-\frac{1}{3}t}$	$e^{\frac{1}{3n}t}\varphi(\omega)$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{1}{3}\omega\right)\varphi' + \frac{1}{3n}\varphi = 0$
3	$\mathfrak{g}_3^a$	$x - at$	$\varphi(\omega)$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + (\varphi^n - a)\varphi' = 0$
Спеціальні редукції для $n = 1$				
$0'$	$\mathfrak{g}_{0'}^a$	t	$\varphi(\omega) + \frac{x}{t+a}$	$(\omega + a)\varphi' + \varphi = 0$
$3'$	$\mathfrak{g}_{3'.1}^a$	x	$\varphi(\omega)$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + \varphi\varphi' = 0$
$3'$	$\mathfrak{g}_{3'.2}^a$	$x - t^2/a$	$2t/a + \varphi(\omega), \quad a \neq 0$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + \varphi\varphi' + 2/a = 0$
$4'$	$\mathfrak{g}_{4'}$	$\frac{xe^{-\nu \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2+1}}$	$\frac{e^{\nu \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2+1}}\varphi(\omega) + \frac{xt}{t^2+1}$	$\delta\varphi'''' + \lambda\varphi''' + (\varphi - \nu\omega)\varphi' + \nu\varphi + \omega = 0$

Тут a — довільна стала.

розв'язати відповідну характеристичну систему $\frac{dt}{\tau} = \frac{dx}{\xi} = \frac{du}{\eta}$. Анзаци і редуковані рівняння, отримані для рівнянь з класу (3.44) з використанням одновимірних підалгебр з таблиці 3.8, наведено в таблиці 3.9. Редукції, пов'язані з підалгеброю $\mathfrak{g}_0$, не розглядаються, оскільки приводять тільки до сталих розв'язків. Редукції за підалгебрами $\mathfrak{g}_{1'.1}$, $\mathfrak{g}_{1'.2}^a$ та $\mathfrak{g}_{2'}$ не наводимо, оскільки ці підалгебри є частковими випадками підалгебр $\mathfrak{g}_{1.1}$, $\mathfrak{g}_{1.2}^a$ та $\mathfrak{g}_2$ у випадку $n = 1$. Для випадку $1'_{\rho=2}$ редукцію не виконуємо тому, що цей випадок еквівалентний до $1'_{\rho=-1}$. Дійсно, рівняння $u_t + uu_x + \lambda t^2 u_{xxx} + \delta t^4 u_{xxxxx} = 0$ та $u'_t + u'u'_{x'} + \lambda/t' u'_{x'x'x'} + \delta/t' u'_{x'x'x'x'x'} = 0$ пов'язані перетворенням $t' = 1/t$, $x' = -x/t$, $u' = tu - x$.

Редуковане рівняння першого порядку $(\omega + a)\varphi' + \varphi = 0$ з таблиці 3.9, дає “вироджений” розв'язок рівняння (3.44) для довільних значень $\beta(t)$ та $\sigma(t)$, а саме $u = (x + c)/(t + a)$, де c та a — довільні сталі. Перетворен-

ня (Б.31) дає “вироджений” точний розв’язок рівняння (3.40) вигляду

$$u = \frac{x + c}{\int \alpha(t) dt + a}. \quad (3.48)$$

Розглянемо редуковані звичайні диференціальні рівняння п’ятого порядку з таблиці 3.9. Випадки 3 і 3’ відповідають узагальненим рівнянням Кавахари зі сталими коефіцієнтами. Відповідні звичайні диференціальні рівняння детально вивчено (див., наприклад, [47, 100, 189, 243] і посилання у цих джерелах). Зосередимо нашу увагу на випадках зі змінними коефіцієнтами.

3.3.4. Точні розв’язки рівнянь, що зводяться до відповідників зі сталими коефіцієнтами. У недавніх роботах [180, 323] застосовано різноманітні методи знаходження точних розв’язків рівняння Кавахари з коефіцієнтами, залежними від часу. В обох статтях отримано точні розв’язки рівнянь, коефіцієнти яких задовольняють додаткові обмеження, а саме, коли всі коефіцієнти пропорційні один одному. З теореми 3.23 випливає, що такі рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (3.39) зводяться до рівнянь Кавахари зі сталими коефіцієнтами.

На наш погляд, оптимальний спосіб отримати точні розв’язки для рівнянь з класу (3.39), які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з цього класу, — це взяти відомі розв’язки для рівнянь зі сталими коефіцієнтами і зробити відповідну заміну змінних. Таким чином можна побудувати точний розв’язок не тільки для випадку, коли коефіцієнти в (3.39) пропорційні, але й для рівнянь вигляду (3.39) з $n = 1$, коефіцієнти яких задовольняють умови (Б.26).

Відповідні заміни змінних отримаємо, використавши теорему 3.21 для випадків $n \neq 1$ та $n = 1$. Має місце твердження: рівняння з класу (3.39)

$$u_t + \alpha(t)u^n u_x + \tilde{\beta}\alpha(t)u_{xxx} + \tilde{\sigma}\alpha(t)u_{xxxxx} = 0 \quad (3.49)$$

та

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \tilde{\beta}\alpha(t)(\delta_3 \int \alpha(t) dt + \delta_4)u_{xxx}$$

$$+ \tilde{\sigma}\alpha(t)(\delta_3 \int \alpha(t)dt + \delta_4)^3 u_{xxxxx} = 0, \quad (3.50)$$

де $\alpha(t)$ — гладка функція, що не має нулів, зводяться до рівнянь Кавахари зі сталими коефіцієнтами

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{\alpha}\tilde{u}^n\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{\beta}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\sigma}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \quad (3.51)$$

та

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{\alpha}\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{\beta}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\sigma}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \quad (3.52)$$

за допомогою перетворень

$$\tilde{t} = \int \alpha(t)dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = \tilde{\alpha}^{-\frac{1}{n}}u$$

та

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \int \alpha(t)(\delta_3 \int \alpha(t)dt + \delta_4)^{-2}dt, \\ \tilde{x} &= (x + \delta_1)(\delta_3 \int \alpha(t)dt + \delta_4)^{-1}, \\ \tilde{u} &= ((\delta_3 \int \alpha(t)dt + \delta_4)u - (x + \delta_1)\delta_3)/\tilde{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

відповідно. Тут $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\sigma}$ та δ_i , $i = 1, 3, 4$, — довільні сталі, причому $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\sigma}(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

Розглянемо сім'ю розв'язків рівняння Кавахари (3.52) типу біжучої хвилі:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\frac{264992\tilde{\sigma}^2\kappa^5 - 7280\tilde{\beta}\tilde{\sigma}\kappa^3 - 31\tilde{\beta}^2k + 507\tilde{\sigma}\mu}{507\tilde{\alpha}\tilde{\sigma}\kappa} \\ &\quad - \frac{280\kappa^2(\tilde{\beta} - 104\tilde{\sigma}\kappa^2)}{13\tilde{\alpha}} \operatorname{th}^2(\kappa\tilde{x} + \mu\tilde{t} + \chi) \\ &\quad - \frac{1680\tilde{\sigma}\kappa^4}{\tilde{\alpha}} \operatorname{th}^4(\kappa\tilde{x} + \mu\tilde{t} + \chi) \end{aligned}$$

де $\kappa = \pm \frac{\sqrt{-13\tilde{\beta}\tilde{\sigma}}}{26\tilde{\sigma}}$, μ , χ — довільні сталі [189]. Відповідний точний розв'язок (3.50), отриманий з використанням (3.53), має вигляд

$$u = \frac{1}{\delta_3 \int \alpha(t)dt + \delta_4} \left(\delta_3(x + \delta_1) - \frac{280}{13}\kappa^2(\tilde{\beta} - 104\tilde{\sigma}\kappa^2) \operatorname{th}^2(\kappa\tilde{x} + \mu\tilde{t} + \chi) \right)$$

$$- \frac{264992 \tilde{\sigma}^2 \kappa^5 - 7280 \tilde{\beta} \tilde{\sigma} \kappa^3 - 31 \tilde{\beta}^2 \kappa + 507 \tilde{\sigma} \mu}{507 \tilde{\sigma} \kappa} - 1680 \tilde{\sigma} \kappa^4 \operatorname{th}^4(\kappa \tilde{x} + \mu \tilde{t} + \chi) \Big),$$

де $\tilde{t} = \int \alpha(t) (\delta_3 \int \alpha(t) dt + \delta_4)^{-2} dt$, $\tilde{x} = (x + \delta_1) (\delta_3 \int \alpha(t) dt + \delta_4)^{-1}$; δ_1 , μ та χ — довільні сталі, а $\kappa = \pm \frac{\sqrt{-13 \tilde{\beta} \tilde{\sigma}}}{26 \tilde{\sigma}}$.

Сім'я розв'язків для рівняння (3.49) при $n = 2$ має вигляд

$$u = \frac{40k^2 \tilde{\sigma} - \tilde{\beta}}{\sqrt{-10 \tilde{\sigma}}} + 6k^2 \sqrt{-10 \tilde{\sigma}} \operatorname{th}^2 \left(kx + \frac{k}{10 \tilde{\sigma}} (240k^4 \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\beta}^2) \int \alpha(t) dt + \chi \right), \quad (3.54)$$

де k та χ — довільні сталі, причому $k \neq 0$. На рис. 1–3 наведено графіки розв'язку (3.54) при певних значеннях параметрів і різних часових неоднорідностях.

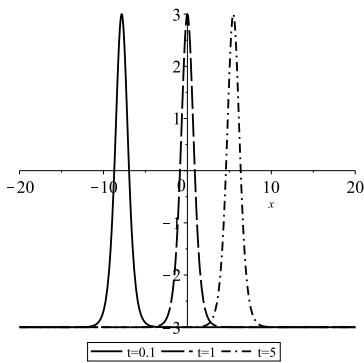


Рис. 3.1: Розв'язок (3.54) при $\alpha(t) = 1/t$, $\sigma = -0.1$, $\beta = -1$, $k = 1$, $\chi = 0$.

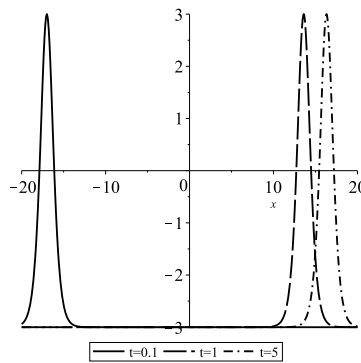


Рис. 3.2: Розв'язок (3.54) при $\alpha(t) = 1/t^2$, $\sigma = -0.1$, $\beta = -1$, $k = 1$, $\chi = -17$.

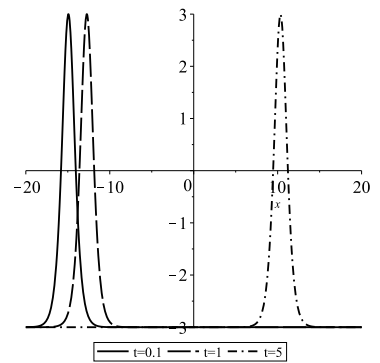


Рис. 3.3: Розв'язок (3.54) при $\alpha(t) = \sqrt{t}$, $\sigma = -0.1$, $\beta = -1$, $k = 1$, $\chi = 15$.

3.3.5. Використання лівських симетрій для побудови чисельних розв'язків. Точні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь п'ятого порядку, наведених у випадках 1, 2 та 4' таблиці 3.9, невідомі. Але нас більше цікавить поведінка розв'язків для моделей зі змінними коефіцієнтами. Отримані лівські редукції будуть корисні при знаходженні

розв'язків рівнянь (3.39) з крайовими умовами, інваріантними відносно відповідних алгебр лівської симетрії [65].

Розглянемо клас крайових задач для узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + u^n u_x + \lambda t^\rho u_{xxx} + \delta t^{\frac{5\rho+2}{3}} u_{xxxxx} = 0, \quad t > t_0, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.55)$$

$$u(t, 0) = \gamma_0 t^{\frac{\rho-2}{3n}}, \quad \left. \frac{\partial^i u(t, x)}{\partial x^i} \right|_{x=0} = \gamma_i t^{\frac{\rho-2-n(\rho+1)i}{3n}}, \quad t > t_0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.56)$$

де γ_i , $i = 0, \dots, 4$, λ та δ — довільні сталі, причому $\gamma_0 \lambda \delta \neq 0$.

І рівняння, і крайові умови є інваріантними відносно оператора симетрії $Q = 3nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 2)u\partial_u$ (випадок 1 таблиці 3.6). Використавши відповідний анзац (випадок 1 _{$\rho \neq -1$} таблиці 3.9), цю задачу можна звести до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння п'ятого порядку

$$\begin{aligned} \delta \varphi'''' + \lambda \varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{\rho+1}{3} \omega \right) \varphi' + \frac{\rho-2}{3n} \varphi &= 0, \\ \varphi(0) = \gamma_0, \quad \left. \frac{d^i \varphi(\omega)}{d\omega^i} \right|_{\omega=0} &= \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Після чисельного розв'язання цієї задачі Коші відповідний розв'язок крайової задачі (3.55)–(3.56) можна отримати за допомогою перетворення подібності $u = t^{\frac{\rho-2}{3n}} \varphi(\omega)$ при $\omega = xt^{-\frac{\rho+1}{3}}$.

Проілюструємо використання лівських симетрій для побудови чисельних розв'язків рівнянь Кавахари з коефіцієнтами, залежними від часу, на прикладі.

Приклад 3.29. Розглянемо рівняння

$$v_t + v_x + \frac{3}{2}\varepsilon v v_x + \frac{1}{2}\varkappa v_{xxx} + \frac{1}{2}\gamma v_{xxxx} = 0$$

яке описує поширення довгих нелінійних хвиль у воді, покритій кригою [10, 28, 34, 157, 211]. Тут

$$\varepsilon = \frac{a}{H}, \quad \varkappa = \frac{h}{\rho_\omega g \lambda^2} (\sigma_0 - \sigma_{xx}), \quad \gamma = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2) \rho_\omega g \lambda^4},$$

v — безрозмірна амплітуда коливань підкрижної поверхні рідини відносно горизонтального положення рівноваги, a — характеристична амплітуда хвилі, H — глибина рідини, $2\pi\lambda$ — характеристична довжина хвилі, ρ_ω — густина рідини, ρ_i — густина криги; h , E , і ν — товщина, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона для криги, відповідно; σ_{xx} — компонента тензора напружень крижаного покриття, $\sigma_0 = gH[\rho_\omega H/(3h) + \rho_i]$. Припускається, що $\sigma_{xx} \approx 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ — це результат дії зовнішніх сил [157].

Також вважаємо, що зростання товщини криги описується законом $h = 0.04\sqrt{t}$. Це за певних погодних умов добре узгоджується з даними, отриманими для Азовського моря за 240 годин спостережень, починаючи з товщини криги $h = 0,1$ м [3]. Тоді для значень $\lambda \approx 100$ м, $H \approx 10$ м, $E \approx 3 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $a \approx 0,1$ м, $\rho_\omega \approx 1030 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_i \approx 916 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ та $\sigma_0 \approx 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, розрахованих для середньої товщини криги $h_a \approx 0,3$ м, отримаємо модельне рівняння вигляду

$$v_t + v_x + \alpha v v_x + \lambda t^{\frac{1}{2}} v_{xxx} + \delta t^{\frac{3}{2}} v_{xxxx} = 0,$$

де $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-2}$, $\beta \approx 2,20215 \cdot 10^{-5}$ та $\delta \approx 1,05566 \cdot 10^{-8}$ (після переведення часу в змінних E , σ_0 та σ_{xx} у години). Щоб звести це рівняння до вигляду (3.55), зробимо заміну залежної змінної $u = 1 + \alpha v$. Отримаємо

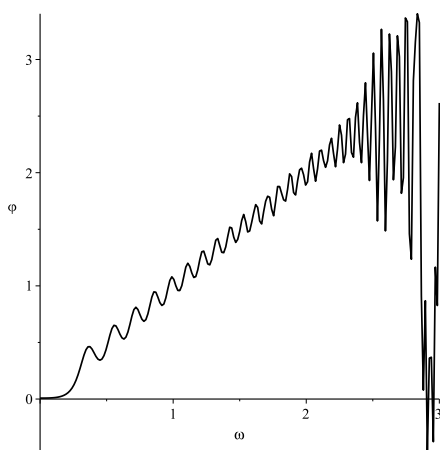


Рис. 3.4: Розв'язок задачі Коші (3.60), $\gamma_0 = 1/120$.

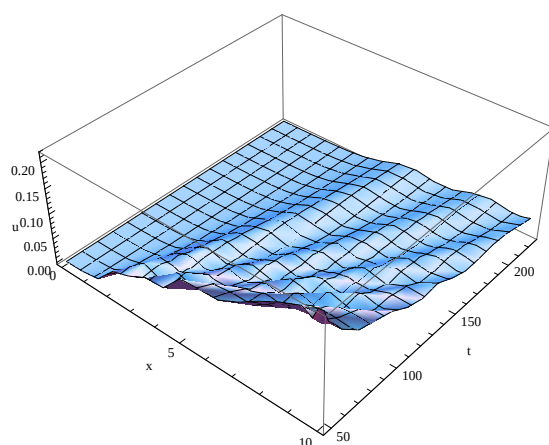


Рис. 3.5: Розв'язок крайової задачі (3.58)–(3.59), $\gamma_0 = 1/120$.

рівняння

$$u_t + uu_x + \lambda t^{\frac{1}{2}} u_{xxx} + \delta t^{\frac{3}{2}} u_{xxxx} = 0, \quad (3.58)$$

в якому λ та δ залишаються незмінними. Розглянемо крайові умови

$$u(t, 0) = \gamma_0 t^{-\frac{1}{2}}, \quad u_x(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxxx}(t, 0) = 0, \quad (3.59)$$

що інваріантні відносно оператора масштабної симетрії $2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$ останнього рівняння. Така крайова задача зводиться до задачі Коші

$$\begin{aligned} \delta \varphi'''' + \lambda \varphi''' + \left(\varphi - \frac{1}{2}\omega\right) \varphi' - \frac{1}{2}\varphi &= 0, \\ \varphi(0) = \gamma_0, \quad \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = \varphi''''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Чисельний розв'язок цієї початкової задачі наведено на рис. 4. Відповідний чисельний розв'язок рівняння (3.58) з крайовими умовами (3.56) наведено на рис. 5.

Заключні зауваження. В цьому розділі вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для класу (3.39) узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами. Отримано нові нелінійні моделі зі змінними коефіцієнтами, що допускають розширення лівської симетрії. Це стало можливим завдяки калібруванню довільних елементів класу, а саме калібруванню $\alpha = 1$. Використання різних груп еквівалентності для випадків $n \neq 1$ та $n = 1$, які було знайдено в ході вивчення допустимих перетворень у класі (3.39), дозволило подати класифікаційний список у простій і стислій формі. Також побудовано закони збереження нульового порядку для рівнянь вигляду (3.44), що задаються збережними векторами з характеристиками 1 та u :

$$\begin{aligned} &\left(u, \frac{1}{n+1} \alpha(t) u^{n+1} + \beta(t) u_{xx} + \sigma(t) u_{xxxx}\right), \\ &\left(\frac{1}{2} u^2, \frac{1}{n+2} \alpha(t) u^{n+2} + \beta(t) \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2\right) + \sigma(t) \left(u u_{xxxx} - u_x u_{xxx} + \frac{1}{2} u_{xx}^2\right)\right). \end{aligned}$$

Це — закони збереження імпульсу і енергії відповідно.

3.4. Ліївські симетрії і закони збереження рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами

Нелінійне рівняння з частинними похідними третього порядку

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

що називається тепер рівнянням Бенджаміна–Бона–Махоні, з'явилося в [53, 246] в якості альтернативної (рівнянню Кортевега–де Фріза) моделі односпрямованого поширення помірно довгих хвиль невеликої скінченної амплітуди в системах, які демонструють нелінійні і дисперсійні ефекти. Чисельні дослідження показали, що рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні допускає солітонні розв'язки, взаємодія яких нееластична, хоча і близька до еластичної [36, 73].

Для еквівалентної форми цього рівняння $u_t = uu_x + u_{xxt}$ доведено [105], що воно не має збережних величин, окрім знайдених Т. Бенджаміном, Дж. Боном та Дж. Махоні: u (маса), $(u^2 + u_x^2)/2$ (енергія) та $u^3/3$ (імпульс). Ліївські симетрії та відповідні редукції рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні у наведеній еквівалентній формі отримано в [186] (ці результати також наведено в [154, с. 194–196]). Встановлено, що максимальна алгебра ліївської симетрії цього рівняння є тривимірною алгеброю Лі типу $A_{2,1} \oplus A_1$, яку породжено векторними полями ∂_t , $t\partial_t - u\partial_u$ та ∂_x .

Існує кілька недавніх робіт (див. [217] і посилання там же), присвячених вивченню ліївських симетрій рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами загального вигляду

$$u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0, \quad (3.61)$$

де f , g та h — довільні гладкі функції змінної t , причому $gh \neq 0$. Однак жодна з цих робіт не містить вичерпних і повністю правильних результатів. Заповнимо цю прогалину, виконавши вичерпну групову класифікацію

рівнянь з класу (3.61) і прокласифікувавши локальні закони збереження цих рівнянь.

Теорема 3.30. *Звичайна група еквівалентності $G_1^\sim$ класу (3.61) складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), & \tilde{x} &= \delta_1 x + \delta_2, & \tilde{u} &= \delta_3 u + \delta_4, \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_1}{T_t \delta_3} (\delta_3 f - \delta_4 g), & \tilde{g} &= \frac{\delta_1}{T_t \delta_3} g, & \tilde{h} &= \delta_1^2 h,\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$; $T = T(t)$ — довільна гладка функція з $T_t \neq 0$. Клас (3.61) нормалізований у звичайному сенсі.

Таким чином, кожне точкове перетворення між рівняннями з класу (3.61) індукується елементом групи $G_1^\sim$. Щоб визначити, які рівняння зі змінними коефіцієнтами вигляду (3.61) мають відповідників зі сталими коефіцієнтами, припускаємо, що в перетвореннях еквівалентності довільні елементи $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ та $\tilde{h}$ є сталими. Це приводить до твердження:

Твердження 3.31. *Рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (3.61) зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього ж класу за допомогою точкового перетворення тоді і тільки тоді, коли відповідні коефіцієнти f , g та h задовольняють умови*

$$\left(\frac{f}{g}\right)_t = h_t = 0,$$

тобто h є сталою, а функція f пропорційна до g .

Перетворення еквівалентності дозволяють спростити обчислення за рахунок зменшення кількості довільних елементів. Наприклад, можна виконати калібрування $g = 1$, використавши сім'ю точкових перетворень

$$\tilde{t} = \int g(t) dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u, \quad (3.62)$$

параметризованих довільним елементом g і пов'язаних з перетвореннями еквівалентності з групи $G_1^\sim$. Тоді інші довільні елементи $\tilde{f}(\tilde{t}) = f(t)/g(t)$

та $\tilde{h}(\tilde{t}) = h(t)$. Тут і далі інтеграл від t слід розуміти як деяку фіксовану первісну.

Отже, без обмеження загальності можна розглядати лише клас

$$u_t + f(t)u_x + uu_x + h(t)u_{xt} = 0. \quad (3.63)$$

Оскільки клас (3.61) є нормалізованим, групу еквівалентності його підкласу (3.63) можна знайти як підгрупу групи $G_1^\sim$, елементи якої зберігають калібрування $g = 1$.

Наслідок 3.32. *Клас (3.63) є нормалізованим у звичайному сенсі. Його звичайна група еквівалентності $G_2^\sim$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \frac{\delta_1}{\delta_3}t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3u + \delta_4, \quad \tilde{f} = \delta_3f - \delta_4, \quad \tilde{h} = \delta_1^2h,$$

де δ_j , $j = 0, \dots, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1\delta_3 \neq 0$.

У класі (3.63) немає рівнянь з істинно змінними коефіцієнтами, які зводяться точковими перетвореннями до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з цього ж класу.

3.4.1. Ліївські симетрії. Для розв'язання задачі групової класифікації використаємо метод відображення між класами, запропонований у [309]. Цей метод вже успішно застосовано до кількох класів нелінійних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад, [306]).

Клас (3.61) можна відобразити в аналогічний клас диференціальних рівнянь з частинними похідними третього порядку

$$u_t + uu_x + h(t)u_{xt} = l(t), \quad h \neq 0. \quad (3.64)$$

Відображення реалізується сім'єю точкових перетворень

$$\tilde{t} = \int g(t)dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + \frac{f(t)}{g(t)}, \quad (3.65)$$

параметризованих двома довільними елементами класу (3.61). Довільні елементи в рівняннях-образах набувають значень (тільки в (3.64) опущено) $\tilde{h}(\tilde{t}) = h(t)$, $l(\tilde{t}) = \frac{1}{g(t)} \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right)_t$. Відповідно до методу відображення між

класами, спочатку класифікуємо ліївські симетрії класу-образу (3.64), а потім використаємо сім'ю точкових перетворень (3.65), щоб поширити результат на початковий клас (3.61).

Щоб ефективно розв'язати задачу групової класифікації для класу (3.64), допустимі перетворення в цьому класі шукаємо прямим методом. Виявляється, такі перетворення вичерпуються перетвореннями зі звичайної групи еквівалентності цього класу.

Теорема 3.33. *Звичайна група еквівалентності $G_3^\sim$ класу (3.64) складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \frac{\delta_1}{\delta_3}t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3u, \quad \tilde{h} = \delta_1^2h, \quad \tilde{l} = \frac{\delta_3^2}{\delta_1}l,$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі, причому $\delta_1\delta_3 \neq 0$. Клас (3.64) є нормалізованим у звичайному сенсі.

Використовуючи класичний інфінітезимальний метод Лі, отримаємо повну групову класифікацію рівнянь з класу (3.64). Результати сформулюємо у вигляді твердження.

Теорема 3.34. *Ядром максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (3.64) є одновимірна алгебра $\langle \partial_x \rangle$. Усі можливі $G_3^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності вичерпуються випадками 1–4 таблиці 3.10.*

Зауваження 3.35. Найбільш загальні вигляди функцій h та l , що відповідають рівнянням з класу (3.64) з розширеннями ліївської симетрії:

1. $h = \lambda_1(\varepsilon t + \kappa)^\rho$, $l = \lambda_2(\varepsilon t + \kappa)^{\frac{\rho-4}{2}}$:
 $A^{\max} = \langle \partial_x, 2(\varepsilon t + \kappa)\partial_t + \varepsilon\rho x\partial_x + \varepsilon(\rho - 2)u\partial_u \rangle$;
2. $h = \lambda_1 e^{\sigma t}$, $l = \lambda_2 e^{\frac{1}{2}\sigma t}$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 2\partial_t + \sigma x\partial_x + \sigma u\partial_u \rangle$;
3. $h = \lambda_1$, $l = \lambda_2$: $A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t \rangle$;
4. $h = \lambda_1$, $l = 0$: $A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t, t\partial_t - u\partial_u \rangle$.

Тут λ_1 , λ_2 , ε , κ та ρ — довільні сталі, причому $\lambda_1\sigma\varepsilon \neq 0$. Крім того, у випадку 1 $(\rho, \lambda_2) \neq (0, 0)$, а у випадку 3 $\lambda_2 \neq 0$. Змінюючи довільні сталі λ_1 та λ_2 , множину значень сталої ε можна звузити до ± 1 .

Табл. 3.10: Групова класифікація класу (3.64) з точністю до $G_3^\sim$ -еквівалентності.

№	$h(t)$	$l(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\lambda t^{\frac{\rho-4}{2}}$	$\partial_x, 2t\partial_t + \rho x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	εe^t	$\lambda e^{\frac{1}{2}t}$	$\partial_x, 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
3	ε	1	∂_x, ∂_t
4	ε	0	$\partial_x, \partial_t, t\partial_t - u\partial_u$

Тут ρ та λ — довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_3^\sim$. У випадку 1 $(\rho, \lambda) \neq (0, 0)$.

У наступному прикладі показано, як відновити групову класифікацію класу (3.61), використавши результати, отримані для класу (3.64).

Розглянемо випадок 1 таблиці 3.10, розширений перетвореннями еквівалентності з $G_3^\sim$, тобто перший випадок, наведений у зауваженні 3.35, де $\tilde{h} = \lambda_1(\varepsilon\tilde{t} + \kappa)^\rho$, $l = \lambda_2(\varepsilon\tilde{t} + \kappa)^{\frac{\rho-4}{2}}$. Введемо позначення $T := \int g(t)dt$. Оскільки $\tilde{t} = T$ та $l(T) = (f/g)_t/g$, маємо $(f/g)_t = \lambda_2 g(t)(\varepsilon T + \kappa)^{\frac{\rho-4}{2}}$. Тоді

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_2 g(t) \left(\frac{2}{\varepsilon(\rho-2)} (\varepsilon T + \kappa)^{\frac{\rho-2}{2}} + \lambda_3 \right), & \text{якщо } \rho \neq 2, \\ \lambda_2 g(t) \left(\frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon T + \kappa) + \lambda_3 \right), & \text{якщо } \rho = 2. \end{cases}$$

Після перепозначення сталих λ_i , $i = 1, 2, 3$, отримаємо, відповідно, випадки 1 і 2 таблиці 3.12. Для знаходження відповідних операторів ліівської симетрії необхідно виконати заміну змінних $\tilde{t} = T$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u + \mu_2(\varepsilon T + \kappa)^{\frac{\rho-2}{2}} + \mu_3$ (відповідно, $\tilde{u} = u + \mu_2 \ln(\varepsilon T + \kappa) + \mu_3$ у випадку 2) у виразах для операторів $X_1 = \partial_{\tilde{x}}$ та $X_2 = 2(\varepsilon\tilde{t} + \kappa)\partial_{\tilde{t}} + \varepsilon\rho\tilde{x}\partial_{\tilde{x}} + \varepsilon(\rho-2)\tilde{u}\partial_{\tilde{u}}$. Слід зазначити, що образи двох різних нееквівалентних випадків розширень ліівської симетрії в класі (3.61) (випадки 1 і 2 таблиці 3.11) належать до одного й того ж випадку розширень ліівської симетрії для класу (3.64) (випадок 1 таблиці 3.10).

Інші випадки розглядаються аналогічно.

Теорема 3.36. *Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу (3.63) — це одновимірна алгебра $\langle \partial_x \rangle$. Усі можливі $G_2^\sim$ -не-*

Табл. 3.11: Групова класифікація класу (3.63) з точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності.

№	$h(t)$	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\lambda t^{\frac{\rho-2}{2}}$	$\partial_x, 2t\partial_t + \rho x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	εt^2	$\ln t$	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x - \partial_u$
3	εe^t	$\lambda e^{\frac{1}{2}t}$	$\partial_x, 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
4	ε	t	$\partial_x, \partial_t - \partial_u$
5	ε	0	$\partial_x, \partial_t, t\partial_t - u\partial_u$

Тут ρ та λ — довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_2^\sim$. У випадку 1 $(\rho, \lambda) \neq (0, 0)$.

Табл. 3.12: Групова класифікація класу (3.61) без використання еквівалентності.

№	$h(t)$	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	$\mu_1(\varepsilon T + \kappa)^\rho$	$\mu_2 g(\varepsilon T + \kappa)^{\frac{\rho-2}{2}} + \mu_3 g$	$\partial_x, \frac{2}{g}(\varepsilon T + \kappa)\partial_t + \varepsilon \rho x\partial_x + \varepsilon(\rho-2)(u + \mu_3)\partial_u$
2	$\mu_1(\varepsilon T + \kappa)^2$	$\mu_2 g \ln(\varepsilon T + \kappa) + \mu_3 g$	$\partial_x, \frac{1}{g}(\varepsilon T + \kappa)\partial_t + \varepsilon x\partial_x - \varepsilon \mu_2 \partial_u$
3	$\mu_1 \exp(\sigma T)$	$\mu_2 g \exp(\frac{1}{2}\sigma T) + \mu_3 g$	$\partial_x, \frac{2}{g}\partial_t + \sigma x\partial_x + \sigma(u + \mu_3)\partial_u$
4	μ_1	$\mu_2 g T + \mu_3 g$	$\partial_x, \frac{1}{g}\partial_t - \mu_2 \partial_u$
5	μ_1	$\mu_3 g$	$\partial_x, \frac{1}{g}\partial_t, \frac{T}{g}\partial_t - (u + \mu_3)\partial_u$

Тут g — довільна гладка функція, що не має нулів; $T = \int g(t) dt$; $\varepsilon = \pm 1$; μ_1, μ_2, μ_3, ν та ρ — довільні сталі, що задовольняють умову $\mu_1 \lambda \neq 0$. У випадку 1 $\rho \mu_2 \neq 0$; у випадку 4 $\mu_2 \neq 0$.

еквівалентні випадки розширення лівської симетрії вичерпуються випадками 1–5 таблиці 3.11.

Наслідок 3.37. Групова класифікація класу (3.61) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності приводить до списку, наведеного в таблиці 3.10, де довільний елемент g вважається рівним 1.

Щоб отримати класифікаційний список для класу (3.61), де вигляди

довільних елементів не спрощено перетвореннями еквівалентності, застосуємо перетворення (3.62) в поєднанні з перетвореннями з групи еквівалентності $G_2^\sim$ до рівнянь вигляду (3.63) з f та h , наведеними у таблиці 3.10. Базисні елементи відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності отримано тими ж перетвореннями. Результат (після перепозначення сталих) наведено в таблиці 3.12. Детальний алгоритм *підходу*, що ґрунтується на еквівалентності для отримання найбільш загальних виглядів довільних елементів і базисних елементів відповідних максимальних алгебр ліївської інваріантності можна знайти в [299].

Порівнюючи результати [217] зі списком у таблиці 3.11, приходимо до висновку, що наведені в [217] розширення ліївської симетрії є частковими випадками випадків 1–5 таблиці 3.11 для деяких фіксованих значень довільного елемента g . Наприклад, випадки 4 і 10 класифікаційного списку [217, табл. 1] отримано за допомогою тривимірних максимальних алгебр ліївської симетрії. Ці випадки є частковими випадками випадку 5 таблиці 3.11 при $g = g_0 = \text{const}$ та $g = g_0 e^{kt}$.

3.4.2. Закони збереження. Прокласифікуємо (локальні) закони збереження рівнянь з класу (3.61), застосовуючи найбільш прямий метод, що ґрунтується на визначенні законів збереження [43, 44, 235].

Класифікація локальних законів збереження рівнянь з класу (3.61):

Випадок 0. Кожне рівняння з класу (3.61) допускає “природний” закон збереження зі сталою характеристикою $\lambda^1 = 1$. Відповідні густина і потік

$$F^1 = u, \quad G^1 = f(t)u + \frac{1}{2}g(t)u^2 + h(t)u_{tx}.$$

Для загальних значень довільних елементів f , g та h пов’язаний з ними простір законів збереження є одновимірним.

Випадок 1. Якщо довільні елементи задовольняють умову $((1/h)_t/g)_t = 0$, а отже й $h(t) = (\rho_1 \int g(t)dt + \rho_2)^{-1}$, де ρ_1 та ρ_2 — сталі, причому $(\rho_1, \rho_2) \neq (0, 0)$, то простір законів збереження відповідного рівняння (3.61) є щонайменше двовимірним. Другий основний закон збереження

можна вибрати так, щоб він мав характеристику, густину і потік

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{u}{h} - \rho_1 \left(x - \int f(t) dt \right), \quad F^2 = \frac{u^2}{2h(t)} - \frac{u_x^2}{2} - \rho_1 \left(x - \int f(t) dt \right) u, \\ G^2 &= \frac{g(t)}{3h(t)} u^3 + \frac{f(t)}{2h(t)} u^2 + uu_{tx} + \rho_1 h(t) u_t \\ &\quad - \rho_1 \left(x - \int f(t) dt \right) \left(f(t) u + \frac{1}{2} g(t) u^2 + h(t) u_{tx} \right),\end{aligned}$$

відповідно, де $(1/h)_t/g = \rho_1 = \text{const}$.

Точкові перетворення з сім'ї $\tilde{t} = \rho_1 \int g(t) dt + \rho_2$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u/\rho_1$, пов'язані з групою $G_1^\sim$, зводять кожне рівняння цього випадку з $\rho_1 \neq 0$ до рівняння вигляду $u_t + f(t)u_x + uu_x + t^{-1}u_{txx} = 0$ (тільки опущено).

Випадок 2. Ще один випадок із принаймні двовимірними просторами законів збереження задається довільними елементами, що задовольняють умову $((f/g)_t/g)_t = 0$, тобто $f(t) = (\sigma_1 \int g(t) dt + \sigma_2) g(t)$, де σ_1 та σ_2 — довільні сталі. Другий основний закон збереження можна вибрати так, щоб він мав характеристику, густину і потік

$$\begin{aligned}\lambda^3 &= W^2 - 2\sigma_1 x + 2\frac{h}{g}u_{tx}, \quad F^3 = \frac{1}{3}W^3 - 2\sigma_1 xu - \frac{1}{3}\frac{f(t)^3}{g(t)^3}, \\ G^3 &= \frac{h(t)}{g(t)}W_t^2 + \frac{h(t)^2}{g(t)}u_{tx}^2 + h(t)W^2u_{tx} - 2\sigma_1 h(t)xu_{tx} \\ &\quad - 2\sigma_1 f(t)xu - \sigma_1 g(t)xu^2 + \frac{g(t)}{4}W^4,\end{aligned}$$

відповідно, де $W = u + f(t)/g(t)$, $(f/g)_t/g = \sigma_1 = \text{const}$.

Точкові перетворення з сім'ї $\tilde{t} = \sigma_1 \int g(t) dt + \sigma_2$, $\tilde{x} = \sigma_1 x$, $\tilde{u} = u$, пов'язані з групою $G_1^\sim$, зводять будь-яке рівняння цього випадку з $\sigma_1 \neq 0$ до вигляду $u_t + tu_x + uu_x + h(t)u_{txx} = 0$ (тільки опущено).

Випадок 3. Максимальна розмірність просторів законів збереження для рівнянь з класу (3.61) дорівнює трьом і досягається при перетині випадків 1 і 2, де довільні елементи задовольняють обидва обмеження $((f/g)_t/g)_t = 0$ та $((1/h)_t/g)_t = 0$. Тоді для кожного з просторів базис складається з законів збереження з характеристиками λ^1 , λ^2 та λ^3 і збе-

режних струмів (F^1, G^1) , (F^2, G^2) та (F^3, G^3) . Застосувавши перетворення (3.62), відповідне рівняння можна звести до вигляду

$$u_t + (\sigma_1 t + \sigma_2)u_x + uu_x + (\rho_1 t + \rho_2)^{-1}u_{txx} = 0.$$

За допомогою перетворень з групи $G_2^\sim$ можливе подальше спрощення. Наприклад, якщо $\sigma_1 \neq 0$ або $\rho_1 \neq 0$, одну з лінійних комбінацій (відповідно, $\sigma_1 t + \sigma_2$ або $\rho_1 t + \rho_2$) можна покласти рівною t .

Добре вивчений підвипадає випадку 3 складається з рівнянь зі сталими коефіцієнтами, для яких $\rho_1 = \sigma_1 = 0$ [53, 105, 234]. Кожне рівняння вигляду (3.61) зі сталими f , g та h має три лінійно незалежні закони збереження з характеристиками 1, u та $(u + f/g)^2 + 2hu_{tx}/g$. Відповідні густини і потоки

$$\begin{aligned}\tilde{F}^1 &= u, & \tilde{G}^1 &= fu + \frac{g}{2}u^2 + hu_{tx}, \\ \tilde{F}^2 &= \frac{u^2}{2} - h\frac{u_x^2}{2}, & \tilde{G}^2 &= \frac{f}{2}u^2 + \frac{g}{3}u^3 + huu_{tx}, \\ \tilde{F}^3 &= \frac{1}{3}\left(u + \frac{f}{g}\right)^3, & \tilde{G}^3 &= \frac{h}{g}u_t^2 + \frac{h^2}{g}u_{tx}^2 + h\left(u + \frac{f}{g}\right)^2 u_{tx} + \frac{g}{4}\left(u + \frac{f}{g}\right)^4.\end{aligned}$$

З точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності будь-яке рівняння зі сталими коефіцієнтами з класу (3.61) можна відобразити в рівняння $u_t = uu_x + \varepsilon u_{xxt}$, де $\varepsilon = \operatorname{sgn} h = \pm 1$. Тоді характеристики та компоненти збережених струмів вищезазначених законів збереження набувають вигляду (пор. [154, р. 195])

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= 1, & F^1 &= u, & G^1 &= -\frac{1}{2}u^2 - \varepsilon u_{tx}, \\ \lambda^2 &= \varepsilon u, & F^2 &= \frac{u^2}{2} + \varepsilon \frac{u_x^2}{2}, & G^2 &= -\frac{1}{3}u^3 - \varepsilon uu_{tx}, \\ \lambda^3 &= u^2 + 2\varepsilon u_{tx}, & F^3 &= \frac{1}{3}u^3, & G^3 &= \varepsilon u_t^2 - u_{tx}^2 - \varepsilon u^2 u_{tx} - \frac{1}{4}u^4.\end{aligned}$$

Результати щодо законів збереження виявилися цілком очікуваними і водночас нетривіальними. Вони природним чином узагальнюють відомі

результати для рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі сталими коефіцієнтами, але потребують завершення найбільш значущої та складної частини доведення, де аналогічно до [105] визначається верхня межа порядку законів збереження.

3.5. Застосування групоїдів еквівалентності в дослідженні інтегровності

З кінця 1960-х років спостерігається постійний інтерес до вивчення точно-розв'язних (інтегровних) диференціальних рівнянь з частинними похідними. Так, у роботі [125] було запропоновано метод оберненої задачі розсіяння, і застосовано його для знаходження солітонних розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза. Поняття солітону було запропоновано раніше в роботі [337]. У роботі [216] було показано, що рівняння Кортевега–де Фріза володіє нескінченним набором законів збереження як завгодно високих порядків, і ця властивість виявилася типовою для інтегровних рівнянь. У роботі [142] було запропоновано новий прямий метод (білінійний метод Хіרותи) для знаходження багатосолітонних розв'язків інтегровних нелінійних еволюційних рівнянь. На відміну від методу оберненої задачі розсіяння, білінійний метод Хіרותи є алгебраїчним, а не аналітичним. Ці та інші методи були потім застосовані до широкого кола інтегровних рівнянь [281].

Ф. Калоджеро зазначав у роботі [82], що інтегровні рівняння можна розділити на ті, які можна лінеаризувати за допомогою відповідної *заміни змінних* (C -інтегровні рівняння) і ті, що інтегруються методом оберненої задачі розсіяння (S -інтегровні рівняння).

Серед C -інтегровних рівнянь є, наприклад, відоме рівняння Бюргерса $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ [81], яке лінеаризується до рівняння теплопровідності за допомогою перетворення Коула–Хопфа [94, 144], рівняння Шарма–Тассо–Олвера $u_t + u_{xxx} + 3u^2u_x + 3u_x^2 + 3uu_{xx} = 0$ [233, 282],

яке є другим членом ієрархії Бюргерса, рівняння u^{-2} -дифузії (рівняння Фуджити–Сторма) $u_t = (u^{-2}u_x)_x + au$ [69, 291], рівняння Фокаса–Йортсоса $u_t = (u^{-2}u_x)_x + au^{-2}u_x$ [111, 292]. Додаткові приклади в розмірності 1+1 можна знайти в роботі [82].

S -інтегровні рівняння в розмірності 1+1 включають рівняння Кортевега–де Фріза і модифіковані рівняння Кортевега–де Фріза, рівняння Гарднера (комбіноване рівняння Кортевега–де Фріза) $u_t + uu_x + u^2u_x + u_{xxx} = 0$ [215], циліндричне рівняння Кортевега–де Фріза $u_t = u_{xxx} + 6uu_x - \frac{1}{2t}u$ [209], рівняння Гаррі Дима $u_t = u^3u_{xxx}$ [187], рівняння синус-Гордона $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$, і т.п. Дивись інші приклади S -інтегровних рівнянь, наприклад, у енциклопедії [281].

Більшість інтегровних диференціальних рівнянь з частинними похідними, досліджені з точки зору теорії інтегровності, є рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Однак багато модельних рівнянь, важливих для застосувань, мають коефіцієнти, що явно залежать від незалежних змінних. Наприклад, узагальнені рівняння Бюргерса, що описують поширення слабо нелінійних акустичних хвиль під впливом термов'язкої дифузії мають вигляд $u_t + uu_x = g(t)u_{xx}$ при $g \neq 0$ [139] (ці рівняння не є S -інтегровними, якщо g не є сталою). Рівняння Кортевега–де Фріза і кубічне рівняння Шредінгера з залежними від часу коефіцієнтами

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0 \quad \text{і} \quad iu_t + f(t)u_{xx} + g(t)|u|^2u = 0, \quad (3.66)$$

також зустрічаються в різних застосуваннях [129, 130]. Тут f, g — гладкі функції змінної t , що не мають нулів.

Останніми роками опубліковано багато робіт, присвячених дослідженню диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Багато з них присвячено застосуванню тесту Пенлеве для виокремлення підкласів інтегровних рівнянь з класів рівнянь зі змінними коефіцієнтами, побудова законів збереження, пар Лакса, а також знаходження точних солітонних розв'язків за допомогою білінійного методу Хіרותи. Оскільки іноді моделі зі змінними коефіцієнтами досить складні,

а число змінних коефіцієнтів варіюється від одного до п'яти або навіть до десяти в деяких випадках, широко використовуються пакети символьних обчислень для виконання цих задач. Однак у багатьох роботах нехтують еквівалентністю між рівняннями в досліджуваному класі, див. обговорення в роботі [264]. Хоча навіть в піонерських роботах по точнорозв'язним моделям було показано, що, якщо інтегровне рівняння пов'язане з іншим рівнянням певною зміною змінних (точковою або неточною), то останнє рівняння також є інтегровним. Класичними прикладами є зв'язок між рівнянням Кортевега–де Фріза і модифікованим рівнянням Кортевега–де Фріза через перетворення Міури, звідність рівняння Гарднера до модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза [215], а також циліндричного рівняння Кортевега–де Фріза до класичного рівняння Кортевега–де Фріза [171, 209]. Інші приклади наведено в роботі [172]. Показано, що рівняння Кортевега–де Фріза і нелінійне рівняння Шредінгера з залежними від часу коефіцієнтами (3.66) проходять тест Пенлеве тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти f і g задовольняють умови $g(t) = f(t)(a_1 \int^t f(s) ds + a_0)$ (відповідно. $g(t) = f(t)/(a_1 \int^t f(s) ds + a_0)$), де a_1, a_0 — сталі, причому $a_1^2 + a_0^2 \neq 0$. Ці умови співпадають з умовами звідності рівнянь (3.66) до їх аналогів зі сталими коефіцієнтами, отриманими в [129, 130].

Інший спосіб побудови інтегровних моделей зі змінними коефіцієнтами з членів інтегровних ієрархій зі сталими коефіцієнтами був представлений у [114, теорема 3.1]. Будь-яка “лінійна суперпозиція” членів інтегровної еволюційної ієрархії з довільними коефіцієнтами залежними від часу виявляється також інтегровною.

Знання допустимих точкових перетворень в певному класі диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, а також умов звідності таких рівнянь до рівнянь зі сталими коефіцієнтами дозволяють отримати точні розв'язки, закони збереження й інші подібні об'єкти для рівнянь зі змінними коефіцієнтами простішим способом, ніж шляхом безпосередніх обчислень. Проілюструємо це на прикладі класу

рівнянь типу Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами.

3.5.1. Групоїди еквівалентності еволюційних рівнянь n -го порядку. Розглянемо клас $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь n -го порядку

$$u_t = H(t, x, u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (3.67)$$

де $n \geq 2$, $u_j \equiv \partial^j u / \partial x^j$, $j = 1, 2, \dots$, і $u_0 \equiv u$. Використаємо такі позначення для похідних: $u_x = u_1$, $u_{xx} = u_2$, $u_{xxx} = u_3$, $\dots$. Загалом, нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною, наприклад, $u_t \equiv \partial u / \partial t$, $H_{u_i} \equiv \partial H / \partial u_i$. Для наведеного вище класу набір довільних елементів θ складається з однієї довільної гладкої функції H своїх аргументів. Допоміжні рівняння на H для виокремлення еволюційних рівнянь серед всіх двовимірних рівнянь з частинними похідними n -го порядку утворюють систему

$$H_{u_{it}} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad H_{u_{itt}} = 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \quad \dots,$$

яка означає, що довільний елемент H не залежить від похідних по u , що включають диференціювання по t . Умова рівності порядку рівняння до n призводить до допоміжної нерівності $H_{u_n} \neq 0$. Для квазілінійних еволюційних рівнянь довільний елемент H є лінійним по похідним вищого порядку u_n , тобто підклас $\mathcal{E}_{ql}$ таких рівнянь виділяється з усього класу (3.67) додатковим допоміжним рівнянням $H_{u_n u_n} = 0$. Представляючи H в формі $H = F u_n + G$ і інтерпретуючи $F = F(t, x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ та $G = G(t, x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ як нові довільні елементи, ми перепараметризуємо підклас $\mathcal{E}_{ql}$. У термінах F та G система допоміжних рівнянь і нерівностей для підкласу $\mathcal{E}_{ql}$ буде

$$\begin{aligned} F_{u_{it}} &= G_{u_{it}} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ F_{u_{itt}} &= G_{u_{itt}} = 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \quad \dots, \\ F_{u_n} &= G_{u_n} = 0, \quad F \neq 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Наклавши додаткові допоміжні рівняння на H (відповідно на F та G), можна побудувати дерево вкладених підкласів еволюційних рівнянь.

Ми розглядаємо ланцюжок вкладених нормалізованих класів еволюційних рівнянь. Добре відомо фольклорне твердження [210], що будь-яке контактне перетворення $\mathcal{T}$, що пов'язує два фіксовані рівняння $u_t = H$ та $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{H}$ з класу (3.67), має вигляд $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{x} = X(t, x, u, u_x)$, $\tilde{u} = U(t, x, u, u_x)$. У порівнянні із загальним контактним перетворенням в просторі з координатами (t, x, u) особливість полягає в тому, що компонент перетворення для t залежить тільки від t , а компонент перетворення для всіх змінних не залежить від u_t . Припущення про контактність і невідродженість для $\mathcal{T}$ зводяться до умов $(U_x + U_u u_x)X_{u_x} = (X_x + X_u u_x)U_{u_x}$ та $T_t \neq 0$, $\text{rank } \partial(X, U)/\partial(x, u, u_x) = 2$, відповідно. Стандартне продовження $\mathcal{T}$ до похідних $u_1, \dots, u_n$ виконується з використанням правила ланцюжка, яке дає $\tilde{u}_{\tilde{x}} = V(t, x, u, u_x)$, де $V = (U_x + U_u u_x)/(X_x + X_u u_x)$ або $V = U_{u_x}/X_{u_x}$ якщо $X_x + X_u u_x \neq 0$ або $X_{u_x} \neq 0$, відповідно, і $\tilde{u}_i \equiv \partial^i \tilde{u}/\partial \tilde{x}^i = ((1/D_x X)D_x)^{i-1} V$, $i = 2, \dots, n$. Тут $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \dots$ оператор повного диференціювання по змінній x . Можливість одночасного зникнення $X_x + X_u u_x$ та X_{u_x} виключається припущенням невідродженості. Більш того, зі спільного припущення про контактність і невідродженість випливає $(X_u, U_u) \neq (0, 0)$. Перетворений довільний елемент $\tilde{H}$ дорівнює

$$\tilde{H} = \frac{U_u - X_u V}{T_t} H + \frac{U_t - X_t V}{T_t}.$$

Кожне з наведених вище контактних перетворень відображає весь клас (3.67) на себе. Отже, його продовження до довільного елемента H належить групі контактної еквівалентності $G_c^\sim$ класу (3.67), і будь-який елемент $G_c^\sim$ отримується з нього таким чином. Іншими словами, група еквівалентності $G_c^\sim$ породжує весь групоїд контактної еквівалентності $\mathcal{G}_c^\sim$ класу (3.67), тобто цей клас є контактно-нормалізованим, що, очевидно, має на увазі його нормалізованість також відносно точкових перетворень. Якщо $n \geq 3$, підклас $\mathcal{E}_{\text{ql}}$ квазілінійних еволюційних рівнянь n -го

порядку має ту ж групу контактної еквівалентності і також є контактно-нормалізованим.

Кожен наступний підклас виділяється з попереднього шляхом послідовного додавання в систему (3.68) більшого числа рівнянь, зберігаючи властивість звичайної нормалізованості. Додаткові обмеження $F_{u_2} = \dots = F_{u_{n-1}} = 0$ (тобто, $F = F(t, x, u, u_x)$) призводять до принципового звуження групоїда еквівалентності відповідного підкласу: його контактна група еквівалентності співпадає з його точковою групою еквівалентності. Тому при розгляді рівнянь цього підкласу досить використовувати тільки точкову еквівалентність. Накладаючи додаткові обмеження $F_{u_1} = 0$, ми отримуємо підклас, в якому x -компонент будь-якого перетворення еквівалентності не включає u , $X_u = 0$, тобто все перетворення еквівалентності зберігають волокна. Група еквівалентності підкласу рівнянь при F , що залежать тільки від t , $F = F(t)$, складається з перетворень, які задовольняють рівняння $X_{xx} = 0$. Нарешті, для підкласу рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= F(t)u_n + G(t, x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad n \geq 2, \\ F &\neq 0, \quad G_{u_i u_{n-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3.69)$$

будь-яке перетворення еквівалентності є лінійним по u , оскільки $U_{uu} = 0$. Зібравши всі визначальні рівняння для допустимих перетворень в класі (3.69), які вичерпуються наведеними вище рівняннями $X_u = X_{xx} = U_{uu} = 0$, можна стверджувати, що його звичайна група точкової еквівалентності складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0(t), \quad \tilde{u} = U^1(t, x)u + U^0(t, x), \\ \tilde{F} &= \frac{(X^1)^n}{T_t} F, \quad \tilde{G} = \frac{1}{T_t} \left[U^1 G - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} U_{(n-k)}^1 u^{(k)} + U_{(n)}^0 \right) F \right. \\ &\quad \left. + U_t^1 u + U_t^0 - \frac{X_t^1 x + X_t^0}{X^1} ((U^1 u)_x + U_x^0) \right], \end{aligned} \quad (3.70)$$

де $T_t X^1 U^1 \neq 0$. Клас (3.69) нормалізований по відношенню до цієї групи.

3.5.2. Інтегровні підкласи в класі рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами. Розглянемо клас рівнянь типу Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + a(t)uu_{xxx} + b(t)u_xu_{xx} + c(t)u^2u_x + f(t)uu_x + g(t)u_{xxxxx} + h(t)u_{xxx} + m(t)u + n(t)u_x + k(t)xu_x = 0, \quad (3.71)$$

де функції a, b, c, f, g, h, m, n , і k — довільні гладкі функції часової змінної t при $g(a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$. Нещодавно були вивчені деякі підкласи цього класу, зокрема, в роботах [327, 334, 335].

Так, в [327] інтегровність рівнянь з класу (3.71) при $k = 0$ (і перепозначеними коефіцієнтами $f = d, g = l$ та $h = e$) було досліджено за допомогою тесту Пенлеве. Було виявлено, що такі рівняння є інтегровними по Пенлеве в наступних трьох випадках

- I. $b = a, c = \mu_1 a e^{\int m dt}, f = 2\mu_2 a, g = \frac{a}{5\mu_1} e^{-\int m dt}, h = \frac{\mu_2}{\mu_1} a e^{-\int m dt},$
- II. $b = 2a, c = \mu_1 a e^{\int m dt}, f = 2\mu_1 h e^{\int m dt}, g = \frac{3a}{10\mu_1} e^{-\int m dt},$
- III. $b = \frac{5}{2}a, c = \mu_1 a e^{\int m dt}, f = 2\mu_2 a, g = \frac{a}{5\mu_1} e^{-\int m dt}, h = \frac{\mu_2}{\mu_1} a e^{-\int m dt}.$

У всіх трьох випадках μ_1 та μ_2 — довільні сталими при $\mu_1 \neq 0$, функції a, m та n — довільні. У випадку II функція h також є довільною. Тут і далі інтеграл відносно t слід розуміти як фіксовану первісну. Для перших двох випадків побудовано N -солітонні розв'язки, тоді як у випадку III були представлені тільки одно- і двосолітонні розв'язки.

Той же підклас рівнянь при $k = 0$ було розглянуто раніше в [334]. Хоча було заявлено, що і тест Пенлеве, і відображення на повністю інтегровні аналоги зі сталими коефіцієнтами застосовувалися для виокремлення інтегровних випадків, N -солітонний розв'язок, перетворення Беклунда і пара Лакса було побудовано в цій роботі тільки для рівнянь з додатковими обмеженнями $a = b = 15g\nu e^{\int m dt}, c = 45g\nu^2 e^{2\int m dt}, f = h = 0$, де ν — ненульова стала ($\nu = 1/\rho$ в позначеннях [334]), що дає частинний підвипадок випадку I. Інші інтегровні випадки були пропущені.

У [335] такі об'єкти було побудовано для рівняння вигляду (3.71) при $f = h = 0$ (і перепозначеними коефіцієнтами $g = d$ та $k = l$) при обмеженнях $a = b = 15g\nu e^{\int(m-2k)dt}$, $c = 45g\nu^2 e^{2\int(m-2k)dt}$. Було також зазначено, що ці обмеження отримані як за допомогою аналізу Пенлеве, так і за допомогою відображення відповідних моделей зі змінними коефіцієнтами на їх повністю інтегровні аналоги зі сталими коефіцієнтами. Фактично, це розгляд просто поширює результати [334] на випадок ненульових k , хоча параметр k несуттєвий і його можна покласти рівним нулю за допомогою точкового перетворення.

Ми покажемо, що всі згадані випадки інтегровних рівнянь з класу (3.71) зводяться точковими перетвореннями до відомих інтегровних еволюційних рівнянь п'ятого порядку. Для досягнення цієї мети наводимо повний опис допустимих перетворень між рівняннями цього класу.

Теорема 3.38. *Розширена узагальнена група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.71) складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t) \left(u + \sigma e^{-\int m dt} \right), \\ \tilde{a} &= \frac{\beta^3}{\alpha_t \varphi} a, \quad \tilde{b} = \frac{\beta^3}{\alpha_t \varphi} b, \quad \tilde{c} = \frac{\beta}{\alpha_t \varphi^2} c, \quad \tilde{f} = \frac{\beta}{\alpha_t \varphi} \left(f - 2\sigma c e^{-\int m dt} \right), \\ \tilde{g} &= \frac{\beta^5}{\alpha_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} \left(h - \sigma a e^{-\int m dt} \right), \quad \tilde{m} = \frac{1}{\alpha_t} \left(m - \frac{\varphi_t}{\varphi} \right), \\ \tilde{n} &= \frac{\beta}{\alpha_t} \left(n + \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)_t - k \frac{\gamma}{\beta} + \sigma^2 c e^{-2\int m dt} - \sigma f e^{-\int m dt} \right), \\ \tilde{k} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(k + \frac{\beta_t}{\beta} \right).\end{aligned}\tag{3.72}$$

де α , β , γ , і φ пробігають множину гладких функцій від t , причому $\alpha_t \beta \varphi \neq 0$, і σ є довільною сталою. Ця група породжує повний групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу (3.71), тобто клас (3.71) є нормалізованим у розширеному узагальненому сенсі.

Повний доведення цієї теореми можна знайти в [313].

Наслідок 3.39. Підклас класу (3.71) при $fh = 0$ та $(a, c) \neq (0, 0)$ є нормалізованим відносно його звичайної групи еквівалентності, що складається з перетворень (3.72) при $\sigma = 0$.

Наслідок 3.40. Підклас класу (3.71) при $k = 0$ є нормалізованим відносно його розширеної узагальненої групи еквівалентності, яка містить перетворення (3.72) при $\beta = \text{const}$.

Наслідок 3.41. Будь-яке рівняння з класу (3.71) зводиться точковим перетворенням

$$\tilde{t} = \int g e^{-5 \int k dt} dt, \quad \tilde{x} = e^{-\int k dt} x - \int n e^{-\int k dt} dt, \quad \tilde{u} = e^{\int m dt} u \quad (3.73)$$

в рівняння з того ж класу при $g = 1$ та $m = n = k = 0$. Підклас класу (3.71), який виокремлений обмеженнями $g = 1$ та $m = n = k = 0$, є нормалізованим відносно його розширеної узагальненої групи еквівалентності $G_1^\sim$, що складається з перетворень (3.72) з $\beta_t = \varphi_t = 0$, $\alpha_t = \beta^5$ та $\gamma_t = \sigma \beta f - \sigma^2 \beta c$.

Перетворення з групи еквівалентності $G^\sim$ мають чудову структуру. Основною властивістю є те, що вони зберігають волокна (тобто компоненти перетворення, що відповідають незалежним змінним t та x , залежать тільки від цих змінних) і, крім того, лінійні по u . Додатковим бонусом є те, що компонент перетворення для t залежить тільки від t , а компонент перетворення для x є лінійним по x . Отже, всі дослідження щодо рівнянь з класу (3.71) в рамках теорії інтегровності можна реалізувати з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, яка співпадає для цього класу із загальною контактною (відповідно точковою) еквівалентністю, оскільки клас (3.71) є нормалізованим відносно $G^\sim$, з точки зору як контактних, так і точкових перетворень.

Розглянемо клас рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$u_t + A u u_{xxx} + B u_x u_{xx} + C u^2 u_x + u_{xxxxx} = 0, \quad (3.74)$$

де A , B та C є ненульовими сталими. З точністю до масштабних перетворень існують три нееквівалентних трійки (A, B, C) , такі що відповідні рівняння вигляду (3.74) є інтегровними. Це трійки $(10, 20, 30)$, $(15, 15, 45)$ та $(10, 25, 20)$ [214], які відповідно, дають

- рівняння Кортвега–де Фріза п'ятого порядку Лакса [202]

$$u_t + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x + u_{xxxxx} = 0; \quad (3.75)$$

- рівняння Савади–Котери [277] (еквівалентне рівнянню Кадрі–Додда–Гіббона [86])

$$u_t + 15uu_{xxx} + 15u_xu_{xx} + 45u^2u_x + u_{xxxxx} = 0; \quad (3.76)$$

- рівняння Каупа–Купершмідта [179]

$$u_t + 10uu_{xxx} + 25u_xu_{xx} + 20u^2u_x + u_{xxxxx} = 0. \quad (3.77)$$

Наслідок 3.42. Звичайна група еквівалентності $G_{\text{const}}^{\sim}$ класу (3.74) складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \beta^5 t + \delta, & \tilde{x} &= \beta x + \gamma, & \tilde{u} &= \frac{u}{\beta^2 \lambda}, \\ \tilde{A} &= \lambda A, & \tilde{B} &= \lambda B, & \tilde{C} &= \lambda^2 C. \end{aligned}$$

Тут β , γ , δ , і λ — довільні сталі при $\beta\lambda \neq 0$. Ця група породжує повний групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{\text{const}}^{\sim}$ класу (3.74), тобто клас (3.74) є нормалізованим в звичайному сенсі.

Зважаючи на це твердження, очевидно, наприклад, що рівняння Кадрі–Додда–Гіббона, в якому $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (30, 30, 180)$ подібне рівнянню Савади–Котери (3.76). Подібність між рівняннями здійснюється за допомогою масштабного перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = \frac{1}{2}u$.

Теорема 3.43. Рівняння з класу (3.71) подібне рівнянню зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.74) при $ABC \neq 0$ в тому і тільки в тому

випадку, якщо його коефіцієнти задовольняють умови

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{a}\right)_t &= \left(\frac{b^2}{cg}\right)_t = \left(\frac{f}{c}e^{\int m dt}\right)_t = 0, \\ \left(\frac{b}{g}\right)_t &= \frac{b}{g}(m - 2k), \quad af = 2ch. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Коефіцієнти всіх інтегровних рівнянь, які розглядаються в [327, 334, 335] (окрім сім'ї рівнянь [327] з коефіцієнтами, представленими у випадку II) задовольняють умови (3.78). Отже, ці рівняння подібні рівнянням зі сталими коефіцієнтами. А саме, рівняння [335]

$$\begin{aligned} u_t + 15g\Upsilon uu_{xxx} + 15g\Upsilon u_x u_{xx} + 45g\Upsilon^2 u^2 u_x + gu_{xxxx} \\ + mu + nu_x + kxu_x = 0, \end{aligned} \quad (3.79)$$

де $\Upsilon = \nu e^{\int (m-2k) dt}$ і ν є ненульовий сталою, відображається в рівняння Савади-Котери (3.76) перетворенням, яке відрізняється від (3.73) додатковим масштабуванням u на ν ,

$$\tilde{t} = \int g e^{-5 \int k dt} dt, \quad \tilde{x} = e^{-\int k dt} x - \int n e^{-\int k dt} dt, \quad \tilde{u} = \nu e^{\int m dt} u. \quad (3.80)$$

Те ж перетворення відображає рівняння (3.71) при $f = h = 0$ та a, b , і c задане

$$\begin{aligned} a = 10g\Upsilon, \quad b = 20g\Upsilon, \quad c = 30g\Upsilon^2 \quad \text{or} \\ a = 10g\Upsilon, \quad b = 25g\Upsilon, \quad c = 20g\Upsilon^2 \end{aligned}$$

в інтегровні рівняння зі сталими коефіцієнтами (3.75) або (3.77), відповідно. Таким чином, ці два інтегровних випадки були пропущені в [335].

Інше точкове перетворення вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{1}{5\mu_1} \int a e^{-\int m dt} dt, \quad \tilde{x} = x - \int \left(n - \frac{\mu_2^2}{\mu_1} a e^{-\int m dt} \right) dt, \\ \tilde{u} &= \kappa \left(e^{\int m dt} u + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \end{aligned}$$

при $\kappa = \mu_1/3$ (відповідно $\kappa = \mu_1/2$) відображає рівняння з класу (3.71) при $k = 0$ і іншими коефіцієнтами, які задовільняють умовам I (відповідно, III), в рівняння Савади–Котери (3.76) (відповідно, рівняння Каупа–Купершмідта (3.77)).

Рівняння (3.71) з $k = 0$ і коефіцієнтами, представленими у випадку II, зводяться до рівняння з змінними коефіцієнтами

$$u_t + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x + u_{xxxxx} + \psi(t)(6uu_x + u_{xxx}) = 0, \quad (3.81)$$

де $\psi(t) = \frac{10\mu_1}{3} \frac{h}{a} e^{\int m dt}$, шляхом перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{3}{10\mu_1} \int a e^{-\int m dt} dt, \\ \tilde{u} &= \frac{\mu_1}{3} \left(e^{\int m dt} u + \sigma \right), \quad \tilde{x} = x - \int n dt, \quad \tilde{u} = \frac{\mu_1}{3} e^{\int m dt} u. \end{aligned}$$

Рівняння (3.81) є інтегровним, оскільки воно являє собою “лінійну суперпозицію” з залежними від часу коефіцієнтами рівняння Кортевега–де Фріза п’ятого порядку Лакса (3.75) і класичного рівняння Кортевега–де Фріза $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, які є інтегровними і чиї відповідні еволюційні векторні поля комутують [114, теорема 3.1].

Використовуючи точкові перетворення, ми пояснили появу всіх інтегровних випадків, знайдених у [327, 334, 335], і виявили, що два інтегровних випадки були пропущені в [334, 335]. Отже всі ці інтегровні рівняння зі змінними коефіцієнтами можна знайти за допомогою перетворень еквівалентності.

3.5.3. Застосування точкових перетворень для знаходження пар Лакса. Коли встановлено подібність інтегровних рівнянь з класу (3.71) з добре відомими інтегровними рівняннями, подальший розгляд стає непотрібним, оскільки всі об’єкти, пов’язані з загальними інтегровними рівняннями класу (3.71), і їх властивості можна легко отримати з відповідних об’єктів класичних аналогічних рівнянь за допомогою цієї подібності.

Ми демонструємо цей висновок лише для пар Лакса, для яких особлива структура перетворень з $G^\sim$ є істотною, оскільки та ж сама процедура, наприклад, для симетрій, законів збереження і точних розв'язків, вже абсолютно умовна.

Рівняння Сави–Котери (3.76) допускає пари Лакса

$$\begin{aligned} L &= \partial_x^3 + 3u\partial_x, \\ P &= 9\partial_x^5 + 45u\partial_x^3 + 45u_x\partial_x^2 + 15(2u_{xx} + 3u^2)\partial_x; \\ L &= \partial_x^3 + 3u\partial_x + 3u_x, \\ P &= 9\partial_x^5 + 45u\partial_x^3 + 90u_x\partial_x^2 + 15(5u_{xx} + 3u^2)\partial_x + 30(u_{xxx} + 3uu_x). \end{aligned}$$

Здійснюючи перетворення (3.80) у відповідних спектральних задачах, $L\psi = \lambda\psi$, $\psi_t = P\psi$, ми виводимо відповідні пари Лакса для рівняння зі змінними коефіцієнтами (3.79)

$$\begin{aligned} L &= e^{3\int k dt}(\partial_x^3 + 3\Upsilon u\partial_x), \\ P &= 9g\partial_x^5 + 45g\Upsilon u\partial_x^3 + 45g\Upsilon u_x\partial_x^2 + (30g\Upsilon u_{xx} + 45g\Upsilon^2 u^2 - kx - n)\partial_x; \\ L &= e^{3\int k dt}(\partial_x^3 + 3\Upsilon u\partial_x + 3\Upsilon u_x), \\ P &= 9g\partial_x^5 + 45g\Upsilon u\partial_x^3 + 90g\Upsilon u_x\partial_x^2 \\ &\quad + (75g\Upsilon u_{xx} + 45g\Upsilon^2 u^2 - kx - n)\partial_x + 30g\Upsilon u_{xxx} + 90g\Upsilon^2 uu_x, \end{aligned}$$

відповідно. Тут і далі знову використаємо позначення $\Upsilon = \nu e^{\int (m-2k) dt}$ з ненульовою сталою ν .

Рівняння Каупа–Купершміда (3.77) допускає пару Лакса

$$\begin{aligned} L &= \partial_x^3 + 2u\partial_x + u_x, \\ P &= 9\partial_x^5 + 30u\partial_x^3 + 45u_x\partial_x^2 + 5(7u_{xx} + 4u^2)\partial_x + 10(u_{xxx} + 2uu_x). \end{aligned}$$

Використовуючи перетворення (3.80), можна вивести відповідну пару Лакса для рівняння

$$u_t + 10g\Upsilon uu_{xxx} + 25g\Upsilon u_x u_{xx} + 20g\Upsilon^2 u^2 u_x + gu_{xxxxx}$$

$$+ mu + nu_x + kxu_x = 0,$$

що має вигляд

$$\begin{aligned} L &= e^{3 \int k dt} (\partial_x^3 + 2\Upsilon u \partial_x + \Upsilon u_x), \\ P &= 9g \partial_x^5 + 30g \Upsilon u \partial_x^3 + 45g \Upsilon u_x \partial_x^2 \\ &\quad + (35g \Upsilon u_{xx} + 20g \Upsilon^2 u^2 - kx - n) \partial_x + 10g \Upsilon u_{xxx} + 20g \Upsilon^2 u u_x. \end{aligned}$$

Слід зазначити, що вищезгадані пари Лакса, які побудовані з використанням подібності з добре відомими інтегровними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, все ще пов'язані з ізоспектральними задачами, на відміну, наприклад, від пар Лакса, побудованих у [335] безпосередньо для рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Висновки. Як показали, перетворення еквівалентності добре вписуються у вивчення інтегровності диференціальне рівняння з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, де вони можуть використовуватися для декількох цілей:

- шукати несуттєві довільні елементи розглядуваного класу диференціальне рівняння з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами і калібрувати ці елементи у вибрані прості значення з самого початку;
- встановлювати подібність інтегровних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, які відокремлені від розглядуваного класу іншим методом (наприклад, тестом Пенлеве), з добре відомими (зазвичай зі сталими коефіцієнтами) інтегровними рівняннями; або, в більш загальному плані, вибрати канонічних представників в отриманому списку інтегровних рівнянь;
- перевірити перераховані інтегровні випадки, використовуючи встановлену подібність з раніше відомими інтегровними рівняннями;
- вивести всі об'єкти, що відносяться до виокремленого інтегровного рівняння, і їх властивості, з властивостей аналогічного добре вивче-

ного інтегровного рівняння; такі об'єкти включають в себе, зокрема, локальні симетрії, косиметрії, закони збереження, оператори рекурсії, перетворення Беклунда, точні розв'язки, розкладання Пенлеве, білінійні представлення і пари Лакса.

Розділ 4

Алгебраїчний метод групової класифікації і його розширення.

Групова класифікація пов'язана з пошуком вичерпного переліку нееквівалентних рівнянь з класу диференціальних рівнянь, що містять один або кілька довільних елементів. Спочатку вона була мотивована теоретичною фізикою, де традиційно ті рівняння, які допускають максимальну кількість симетрій серед рівнянь даного класу, дають найбільш багатобічню модель, що описує явища реального світу.

Математично, проблеми групової класифікації для класів диференціальних рівнянь були інтенсивно досліджені, починаючи з класифікацій Софуса Лі звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [206] і лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними [204]. Нещодавно був введений ряд нових методів групової класифікації, які включають в себе різновиди алгебраїчного методу [54, 102, 198, 240, 261] і вдосконалену модифікацію прямого методу, званого методом розгалуженого розщеплення [20, 56, 242]. Алгебраїчний метод групової класифікації довів свою ефективність, оскільки він ефективно застосовувався до класів диференціальних рівнянь з довільними елементами, які є функціями кількох аргументів.

Серед класів, розглянутих в літературі по груповій класифікації, найбільш помітними є класи $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, див., наприклад [1, 9, 23, 50, 51, 57, 71, 102, 126, 133, 147, 148, 154, 162, 210, 240–242, 258, 299, 303, 306, 309], і посилання в них. Таким чином, також не випадково, що в області інваріантної дискретизації, яка пов'язана з виведенням

чисельних схем для диференціальних рівнянь, що володіють тією ж симетрією, що і вихідне недискретизоване рівняння, в минулому розглядалися в основному еволюційні рівняння, див., наприклад, [59]. Що відрізняє еволюційні рівняння з точки зору симетрії, так це особлива роль часової змінної, яка аналогічна ролі параметра. Таким чином, часова складова будь-якого точкового або контактного перетворення між еволюційними рівняннями залежить тільки від часової змінної [184, 210]. Це значно спрощує процедуру класифікації.

Групова класифікація класів рівнянь мКдФ з залежними від часу коефіцієнтами $u_t + u^2 u_x + g(t) u_{xxx} + h(t) u = 0$, $g \neq 0$, проведена в розділі 4.1 стандартним алгебраїчним методом. Потім метод еквівалентності використовується для виконання групової класифікації споріднених класів мКдФ-подібних рівнянь. Доведено, що всі розглянуті класи є нормалізованими. Це дозволило нам формулювати результати класифікації трьома способами: до двох видів еквівалентності (які породжуються перетвореннями з відповідних груп еквівалентності і всіма допустимими точковими перетвореннями) і без використання еквівалентності. Побудовано також деякі точні розв'язки мКдФ-подібних рівнянь.

У розділі 4.2 ми поширюємо алгебраїчний метод групової класифікації на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Розширюючи і істотно узагальнюючи попередні результати про клас $(1+1)$ -вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь, ми вичерпно описуємо його групоїд еквівалентності. Тоді задача повної групової класифікації досліджуваного класу розв'язується з точністю як до звичайної, так і до загальної точкової еквівалентності. Розв'язання включає повну попередню групову класифікацію класу і побудова сингулярних розширень ліївської симетрії, не пов'язаних з підалгебрами алгебри еквівалентності. Повна попередня групова класифікація заснована на класифікації відповідних підалгебр всій нескінченновимірної алгебри еквівалентності, проекції яких кваліфікуються як максимальні розширення ядра алгебри інваріантності.

Попереднє дослідження ліївських симетрій в класі нелінійних рівнянь Дірака з двома просторовими змінними дається в розділі 4.3 з використанням деякої версії алгебраїчної техніки. Наведено список нелінійностей, для яких такі рівняння допускають одновимірне розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності. Побудовано деякі розв'язки досліджуваних рівнянь.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [299, 301, 305].

4.1. Ліївські симетрії та точні розв'язки рівнянь мКдФ зі змінними коефіцієнтами

У цьому розділі ми досліджуємо властивості ліївських симетрій та точні розв'язки рівнянь мКдФ зі змінними коефіцієнтами виду

$$u_t + u^2 u_x + g(t) u_{xxx} + h(t) u = 0, \quad (4.1)$$

де g і h — довільні гладкі функції змінної t , $g \neq 0$. З використанням перетворень еквівалентності функцію h завжди можна звести до нульового значення, тому вигляд h не впливає на результати групової класифікації. Отже, спочатку проведемо вичерпну групову класифікацію підкласу класу (4.1), виділеного умовою $h = 0$. Потім, використовуючи отриманий класифікаційний список і перетворення еквівалентності, даємо групову класифікацію вихідного класу (4.1).

Більш того, перетворення еквівалентності виявляються досить потужними, щоб представити групову класифікацію для набагато більш широкого класу рівнянь мКдФ зі змінними коефіцієнтами (3.20), де всі параметри є гладкими функціями змінної t , $fg \neq 0$, а параметри f, h, k і l задовольняють умові

$$2lf = k_t + kh - k \frac{f_t}{f}, \quad (4.2)$$

тобто рівнянням

$$u_t + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x + k(t)uu_x + \frac{1}{2f(t)}(\dot{k}(t) + k(t)h(t) - k(t)\dot{f}(t)/f(t)) = 0. \quad (4.3)$$

Цей результат може бути легко отриманий завдяки тому факту, що проблема групової класифікації для класу (3.20) може бути зведена до подібної задачі для класу (4.1) при $h = 0$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова (4.2). А саме, рівняння (3.20), коефіцієнти яких задовольняють (4.2), перетворюються в рівняння з класу (4.1) при $h = 0$ точковими перетвореннями (докладніше див. Зауваження 1). Рівняння з класу (3.20) важливі для застосувань і, зокрема, описують явище атмосферного блокування [293].

Зазначені вище класи диференціальних рівнянь є нормалізованими, тобто все допустимі точкові перетворення всередині цих класів породжуються перетвореннями з відповідних груп еквівалентності. Отже, немає ніяких додаткових перетворень еквівалентності між випадками списків класифікації, які побудовані з використанням відносин еквівалентності, пов'язаних з відповідними групами еквівалентності. Іншими словами, одні і ті ж списки представляють результати групової класифікації відповідних класів з точністю до загальної еквівалентності відносно точкових перетворень.

Нещодавно авторами [170] була отримана часткова групова класифікація класу (4.1) (замість h і g відповідно використовувалися позначення a і b). Причина невдачі полягала в ігноруванні можливості використання перетворень еквівалентності. Тому були виявлені лише деякі випадки розширень ліівської симетрії, а саме випадки при $h = \text{const}$ і $h = 1/t$.

У цьому розділі ми спочатку розв'язуємо задачу групової класифікації для класів (4.1) і (4.3) з точністю до відповідних груп еквівалентності. Потім, використовуючи отримані списки класифікації і перетворення еквівалентності, ми представляємо групові класифікації цих класів без спрощення як рівнянь, що допускають розширення алгебри ліівських симет-

рій, так і самих цих алгебр перетвореннями еквівалентності. Розширені списки класифікації можуть бути корисні для застосувань і зручні для порівняння з результатами [170].

Потім ми покажемо, як перетворення еквівалентності можуть бути використані для побудови точних розв'язків для тих рівнянь з класу (4.3) і його підкласу (4.1), які зводяться до стандартного рівняння мКдФ.

4.1.1. Перетворення еквівалентності. Ми знаходимо групу еквівалентності $G_1^\sim$ класу (4.1), використовуючи результати, отримані в [264] для більш загального класу рівнянь мКдФ зі змінними коефіцієнтами. А саме, в [264] була побудована ієрархія нормалізованих підкласів загальних еволюційних рівнянь третього порядку. У ній знайдена група еквівалентності для нормалізованого класу рівнянь мКдФ зі змінними коефіцієнтами (3.20), а також критерій звідності рівнянь з цього класу до стандартного рівняння мКдФ.

Група еквівалентності $G^\sim$ класу (3.20) складається з перетворень

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \psi(t), \quad (4.4)$$

де α , β , γ , θ і ψ пробігають множину гладких функцій від t , $\alpha_t\beta\theta \neq 0$. Довільні елементи (3.20) перетворюються за формулами (3.21) Критерій звідності до стандартного рівняння мКдФ [264], отриманий в Пропозиції 3.15.

Клас (4.1) – це підклас класу (3.20), виділений умовами $f = 1$ і $p = q = k = l = 0$. Підставляючи ці значення функцій f, p, q, k і l в (3.22), отримуємо наступне твердження.

Наслідок 4.1. *Рівняння з класу (4.1) зводиться до стандартного рівняння мКдФ за допомогою точкового перетворення тоді і тільки тоді, коли*

$$2h = -\frac{g_t}{g},$$

тобто тоді і тільки тоді, коли $g(t) = c_0 \exp(-2 \int h(t) dt)$, де c_0 - довільна ненульова константа.

Оскільки клас (3.20) є нормалізованим [264], його група еквівалентності $G^\sim$ породжує весь набір допустимих (що зберігають форму) перетворень для цього класу. Тому для опису множини допустимих перетворень для класу (4.1) необхідно задати $\tilde{f} = f = 1$, $\tilde{p} = p = \tilde{q} = q = \tilde{k} = k = \tilde{l} = l = 0$ в (3.21) і розв'язати отримані рівняння відносно параметрів перетворення. Виявляється, що проекція отриманих перетворень на простір змінних t, x і u може бути застосована до довільного рівняння з класу (4.1). Це означає, що множина допустимих перетворень класу (4.1) породжується перетвореннями з його групи еквівалентності і, отже, цей клас є також нормалізованим.

Підсумовуючи наведене вище, сформулюємо наступну теорему.

Теорема 4.2. *Клас (4.1) є нормалізованим. Група еквівалентності $G_1^\sim$ цього класу складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \beta \int \frac{dt}{\theta(t)^2}, \quad \tilde{x} = \beta x + \gamma, \quad \tilde{u} = \theta(t)u, \\ \tilde{h} &= \frac{\theta}{\beta} (\theta h - \theta_t), \quad \tilde{g} = \beta^2 \theta^2 g, \end{aligned}$$

де β і γ - довільні константи, $\beta \neq 0$, а функція θ - довільна гладка функція змінної t , відмінна від нуля.

Параметризація перетворень з групи еквівалентності $G_1^\sim$ довільною функцією $\theta(t)$ дозволяє спростити задачу групової класифікації для класу (4.1) за рахунок зменшення кількості довільних елементів. Наприклад, ми можемо калібрувати довільні елементи, встановивши або $h = 0$, або $g = 1$. Таким чином, калібрування $h = 0$ може бути здійснене перетворенням еквівалентності

$$\tilde{t} = \int e^{-2 \int h(t) dt} dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = e^{\int h(t) dt} u, \quad (4.5)$$

яке пов'язує рівняння (4.1) з рівнянням $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}^2 \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{g}(\tilde{t}) \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0$. Новий

довільний елемент $\tilde{g}$ виражається через g і h в такий спосіб:

$$\tilde{g}(\tilde{t}) = e^{2 \int h(t) dt} g(t).$$

Ось чому без втрати загальності ми можемо обмежити дослідження класом

$$u_t + u^2 u_x + g(t) u_{xxx} = 0, \quad (4.6)$$

так як всі результати про симетрії і точні розв'язки для цього класу можуть бути поширені на клас (4.1) перетвореннями види (4.5).

Група еквівалентності для класу (4.6) може бути отримана з Теорема 4.2, поклавши $\tilde{h} = h = 0$. Відмітимо, що клас (4.6) також є нормалізованим.

Теорема 4.3. *Група еквівалентності $G_0^\sim$ класу (4.6) утворюється перетвореннями*

$$\tilde{t} = \frac{\delta_2}{\delta_4^2} t + \delta_1, \quad \tilde{x} = \delta_2 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \delta_4 u, \quad \tilde{g} = \delta_2^2 \delta_4^2 g,$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 4$, довільні константи, $\delta_2 \delta_4 \neq 0$.

Наслідок 4.4. *Алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу (4.6) породжується операторами ∂_t , ∂_x , $t\partial_t - \frac{1}{2}u\partial_u - g\partial_g$ і $t\partial_t + x\partial_x + 2g\partial_g$.*

Зауваження 4.5. Рівняння з класу (3.20) зводиться до рівняння з класу (4.6) точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти f, h, k і l задовольняють другій умові з (3.22), тобто умові (4.2). Відповідне перетворення з $G^\sim$ має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \int f e^{-\int (q+2h) dt} dt, & \tilde{x} &= e^{-\int q dt} x - \int \left(p - \frac{k^2}{4f} \right) e^{-\int q dt} dt, \\ \tilde{u} &= e^{\int h dt} \left(u + \frac{k}{2f} \right), & \tilde{g} &= \frac{g}{f} e^{2 \int (h-q) dt}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Зокрема, з умови (4.2) випливає, що всі рівняння з класу (3.20) при $k = l = 0$ зводяться до рівнянь з класу (4.6).

4.1.2. Ліівські симетрії. Спочатку проведемо групову класифікацію класу (4.6) з точністю до $G_0^\sim$ -еквівалентності. Таким чином, ми одночасно вирішуємо задачу групової класифікації для класу (4.1) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності і для класу (4.3) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (див. пояснення нижче). Потім, використовуючи отримані списки класифікації і перетворення еквівалентності, ми можемо представити групові класифікації класів (4.1) і (4.3) без спрощення рівнянь з більш широкими алгебрами інваріантності Лі перетвореннями еквівалентності. Ці розширені списки класифікації можуть бути корисні для застосувань і зручні для порівняння з результатами [170].

Використовуючи критерій інфінітезимальної інваріантності, отримуємо оператори, які породжують однопараметричні групи перетворень точкової симетрії рівнянь з класу (4.6), які мають вигляд

$$Q = (c_1 t + c_2) \partial_t + (c_3 x + c_4) \partial_x + \frac{1}{2} (c_3 - c_1) u \partial_u,$$

і класифікуюче рівняння, що включає довільний елемент g

$$(c_1 t + c_2) g_t = (3c_3 - c_1) g. \quad (4.8)$$

Вивчення класифікуючого рівняння призводить до наступної теореми.

Наступне твердження вірне.

Теорема 4.6. *Ядро $\mathfrak{g}^\cap$ максимальних алгебр інваріантності Лі рівнянь з класу (4.6) збігається з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Всі можливі $G_0^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр ліівської інваріантності вичерпуються випадками 1–3 Таблиці 4.1.*

Доведення. Оскільки клас (4.6) є нормалізованим, також зручно використовувати варіант алгебраїчного методу групової класифікації або комбінувати цей метод з прямим дослідженням класифікуючого рівняння [102].

Ми використовуємо таку процедуру. Ми розглядаємо проекцію $\text{Pg}^\sim$ алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу (4.6) на простір змінних (t, x, u) . Він охоплюється операторами $\partial_t, \partial_x, D^t = t\partial_t - \frac{1}{2}u\partial_u$ і $D^x = x\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u$. Для будь-якого g алгебри максимальної інваріантності Лі відповідного рівняння з

Табл. 4.1: Групова класифікація класу (4.6).

№	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	$\delta t^n, n \neq 0$	$\partial_x, 6t\partial_t + 2(n+1)x\partial_x + (n-2)u\partial_u$
2	δe^t	$\partial_x, 6\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u$
3	δ	$\partial_x, \partial_t, 3t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут $\delta = \pm 1 \bmod G_0^\sim$, n довільна ненульова константа.

класу (4.6) є підалгеброю $P\mathfrak{g}^\sim$ в силу нормалізованості цього класу і містить алгебру ядра $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_x \rangle$. Алгебру $P\mathfrak{g}^\sim$ можна представити у вигляді $P\mathfrak{g}^\sim = \mathfrak{g}^\cap \in \mathfrak{g}^{\text{ext}}$, де $\mathfrak{g}^\cap$ і $\mathfrak{g}^{\text{ext}} = \langle D^t, D^x, \partial_t \rangle$ - ідеал і підалгебра $P\mathfrak{g}^\sim$, відповідно. Отже, кожному розширенню алгебри ядра $\mathfrak{g}^\cap$ відповідає підалгебра $\mathfrak{g}^{\text{ext}}$. Іншими словами, для класифікації розширень лівської симетрії в класі (4.6) з точністю до $G_0^\sim$ -еквівалентності достатньо класифікувати $G_0^\sim$ -нееквівалентні підалгебри $\mathfrak{g}^{\text{ext}}$, а потім перевірити, які підалгебри узгоджені з класифікаційним рівнянням і відповідають максимальному розширенню.

Повний список $G_0^\sim$ -нееквівалентних підалгебр $\mathfrak{g}^{\text{ext}}$ вичерпується наступними підалгебрами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \{0\}, \quad \mathfrak{g}_{1.1}^a = \langle D^t + aD^x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.2}^b = \langle D^x + b\partial_t \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.3} = \langle \partial_t \rangle, \\ \mathfrak{g}_{2.1} &= \langle D^t, D^x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2.2}^a = \langle D^t + aD^x, \partial_t \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2.3} = \langle D^x, \partial_t \rangle, \\ \mathfrak{g}_3 &= \langle D^t, D^x, \partial_t \rangle, \end{aligned}$$

де параметр b може бути масштабований до будь-якого відповідного значення, якщо воно не дорівнює нулю.

Зафіксуємо підалгебру з наведеного вище списку і підставимо коефіцієнти кожного базисного елемента цієї підалгебри в класифікуюче рівняння (4.8). В результаті ми отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно довільного елемента g . Системи, пов'язані з підалгебрами $\mathfrak{g}_{1.2}^0$, $\mathfrak{g}_{2.2}^a$, де $a \neq 1/3$, $\mathfrak{g}_{2.3}$ і $\mathfrak{g}_3$, несумісні з умовою $g \neq 0$. Розширення,

що задаються підалгебрами $\mathfrak{g}_{1,3}$ і $\mathfrak{g}_{1,1}^{1/3}$, не є максимальними, так як максимальна алгебра інваріантності Лі в цьому випадку $g_t = 0$ збігається з $\mathfrak{g}_3$. Підалгебри $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_{1,1}^a$, $\mathfrak{g}_{1,2}^b$ і $\mathfrak{g}_{2,2}^{1/3}$, де $a \neq 1/3$ і $b \neq 0$, відповідають випадкам 0, 1, 2 і 3 відповідно. Параметр n , який з'являється у випадку 2, пов'язаний з параметром a через формулу $n = 3a - 1$, у випадку 3 параметр b масштабується до значення $b = 3$. $\square$

Для будь-якого рівняння з класу (4.1) існує відображене рівняння в класі (4.6) відносно перетворення (4.5) (відповідно, в класі (4.3) відносно перетворення (4.7)). Група еквівалентності $G_0^\sim$ класу (4.6) індукується групою еквівалентності $G_1^\sim$ класу $(??)\clubsuit$, яка, в свою чергу, індукується групою еквівалентності $G^\sim$ класу (3.20). Це гарантує, що у Таблиці 1 також представлений список групової класифікації для класу (4.1) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності (відповідно для класу (4.3) до $G^\sim$ -еквівалентності). Оскільки всі перераховані вище класи є нормалізованими, ми можемо стверджувати, що ми отримуємо класифікацію лівських симетрій цих класів з точністю до загальної точкової еквівалентності. Це призводить до наступного наслідку Теорема 3.

Наслідок 4.7. *Рівняння з класу (4.1) (відповідно класу (3.20)) допускає тривимірну алгебру інваріантності Лі тоді і тільки тоді, коли воно зводиться точковим перетворенням до рівняння $mK\partial\Phi$ зі сталими коефіцієнтами, тобто тоді і тільки тоді, коли $g(t) = c_0 \exp(-2 \int h(t)dt)$, де c_0 - довільна ненульова константа (відповідно, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (3.22)).*

Щоб вивести групову класифікацію класу (4.1), який не спрощується перетвореннями еквівалентності, ми спочатку застосовуємо перетворення еквівалентності з групи $G_0^\sim$ до класифікаційного списку, представленому в Таблиці 4.1 і отримаємо наступний розширений список:

0. arbitrary $\tilde{g}$: $\langle \partial_{\tilde{x}} \rangle$;
1. $\tilde{g} = c_0(\tilde{t} + c_1)^n$: $\langle \partial_{\tilde{x}}, 6(\tilde{t} + c_1)\partial_{\tilde{t}} + 2(n+1)\tilde{x}\partial_{\tilde{x}} + (n-2)\tilde{u}\partial_{\tilde{u}} \rangle$;
2. $\tilde{g} = c_0 e^{m\tilde{t}}$: $\langle \partial_{\tilde{x}}, 6\partial_{\tilde{t}} + 2m\tilde{x}\partial_{\tilde{x}} + m\tilde{u}\partial_{\tilde{u}} \rangle$;

Табл. 4.3: Групова класифікація класу (4.1).

№	$h(t)$	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	$\forall$	$c_0 \left(\int e^{-2 \int h dt} dt + c_1 \right)^n e^{-2 \int h dt}$	$\partial_x, H \partial_t + 2(n+1)x \partial_x + (n-2-hH)u \partial_u$
2	$\forall$	$c_0 e^{\int (m e^{-2 \int h dt} - 2h) dt}$	$\partial_x, 6e^{2 \int h dt} \partial_t + 2mx \partial_x + \left(m - 6h e^{2 \int h dt} \right) u \partial_u$
3	$\forall$	$c_0 e^{-2 \int h dt}$	$\partial_x, e^{2 \int h dt} (\partial_t - hu \partial_u),$ $H \partial_t + 2x \partial_x - (2 + hH)u \partial_u$

Here c_0, c_1, m and n are arbitrary constants with $c_0 m n \neq 0$, and $H = 6e^{2 \int h dt} \left(\int e^{-2 \int h dt} dt + c_1 \right)$. In case 3 $c_1 = 0$ in the formula for H .

$$3. \tilde{g} = c_0: \langle \partial_{\tilde{x}}, \partial_{\tilde{t}}, 3\tilde{t}\partial_{\tilde{t}} + \tilde{x}\partial_{\tilde{x}} - \tilde{u}\partial_{\tilde{u}} \rangle.$$

Тут c_0, c_1, m і n довільні сталі, $c_0 m n \neq 0$.

Потім ми знаходимо прообрази рівнянь з класу $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}^2 \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{g}(\tilde{t}) \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0$ з довільними елементами, зібраними в наведеному вище списку, відносно перетворення (4.5). Останній крок - перетворення базисних операторів відповідних алгебр ліївських симетрій. Результати представлені в Таблиці 4.3.

Тепер легко побачити, що Таблиця 4.3 включає всі випадки, представлені в [170] як частинні випадки.

Аналогічним чином за допомогою перетворень (4.7) отримується групова класифікація класу (4.3) без спрощення перетвореннями еквівалентності. Відповідні результати зібрані в Таблиці 4.5.

4.1.3. Побудова точних розв'язків за допомогою перетворень еквівалентності. Ряд недавніх робіт присвячений побудові точних рішень різних класів рівнянь типу КдФ або мКдФ з використанням, наприклад, таких методи, як “узагальнений метод (G'/G) -розкладу”, “метод Ехр-функції”, “метод розкладу за еліптичними функціями Якобі” тощо. Ряд посилань наведено в [264]. Проте майже в усіх випадках точні

Табл. 4.5: Групова класифікація класу (4.3).

no.	$g(t)$	Basis of $A^{\max}$
0	$\forall$	$e^{\int q dt} \partial_x$
1	$c_0 f e^{2 \int (q-h) dt} \left(\frac{H}{F} \right)^n$	$e^{\int q dt} \partial_x, H \partial_t + \left[(qH + 2n + 2)x + H \left(p - \frac{k^2}{4f} \right) - 2(n+1)Q \right] \partial_x + \left[(n-2-hH)u + \frac{k}{2f}(n-2) - lH \right] \partial_u$
2	$c_0 f e^{\int (m f e^{-\int (q+2h) dt} + 2q-2h) dt}$	$e^{\int q dt} \partial_x, F \partial_t + \left[(qF + 2m)x + F \left(p - \frac{k^2}{4f} \right) - 2mQ \right] \partial_x + \left[(m-hF)u + \frac{m}{2} \frac{k}{f} - lF \right] \partial_u$
3	$c_0 f e^{2 \int (q-h) dt}$	$e^{\int q dt} \partial_x, F \left[\partial_t + \left(qx + p - \frac{k^2}{4f} \right) \partial_x - (hu + l) \partial_u \right],$ $H \partial_t + \left[(qH + 2)x + H \left(p - \frac{k^2}{4f} \right) - 2Q \right] \partial_x$ $- \left[(2+hH)u + \frac{k}{f} + lH \right] \partial_u$

Функції f, h, p, q і k є довільними функціями змінної t у всіх випадках, $f \neq 0$. c_0, c_1, m і n довільні сталі, $c_0 m n \neq 0$,

$$F = \frac{6}{f} e^{\int (q+2h) dt}, \quad H = F \left(\int f e^{-\int (q+2h) dt} dt + c_1 \right),$$

$$Q = e^{\int q dt} \int \left(p - \frac{k^2}{4f} \right) e^{-\int q dt} dt, \quad l = \frac{1}{2f} \left(k_t + kh - k \frac{f_t}{f} \right).$$

У випадку 3 $c_1 = 0$ у формулі для H .

розв'язки будувалися тільки для рівнянь, що зводяться до стандартних рівнянь КдФ або мКдФ за допомогою точкових перетворень, і зазвичай це були тільки розв'язки, подібні добре відомим односолітонним розв'язкам. У цьому розділі ми покажемо, що використання перетворень еквівалентності дозволяє отримати більше результатів більш простим способом.

N -солітонний розв'язок рівняння мКдФ в канонічній формі

$$U_t + 6U^2 U_x + U_{xxx} = 0 \quad (4.9)$$

було побудовано ще в сімдесятих роках за допомогою методу Хіроти [38].

Одно- і двосолітонні розв'язки рівняння (4.9) мають вигляд

$$U = a + \frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2 + k_0^2} \operatorname{ch}(k_0 x - k_0(6a^2 + k_0^2)t + b) + 2a}, \quad (4.10)$$

$$U = \frac{e^{\theta_1} \left(1 + \frac{A}{4a_2^2} e^{2\theta_2}\right) + e^{\theta_2} \left(1 + \frac{A}{4a_1^2} e^{2\theta_1}\right)}{\left(\frac{1}{2a_1} e^{\theta_1} + \frac{1}{2a_2} e^{\theta_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{A}{4a_1 a_2} e^{\theta_1 + \theta_2}\right)^2}, \quad (4.11)$$

де k_0, a, b, a_i, b_i довільні сталі, $\theta_i = a_i x - a_i^3 t + b_i$, $i = 1, 2$; $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$.

Раціональні розв'язки, які можна отримати як довгохвильову границю солітонних рішень, також відомі давно [37, 238]. Таким чином, одно- і двосолітонні розв'язки дають раціональні розв'язки

$$U = a - \frac{4a}{4a^2 z^2 + 1},$$

$$U = a - \frac{12a \left(z^4 + \frac{3}{2a^2} z^2 - \frac{3}{16a^4} - 24tz\right)}{4a^2 \left(z^3 + 12t - \frac{3}{4a^2} z\right)^2 + 9 \left(z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2}, \quad (4.12)$$

відповідно, де $z = x - 6a^2 t$ і a довільна стала. Ці розв'язки також можна знайти в [24]. Зауважимо, що розв'язок (4.11) і другий розв'язок (4.12) представлені в [24] з друкарськими помилками.

Комбінуючи просте перетворення $\tilde{u} = \sqrt{6}U$, що зв'язує форму (4.9) рівняння мКдФ з формою

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}^2 \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \quad (4.13)$$

і перетворенням (4.5), ми отримуємо формулу

$$u = \sqrt{6} e^{-\int h(t) dt} U \left(\int e^{-2 \int h(t) dt} dt, x \right).$$

Використовуючи цю формулу і розв'язки (4.10)–(4.12), ми легко можемо побудувати точні розв'язки рівнянь загального вигляду

$$u_t + u^2 u_x + e^{-2 \int h dt} u_{xxx} + hu = 0, \quad (4.14)$$

які є прообразами (4.13) відносно перетворення (4.5). Тут $h = h(t)$ — довільна гладка функція змінної t , відмінна від нуля.

Наприклад, двосолітонний розв'язок (4.11) призводить до наступного розв'язка (4.14)

$$u = \sqrt{6}e^{-\int h dt} \frac{e^{\theta_1} \left(1 + \frac{A}{4a_2^2} e^{2\theta_2}\right) + e^{\theta_2} \left(1 + \frac{A}{4a_1^2} e^{2\theta_1}\right)}{\left(\frac{1}{2a_1} e^{\theta_1} + \frac{1}{2a_2} e^{\theta_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{A}{4a_1 a_2} e^{\theta_1 + \theta_2}\right)^2},$$

де a_i, b_i - довільні сталі, $\theta_i = a_i x - a_i^3 \int e^{-2\int h dt} dt + b_i$, $i = 1, 2$; $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$. Аналогічним чином легко побудувати односолітонні і раціональні розв'язки для рівнянь з класу (4.14).

Більш складне перетворення виду

$$u = \sqrt{6}e^{-\int h dt} U\left(\int f e^{-\int (q+2h) dt} dt, e^{-\int q dt} x - \int \left(p - \frac{k^2}{4f}\right) e^{-\int q dt} dt\right) - \frac{k}{2f}.$$

дозволяє використовувати розв'язки (11)–(13) рівняння (4.9) для побудови точних рішень рівнянь виду

$$u_t + f u^2 u_x + f e^{2\int (q-h) dt} u_{xxx} + h u + (p + qx) u_x + k u u_x + \frac{1}{2f} \left(k_t + kh - k \frac{f_t}{f}\right) = 0, \quad (4.15)$$

які є прообразами рівняння (4.13) відносно перетворення (4.7). Тут f, h, k, p і q — довільні гладкі функції змінної t , $f \neq 0$.

Наприклад, розв'язок (4.15), отриманий з односолітонного розв'язка (11), має вигляд

$$u = \sqrt{6}e^{-\int h dt} \left(a + \frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2 + k_0^2} \operatorname{ch} z + 2a}\right) - \frac{k}{2f},$$

$z = k_0 e^{-\int q dt} x - k_0 \int \left(p - \frac{k^2}{4f}\right) e^{-\int q dt} dt - k_0(6a^2 + k_0^2) \int f e^{-\int (q+2h) dt} dt + b$, де k_0, a і b - довільні сталі. Аналогічним чином можна легко побудувати інші типи розв'язків для рівнянь з класу (4.15).

4.2. Алгебраїчний метод групової класифікації для ненормалізованих класів: нелінійні хвильові й еліптичні рівняння

Хвильові й еліптичні рівняння відіграють важливу роль у фізиці, оскільки хвильові рівняння моделюють, зокрема, коливні процеси у суцільних середовищах, а еліптичні рівняння описують низку стаціонарних процесів. З точки зору групового аналізу такі рівняння є складними, оскільки всі незалежні змінні в них входять на рівних умовах. Симетрії хвильових й еліптичних рівнянь Лі з двома незалежними змінними досліджувались, зокрема, у роботах, [16, 54, 66, 67, 70, 71, 124, 145, 146, 154, 155, 199, 200]. Зауважимо, що вперше хвильові й еліптичні рівняння розглядались, у рамках групового аналізу диференціальних рівнянь, в роботах Софуса Лі в процесі класифікації лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежних змінними [204] й вивчення контактних перетворень між нелінійними рівняннями Клейна–Гордона $d^2z/dx dy = F(z)$ [205]. Точні розв’язки нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь, знайдені симетрійними методами і методом функціонального розділення змінних наведено, зокрема, у роботах [154, 250–252, 344].

У цьому підрозділі вичерпно розв’язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{W}$ нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь вигляду

$$u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u). \quad (4.16)$$

Для точного опису класу $\mathcal{W}$, який надалі називатимемо класом (4.16), необхідно накласти дві додаткові умови на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$. Перша природна умова: $f \neq 0$. Позначимо через $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ надклас рівнянь (4.16) з $f \neq 0$, який містить як лінійні так і нелінійні рівняння. Для того, щоб гарантувати нелінійність рівнянь з класу $\mathcal{W}$, накладаємо ще одну умову $(f_u, g_{uu}) \neq (0, 0)$. Підклас $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ лінійних рівнянь $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ — це доповнення до класу $\mathcal{W}$ у класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\text{gen}} \setminus \mathcal{W}_{\text{lin}}$. Зауважимо, що лінійні і нелінійні рівняння з підкласів $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ і $\mathcal{W}$ класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ не пов’язані

між собою точковими перетвореннями (див. зауваження 4.8) і мають різні симетрійні властивості. Лінійний хвильові й еліптичні рівняння з двома незалежними змінними вичерпно досліджені в рамках класичного групового аналізу, див., наприклад, роботи [22, 23, 70, 71, 204]. Знак функції f несуттєвий для групової класифікації класу $\mathcal{W}$. Водночас проведено класифікацію підкласу гіперболічних рівнянь, для яких $f > 0$, і підкласу еліптичних рівнянь, для яких $f < 0$. Гіперболічні й еліптичні рівняння також не пов'язані між собою точковими перетвореннями. Зауважимо, що ми працюємо над дійсним полем, перехід на комплексний випадок потребує незначної модифікації.

Наслідуючи роботи [1, 155], так звану задачу часткової попередньої групової класифікації [54, 102] для класу $\mathcal{W}$ було розв'язано в роботі [284]. А саме, було розглянуто шестивимірну підалгебру $\mathfrak{g}_6$ нескінченновимірної алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу $\mathcal{W}$, потім прокласифіковано лише одновимірні підалгебри підалгебри $\mathfrak{g}_6$ з точністю до еквівалентності, породженою відповідною шестивимірною підгрупою G_6 нескінченновимірної групи еквівалентності $G^\sim$ класу (4.16). G_6 -еквівалентність є слабшою, ніж $G^\sim$ -еквівалентність, ось чому класифікація в [284] призвела до великої кількості випадків (двадцять чотири G_6 -нееквівалентний випадки) класифікаційного списку, більшість з яких є $G^\sim$ -еквівалентними один одному. З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності всі ці випадки вкладаються в перші чотири випадки, наведені в таблиці 4.6. Окрім цього багато випадків було пропущено навіть в рамках поставленої задачі часткової попередньої групової класифікації. У цьому підрозділі, що ґрунтується на результатах роботи [301], ми суттєво покращуємо й узагальнюємо результати [284].

Важливо зауважити, що клас $\mathcal{W}$ не є ні нормалізованим, ні напівнормалізованим. Його навіть не можна розбити на неперетинні нормалізовані чи напівнормалізовані підкласи. Також не існує такої сім'ї точкових перетворень, щоб відобразити цей клас на клас з кращими трансформаційними властивостями. Ось чому ліівські симетрії рівнянь з класу $\mathcal{W}$ не мож-

на вичерпно прокласифікувати наявними версіями алгебраїчного методу групової класифікації, який явно [54, 57, 102, 198, 240, 254, 261] чи неявно [16, 50, 51, 121, 126, 133, 147, 148, 199, 200, 210] ґрунтується на певних нормалізаційних властивостях досліджуваних класів (зауважимо, що більшість згаданих статей присвячено груповій класифікації певних класів $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь). З іншого боку клас $\mathcal{W}$ непридатний для того, щоб розв'язувати його задачу групової класифікації прямим методом Лі–Овсянникова [1, 9, 22, 23, 71, 154], включаючи його версію, доповнену методом розгалуженого розщеплення [20, 258]. Останній метод є особливо ефективним для класів диференціальних рівнянь з довільними елементами, залежними від одного аргументу [145, 146, 162, 242, 258, 299, 306], хоча його також можна застосовувати для класів, чиї довільні елементи залежать від двох аргументів [20, 56].

Ось чому для повного розв'язання задачі повної групової класифікації для класу $\mathcal{W}$, нами запропонований нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів (систем) диференціальних рівнянь, що ґрунтується на класифікації допустимих перетворень з точністю до еквівалентності, породженої групою еквівалентності цього класу. У першому розділі дисертації запропоновано теорію щодо допустимих перетворень та методів їхньої класифікації. Зокрема модифіковано поняття еквівалентності допустимих перетворень і введено поняття породжувальної множини групоїду еквівалентності, а також запропоновано кілька нових технік класифікації допустимих перетворень для ненормалізованих класів. Показано, що метод розгалуженого розщеплення й алгебраїчний метод Гайдона знаходження повної групи точкових симетрій певної системи диференціальних рівнянь [150–152] можна поширити на допустимі перетворення. Для поширення алгебраїчного методу групової класифікації на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь, введено поняття регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії в класі диференціальних рівнянь $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Регулярні розширення ліївської симетрії

асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Ці розширення можна побудувати класичним алгебраїчним методом при виконанні повної попередньої групової класифікації [54, 102] класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Сингулярні розширення лівської симетрії можуть включати тільки ті системи з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ що є джерелом допустимих перетворень в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, не породжених перетвореннями еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Таким чином, задача групової класифікації для класу $\mathcal{W}$ стає ілюстративним прикладом запропонованого методу.

4.2.1. Попереднє дослідження допустимих перетворень. Щоб знайти повну точкову групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (4.16) (що включає як неперервні, так і дискретні перетворення еквівалентності) і групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ цього класу, застосуємо прямий метод знаходження допустимих перетворень [184]. Розпочнемо розгляд з пошуку допустимих перетворень в класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$, які породжують групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{\text{gen}}^{\sim}$ цього класу. Це також дозволить знайти групу еквівалентності $G^{\sim}$ і групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу (4.16).

Позначимо через $\mathcal{L}_{\theta}$ рівняння в класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ що відповідає певному фіксованому значенню набору довільних елементів $\theta = (f, g)$. Допустиме перетворення в класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ — це трійка $(\theta, \Phi, \tilde{\theta})$, де $\theta = (f, g)$ і $\tilde{\theta} = (\tilde{f}, \tilde{g})$ — початковий і кінцевий набори довільних елементів в $\mathcal{T}$, а

$$\Phi: \quad \tilde{t} = T(t, x, u), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u) \quad (4.17)$$

з ненульовим якобіаном $J := \partial(T, X, U)/\partial(t, x, u)$ — точкове перетворення в просторі з координатами (t, x, u) , що відображення рівняння $\mathcal{L}_{\theta}$ в рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$. Отже, шукаємо всі точкові перетворення, що відображають фіксоване рівняння $\mathcal{L}_{\theta}$ вигляду (4.16) в рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ такого самого вигляду $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u})\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{u})$.

Щоб виконати перетворення Φ необхідно знайти його продовження на похідні u до другого порядку включно. Для цього діємо операторами повної похідної D_t і D_x на вираз $\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) = U(t, x, u)$, вважаючи $\tilde{t} = T(t, x, u)$ і

$\tilde{x} = X(t, x, u)$, і розв'язуємо отримані вирази відносно u_{tt} і u_{xx} . Знайдені вирази для других похідних підставляємо в рівняння (4.16), отримуємо рівність

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}(D_t T)^2 + 2\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}(D_t T)(D_t X) + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(D_t X)^2 + \tilde{u}_{\tilde{t}}V^t T + \tilde{u}_{\tilde{x}}V^t X \\ & - V^t U = f[\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}(D_x T)^2 + 2\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}(D_x T)(D_x X) + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(D_x X)^2 \\ & + \tilde{u}_{\tilde{t}}V^x T + \tilde{u}_{\tilde{x}}V^x X - V^x U] - g(\tilde{u}_{\tilde{t}}T_u + \tilde{u}_{\tilde{x}}X_u - U_u), \end{aligned} \quad (4.18)$$

де використано позначення $V^t := \partial_{tt} + 2u_t \partial_{tu} + u_t^2 \partial_{uu}$ і $V^x := \partial_{xx} + 2u_x \partial_{xu} + u_x^2 \partial_{uu}$. Підстановка $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \tilde{f}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{g}$ в силу $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ в рівняння (4.18) призводить до тотожності, яку можна розщепити за змінними $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$. Зокрема, коефіцієнт біля $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}$ в (4.18) дає рівняння

$$(T_t + T_u u_t)(X_t + X_u u_t) = f(T_x + T_u u_x)(X_x + X_u u_x). \quad (4.19)$$

Рівняння (4.19) далі можна розщепити за різними степенями u_t і u_x . Таким чином, отримаємо систему

$$T_u X_u = 0, \quad T_u X_t + T_t X_u = 0, \quad T_u X_x + T_x X_u = 0, \quad (4.20)$$

$$T_t X_t = f T_x X_x. \quad (4.21)$$

З цих рівнянь випливають умови $T_u = X_u = 0$, які означають, що будь-яке допустиме точкове перетворення в класі (4.16) є таким, що компоненти перетворення для незалежних змінних залежать тільки від цих змінних. В силу цієї умови рівняння (4.20) стають тотожностями, розщеплення рівняння (4.18) за $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$ дає рівняння

$$\tilde{f}T_t^2 + X_t^2 = f(\tilde{f}T_x^2 + X_x^2), \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{g}T_t^2 + \tilde{u}_{\tilde{t}}T_{tt} + \tilde{u}_{\tilde{x}}X_{tt} - (U_{tt} + 2U_{tu}u_t + U_{uu}u_t^2) \\ & = f(\tilde{g}T_x^2 + \tilde{u}_{\tilde{t}}T_{xx} + \tilde{u}_{\tilde{x}}X_{xx} - (U_{xx} + 2U_{xu}u_x + U_{uu}u_x^2)) + gU_u. \end{aligned}$$

Розщеплення останнього рівняння за змінними $\tilde{u}_{\tilde{t}}$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}}$ призводить до рівнянь $U_{uu} = 0$ і

$$T_{tt} - 2\frac{U_{ut}}{U_u}T_t = f\left(T_{xx} - 2\frac{U_{ux}}{U_u}T_x\right), \quad (4.23)$$

$$X_{tt} - 2\frac{U_{ut}}{U_u}X_t = f\left(X_{xx} - 2\frac{U_{ux}}{U_u}X_x\right), \quad (4.24)$$

$$\tilde{g}T_t^2 - U_{tt} + 2\frac{U_{ut}}{U_u}U_t = f\left(\tilde{g}T_x^2 - U_{xx} + 2\frac{U_{ux}}{U_u}U_x\right) + gU_u. \quad (4.25)$$

З рівняння $U_{uu} = 0$ випливає, що $U = U^1(t, x)u + U^0(t, x)$. Умова не-виродженості перетворення Φ , в силу умов $T_u = X_u = 0$ зводиться до нерівності $U_u(T_tX_x - T_xX_t) \neq 0$, і тому $T_tX_x - T_xX_t \neq 0$ і $U^1 := U_u \neq 0$. зауважимо, що рівняння $T_u = X_u = U_{uu} = 0$ для допустимих точкових перетворень в класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ можна також отримати, використовуючи пункт (с) теореми 4.4b з роботи [184]. Переписавши рівняння (4.22) як $\tilde{f}(T_t^2 - fT_x^2) + X_t^2 - fX_x^2 = 0$, бачимо, що $T_t^2 - fT_x^2 \neq 0$, $X_t^2 - fX_x^2 \neq 0$. Дійсно, інакше $f > 0$, $T_t = \varepsilon_1 f^{1/2}T_x \neq 0$, де $\varepsilon_1 = \pm 1$, і тому з рівняння (4.21) випливало би $X_t = \varepsilon_1 f^{1/2}X_x$, але це суперечить не-виродженості перетворення Φ . Тому $\tilde{f}_{\tilde{u}} = 0$, якщо $f_u = 0$. І навпаки, якщо $\tilde{f}_{\tilde{u}} = 0$, то можна вивести $f_u = 0$. Отже, $\tilde{f}_{\tilde{u}} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_u = 0$.

Оскільки вираз $T_t^2 - fT_x^2$ ненульовий, з рівняння (4.25) випливає, що $\tilde{f}_{\tilde{u}} = \tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_u = g_{uu} = 0$.

Зауваження 4.8. Інваріантність умов $f_u = g_{uu} = 0$ під дією допустимих перетворень в класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ означає, що групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{\text{gen}}^{\sim}$ класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ можна зобразити як неперетинне об'єднання групоїдів еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ і $\mathcal{G}_{\text{lin}}^{\sim}$ підкласів $\mathcal{W}$ і $\mathcal{W}_{\text{lin}}$, а саме $\mathcal{G}_{\text{gen}}^{\sim} = \mathcal{G}^{\sim} \sqcup \mathcal{G}_{\text{lin}}^{\sim}$. Іншими словами, рівняння з класу $\mathcal{W}$ не пов'язані з рівняннями з класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ точковими перетвореннями. Це виправдовує виключення класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ з розгляду, оскільки лівські симетрії рівнянь з класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ відомі.

4.2.2. Група еквівалентності й алгебра еквівалентності. Знайдемо групу еквівалентності класу (4.16), оскільки вона необхідна для вичерпного опису допустимих перетворень, а також для аналізу визначальних рівнянь на компоненти операторів лівської симетрії. При обчисленні перетворень еквівалентності довільні елементи f і g варіюються, отже,

можна розщепити рівняння (4.21)–(4.25) за цими довільними елементами. З рівнянь (4.21) й умови невідродженості $T_t X_x - T_x X_t \neq 0$ випливає, що або $T_t = X_x = 0$ і $T_x X_t \neq 0$, або $T_x = X_t = 0$ і $T_t X_x \neq 0$.

Для $T_t = X_x = 0$, рівняння (4.22) можна спростити до вигляду $X_t^2 = f \tilde{f} T_x^2$, або $T_x^2 f = X_t^2 / \tilde{f}$. Диференціюємо останнє рівняння за змінною t і розщеплюємо отримане рівняння відносно функції $\tilde{f}$ і її похідних, що призводить до рівняння $X_t = 0$, яке суперечить умові невідродженості.

Отже, $X_t = T_x = 0$ і так $T = T(t)$, $X = X(x)$, де $T_t X_x \neq 0$. тоді рівняння (4.22) зводиться до вигляду $\tilde{f} T_t^2 = f X_x^2$ і диференціювання цього рівняння за змінною t дає

$$2T_t T_{tt} \tilde{f} + T_t^2 U_t \tilde{f}_u = 0. \quad (4.26)$$

Оскільки рівняння (4.26) має справджуватись для всіх $\tilde{f}$, можна розщепити його відносно $\tilde{f}$ і $\tilde{f}_u$. Таким чином, знаходимо, що $T_{tt} = 0$ і $U_t = 0$. Рівняння (4.23) стає тотожністю в силу наведених вище рівнянь, а рівняння (4.24) зводиться до $(U_u^2 / X_x)_x = 0$. Рівняння (4.25) дає перетворення для довільного елемента g . Отже, доведена теорема.

Теорема 4.9. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ класу (3.9) складають перетворення*

$$\tilde{t} = c_1 t + c_0, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = c_2 |\varphi_x|^{1/2} u + \psi(x), \quad \tilde{f} = \frac{\varphi_x^2}{c_1^2} f,$$

$$\tilde{g} = \frac{c_2}{c_1^2} |\varphi_x|^{1/2} g - \frac{1}{c_1^2} \left(c_2 \frac{2\varphi_{xxx} \varphi_x - 3\varphi_{xx}^2}{4|\varphi_x|^{3/2}} u + \psi_{xx} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \psi_x \right) f,$$

де c_0, c_1, c_2 — довільні сталі, що задовольняють умову $c_1 c_2 \neq 0$; φ, ψ — довільні гладкі функції змінної x , причому $\varphi_x \neq 0$.

Наслідок 4.10. *Клас (4.16) допускає точно три дискретних перетворення еквівалентності, що є незалежними з точністю до їх композиції між собою і неперервними перетвореннями еквівалентності в цьому класі: $(t, x, u, f, g) \mapsto (-t, x, u, f, g)$, $(t, x, u, f, g) \mapsto (t, -x, u, f, g)$, $(t, x, u, f, g) \mapsto (t, x, -u, f, -g)$.*

З теореми 4.9 випливає, що будь-яке перетворення $\mathcal{T}$ з групи $G^\sim$ можна зобразити як композицію $\mathcal{T} = \mathcal{P}^t(c_0)\mathcal{D}^t(c_1)\mathcal{Z}(\psi)\mathcal{D}(\varphi)\mathcal{D}^u(c_2)$ елементарних перетворень еквівалентності, кожне з яких належить сім'ї перетворень еквівалентності, параметризованих сталим або функціональним параметром:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^t(c_0): \quad & \tilde{t} = t + c_0, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{f} = f, \quad \tilde{g} = g, \\ \mathcal{D}^t(c_1): \quad & \tilde{t} = c_1 t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{f} = c_1^{-2} f, \quad \tilde{g} = c_1^{-2} g, \\ \mathcal{D}(\varphi): \quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \varphi, \quad \tilde{u} = |\varphi_x|^{\frac{1}{2}} u, \quad \tilde{f} = \varphi_x^2 f, \quad \tilde{g} = |\varphi_x|^{\frac{1}{2}} g + \alpha^\varphi(x) u f, \\ \mathcal{D}^u(c_2): \quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = c_2 u, \quad \tilde{f} = f, \quad \tilde{g} = c_2 g, \\ \mathcal{Z}(\psi): \quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + \psi, \quad \tilde{f} = f, \quad \tilde{g} = g - \psi_{xx} f,\end{aligned}$$

де параметри описані в теоремі 4.9, і $\alpha^\varphi(x) := \frac{2\varphi_{xxx}\varphi_x - 3\varphi_{xx}^2}{4|\varphi_x|^{3/2}}$.

Відповідна алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу (4.16) породжується операторами

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^t &= \partial_t, \quad \mathcal{D}^t = t\partial_t - 2f\partial_f - 2g\partial_g, \quad \mathcal{D}^u = u\partial_u + g\partial_g, \\ \mathcal{D}(\zeta) &= \zeta\partial_x + \frac{1}{2}\zeta_x u\partial_u + 2\zeta_x f\partial_f + \frac{1}{2}(\zeta_x g - \zeta_{xxx} u f)\partial_g, \\ \mathcal{Z}(\chi) &= \chi\partial_u - \chi_{xx} f\partial_g,\end{aligned}\tag{4.27}$$

де $\zeta = \zeta(x)$, $\chi = \chi(x)$ — гладкі функції змінної x . Ненульові комутаційні співвідношення між цими векторними полями вичерпуються такими:

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}^t, \mathcal{D}^t] &= \mathcal{P}^t, \quad [\mathcal{Z}(\chi), \mathcal{D}^u] = \mathcal{Z}(\chi), \\ [\mathcal{D}(\zeta^1), \mathcal{D}(\zeta^2)] &= \mathcal{D}(\zeta^1\zeta_x^2 - \zeta_x^1\zeta^2), \quad [\mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi)] = \mathcal{Z}(\zeta\chi_x - \frac{1}{2}\zeta_x\chi).\end{aligned}$$

4.2.3. Визначальні рівняння для пошуку ліївських симетрій.

Припустимо, що векторне поле $Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u$ належить максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\max}$ рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$ з класу (4.16), тобто, генерує однопараметричну групу ліївських симетрій рівняння $\mathcal{L}$. З використанням критерію ліївської інваріантності отримуємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q :

$$\xi_t = \tau_x f,\tag{4.28}$$

$$\tau_{tt} - \tau_{xx}f = 2\eta_{tu}, \quad (4.29)$$

$$\xi_{tt} - \xi_{xx}f = -2\eta_{xu}f, \quad (4.30)$$

$$\xi f_x + \eta f_u = 2(\xi_x - \tau_t)f, \quad (4.31)$$

$$\xi g_x + \eta g_u = (\eta_u - 2\tau_t)g - \eta_{xx}f + \eta_{tt}. \quad (4.32)$$

Для знаходження алгебри ядра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^\cap$ класу (4.16), розщеплюємо визначальні рівняння відносно довільних елементів і їх похідних. Звідки отримуємо, що $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t \rangle$. Отже, ліївські симетрії, що допускаються кожним рівнянням з класу (4.16) вичерпуються перетвореннями вигляду $(t, x, u) \mapsto (t + c_0, x, u)$, де c_0 — довільна стала.

4.2.4. Результати класифікації. Результати групової класифікації класу (4.16) сформульовано в теоремі.

Теорема 4.11. *Усі $G^\sim$ -нееквівалентні (а також точково-нееквівалентні) випадки розширення ліївської симетрії алгебри ядра основних груп $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t \rangle$ в класі (4.16) вичерпуються випадками, наведеними в таблиці 4.6.*

В залежності від розмірності розширення ліївської симетрії (один, два, три, чотири або нескінченність), випадки таблиці 4.6 поділено на групи горизонтальними лініями. зауважимо, що всі розширення ліївської симетрії розмірностей нескінченність і чотири для рівняння з класу (4.16) не асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$, тобто є сингулярними. Використання дворівневої нумерації для класифікація випадків, наведених в таблиці 4.6 пов'язано з наявністю додаткових перетворень еквівалентності між випадками. а саме, випадки позначені одними й тими самими арабськими цифрами й різними буквами $G^\sim$ -нееквівалентні, але еквівалентні відносно додаткових перетворень еквівалентності. Щоб побудувати всі додаткові перетворення еквівалентності серед $G^\sim$ -нееквівалентних випадків класифікації, потрібно класифікувати допустимі перетворення в цьому класі з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Справедлива теорема, доведення якої наведено в підрозділі 4.2.5.

Табл. 4.6: $G^\sim$ -нееквівалентний розширення ліївської симетрії $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t \rangle$ в класі (4.16).

№	f	g	Базис розширення
1	$\hat{f}(\omega) u ^p$	$\hat{g}(\omega) u ^p u$	$-pt\partial_t + 2\delta\partial_x + 2u\partial_u$
2	$\hat{f}(u)e^x$	$\hat{g}(u)e^x$	$t\partial_t - 2\partial_x$
3	$\hat{f}(x)e^u$	$\hat{g}(x)e^u$	$t\partial_t - 2\partial_u$
4	$\hat{f}(u)$	$\hat{g}(u)$	∂_x
5a	ε	$\hat{g}(u)$	$\partial_x, x\partial_t + \varepsilon t\partial_x$
5б	1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t})$
5в	-1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t)$
6a	ε	$\hat{g}(u)x^{-2}$	$t\partial_t + x\partial_x, (t^2 + \varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x$
6б	1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \cos x), \mathcal{R}(\sin t \cos x)$
6в	1	$-\hat{g}(u) \operatorname{ch}^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \operatorname{ch} x), \mathcal{R}(e^{-t} \operatorname{ch} x)$
6г	1	$\hat{g}(u) \operatorname{sh}^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \operatorname{sh} x), \mathcal{R}(e^{-t} \operatorname{sh} x)$
6д	-1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \cos x), \mathcal{R}(e^{-t} \cos x)$
6е	-1	$\hat{g}(u) \operatorname{sh}^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \operatorname{sh} x), \mathcal{R}(\sin t \operatorname{sh} x)$
7	-1	$\hat{g}(u) \operatorname{ch}^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \operatorname{ch} x), \mathcal{R}(\sin t \operatorname{ch} x)$
8a	εu^{-4}	$\mu(x)u^{-3}$	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u$
8б	εu^{-4}	$\mu(x)u^{-3} + u$	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u)$
8в	εu^{-4}	$\mu(x)u^{-3} - u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u$
9	$\varepsilon e^x u ^p$	$\nu e^x u ^p u$	$p\partial_x - u\partial_u, t\partial_t - 2\partial_x$
10	$\varepsilon x^2 e^u$	νe^u	$x\partial_x, t\partial_t - 2\partial_u$
11	$\hat{f}(u)$	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x$
12	εe^u	$\varepsilon' e^{qu}$	$\partial_x, qt\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2\partial_u$
13	$\varepsilon u ^p$	$\varepsilon' u ^q$	$\partial_x, (1-q)t\partial_t + (1+p-q)x\partial_x + 2u\partial_u$
14a	εu^{-4}	$\varepsilon' u^{-3}$	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u, \partial_x$
14б	εu^{-4}	$\varepsilon' u^{-3} + u$	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u), \partial_x$
14в	εu^{-4}	$\varepsilon' u^{-3} - u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u, \partial_x$
14г	εu^4	$\varepsilon' u$	$\partial_x, 2x\partial_x + u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u$

Табл. 4.6: продовження.

15a	εu^{-4}	$\nu x^{-2} u^{-3}$	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u, 2x\partial_x - u\partial_u$
15б	εu^{-4}	$\nu x^{-2} u^{-3} + u$	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u), 2x\partial_x - u\partial_u$
15в	εu^{-4}	$\nu x^{-2} u^{-3} - u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u, 2x\partial_x - u\partial_u$
16	$\varepsilon u ^p$	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x, px\partial_x + 2u\partial_u$
17	εe^u	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x, x\partial_x + 2\partial_u$
18a	ε	$\varepsilon' u ^q$	$\partial_x, t\partial_x + \varepsilon x\partial_t, (q-1)t\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
18б	1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t}), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
18в	-1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
19a	εu^{-4}	0	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u, \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u$
19б	εu^{-4}	u	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u), \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u$
19в	εu^{-4}	$-u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u, \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u$
19г	εu^4	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x, 2x\partial_x + u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u$
20	ε	$\varepsilon' e^u$	$\tau\partial_t + \xi\partial_x - 2\tau_t\partial_u$

Тут $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1 \bmod G^\sim$, $\delta \in \{0, 1\} \bmod G^\sim$, p, q, ν — довільні сталі з $p \neq 0$ і $\nu \neq 0$. Додатково, $p \neq \pm 4$ у випадку 16, і $q \neq 0, 1$ у випадках 18a–18в. У випадку 1, $\omega := x - \delta \ln |u|$. $\mathcal{R}(\Phi) := \Phi_x \partial_t + \Phi_t \partial_x$. Пара (τ, ξ) гладких функцій від змінних (t, x) пробігає множину розв'язків системи $\tau_t = \xi_x$, $\xi_t = \varepsilon \tau_x$.

Теорема 4.12. *Породжувальну множину $\mathcal{B}$ допустимих перетворень класу (3.9), що є мінімальною і внутрішньо сумісною з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, утворюють такі сім'ї допустимих перетворень, де $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1$:*

T1. $f_x = g_x = 0, f_u \neq 0$ або $f = 1, \tilde{f} = 1/f, \tilde{g} = -g/f,$

$\Phi: \tilde{t} = x, \tilde{x} = t, \tilde{u} = u;$

T2. $f = \varepsilon u^{-4}, g = \mu(x)u^{-3} + \sigma u, \sigma \in \{-1, 0, 1\}, \tilde{f} = \varepsilon \tilde{u}^{-4}, \tilde{g} = \mu(\tilde{x})\tilde{u}^{-3},$
 $\mu = \mu(x)$ — довільна гладка функція, причому $\mu_x \neq 0,$

а. $\Phi: \tilde{t} = t^{-1}, \tilde{x} = x, \tilde{u} = t^{-1}u, \text{ якщо } \sigma = 0;$

б. $\Phi: \tilde{t} = \frac{1}{2}e^{2t}, \tilde{x} = x, \tilde{u} = e^t u, \text{ якщо } \sigma = 1;$

$$\text{B. } \Phi: \tilde{t} = \operatorname{tg} t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u \cos t, \quad \text{якщо } \sigma = -1;$$

$$\text{T3. } f = 1, \quad g = e^{-2x} g^2(u), \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = g^2(\tilde{u}),$$

$$\Phi: \tilde{t} = e^{-x} \operatorname{sh} t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \operatorname{ch} t, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T4. } f = 1, \quad g = g^1(x) g^2(u), \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = \tilde{x}^{-2} g^2(\tilde{u}),$$

$$\text{a. } g^1(x) = x^{-2}, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{t}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{б. } g^1(x) = \cos^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{\cos t}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{x} = \frac{\cos x}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{B. } g^1(x) = -\operatorname{ch}^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = e^t \operatorname{sh} x, \quad \tilde{x} = e^t \operatorname{ch} x, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{Г. } g^1(x) = \operatorname{sh}^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = e^t \operatorname{ch} x, \quad \tilde{x} = e^t \operatorname{sh} x, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T5. } f = -1, \quad g = e^{-2x} g^2(u), \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = g^2(\tilde{u}),$$

$$\Phi: \tilde{t} = e^{-x} \sin t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \cos t, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T6. } f = -1, \quad g = g^1(x) g^2(u), \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \tilde{x}^{-2} g^2(\tilde{u}),$$

$$\text{a. } g^1(x) = x^{-2}, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{t}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{б. } g^1(x) = \cos^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = e^t \sin x, \quad \tilde{x} = e^t \cos x, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{B. } g^1(x) = \operatorname{sh}^{-2} x, \quad \Phi: \tilde{t} = \frac{\sin t}{\cos t + \operatorname{ch} x}, \quad \tilde{x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\cos t + \operatorname{ch} x}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T7. } f = -1, \quad g = g^2(u) \operatorname{ch}^{-2} x, \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = g^2(\tilde{u}) \operatorname{ch}^{-2} \tilde{x},$$

$$\Phi: \tilde{t} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} x + \cos \gamma \sin t}{\cos t},$$

$$\tilde{x} = \operatorname{arch} \frac{\cos \gamma \operatorname{sh} x - \sin \gamma \sin t}{\operatorname{ch} x}, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in (0, 2\pi);$$

$$\text{T8. } \text{a. } f = \tilde{f} = 1, \quad g_x = 0, \quad \tilde{g} = g,$$

$$\Phi: \tilde{t} = t \operatorname{ch} \gamma + x \operatorname{sh} \gamma, \quad \tilde{x} = t \operatorname{sh} \gamma + x \operatorname{ch} \gamma, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0};$$

$$\text{б. } f = \tilde{f} = -1, \quad g_x = 0, \quad \tilde{g} = g, \quad \Phi: \tilde{t} = t \cos \gamma - x \sin \gamma,$$

$$\tilde{x} = t \sin \gamma + x \cos \gamma, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in (0, 2\pi);$$

$$\text{T9. } f = \varepsilon, \quad g = \varepsilon' e^u, \quad \tilde{f} = \varepsilon, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^{\tilde{u}}, \quad \Phi: \tilde{t} = T(t, x), \quad \tilde{x} = X(t, x),$$

$$\tilde{u} = u + \ln |T_t^2 - \varepsilon T_x^2|, \quad \partial_e \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1, \quad \text{причому } \varepsilon' = 1, \quad \text{якщо } \varepsilon = 1,$$

(T, X) пробігають множину представників класів еквівалентності розв'язків системи $T_t = X_x$, $X_t = \varepsilon T_x$ із $(T_{tt}, T_x) \neq (0, 0)$ за дією групи, яку складають перетворення $\hat{t} = c_1 t + c_0$, $\hat{x} = c_1 x + c_2$, $\hat{T} = \tilde{c}_1 T + \tilde{c}_0$, $\hat{X} = \tilde{c}_1 X + \tilde{c}_2$, де $c_0, c_1, c_2, \tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — довільні сталі, що задовольняють умову $c_1 \tilde{c}_1 \neq 0$.

Надалі використаємо позначення TN для допустимого перетворення, наведеного у теоремі 4.12, де N — відповідний номер перетворення.

Зауваження 4.13. Компоненту Φ перетворення змінних допустимого перетворення T46 можна зобразити як

$$\text{T46: } \tilde{t} = \operatorname{ctg} \frac{x+t}{2} + \operatorname{tg} \frac{x-t}{2}, \quad \tilde{x} = \operatorname{ctg} \frac{x+t}{2} - \operatorname{tg} \frac{x-t}{2}, \quad \tilde{u} = u,$$

а компоненту Φ допустимих перетворень T4в і T4г, відповідно, як

$$\text{T4в: } \tilde{t} = \operatorname{cth} \frac{x+t}{2} - \operatorname{th} \frac{x-t}{2}, \quad \tilde{x} = \operatorname{cth} \frac{x+t}{2} + \operatorname{th} \frac{x-t}{2}, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T4г: } \tilde{t} = \operatorname{th} \frac{x+t}{2} - \operatorname{th} \frac{x-t}{2}, \quad \tilde{x} = \operatorname{th} \frac{x+t}{2} + \operatorname{th} \frac{x-t}{2}, \quad \tilde{u} = u.$$

Альтернативні варіанти для допустимих перетворень T46–T4г і T3 для лінійних рівнянь з класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ наведено в зауваженнях 1 і 2 роботи [342].

Таким чином, отримуємо список незалежних додаткових перетворень еквівалентності серед випадків класифікації, наведених в таблиці 4.6 (нижче параметри, що не змінюються, не вказано).

$$\begin{aligned} \text{T1: (а)} \quad & 4_{\hat{f}, \hat{g}} \rightarrow 4_{1/\hat{f}, -\hat{g}/\hat{f}}, \quad 5a_{\hat{g}} \rightarrow 5a_{-\hat{g}}, \quad \text{якщо } \varepsilon = 1, \quad 11_{\hat{f}} \rightarrow 11_{1/\hat{f}}, \\ & 12_{q, \varepsilon, \varepsilon'} \circ (u \rightarrow -u) \rightarrow 12_{1-q, \varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \quad 13_{p, q, \varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 13_{-p, q-p, \varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \\ & 14_{\Gamma, \varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 14a_{\varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \quad 16_{p, \varepsilon} \rightarrow 16_{-p, \varepsilon}, \quad 18a_{q, \varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 18a_{q, \varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \\ & 19_{\Gamma} \rightarrow 19a, \quad 20_{\varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 20_{\varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T2: (б)} \quad & 8\bar{6} \rightarrow 8a, \quad 14\bar{6} \rightarrow 14a, \quad 15\bar{6} \rightarrow 15a, \quad 19\bar{6} \rightarrow 19a; \\ & (в) \quad 8в \rightarrow 8a, \quad 14в \rightarrow 14a, \quad 15в \rightarrow 15a, \quad 19в \rightarrow 19a. \end{aligned}$$

$$\text{T3: } 5\bar{6} \rightarrow 5a_{\varepsilon=1}, \quad 18\bar{6} \rightarrow 18a_{\varepsilon=1}.$$

T4: (б) $6б \rightarrow 6a_{\varepsilon=1}$, (в) $6в \rightarrow 6a_{\varepsilon=1}$, (г) $6г \rightarrow 6a_{\varepsilon=1}$.

T5: $5в \rightarrow 5a_{\varepsilon=-1}$, $18в \rightarrow 18a_{\varepsilon=-1}$.

T6: (б) $6д \rightarrow 6a_{\varepsilon=-1}$, (в) $6е \rightarrow 6a_{\varepsilon=-1}$.

Зауваження 4.14. В таблиці 4.6, тільки випадки 1–4, 9–13, 14г, 16, 17 і 19г представлено регулярними розширеннями ліївської симетрії в класі $\mathcal{W}$. При цьому регулярні випадки 14г і 19г $G^\sim$ -нееквівалентні, але $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентні сингулярним випадкам 14а і 19а, відповідно.

Розгляньмо підклас $\mathcal{W}_c$ класу $\mathcal{W}$, виокремлений додатковими умовами $f_x = g_x = 0$ на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$, тобто клас рівнянь

$$u_{tt} = f(u)u_{xx} + g(u), \quad (4.33)$$

де $(f_u, g_{uu}) \neq (0, 0)$. Випадки 4, 5а, 11, 12, 13, 14а–14г, 16, 17, 18а, 19а–19г і 20 таблиці 4.6 пов'язані з підкласом $\mathcal{W}_c$. Алгебру ядра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_c = \langle \partial_t, \partial_x \rangle$ рівнянь з підкласу $\mathcal{W}_c$ наведено у випадку 4, який є загальним випадком у цьому підкласі. З теореми 4.11 і наведеного вище списку додаткових перетворень еквівалентності випливає, що повний список $\mathcal{G}^\sim$ -нееквівалентних розширень ліївської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_c$, де $\mathcal{G}^\sim$ — його групоїд еквівалентності, вичерпується випадками 5а, 11, 12, 13, 14а, 16, 17, 18а, 19а, 20 таблиці 4.6, де додатково $q > 1/2$ у випадку 12, $p > 0$ у випадках 13 і 16, і $\varepsilon' = 1$ у випадках 18а і 20 з $\varepsilon = 1$. Групова класифікація підкласу $\mathcal{W}_c$ з точністю до $G_c^\sim$ -еквівалентності є більш делікатною. Групу $G_c^\sim$ породжено перетвореннями вигляду (4.9) з $\varphi_{xx} = \psi_x = 0$, що складають перетин $G_c^\sim \cap G^\sim$, і дискретним перетворенням еквівалентності $\tilde{t} = x$, $\tilde{x} = t$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{f} = 1/f$, $\tilde{g} = -f/g$ класу $\mathcal{W}_c$, яке породжує сім'ю T1 допустимих перетворень в $\mathcal{W}$. Ось чому деякі $G^\sim$ -нееквівалентні розширення ліївської симетрії можуть виявитись $G_c^\sim$ -еквівалентними, як, наприклад, для випадків 14а і 14г, а також для випадків 19а і 19г. Зворотна ситуація неможлива, оскільки підгрупоїд групоїда $\mathcal{G}^\sim$ породжений групою $G^\sim$ міститься у підгрупоїді, породженому групою $G_c^\sim$. З цього випливає твердження.

Наслідок 4.15. Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних розширень ліівської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_c$ вичерпується випадками 5а, 11, 12, 13, 14а–14в, 16, 17, 18а, 19а–19в і 20 таблиці 4.6, де додатково $q > 1/2$ у випадку 12, $p > 0$ у випадках 13 і 16, $i \varepsilon' = 1$ у випадках 18а і 20 з $\varepsilon = 1$.

4.2.5. Групоїд еквівалентності і сингулярні розширення ліівської симетрії. Групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ містить допустимі перетворення, що не породжені елементами групи $G^\sim$, тобто, цей клас ненормалізований. Однак, можна описати групоїд $\mathcal{G}^\sim$, прокласифікувавши допустимі перетворення в класі $\mathcal{W}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Доведемо теорему 4.12, для чого побудуємо (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) породжувальну множину $\mathcal{B}$ групоїда $\mathcal{G}^\sim$, а також класифікацію сингулярних ліівських розширень ліівської симетрії в класі $\mathcal{W}$.

Оскільки клас $\mathcal{W}$ є підкласом класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$, компонента Φ будь-якого допустимого перетворення $\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta})$ в класі $\mathcal{W}$ набуває вигляду

$$\tilde{t} = T(t, x), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U = U^1(t, x)u + U^0(t, x)$$

з умовами невинудженості $T_t X_x - T_x X_t \neq 0$ і $U^1 \neq 0$, при цьому має задовольнятися система (4.21)–(4.25). Тут $\theta = (f, g)$ і $\tilde{\theta} = (\tilde{f}, \tilde{g})$, відповідно, початкове й кінцеве значення набору довільних елементів для $\mathcal{T}$, $\mathcal{L}_\theta, \mathcal{L}_{\tilde{\theta}} \in \mathcal{W}$.

Через $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$, відповідно, позначимо підкласи класу $\mathcal{W}$, виокремлені умовами $f_u = 0$ і $f_u \neq 0$. Розбиття $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{W}_1$ класу $\mathcal{W}$ індукує розбиття групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ цього класу, оскільки $\tilde{f}_u = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_u = 0$, див. підрозділ 4.2.1. Іншими словами, рівняння з підкласу $\mathcal{W}_0$ не пов'язані точковими перетвореннями з рівняннями в підкласі $\mathcal{W}_1$. Це твердження можна переформулювати у термінах еквівалентності групоїдів.

Твердження 4.16. Групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ є неперетинним об'єднанням групоїдів еквівалентності $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$ підкласів $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$, отже, $\mathcal{G}^\sim = \mathcal{G}_0^\sim \sqcup \mathcal{G}_1^\sim$.

Опишемо окремо групоїди еквівалентності $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$.

Лема 4.17. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{W}_0$ співпадає з $G^\sim$. З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності породжувальна множина $\mathcal{B}_0$ допустимих перетворень в класі $\mathcal{W}_0$, що є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності, — це об'єднання обмеження сім'ї T1 на клас $\mathcal{W}_0$ і сімей T3–T9.

Лема 4.18. Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних сингулярних розширень лівської симетрії для рівняння з класу $\mathcal{W}_0$, що не пов'язані з підходящими підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, вичерпується випадками 5a–7, 18a–18b і 20 в підкласі рівнянь з довільними елементами вигляду $f = \varepsilon$ і $g = g^1(x)g^2(u)$.

Доведення. Водночас доведемо леми 4.17 і 4.18. Нехай $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_0^\sim$, тобто $f_u = 0$, $g_{uu} \neq 0$, $\tilde{f}_{\tilde{u}} = 0$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} \neq 0$. Виразимо X_t^2 з рівняння (4.22), підставивши цей вираз в рівняння (4.21). Після факторизації отриманого рівняння, маємо $(T_t^2 - fT_x^2)(fX_x^2 - \tilde{f}T_t^2) = 0$, з чого, в силу $T_t^2 - fT_x^2 \neq 0$ випливає, що $fX_x^2 = \tilde{f}T_t^2$. Тоді рівняння (4.22) дає $X_t^2 = f\tilde{f}T_x^2$. Це означає, що f і $\tilde{f}$ мають однаковий знак і з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності можна вважати, що $f = \tilde{f} = \varepsilon$, де $\varepsilon = \pm 1$, тобто $X_x^2 = T_t^2$ і $X_t^2 = T_x^2$. Більш точно, калібрування функцій f і $\tilde{f}$ можна здійснити через перетворення $\mathcal{D}(\varphi)$ і $\mathcal{D}(\tilde{\varphi})$ змінних x і $\tilde{x}$, відповідно. Враховуючи рівняння (4.21) і перетворення заміни знаку t можна покласти $X_x = T_t$, $X_t = \varepsilon T_x$. Оскільки ці рівняння дають $T_{tt} = \varepsilon T_{xx}$ і $X_{tt} = \varepsilon X_{xx}$, пара рівнянь (4.23) і (4.24) зводяться до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь $T_t U_{ut} - \varepsilon T_x U_{ux} = 0$, $X_t U_{ut} - \varepsilon X_x U_{ux} = 0$ відносно U_{ut} і U_{ux} . Визначник відповідної матриці є ненульовим $\varepsilon(T_t X_x - T_x X_t) \neq 0$, тому $U_{ut} = U_{ux} = 0$, тобто U_u є ненульовою сталою і використовуючи перетворення $\mathcal{D}^u(c_2)$ можна покласти $U_u = 1$. В силу цієї умови рівняння (4.25) набуває виду

$$(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)\tilde{g} = g + U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0. \quad (4.34)$$

Послідовно діючи на рівняння (4.34) операторами $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)^{-1} \partial_t$ і $\partial_{\tilde{t}}$, отримаємо два диференціальні наслідки рівняння (4.34),

$$X_t \tilde{g}_{\tilde{x}} + U_t^0 \tilde{g}_{\tilde{u}} + \frac{(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2} \tilde{g} = \frac{(U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}, \quad (4.35)$$

$$(X_t)_{\tilde{t}} \tilde{g}_{\tilde{x}} + (U_t^0)_{\tilde{t}} \tilde{g}_{\tilde{u}} + \left(\frac{(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2} \right)_{\tilde{t}} \tilde{g} = \left(\frac{(U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2} \right)_{\tilde{t}}. \quad (4.36)$$

Дослідимо сумісність рівнянь (4.35) і (4.36), що є квазілінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку відносно функції $\tilde{g}$. Розглянемо різні випадки, що виникають в залежності від того, чи є матриця коефіцієнтів при похідних $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}}$ в цій системі виродженою або не виродженою. Ця процедура і попередній розбиття класу $\mathcal{W}$ на $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ добре підходить для застосування методу розгалуженого розщеплення [20, 239, 240, 242, 299, 306]. Подальший розгляд є першим прикладом побудови породжувальної множини допустимих перетворень з використанням цього методу.

1. Припустимо спочатку, що матриця коефіцієнтів є не виродженою, отже, $X_t(U_t^0)_{\tilde{t}} - U_t^0(X_t)_{\tilde{t}} \neq 0$. Розв'язуємо систему (4.35)–(4.36) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}}$,

$$\tilde{g}_{\tilde{x}} = \alpha^1 \tilde{g} + \alpha^0, \quad \tilde{g}_{\tilde{u}} = \beta^1 \tilde{g} + \beta^0. \quad (4.37)$$

Тут коефіцієнти α^0 , α^1 , β^0 , β^1 є функціями змінних $(\tilde{t}, \tilde{x})$, чиї явні вирази у термінах X і U^0 не є суттєвими для подальшого розгляду. Продиференціювавши рівняння (4.37) за $\tilde{t}$, виведемо наслідки $\alpha_t^1 \tilde{g} + \alpha_t^0 = 0$, $\beta_t^1 \tilde{g} + \beta_t^0 = 0$, з яких, в силу $g_u \neq 0$, випливає, що $\alpha_t^1 = \alpha_t^0 = \beta_t^1 = \beta_t^0 = 0$. Диференціювання рівняння (4.37) за змінними $\tilde{x}$ і $\tilde{u}$ призводить до умов сумісності для цих рівнянь, а саме $\beta_x^1 = 0$ і $\beta_x^0 = \alpha^1 \beta^0 - \alpha^0 \beta^1$, отже, β^1 — це стала. Оскільки $\tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} \neq 0$, друге рівняння в (4.37) призводить до умови $\beta^1 \neq 0$. Використовуючи перетворення еквівалентності $\mathcal{D}^u(1/\beta^1)$, можна відкалібрувати β^1 в одиницю. Тоді друге рівняння в (4.37) можна проінтегрувати й отримати $\tilde{g} = \tilde{g}^0(\tilde{x})e^{\tilde{u}} + \tilde{g}^1(\tilde{x})$ з $\tilde{g}^1 = -\beta^0$. З рівняння (4.34) випливає, що функція g має подібний вигляд і у початкових змінних, тобто,

$g = g^0(x)e^u + g^1(x)$, і $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)e^{U^0}\tilde{g}^0 = g^0$, $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)\tilde{g}^1 = g^1 + U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0$.
 З використанням перетворення еквівалентності $\mathcal{Z}(\psi)$ робимо $g^0 = \varepsilon'$ і $\tilde{g}^0 = \tilde{\varepsilon}'$ з $\varepsilon', \tilde{\varepsilon}' = \pm 1$. тоді $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)e^{U^0}\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon'$, тобто $U^0 = -\ln |X_x^2 - \varepsilon X_t^2|$ і тоді $U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0 = 0$, оскільки $X_{tt} - \varepsilon X_{xx} = 0$. Рівняння (4.34) набуває вигляду

$$\frac{g^1(x)}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2} = \tilde{g}^1(X). \quad (4.38)$$

Іншими словами, в цьому випадку достатньо класифікувати допустимі перетворення в підкласі $\mathcal{W}_{00}$, що містить рівняння вигляду

$$u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + \varepsilon' e^u + g^1(x) \quad (4.39)$$

з точністю до підгрупи $G_{00}^\sim$ групи еквівалентності $G^\sim$, виокремлених умовами $\varphi_x = \pm c_1$, $c_2 = |c_1|^{-1/2}$ і $\psi = 0$. Це зводиться до виведення можливих $G_{00}^\sim$ -нееквівалентних виразів для $X = X(t, x)$, $g^1 = g^1(x)$ і $\tilde{g}^1 = \tilde{g}^1(\tilde{x})$, що задовольняє систему рівнянь (4.38) і рівняння $X_{tt} = \varepsilon X_{xx}$. Робимо заміну незалежних змінних в цій системі, $y = x + \iota t$ і $z = x - \iota t$, де $\iota = 1$ або $\iota = i$, якщо $\varepsilon = 1$ або $\varepsilon = -1$, відповідно. Тут i — уявна одиниця, $i^2 = -1$, тому $\iota^2 = \varepsilon$. Для змінних y і z рівняння $X_{tt} = \varepsilon X_{xx}$ набуває вигляду $X_{yz} = 0$ і його загальний розв'язок можна зобразити як $X = Y(y) + Z(z)$, де $Z(z)$ співпадає зі спряженим значенням $Y(y)$, якщо $\varepsilon = -1$, тоді рівняння (4.38) можна переписати як

$$\frac{1}{4Y_y Z_z} g^1(x) = \tilde{g}^1(X), \quad \text{де} \quad x = \frac{y + z}{2}, \quad X = Y + Z. \quad (4.40)$$

Виключимо функцію $\tilde{g}^1$, для цього подіємо оператором $Y_y \partial_z - Z_z \partial_y$ на рівняння (4.40). Таким чином одержуємо рівняння

$$2g^1(\partial_y + \partial_z)(Y_y^{-1} - Z_z^{-1}) = -g_x^1(Y_y^{-1} - Z_z^{-1}).$$

Після інтегрування отримуємо $Y_y^{-1} - Z_z^{-1} = \iota h^0 h^1$, де h^0 — дійснозначна гладка функція змінної t , $h^1 := |g^1|^{-1/2} \neq 0$, а h^1 — дійснозначна гладка функція змінної x . Подіємо на результат інтегрування оператором $\partial_t^2 - \varepsilon \partial_x^2 = -4\varepsilon \partial_y \partial_z$, тоді $h_{tt}^0 h^1 = \varepsilon h_{xx}^0 h^1$.

Якщо $h^0 = 0$, то $Y_y^{-1} = Z_z^{-1} = \text{const} \in \mathbb{R}$ і тоді $Y_y = Z_z = \text{const} \in \mathbb{R}$, з чого випливає умова $X_{xx} = 0$, а отже $T_x = T_{tt} = 0$. Це означає, що допустиме перетворення $\mathcal{T}$ індуковане елементом групи $G^\sim$.

Випадок $h^1 = g^1 = 0$ відповідає рівнянню Ліувілля. Знак ε' можна змінити на протилежний відповідним допустимим перетворенням з сім'ї T1, якщо $\varepsilon = 1$, і не можна змінити в силу рівняння $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)e^{U^0}\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon'$, якщо $\varepsilon = -1$. Група еквівалентності $G^\sim$ індукує підгрупу H повної точкової групи симетрії рівняння Ліувілля для кожного фіксованого значення $(\varepsilon, \varepsilon')$, що складається з перетворень вигляду $\tilde{t} = c_1 t + c_0$, $\tilde{x} = c_1 x + c_2$, де c_0 , c_1 і c_2 — довільні сталі з $c_1 \neq 0$. Для мінімальності множини допустимих перетворень, що будується, треба обрати представника у кожному наборі $G^\sim$ -еквівалентних елементів відповідної вертексної групи. Це дає сім'ю T9 допустимих перетворень.

Надалі вважаємо, що $h^0 h^1 \neq 0$ і тоді також $g^1 \neq 0$. З використанням розділення змінних в рівнянні $h_{tt}^0 h^1 = \varepsilon h^0 h_{xx}^1$ випливає, що відношення виразів $h_{tt}^0/h^0 = \varepsilon h_{xx}^1/h^1$ дорівнює сталій, можна вважати з точністю до розтягів з групи $G^\sim$, що ця стала приймає одне зі значень з множини $\{-1, 0, 1\}$. З точністю до зсувів за x і заміни знаку x , маємо

$$g^1 \in \mathcal{C} := \{ \nu, \nu x^{-2}, \nu \cos^{-2} x, -\nu \text{ch}^{-2} x, \nu \text{sh}^{-2} x, \varepsilon'' e^{-2x} \mid \\ \nu \in \mathbb{R}, \nu \neq 0, \varepsilon'' = \pm 1 \}.$$

Аналогічно доводимо, що для оберненого до $\mathcal{T}$ допустимого перетворення, функція $\tilde{g}^1$ також належить множині $\mathcal{C}$ (з точністю до заміни аргументу x на $\tilde{x}$).

Спочатку наведемо повну множину $G^\sim$ -нееквівалентних (незалежних з точністю до обернення і композиції між собою) нетотожних допустимих перетворень для g^1 , що пробігає множину $\mathcal{C}$. Він вичерпується сім'єю T8| $\mathcal{W}_{00}$ і такими сім'ями:

$$\text{T3}'. \quad f = 1, \quad g = e^u + \varepsilon'' e^{-2x}, \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = e^u + \varepsilon'',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^{-x} \text{sh } t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \text{ch } t, \quad \tilde{u} = u + 2x;$$

$$\text{T4'}. f = 1, \quad g = \varepsilon' e^u + g^1(x), \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = \tilde{\varepsilon}' e^u + \nu \tilde{x}^{-2}, \quad \nu \in \mathbb{R}_{\neq 0},$$

$$\text{a. } g^1(x) = \nu x^{-2}, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \frac{t}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |x^2 - t^2|;$$

$$\text{б. } g^1(x) = \nu \cos^{-2} x, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \frac{\cos t}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{x} = \frac{\cos x}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |\sin t + \sin x|;$$

$$\text{в. } g^1(x) = -\nu \operatorname{ch}^{-2} x, \quad \tilde{\varepsilon}' = -\varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^t \operatorname{sh} x, \quad \tilde{x} = e^t \operatorname{ch} x, \quad \tilde{u} = u - 2t;$$

$$\text{г. } g^1(x) = \nu \operatorname{sh}^{-2} x, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon', \quad \Phi: \quad \tilde{t} = e^t \operatorname{ch} x, \quad \tilde{x} = e^t \operatorname{sh} x, \quad \tilde{u} = u - 2t;$$

$$\text{T5'}. f = -1, \quad g = \varepsilon' e^u + \varepsilon'' e^{-2x}, \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^u + \varepsilon'',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^{-x} \sin t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \cos t, \quad \tilde{u} = u + 2x;$$

$$\text{T6'}. f = -1, \quad g = \varepsilon' e^u + g^1(x), \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^u + \nu \tilde{x}^{-2}, \quad \nu \in \mathbb{R}_{\neq 0},$$

$$\text{a. } g^1(x) = \nu x^{-2}, \quad \Phi: \quad \tilde{t} = \frac{t}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |x^2 + t^2|;$$

$$\text{б. } g^1(x) = \nu \cos^{-2} x, \quad \Phi: \quad \tilde{t} = e^t \sin x, \quad \tilde{x} = e^t \cos x, \quad \tilde{u} = u - 2t;$$

$$\text{в. } g^1(x) = \nu \operatorname{sh}^{-2} x,$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \frac{\sin t}{\cos t + \operatorname{ch} x}, \quad \tilde{x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\cos t + \operatorname{ch} x}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |\cos t + \operatorname{ch} x|;$$

$$\text{T7'}. f = -1, \quad g = \varepsilon' e^u + \nu \operatorname{ch}^{-2} x, \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^{\tilde{u}} + \nu \operatorname{ch}^{-2} \tilde{x}, \quad \nu \in \mathbb{R}_{\neq 0},$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} x + \cos \gamma \sin t}{\cos t}, \quad \tilde{x} = \operatorname{arcth} \frac{\cos \gamma \operatorname{sh} x - \sin \gamma \sin t}{\operatorname{ch} x},$$

$$\tilde{u} = u + \ln |\operatorname{ch}^2 x - (\cos \gamma \operatorname{sh} x - \sin \gamma \sin t)^2|, \quad \gamma \in (0, 2\pi).$$

Безпосереднім способом перевірки, які елементи множини $\mathcal{C}$ пов'язані допустимими перетвореннями, є фіксування елементу g^1 з множини $\mathcal{C}$, і визначення $h^1 := |g^1|^{-1/2} \neq 0$, а потім розв'язання рівняння $h_{tt}^0 = \lambda h^0$ з $\lambda := \varepsilon h_{xx}^1 / h^1 = \operatorname{const}$, і знаходження Y і Z методом розділення змінних y і z в рівнянні $Y_y^{-1} - Z_z^{-1} = \iota h^0 h^1$, подальше його інтегрування і визначення $\tilde{g}^1$ з (4.38). Використаємо оптимізований спосіб. Знаходимо відображення $\nu e^{-2x} \mapsto \nu$ перетворенням T3', якщо $f = 1$, і перетворенням T5', якщо

$f = -1$, $\nu \cos^{-2} x \mapsto \nu x^{-2}$ перетворенням [Т4'б](#), якщо $f = 1$, і перетворенням [Т6'б](#), якщо $f = -1$, $-\nu \operatorname{ch}^{-2} x \mapsto \nu x^{-2}$ перетворенням [Т4'в](#), якщо $f = 1$, $\nu \operatorname{sh}^{-2} x \mapsto \nu x^{-2}$ перетворенням [Т4'г](#), якщо $f = 1$, і перетворенням [Т6'в](#), якщо $f = -1$. Знак ε' змінюється лише в [Т4'в](#). Для $f = -1$, значення $g^1 = -\nu \operatorname{ch}^{-2} x$ відображається в $g^1 = \nu x^{-2}$ допустимим точковим перетворенням тільки над комплексним полем.

Максимальні алгебри ліівської інваріантності рівнянь вигляду [\(4.39\)](#) зі значеннями (f, g^1) , що не зводяться одне до одного, такі:

$$(f, g^1) = (1, \nu): \quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, \partial_x, x\partial_t + t\partial_x \rangle,$$

$$(f, g^1) = (-1, \nu): \quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, \partial_x, x\partial_t - t\partial_x \rangle,$$

$$(f, g^1) = (\varepsilon, \nu x^{-2}):$$

$$\mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_u, (t^2 + \varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x - 4t\partial_u \rangle,$$

$$(f, g^1) = (-1, \nu \operatorname{ch}^{-2} x): \quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, \mathcal{R}'(\cos t \operatorname{ch} x), \mathcal{R}'(\sin t \operatorname{ch} x) \rangle,$$

де $\mathcal{R}'(\Phi) := \Phi_x \partial_t + \Phi_t \partial_x - 2\Phi_{tx} \partial_u$. Ці алгебри інваріантності подані у випадках [5a_{ε=1}](#) і [5a_{ε=-1}](#) таблиці [4.6](#) і асоційовані, відповідно, з випадками [6a](#) і [7](#) тієї самої таблиці. Це реалізації алгебри Пуанкаре $p(1, 1)$, алгебра Евкліда $e(2)$, дійсна спеціальна лінійна алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ і ортогональна алгебра $\mathfrak{o}(3)$, які не ізоморфні одна до одної. Водночас, системи диференціальних рівнянь пов'язані точковими перетвореннями, тільки якщо їх максимальні алгебри ліівської інваріантності ізоморфні.

Отже, потрібно прокласифікувати допустимі перетворення в чотирьох підкласах рівнянь вигляду [\(4.39\)](#), де для кожного з цих підкласів пара (f, g^1) є фіксованою і приймає одне зі значень з набору $\{(1, \nu), (-1, \nu), (\varepsilon, \nu x^{-2}), (-1, \nu \operatorname{ch}^{-2})\}$, а ν пробігає $\mathbb{R}_{\neq 0}$. Для цього запропоновано розширити алгебраїчний метод на знаходження допустимих перетворень. Цей метод був запропонований Гайдоном в роботах [\[150–152\]](#) для відшукування дискретних симетрій і розширений на обчислення перетворень еквівалентності в роботі [\[55\]](#). Розглянемо детально тільки перший підклас. Нехай $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ — два фіксовані рівняння вигляду [\(4.39\)](#) з

$f = \tilde{f} = 1$, $\tilde{g}^1 = \nu$, $g^1 = \tilde{\nu}$ і $\varepsilon', \tilde{\varepsilon}' = \pm 1$. Ці рівняння мають таку саму максимальну алгебру лівської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_{\tilde{\theta}} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + x\partial_t \rangle$, що наведена у випадку 5a_{f=1} таблиці 4.6, що є реалізацією алгебри Пуанкаре $\mathfrak{p}(1, 1)$. Отже, підняття векторних полів до перетворення Φ індукує автоморфізм алгебри $\mathfrak{g}_\theta$, асоційований з автоморфізмом $\mathfrak{p}(1, 1)$. Нагадаємо, що перетворення Φ повністю визначене його t - і x -компонентами. Внутрішнім автоморфізмам алгебри $\mathfrak{p}(1, 1)$ відповідають неперервні точкові перетворення, породжені векторними полями алгебри $\mathfrak{g}_\theta$. Ці перетворення є симетріями рівняння $\mathcal{L}_\theta$, тобто вони не замінюють параметри ν і ε' . З точністю до зсувів за t і x , які породжено елементами групи $G^\sim$, отримаємо сім'ю T8a| $\mathcal{W}_{00}$ допустимих перетворень. Існують тільки два зовнішні автоморфізми алгебри $\mathfrak{p}(1, 1)$ що є незалежними з точністю до їхніх композицій один з одним і з внутрішніми автоморфізмами (див. [109, 257] щодо автоморфізмів низькорозмірних алгебр Лі). Відповідні перетворення є заміна знаку змінної t , що є дискретною симетрією рівняння $\mathcal{L}_\theta$ індукованої $\mathcal{D}^t(-1)$, і перестановка змінних t і x , що належить сім'ї T1.

Інші три підкласи розглянуто аналогічним способом. Кожна з алгебр $\mathfrak{e}(2)$ і $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ має єдиний незалежний зовнішній автоморфізм, який тут пов'язаний зі зміною знаку t . Алгебра $\mathfrak{o}(3)$ не має внутрішніх автоморфізмів, але заміна знаку t породжує тотожний автоморфізм відповідної алгебри $\mathfrak{g}_\theta$. Профакторизувавши за зсувами і розтягами, що є симетріями відповідних рівнянь, індукованими елементами групи $G^\sim$, будуємо сім'ї T86| $\mathcal{W}_{00}$, T4'a і T7', відповідно. Остання сім'я складається з нетотожних перетворень, породжених операторами лівської симетрії $\mathcal{R}'(\cos t \operatorname{ch} x)$ рівняння (4.39) з $(f, g^1) = (-1, \nu \operatorname{ch}^{-2})$.

Очевидно, що $G_{00}^\sim$ -нееквівалентні сингулярні випадки розширення лівської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_{00}$ вичерпуються випадками з $g^1 \in \mathcal{C}$.

2. Тепер припустимо, що матриця коефіцієнтів при похідних $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}}$ в системі (4.35), (4.36) вироджена,

$$X_t(U_t^0)_{\tilde{t}} - U_t^0(X_t)_{\tilde{t}} = 0. \quad (4.41)$$

Якщо $X_t = 0$, тоді $T_x = X_{xx} = T_{tt} = 0$ і з рівняння (4.34) в силу умови $\tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} \neq 0$ випливає, що $U_t^0 = 0$, тобто допустиме перетворення $\mathcal{T}$ породжене елементом групи $G^\sim$. Тому надалі вважаємо, що $X_t \neq 0$. Зобразивши рівняння (4.41) у вигляді $(U_t^0/X_t)_{\tilde{t}} = 0$, інтегруємо його за змінною $\tilde{t}$, звідки отримуємо $U_t^0 = V^0(X)X_t$ для деякої гладкої функції $V^0 = V^0(\tilde{x})$. Тоді, інтегруючи за t , знаходимо $U^0 = V^1(X) + V^2(x)$, де V^1 — первісна функції V^0 , $V_{\tilde{x}}^1(\tilde{x}) = V^0(\tilde{x})$, і $V^2 = V^2(x)$ — гладка функція. Отже, з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (а саме, з точністю до композиції перетворення $\mathcal{T}$ з перетвореннями з підгрупи $\{\mathcal{Z}(\psi)\}$), можна покласти $U^0 = 0$, а отже $U = u$. Тоді рівняння (4.35) можна представити у вигляді

$$\frac{\tilde{g}_{\tilde{x}}}{\tilde{g}} = -\frac{1}{X_t} \frac{(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}.$$

Ліва і права частини останнього рівняння не залежать від $\tilde{t}$ і $\tilde{u}$, відповідно, і тому вони дорівнюють функції, що залежить лише від $\tilde{x}$. Розв'язання рівняння відносно $\tilde{g}$ дає форму $\tilde{g}$ у вигляді добутку функцій різних аргументів, $\tilde{g} = \tilde{g}^1(\tilde{x})\tilde{g}^2(\tilde{u})$. Оскільки $\tilde{u} = u$ і $g = (X_x^2 - \varepsilon X_t^2)\tilde{g}$, функція g також допускає подібне зображення $g = g^1(x)g^2(u)$, де $g^2(u) = \tilde{g}^2(u)$. В результаті, знову отримуємо рівняння (4.38). Отже, рівняння вигляду

$$u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + g^1(x)g^2(u) \quad \text{з} \quad g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2 \quad (4.42)$$

з однаковими значеннями функції g^2 пов'язані точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли рівняння вигляду (4.39) з такими самими значеннями параметрів ε і g^1 пов'язані точковим перетворенням. Вимагаємо виконання нерівності $g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2$, що еквівалентно лінійній незалежності g_u^2 , g^2 і 1, для виключення перетину підкласу (4.42) і підкласу рівнянь $u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + g^0(x)e^u + g^1(x)$ з $g^0 \neq 0$, рівняння з якого зводяться перетвореннями еквівалентності до рівнянь з підкласу (4.39). Для правильного перенесення класифікації допустимих перетворень в класі (4.39) на класифікацію таких перетворень у його підкласі (4.42) враховуємо умову $g^1 \neq 0$ для підкласу (4.42) і замінюємо u -компоненти у всіх перетворен-

нях на $\tilde{u} = u$. Таким чином отримуємо обмеження сімей T1, T3–T7 і T8 на підклас (4.42). Сім'ям T3–T7 відповідають сім'ї T3'–T7'.

Для повної класифікації допустимих перетворень в підкласі $\mathcal{W}_0$, відображаємо кожне рівняння з підкласу (4.39) з $g^1 \in \mathcal{C}$ перетворенням еквівалентності $\mathcal{Z}(\ln \hat{g}^1)$ у рівняння $u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + \hat{g}^1(x)g^2(u)$ з $g^2(u) = \varepsilon' e^u + \hat{\nu}$. Тут $\hat{g}^1$ має такий самий вигляд як g^1 , але з фіксованими $\nu = 1$, $\hat{\nu} = 2\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'' = -1$ для $\hat{g}^1 = \text{ch}^{-2}x$ і $\varepsilon'' = 1$ у іншому випадку. Таким чином сім'ї T3'–T7' відображаються в сім'ї T3–T7.

Отримана множина $\mathcal{B}_0$ допустимих перетворень в підкласі $\mathcal{W}_0$ є породжувальною множиною для $\mathcal{G}_0^\sim$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності за побудовою. Жодний елемент групоїда $\mathcal{G}_0^{G^\sim}$ не пов'язує різні значення θ з $s(\mathcal{B}_0) \cup t(\mathcal{B}_0)$. Жодний елемент множини $\mathcal{B}_0$ не можна зобразити як композицію скінченної кількості інших елементів породжувальної множини $\mathcal{B}_0$ або обернених до них перетворень. Отже, породжувальна множина $\mathcal{B}_0$ є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності для групоїда $\mathcal{G}_0^\sim$.

З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності сингулярні розширення ліівської симетрії в підкласі (4.42) можливі тільки для $g^1 \in \mathcal{C}$, що відповідно дає випадки 5а–5в, 6а–6е і 7. Оскільки випадок 7 зводиться до випадку 6а над комплексним полем, для подальший розширення достатньо перевірити тільки рівняння з $g^1 = 1$ (випадок 5а) і з $g^1 = x^{-2}$ (випадок 6а). Для $g^1 = 1$, отримаємо тільки випадок 18а з двома $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентними випадками 18б і 18в. Немає подальшого розширення ліівської симетрії для випадку $g^1 = x^{-2}$. $\square$

Залишилось дослідити групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_1^\sim$ підкласу $\mathcal{W}_1$, який виокремлюється з класу (4.16) умовою $f_u \neq 0$. Позначимо через $\mathcal{W}_{11}$ і $\mathcal{W}_{12}$ підкласи класу $\mathcal{W}_1$, відповідно, асоційований з додатковою умовою $f_x = g_x = 0 \bmod G^\sim$, і складений рівняннями, які $G^\sim$ -еквівалентні рівнянням вигляду

$$u_{tt} = \varepsilon u^{-4} u_{xx} + \mu(x) u^{-3} + \sigma u, \quad (4.43)$$

де μ пробігає множину гладких функцій змінної x , а ε, σ — сталі, причому $\varepsilon \neq 0$, а отже $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$ і $\sigma \in \{-1, 0, 1\} \bmod G^\sim$.

Лема 4.19. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{W}_1$ співпадає з групою $G^\sim$. Будь-яке допустиме перетворення в класі $\mathcal{W}_1 \setminus (\mathcal{W}_{11} \cup \mathcal{W}_{12})$ породжене перетворенням з $G^\sim$. Породжувальна (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множина $\mathcal{B}_1$ допустимих перетворень для класу $\mathcal{W}_1$, яка є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності, — це об'єднання обмеження сім'ї T1 на клас $\mathcal{W}_{11}$ і сім'ї T2, що діє в $\mathcal{W}_{12}$.

Доведення цієї наведено у роботі [301].

Групи еквівалентності підкласів $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ співпадають з групою еквівалентності $G^\sim$ всього класу $\mathcal{W}$, і $\mathcal{G}^\sim = \mathcal{G}_0^\sim \sqcup \mathcal{G}_1^\sim$. Отже, після об'єднання породжувальних (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множин $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ групоїдів $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$, що є мінімальними і внутрішньо сумісними відносно $G^\sim$ -еквівалентності для відповідних групоїдів, отримаємо породжувальну (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множину $\mathcal{B}$ групоїда $\mathcal{G}^\sim$, що є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності для групоїда $\mathcal{G}^\sim$.

Лема 4.20. Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних розширень лівської симетрії для рівнянь (4.43) вичерпується такими випадками:

$$\begin{aligned} 1a-1c. \text{ загальний } \mu: & \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap, \\ 2a-2c. \quad \mu = \pm 1: & \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap + \langle \partial_x \rangle, \\ 3a-3c. \quad \mu = \nu x^{-2}, \quad \nu \neq 0: & \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap + \langle 2x\partial_x - u\partial_u \rangle, \\ 4a-4c. \quad \mu = 0: & \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap + \langle \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u \rangle, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a. \quad \sigma = 0: & \quad \mathfrak{g}_0^\cap = \langle \partial_t, 2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u \rangle, \\ b. \quad \sigma = 1: & \quad \mathfrak{g}_1^\cap = \langle \partial_t, e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u) \rangle, \\ c. \quad \sigma = -1: & \quad \mathfrak{g}_{-1}^\cap = \langle \partial_t, \cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u \rangle. \end{aligned}$$

Випадки $\sigma = 1$ і $\sigma = -1$ зводяться до випадку $\sigma = 0$ з таким же значенням функції $\mu = \mu(x)$ додатковими перетвореннями еквівалентності $\tilde{t} = \frac{1}{2}e^{2t}$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = e^t u$ та $\tilde{t} = \operatorname{tg} t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u \cos t$, відповідно.

З леми 4.19 і леми 4.20 випливає, що сингулярних розширень лівської симетрії в класі $\mathcal{W}_1$ більше немає.

Зауваження 4.21. Групоїд класу рівнянь вигляду (4.43) з $\varepsilon = \pm 1$ і $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ можна зобразити у вигляді (1.1), де параметр σ відіграє роль γ , Φ_0 є тотожним перетворенням змінних (t, x, u) , а Φ_1 і Φ_{-1} є перетворенням з сімей T2a і T26, відповідно. Оскільки цей клас є підкласом класу $\mathcal{W}_{12}$, отриманий калібруванням довільних елементів $\mathcal{W}_{12}$ перетвореннями еквівалентності, то групоїд еквівалентності класу $\mathcal{W}_{12}$ також має подібну структуру. Це також має місце для класу рівнянь вигляду (4.43) з $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ і $\sigma \in \mathbb{R}$.

4.2.6. Класифікація підходящих підалгебр. Група еквівалентності $G^\cap$ і алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ допускають споріднені зображення у вигляді напівпрямого добутку і напівпрямой суми, $G^\sim = \hat{G}^\cap \ltimes G_{\text{ess}}^\sim$ і $\mathfrak{g}^\sim = \hat{\mathfrak{g}}^\cap \ltimes \mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, відповідно. Тут $\hat{G}^\cap = \{\mathcal{P}^t(c_0) \mid c_0 \in \mathbb{R}\}$ — нормальна підгрупа групи $G^\sim$ асоційована зі спільною групою інваріантності $G^\cap$ рівнянь з класу (4.16), $G_{\text{ess}}^\sim$ — підгрупа групи $G^\sim$, що складається з перетворень вигляду (4.9) з $c_0 = 0$ й ефективно діє на клас (4.16), $\hat{\mathfrak{g}}^\cap = \langle \mathcal{P}^t \rangle$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, що відповідає ядру алгебри $\mathfrak{g}^\cap$, а $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim = \langle \mathcal{D}^u, \mathcal{D}^t, \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, яка є “суттєвою” частиною алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ з точки зору розширення лівської симетрії в класі (4.16). Позначимо через π проекцію простору з координатами (t, x, u, f, g) на простір з координатами (t, x, u) , а через $\pi_* Q$ — підняття проективного векторного поля Q в просторі з координатами (t, x, u, f, g) за допомогою π . Підалгебру $\mathfrak{a}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ називають підходящою, якщо її проекція $\pi_* \mathfrak{a}$ є максимальною алгеброю лівської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ рівняння $\mathcal{L}_\theta$ з класу (4.16). Будь-яка підходяща підалгебра $\mathfrak{a}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ повинна містити $\hat{\mathfrak{g}}^\cap$ як ідеал. Тому її можна також зобразити у вигляді напівпрямой суми $\mathfrak{a} = \hat{\mathfrak{g}}^\cap \ltimes \mathfrak{s}$, де $\mathfrak{s}$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$. Назвемо підалгебру $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ *підходящою*, якщо $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim \cap \mathfrak{a}$ для підходящої підалгебри $\mathfrak{a}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$. Підходящі підалге-

бри $\mathfrak{a}_1$ і $\mathfrak{a}_2$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ $G^\sim$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні підалгебри $\mathfrak{s}_1$ і $\mathfrak{s}_2$ алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентні. Таким чином класифікація розширень ліівської симетрії індукованих підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ з точністю до $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентності зводиться до класифікації прийнятних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ з точністю до $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентності. Для отримання такої класифікації потрібно порахувати приєднану дію групи $G_{\text{ess}}^\sim$ на алгебрі $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$. Оскільки ця алгебра є нескінченновимірною, ці обчислення можна виконати через підняття векторних полів $\mathcal{D}^u$, $\mathcal{D}^t$, $\mathcal{D}(\zeta)$ і $\mathcal{Z}(\chi)$, що складають базис $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, елементарними перетвореннями еквівалентності з групи $G_{\text{ess}}^\sim$, тобто перетвореннями $\mathcal{D}^t(c_1)$, $\mathcal{G}(\psi)$, $\mathcal{D}(\varphi)$ і $\mathcal{D}^u(c_2)$, див. підрозділ 4.2.2. Іншими словами використовуємо звичайне правило перетворення векторних полів при точкових перетвореннях [54, 102], таким чином отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_*(\psi)\mathcal{D}^u &= \mathcal{D}^u - \mathcal{Z}(\psi), & \mathcal{G}_*(\psi)\mathcal{D}(\zeta) &= \mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\zeta\psi_x - \tfrac{1}{2}\zeta_x\psi), \\ \mathcal{D}_*^u(c_2)\mathcal{Z}(\chi) &= c_2\mathcal{Z}(\chi), & \mathcal{D}_*(\varphi)\mathcal{Z}(\chi) &= \mathcal{Z}(|\hat{\varphi}_x|^{-1/2}\chi(\hat{\varphi})), \\ \mathcal{D}_*(\varphi)\mathcal{D}(\zeta) &= \mathcal{D}(\zeta(\hat{\varphi})/\hat{\varphi}_x),\end{aligned}$$

де $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x)$ — обернена до φ функція.

Усі векторні поля з $\pi_*\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ тотожно задовольняють визначальні рівняння для ліівських симетрій рівнянь з класу (4.16), окрім рівнянь (4.31) і (4.32). Останній два рівняння призводять до обмежень на підходящі підалгебри алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$.

Лема 4.22. $\mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}^u, \mathcal{Z}(\chi) \rangle = \mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}^t \rangle = \{0\}$ для будь-якої підходящої підалгебри $\mathfrak{s}$.

Доведення. Припустимо, що підходяща підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ містить векторне поле $Q = b\mathcal{D}^u + \mathcal{Z}(\chi)$, причому $b \neq 0$ або $\chi \neq 0$. Тоді π_*Q є оператором ліівської симетрії для рівняння $\mathcal{L}_\theta$ з класу (4.16). Підставляючи компоненти векторного поля π_*Q у визначальні рівняння (4.31) і (4.32), маємо наступний умови на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$:

$$(bu + \chi)f_u = 0, \quad (bu + \chi)g_u = bg - \chi_{xx}f.$$

Тоді $f_u = 0$ і $g_{uu} = 0$, якщо $b \neq 0$ або $\chi \neq 0$. Це суперечить означенню класу (4.16).

Аналогічно, умова $\pi_* \mathcal{D}^t \in \mathfrak{g}_\theta$ дає рівняння $f = 0$, яка також є сумісною з означенням класу (4.16).

Отже, будь-яка підходяща підалгебра не містить векторного поля розглянутого вигляду. $\square$

Лема 4.23. $\dim(\mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle) \in \{0, 1, 3\}$ для будь-якої підходящої підалгебри $\mathfrak{s}$.

Доведення. Припустимо, що $\mathfrak{s}$ — підходяща підалгебра $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ і $\dim(\mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle) \geq 2$. Це означає, що підалгебра $\mathfrak{s}$ містить щонайменше два векторних поля $Q^i = \mathcal{D}(\zeta^i) + \mathcal{Z}(\chi^i)$, де функції ζ^i , $i = 1, 2$, лінійно незалежні в силу леми 4.22. Іншими словами проекції $\pi_* Q^i$ векторних полів Q^i разом є операторами ліівської симетрії рівняння з класу (4.16). Через W позначимо Вронськіан функцій ζ^1 і ζ^2 , $W = \zeta^1 \zeta_x^2 - \zeta^2 \zeta_x^1$. $W \neq 0$, оскільки функції ζ^1 і ζ^2 лінійно незалежні.

Підстановка коефіцієнтів операторів $\pi_* Q^i$ в рівняння (4.31) дає два рівняння на функцію f :

$$2\zeta^i f_x + (\zeta_x^i u + 2\chi^i) f_u = 4\zeta_x^i f. \quad (4.44)$$

Домножуємо рівняння (4.44) з $i = 1$ на ζ^2 і віднімаємо результат від рівняння (4.44) з $i = 2$ домноженого на ζ^1 . Розділивши отримане рівняння на W , отримаємо звичайне диференціальне рівняння $(u + \beta) f_u = 4f$, де $\beta = \beta(x) := 2(\zeta^1 \chi_x^2 - \zeta^2 \chi_x^1)/W$ і змінна x відіграє роль параметра. Можна покласти $\beta = 0$ за допомогою перетворення еквівалентності $\mathcal{Z}(-\beta)$. Дійсно, це перетворення зберігає вигляд векторних полів Q^i , тільки змінюючи значення функціональних параметрів χ^i . Зокрема, воно не впливає на лінійну незалежність функцій ζ^i . Інтегруючи наведене вище рівняння для $\beta = 0$, маємо, що $f = \alpha u^4$, де $\alpha = \alpha(x)$ — ненульова функція змінної x . Зважаючи на виведену форму f , розщеплення рівняння (4.44) за u

призводить до умов $\zeta^i \alpha_x = 0$ і $\chi^i \alpha = 0$, тобто $\alpha_x = 0$ і $\chi^i = 0$. Сталу α можна відкалібрувати $\alpha = \pm 1$ перетвореннями еквівалентності.

Аналогічним чином розглянемо рівняння (4.32), враховуючи обмеження множина на параметр функції і вигляд функції f . Для кожного Q^i , рівняння (4.32) дає рівняння на g ,

$$2\zeta^i g_x + \zeta_x^i u g_u = \zeta_x^i g - \zeta_{xxx}^i \alpha u^5. \quad (4.45)$$

Знову домножуємо рівняння (4.45) з $i = 1$ на ζ^2 і віднімаємо отримане рівняння з рівняння (4.45) з $i = 2$ домножене на ζ^1 , ділимо результат на W і таким чином отримуємо $u g_u = g + \mu^0 u^5$, де $\mu^0 = \mu^0(x) := -\alpha(\zeta^1 \zeta_{xxx}^2 - \zeta^2 \zeta_{xxx}^1)/W$ і змінна x знову відіграє роль параметра. Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо $g = \mu^0 u^5/4 + \mu^1 u$, де $\mu^1 = \mu^1(x)$ — гладка функція x . Параметр функцію μ^1 можна занулити перетворенням еквівалентності $\mathcal{D}(\varphi)$, де функція $\varphi = \varphi(x)$ — розв'язок рівняння $\alpha(2\varphi_{xxx}\varphi_x - \varphi_{xx}^2) + \mu^1 \varphi_x^2 = 0$. Підставляючи знайдену форму g в рівняння (4.45) і розщеплюючи відносно u , знаходимо, що $\mu_x^1 = 0$, $\zeta_{xxx}^i = 0$. Отже, будь-яке рівняння з класу (4.16), яке допускає (щонайменше) два лінійно незалежних векторних поля $\pi_* Q^i$, насправді допускає точно три лінійно незалежних векторних поля такого вигляду і є $G^\sim$ -еквівалентним рівнянню $u_{tt} = \pm u^4 u_{xx} + \mu^1 u$, де μ^1 — це стала, яку можна відкалібрувати в ± 1 , якщо вона ненульова. $\square$

Рівняння виду $u_{tt} = \pm u^4 u_{xx}$, для який $\mu^1 = 0$, допускає додаткове розширення лівської симетрії.

Наслідок 4.24. *Існують лише два $G^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення лівської симетрії в класі (4.16), де відповідні алгебри лівської інваріантності містять щонайменше два лінійно незалежний векторних поля вигляду $\pi_* Q^i$ з $Q^i = \mathcal{D}(\zeta^i) + \mathcal{Z}(\chi^i)$,*

$$14. u_{tt} = \varepsilon u^4 u_{xx} + \varepsilon' u: \quad \mathfrak{g}^{\max} = \mathfrak{g}^\cap + \pi_* \langle \mathcal{D}(1), \mathcal{D}(x), \mathcal{D}(x^2) \rangle,$$

$$19. u_{tt} = \varepsilon u^4 u_{xx}: \quad \mathfrak{g}^{\max} = \mathfrak{g}^\cap + \pi_* \langle \mathcal{D}(1), \mathcal{D}(x), \mathcal{D}(x^2), \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}^t \rangle$$

де $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$.

Наслідок 4.24 дає класифікацію підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$ розмірність перетину яких з $\langle \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle$ не менша за два. Тому продовжимо обчислення нееквівалентних підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$, що містять не більше одного лінійно незалежного векторного поля вигляду $\mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\chi)$. В силу лема 4.22 це очевидно, що розмірність такої підалгебри не може бути більша за три. Оберемо кандидатів для таких підалгебр, використовуючи тільки обмеження для підходящих підалгебр, наведених в лемі 4.22.

Лема 4.25. *Повний список $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -нееквівалентних підходящих одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$ складається з підалгебр*

$$\langle 2\mathcal{D}^u - q\mathcal{D}^t + 2\mathcal{D}(\delta) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}(1) \rangle, \quad (4.46)$$

де $\delta \in \{0, 1\}$, а q — довільна стала.

Зауваження 4.26. В лемі 4.25 і наступних двох лемах виберемо такі значення параметрів в базисних елементах підходящих підалгебр серед можливих з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності, щоб відповідні рівняння з класу $\mathcal{W}$ мали прості форми.

Лема 4.27. *З точністю до $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -еквівалентності, будь-яка підходяща двовимірна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$, що містить хоча б одне лінійно незалежне векторне поле вигляду $\mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\chi)$, міститься у переліку:*

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{D}^u - \mathcal{D}(p), \mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x), \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2) \rangle, \\ &\langle a_1\mathcal{D}^u + a_2\mathcal{D}^t + a_3\mathcal{D}(x) + \mathcal{Z}(\delta), \mathcal{D}(1) \rangle, \end{aligned} \quad (4.47)$$

де p, a_1, a_2, a_3, δ — сталі, що задовольняють умови $p \neq 0$, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, $(a_2, a_3) \neq (0, 0)$ і $(a_1, a_3, \delta) \neq (0, 0, 0)$. Завдяки калібруванню першого базисного елемента і $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -еквівалентності можна також вважати, що одна зі сталих a_1, a_2, a_3 дорівнює одиниці, а також $(2a_1 + a_3)\delta = 0$, причому $\delta \in \{0, 1\}$.

Лема 4.28. *З точністю до $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентності будь-яка підходяща тривимірна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, що містить хоча б одне лінійно незалежне векторне поле вигляду $\mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\chi)$, міститься у переліку:*

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{D}^u + p_1 \mathcal{D}(x), \mathcal{D}^t + p_2 \mathcal{D}(x), \mathcal{D}(1) \rangle, \\ &\langle \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x) + \mathcal{Z}(d), \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2), \mathcal{D}(1) \rangle, \end{aligned} \quad (4.48)$$

де p_1, p_2, d — сталі, що задовольняють умову $p_1 p_2 \neq 0$.

4.2.7. Регулярні розширення лівської симетрії. Для кожного векторного поля $\mathcal{Q}$ з алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ підстановка компоненти $\pi_* \mathcal{Q}$ в систему (4.31)–(4.32) призводить до умови на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$, для якого рівняння $\mathcal{L}_\theta$ інваріантне відносно $\pi_* \mathcal{Q}$. Ось чому рівняння з класу (4.16), що є інваріантним відносно проекції $\pi_* \mathfrak{s}$ підходящої підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на простір (t, x, u) , можна описати таким способом: для кожного базисного елемента $\mathcal{Q}$ підалгебри $\mathfrak{s}$, підставимо компоненти $\pi_* \mathcal{Q}$ в рівняння (4.31) і (4.32). Усі рівняння, виведені за допомогою усіх векторних полів з базису $\mathfrak{s}$, призводять до системи (квазі)лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку на довільний елементи f і g , які треба розв’язати. Водночас перевіряємо, чи проекція $\pi_* \mathfrak{s}$ є дійсно максимальною алгеброю лівської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_\theta$ для отриманих значення набору довільних елементів $\theta = (f, g)$.

Кожна алгебра, наведена в лемі 4.25 дійсно підходяща одновимірна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ і призводить до простої незачепленої системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку на f і g . Відповідний список рівнянь з класу (4.16), що мають одновимірні розширення лівської

симетрії алгебри ядра $\mathfrak{g}^\cap$ і пов'язані з алгеброю $\mathfrak{g}^\sim$, є таким:

1. $2\mathcal{D}^u - q\mathcal{D}^t + 2\mathcal{D}(\delta)$: $u_{tt} = |u|^q(\hat{f}(\omega)u_{xx} + \hat{g}(\omega)u)$,
2. $\mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2)$: $u_{tt} = e^x(\hat{f}(u)u_{xx} + \hat{g}(u))$,
3. $\mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2)$: $u_{tt} = e^u(\hat{f}(x)u_{xx} + \hat{g}(x))$,
4. $\mathcal{D}(1)$: $u_{tt} = \hat{f}(u)u_{xx} + \hat{g}(u)$,

де $\omega := x - \delta \ln |u|$, $\delta \in \{0, 1\}$ і q — довільні сталі. Тут і надалі, в кожному випадку наводимо лише ті векторні поля, що поширюють базис $(\mathcal{P}^t)$ ідеалу $\hat{\mathfrak{g}}^\cap$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на базис відповідної підалгебри алгебри $\mathfrak{g}^\sim$.

Обчислення, пов'язані з двовимірними розширеннями, більш складні. Наведемо спочатку результат.

9. $\mathcal{D}^u - \mathcal{D}(p)$, $\mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2)$, $p \neq 0$: $u_{tt} = \pm e^x |u|^p (u_{xx} + \nu u)$,
10. $\mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2)$: $u_{tt} = \pm x^2 e^u u_{xx} + \nu e^u$,
11. $-\mathcal{D}^u + 2\mathcal{D}^t + 2\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}(1)$: $u_{tt} = \hat{f}(u)u_{xx}$,
12. $(1 - q)\mathcal{D}^u + 2q\mathcal{D}^t - 2(1 - q)\mathcal{D}(x) - \mathcal{Z}(4)$, $\mathcal{D}(1)$:
 $u_{tt} = \pm e^u u_{xx} + \varepsilon' e^{qu}$,
13. $(3 - p + q)\mathcal{D}^u + 2(1 - q)\mathcal{D}^t + 2(1 + p - q)\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}(1)$:
 $u_{tt} = \pm |u|^p u_{xx} + \varepsilon' |u|^q$.

Зв'язки для сталих і функціональних параметрів, що накладені умовою максимальності для відповідних розширень і їх нееквівалентністю, обговорено після теореми 4.11.

Випадки 9 і 10 асоційовані, відповідно, з першою і другою сім'ями підалгебр наведено в лемі 4.27. У обох випадках ν є довільною сталою. Зауважимо, що довільний ненульовий сталий множник у виразі для довільний елемента f , що виникає в процесі інтегрування рівняння на f , можна завжди відкалібрувати до ± 1 , наприклад, розтягом за t .

Третя підалгебра з лемі 4.27 насправді зображує мультипараметричну сім'ю кандидатів для розширення, яку розбито в процесі побудови інваріантних рівнянь на випадки 11–13. Не всі значення параметрів дають розширення. Додаткові обмеження на параметри впливають з умови

сумісності асоційованої системи на довільний елементи,

$$\begin{aligned} f_x &= 0, & ((a_1 + \tfrac{1}{2}a_3)u + \delta)f_u &= pf, \\ g_x &= 0, & ((a_1 + \tfrac{1}{2}a_3)u + \delta)g_u &= qg, \end{aligned}$$

з додатковими умовами $f \neq 0$ і $(f_u, g_{uu}) \neq (0, 0)$ і вимогою, що розмірність розширення не перевищує два. Введемо позначення $p = 2(a_3 - a_2)$ і $q = a_1 + \frac{1}{2}a_3 - 2a_2$.

Наведене вище розбиття виконано в такий спосіб. Якщо $a_3 = -2a_1$ і $\delta = 0$, з нерівності $f \neq 0$ випливає, що $p = 0$, тобто $a_2 = a_3$. Оскільки a_1 , a_2 і a_3 не можуть водночас дорівнювати нулю, знаходимо, що $q \neq 0$ і тому $g = 0$. Домножуючи перший базисний елемент на $-a_1^{-1}$, маємо $a_1 = -1$, що дає випадок 11. Для $a_3 = -2a_1$ і $\delta = 1$ маємо $a_2 = -q/2$, $a_3 = (p - q)/2$ і $a_1 = -(p - q)/4$. Параметр p має бути ненульовим, оскільки в іншому випадку отримаємо рівняння Ліувілля, чия максимальна алгебра ліївської інваріантності є нескінченновимірною. Додатково домножуємо перший базисний елемент на -4 і калібруємо p перетворенням $\mathcal{D}^u(c_2)$ для деякого c_2 в 1, таким чином отримуємо випадок 12. Випадок 13 відповідає умові $a_3 \neq -2a_1$. Калібрування першого базисного елемента дозволяє зробити $a_1 + \frac{1}{2}a_3 = 4$, тоді $a_2 = 2(1 - q)$, $a_3 = 2(1 + p - q)$, $a_3 = (3 - p + q)$. В обох випадках 12 і 13 параметр ε' ненульовий (інакше розмірність розширення більша за два) і його можна відкалібрувати в ± 1 розтягами змінних t і x .

Розглянемо кандидатів для тривимірних розширень, наведених у лемі 4.28. З сумісності асоційованої системи довільних елементів, доповнених нерівністю $f \neq 0$, випливає $p_1 = 2(p_2 - 1)$ і $d = -4$ для першої і другої підалгебри з лемі 4.28, відповідно. Загальні розв'язки цієї системи з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності — $(f, g) = (\pm|u|^p, 0)$ і $(f, g) = (\pm e^u, 0)$. Це

дає такі випадки розширення лівської симетрії:

$$16. \quad (p-4)\mathcal{D}^u - 2p\mathcal{D}(x), \quad (p-4)\mathcal{D}^t - 4\mathcal{D}(x), \quad \mathcal{D}(1), \quad p \neq 0, 4:$$

$$u_{tt} = \pm |u|^p u_{xx},$$

$$17. \quad \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x) - \mathcal{Z}(4), \quad \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2), \quad \mathcal{D}(1):$$

$$u_{tt} = \pm e^u u_{xx}.$$

Тут $p := 4(p_2-1)/p_2 \neq 4$, оскільки для $p = 4$ відповідне рівняння допускає оператори лівської симетрії $\pi_*\mathcal{D}(x)$ і $\pi_*\mathcal{D}(x^2)$. Рівняння з класу (4.16), що є інваріантним відносно двох лінійно незалежних векторних полів вигляду π_*Q^i , де $Q^i = \mathcal{D}(\zeta^i) + \mathcal{Z}(\chi^i)$, прокласифіковані у наслідку 4.24. Отже, $G^\sim$ -нееквівалентні регулярні розширення лівської симетрії в класі (4.16) вичерпуються випадками 1–4, 9–13, 14Г, 16, 17 і 19Г.

4.2.8. Висновки. Повну групову класифікацію класу $\mathcal{W}$ (1+1)-вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівняння вигляду (4.16) виконано з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності й до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності, використовуючи нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь. Результати класифікації наведено в теоремі 4.11. Ключовим моментом класифікації є побудова породжувальної множини для групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, див. теорему 4.12.

Порівняємо отримані результати з результатами для споріднених класів диференціальних рівнянь. Задачу групової класифікації для класу квазілінійних хвильових рівнянь загального вигляду

$$u_{tt} = u_{xx} + g(t, x, u, u_x) \tag{4.49}$$

було розв'язано в роботі [199, 200]. Клас (4.49) розбитий на чотири (нормалізовані) підкласи, симетрії кожного з яких прокласифіковано окремо. Один з цих підкласів, який позначимо через $\mathcal{K}$, виокремлено з класу (4.49) зв'язком $g_{u_x} = 0$. Групову класифікацію підкласу $\mathcal{K}$ виконано в параграфі 6 роботи [200] і більшу частину класифікаційних результатів

зібрано в таблиця 1, див. також параграф V і таблицю I в роботі [199]. Випадки $1_{\delta=1, p=2, \hat{f}=1}$, $2_{\hat{f}=1}$, $5a_{\varepsilon=1}$, $6a_{\varepsilon=1}$ і $18a_{\varepsilon=1}$ таблиці 4.6 цього підрозділу дисертації відповідає випадкам 3, 2, 8, 5 і 9 таблиці 1 в [200], рівняння Ліувілля виникає у випадку 20 в таблиця 4.6 і як рівняння (5.4) в [200], Цей вичерпує всі можливі аналогічні випадки. Випадок $1_{\delta=1, p \neq 2, \hat{f}=1}$ таблиці 4.6 пропущено в роботах [199, 200]. Насправді, кожний з випадків 3 і 4 таблиці 1 в [200] має містити на один сталий параметр більше, який не можна прибрати перетвореннями еквівалентності підкласу $\mathcal{K}$. В роботах [16, 17] було прокласифіковано квазілінійні еліптичні рівняння

$$u_{tt} + u_{xx} = F(t, x, u, u_t, u_x)$$

чиї максимальні алгебри ліївської інваріантності скінченновимірні. Випадки $6a$, 7 , $5a$ і $18a$ таблиці 4.6 є обмеженнями на клас $\mathcal{W}$ перших випадків теорем 3.1 і 3.2 з [16] і випадків “ $A_{3,8}$ -інваріантні рівняння (1)” і “ $A_{4,10}$ -інваріантні рівняння (3)” з роботи [17]. Інших споріднених випадків в роботах [16, 17] і цьому підрозділі дисертації нема.

Більш важливими, ніж розв’язок обговорених вище специфічних класифікаційних задач, є розвиток і модифікація загальний понять і технік, а також їх комбінування, реалізовані в цьому розділі.

Розбиття класів диференціальних рівнянь на підкласи, що індукують розбиття відповідних групоїдів еквівалентності, регулярно застосовують в процесі дослідження групоїдів еквівалентності [54, 254, 261]. Маємо два розбиття на класи, $\mathcal{W}_{\text{gen}} = \mathcal{W} \sqcup \mathcal{W}_{\text{lin}}$ і $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{W}_1$, що дають розбиття групоїдів

$$\mathcal{G}_{\text{gen}}^{\sim} = \mathcal{G}^{\sim} \sqcup \mathcal{G}_{\text{lin}}^{\sim} \quad \text{і} \quad \mathcal{G}^{\sim} = \mathcal{G}_0^{\sim} \sqcup \mathcal{G}_1^{\sim},$$

див. зауваження 4.8 і твердження 4.16. Усі наведені вище класи і підкласи мають таку саму групу еквівалентності $G^{\sim}$. Однак, на відміну від прикладів, наведених раніше в літературі, підкласи з цих двох розбиттів не мають кращих нормалізаційних властивостей, ніж їх надкласи. Ось чому

властивість нормалізованості не виправдовує розбиття в цьому випадку, яке скоріше виведено через прямий аналіз визначальних рівнянь для допустимих перетворень.

Маємо побудовані з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності породжувальні множини $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ групоїдів еквівалентності $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$, що складаються, відповідно, з сімей $\mathbf{T1}|_{\mathcal{W}_0}$ і $\mathbf{T3-T9}$ і сімей $\mathbf{T1}|_{\mathcal{W}_1}$ і $\mathbf{T2}$, наведених в теоремі 4.12.

Важливим моментом є встановлення бієктивного функтора між двома категоріями, що є групоїдами еквівалентності $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^\sim$ і $\mathcal{G}_{01g_2}^\sim$ підкласів $\mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ і $\mathcal{W}_{01g_2}$ рівнянь (4.39) і (4.42) з $g^1 \neq 0$, фіксованим $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$ і фіксованою функцією g^2 , що задовольняє рівняння $g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2$, відповідно. Ізоморфізм з $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^\sim$ в $\mathcal{G}_{01g_2}^\sim$ задається перетвореннями

$$\begin{aligned} \varepsilon &\mapsto \check{\varepsilon} = \varepsilon, & g^1 &\mapsto \check{g}^1 = g^1, \\ \Phi: \tilde{t} = T, \tilde{x} = X, \tilde{u} = u - \ln |X_x^2 - \varepsilon X_t^2| &\mapsto \\ \check{\Phi}: \tilde{t} = T, \tilde{x} = X, \tilde{u} = u. \end{aligned}$$

Фіксування ε' і g^2 є природним, оскільки значення цих параметрів не можна змінити допустимими перетвореннями в класах $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ з точністю калібрувального перетворення еквівалентності пересування ненульового сталого множника між довільними елементами g^1 і g^2 в класі $\mathcal{W}_1$, яким можна знехтувати. Отже, розбиття класів $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ на підкласи, асоційовані з фіксованими значеннями ε' і g^2 , $\mathcal{W}_0 = \sqcup_{\varepsilon'} \mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ і $\mathcal{W}_1 = \sqcup_{g^2} \mathcal{W}_{01g^2}$, індукують розбиття відповідних групоїдів еквівалентності,

$$\mathcal{G}_0^\sim = \sqcup_{\varepsilon'} \mathcal{G}_{00\varepsilon'}^\sim \quad \text{і} \quad \mathcal{G}_1^\sim = \sqcup_{g^2} \mathcal{G}_{01g^2}^\sim.$$

Жодне рівняння з класу $\mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ не пов'язане з певним рівнянням з класу $\mathcal{W}_{01g_2}$ точковим перетвореннями. Іншими словами, функтор з $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^\sim$ в $\mathcal{G}_{01g_2}^\sim$ не пов'язаний з сім'єю точкових перетворень, що породжує відображення з $\mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ на $\mathcal{W}_{01g_2}$ або навпаки. Однак він дозволяє легко отримати групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{01g_2}^\sim$ з групоїду еквівалентності $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^\sim$.

Необхідні передумови для класифікації сингулярної розширень лівської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_1$ задано класифікацією допустимих перетво-

рень в цьому підкласі. Класифікацію регулярних розширень ліївської симетрії виконано в рамках алгебраїчного методу, її зведено до попередньої групової класифікації підкласу $\mathcal{W}$. Використано оптимізовану версію цього методу, що включає класифікацію кандидатів на роль підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, враховуючи основні обмеження на розмірність і структуру таких підалгебр і завершення вибору підходящих підалгебр в процесі побудови відповідних рівнянь, що допускають розширення ліївської симетрії.

4.3. Ліївські симетрії $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака

У 2004–2005 роках перший дійсно двовимірний твердий матеріал, графен, отримали у лабораторних умовах [228, 229, 339]. Пізніше в 2010 А. Гейма і К. Новосьолова нагородили Нобелівською премією з фізики “за експерименти з двовимірним матеріалом графеном”. При цьому зазначалось, що в графені “транспорт електронів описується релятивістським рівнянням Дірака” [228]. У роботі [339] було розглянуто нові нелінійні явища при конденсації Бозе–Ейнштейна на оптичних решітках зі структурою бджолиних стільників, які також моделюються нелінійними рівняннями Дірака у розмірності $2+1$, при цьому вигляд нелінійності виникають як результат взаємодії між бозонами. Також було показано, що при конденсації Бозе–Ейнштейна ліївська симетрія модельних рівнянь, породжена алгеброю Пуанкаре, порушується. Певні точні стаціонарні розв’язки $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака побудовано в роботі [136] (див. також [138]). Симетріям рівнянь Дірака присвячено монографії [31, 120].

Зважаючи на важливість $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака, дослідимо ліївські симетрії такого класу рівнянь

$$(i\sigma_2\partial_t + \sigma_1\partial_x - \sigma_3\partial_y)\Psi = \Phi, \quad \text{де} \quad \Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

$u = u(t, x, y)$, $v = v(t, x, y)$ — залежні змінні, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ — довільні гладкі функції, які не є водночас лінійними за u і v , σ_1 , σ_2 , σ_3 — матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (4.50) можна записати у вигляді зачепленої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\begin{aligned} v_t + v_x - u_y &= F(u, v), \\ u_t - u_x - v_y &= -G(u, v). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Добре відомо, що рівняння Дірака описує комплексну хвильову функцію. Але для деяких фізичних задач можна обмежитись дійсними розв'язками, як, зокрема, в теорії масивних нейтрино. В цьому випадку використовують спеціальне зображення Майорана матриць Дірака. У цьому підрозділі розгляд також обмежено на випадок дійсної хвильової функції.

4.3.1. Ліівські симетрії. Ліівські симетрії систем з класу (4.51) шукатимемо, використовуючи класичний підхід [23, 235] у поєднанні з алгебраїчною технікою. Фіксуємо систему $\mathcal{L}$ з класу (4.51) і шукаємо векторні поля вигляду

$$\begin{aligned} Q &= \xi^t(t, x, y, u, v)\partial_t + \xi^x(t, x, y, u, v)\partial_x + \xi^y(t, x, y, u, v)\partial_y \\ &\quad + \eta^u(t, x, y, u, v)\partial_u + \eta^v(t, x, y, u, v)\partial_v, \end{aligned}$$

що породжують однопараметричні групи ліівської симетрії рівняння $\mathcal{L}$. Ці векторні поля утворюють максимальну алгебру ліівської інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(\mathcal{L})$ системи $\mathcal{L}$. Будь-яке векторне поле Q задовольняє критерій інфінітезимальної інваріантності, а саме

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(v_t + v_x - u_y - F(u, v))|_{\mathcal{L}} &= 0, \\ Q^{(1)}(u_t - u_x - v_y + G(u, v))|_{\mathcal{L}} &= 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Після виключення u_t і v_t за допомогою (4.51), рівняння (4.52) стають тотожностями, ліві частини яких є многочленами змінних u_x, u_y, v_x і v_y . За різними степенями цих змінних проводимо розщеплення (4.52). Таким чином одержуємо двадцять чотири визначальні рівняння на коефіцієнти $\xi^t, \xi^x, \xi^y, \eta^u, \eta^v$, що містять також довільні елементи класу. Обчислення перевірено з використанням пакету символьних обчислень GeM для обчислення симетрій і законів збереження диференціальних рівнянь [89]. Розв'язання тих визначальних рівнянь, що не містять F і G , дають вигляд коефіцієнтів оператора Q :

$$\begin{aligned}\xi^t &= \frac{1}{2}\alpha_0(t^2 + x^2 + y^2) + (\delta + \alpha_1x + \alpha_2y)t + \beta_1y + \beta_2x + \rho_0, \\ \xi^x &= \frac{1}{2}\alpha_1(t^2 + x^2 - y^2) + (\delta + \alpha_0t + \alpha_2y)x - \beta_0y + \beta_2t + \rho_1, \\ \xi^y &= \frac{1}{2}\alpha_2(t^2 - x^2 + y^2) + (\delta + \alpha_0t + \alpha_1x)y + \beta_0x + \beta_1t + \rho_2, \\ \eta^u &= \lambda u + \varphi - \frac{1}{2}(\beta_2 + \alpha_0x + \alpha_1t)u \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha_2(x - t) - (\alpha_0 + \alpha_1)y - (\beta_0 + \beta_1))v, \\ \eta^v &= \lambda v + \psi + \frac{1}{2}(\beta_2 + \alpha_0x + \alpha_1t)v \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_2(x + t) + (\alpha_0 - \alpha_1)y + (\beta_0 - \beta_1))u,\end{aligned}$$

де $\alpha_i, \beta_i, \rho_i, i = 0, 1, 2$, і δ — довільні сталі, λ, φ, ψ — довільний гладкі функції, що залежать від змінних t, x, y . Отже, загальний вигляд інфінітезимального оператора такий

$$Q = \chi + \alpha_i K^i + \beta_i J^i + \delta D + \rho_i P^i, \quad (4.53)$$

де $\alpha_i, \beta_i, \rho_i, i = 0, 1, 2$, і δ — довільний сталі й

$$\begin{aligned}\chi &= (\lambda u + \varphi)\partial_u + (\lambda v + \psi)\partial_v, \quad P^0 = \partial_t, \quad P^1 = \partial_x, \quad P^2 = \partial_y, \\ D &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad J^0 = x\partial_y - y\partial_x - \frac{1}{2}v\partial_u + \frac{1}{2}u\partial_v, \\ J^1 &= t\partial_y + y\partial_t - \frac{1}{2}v\partial_u - \frac{1}{2}u\partial_v, \quad J^2 = t\partial_x + x\partial_t - \frac{1}{2}u\partial_u + \frac{1}{2}v\partial_v, \\ K^0 &= \frac{1}{2}(t^2 + x^2 + y^2)\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y - \frac{1}{2}(xu + yv)\partial_u + \frac{1}{2}(xv - yu)\partial_v, \\ K^1 &= tx\partial_t + \frac{1}{2}(t^2 + x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y - \frac{1}{2}(tu + yv)\partial_u + \frac{1}{2}(yu + tv)\partial_v, \\ K^2 &= ty\partial_t + xy\partial_x + \frac{1}{2}(t^2 - x^2 + y^2)\partial_y + \frac{1}{2}(x - t)v\partial_u - \frac{1}{2}(x + t)u\partial_v.\end{aligned}$$

За індексами, що повторюються, відбувається підсумовування. Ненульові комутаційні співвідношення такі

$$\begin{aligned} [P^i, K^i] &= D, [P^0, J^1] = P^2, [P^0, J^2] = P^1, [P^1, J^0] = P^2, \\ [P^1, J^2] &= P^0, [P^2, J^0] = -P^1, [P^2, J^1] = P^0, [J^0, J^1] = J^2, \\ [J^0, J^2] &= -J^0, [J^1, J^2] = -J^1, [P^0, K^1] = J^2, [P^0, K^2] = J^1, \\ [P^1, K^0] &= J^2, [P^1, K^2] = -J^0, [P^2, K^0] = J^1, [P^2, K^1] = J^0, \end{aligned}$$

де $i = 0, 1, 2$. Тоді решта визначальних рівнянь, які містять функції F , G і їхні частинні похідні першого порядку за змінними u і v , мають вигляд

$$\begin{aligned} & \left[\left(\lambda - \frac{1}{2}(\beta_2 + \alpha_0 x + \alpha_1 t) \right) u - \frac{1}{2}(\alpha_2(t-x) + (\alpha_0 + \alpha_1)y + \beta_0 + \beta_1)v + \varphi \right] F_u \\ & + \left[\frac{1}{2}((\alpha_1 - \alpha_0)y - \alpha_2(x+t) + \beta_0 - \beta_1)u + \left(\lambda + \frac{1}{2}(\beta_2 + \alpha_0 x + \alpha_1 t) \right) v + \psi \right] F_v \\ & + \frac{1}{2}[\alpha_2(t-x) + (\alpha_1 + \alpha_0)y + \beta_0 + \beta_1]G \\ & + \left[(\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1)t + (\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_0)x + \alpha_2 y + \frac{1}{2}\beta_2 + \delta - \lambda \right] F \\ & + (\lambda_y + \alpha_2)u - (\lambda_t + \lambda_x + \alpha_1 + \alpha_0)v - \psi_t - \psi_x + \varphi_y = 0, \\ & \left[\left(\lambda - \frac{1}{2}(\beta_2 + \alpha_0 x + \alpha_1 t) \right) u - \frac{1}{2}(\alpha_2(t-x) + (\alpha_0 + \alpha_1)y + \beta_0 + \beta_1)v + \varphi \right] G_u \\ & + \left[\frac{1}{2}((\alpha_1 - \alpha_0)y - \alpha_2(x+t) + \beta_0 - \beta_1)u + \left(\lambda + \frac{1}{2}(\beta_2 + \alpha_0 x + \alpha_1 t) \right) v + \psi \right] G_v \\ & + \frac{1}{2}[\alpha_2(x+t) - (\alpha_1 - \alpha_0)y - \beta_0 + \beta_1]F \\ & + \left[(\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_1)t + (\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_0)x + \alpha_2 y - \frac{1}{2}\beta_2 + \delta - \lambda \right] G \\ & + (\lambda_t - \lambda_x - \alpha_1 + \alpha_0)u - (\lambda_y + \alpha_2)v + \varphi_t - \varphi_x - \psi_y = 0. \end{aligned}$$

Ці рівняння називають класифікувальними рівняннями. Основна складність задачі групової класифікації полягає в тому, що класифікувальні рівняння треба водночас розв'язати для невизначених функцій і сталих у коефіцієнтах оператора Q і довільних елементів класу.

Алгебра ядра основних груп. Для того, щоб знайти ліївські симетрії, що допускаються будь-якою системою (4.51), розщепимо класифікувальні рівняння за довільними елементами й їхніми похідними. Цей призводить

до умов $\alpha_i = \beta_j = 0$, $i, j = 0, 1, 2$, і $\delta = \lambda = \varphi = \psi = 0$, а ρ^k , $k = 0, 1, 2$, — довільний сталі. Доведено твердження.

Лема 4.29. *Алгебра ядра основних груп лівської симетрії систем з класу (4.51) співпадає з тривимірною алгеброю $A^{\ker} = \langle P^0, P^1, P^2 \rangle$.*

Отже, будь-яка система з класу (4.51) є інваріантною відносно зсувів за змінними t, x, y .

Одновимірні розширення алгебри $A^{\max}$. Оскільки класифікувальні рівняння є досить складними, обмежимо розгляд розширеннями алгебри ядра $A^{\ker}$ на один оператор симетрії. Для цього візьмемо оператор лівської симетрії загального вигляду (4.53) і вимагаємо щоб Q і оператори з $A^{\ker}$ утворювали алгебру Лі, тобто $[A^{\ker}, Q] \in \langle A^{\ker}, Q \rangle$. Отже, мають виконуватись рівності

$$\begin{aligned} [P^0, X] &= \alpha_0 D + \alpha_1 J^2 + \alpha_2 J^1 + \chi_t = aX, \\ [P^1, X] &= \alpha_0 J^2 + \alpha_1 D - \alpha_2 J^0 + \chi_x = bX, \\ [P^2, X] &= \alpha_0 J^1 + \alpha_1 J^0 + \alpha_2 D + \chi_y = cX. \end{aligned}$$

З цього випливають дві можливості для Q

1. $(a, b, c) = (0, 0, 0) \Rightarrow Q = \delta D + \beta_i J^i + \chi,$
2. $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow Q = e^{at+bx+cy} \chi,$

де a, b, c — довільні дійсні сталі, $\chi = (\lambda u + \varphi)\partial_u + (\lambda v + \psi)\partial_v$, λ, φ, ψ — довільний сталі.

Випадок I. Якщо $Q = \delta D + \beta_i J^i + (\lambda u + \varphi)\partial_u + (\lambda v + \psi)\partial_v$, де λ, φ , і ψ — довільний сталі, то класифікувальні рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned} &[(2\lambda - \beta_2)u - (\beta_0 + \beta_1)v + 2\varphi] F_u + [(\beta_0 - \beta_1)u \\ &\quad + (2\lambda + \beta_2)v + 2\psi] F_v + (\beta_1 + \beta_0) G + (2\delta - 2\lambda + \beta_2) F = 0, \\ &[(2\lambda - \beta_2)u - (\beta_0 + \beta_1)v + 2\varphi] G_u + [(\beta_0 - \beta_1)u \\ &\quad + (2\lambda + \beta_2)v + 2\psi] G_v + (2\delta - 2\lambda - \beta_2) G + (\beta_1 - \beta_0) F = 0. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Ця система допускає точкові перетворення еквівалентності

$$\begin{aligned} u &= a_1 \tilde{u} + b_1 \tilde{v} + c_1, & v &= a_2 \tilde{u} + b_2 \tilde{v} + c_2, \\ F &= a_1 \tilde{F} + b_1 \tilde{G}, & G &= a_2 \tilde{F} + b_2 \tilde{G}, \end{aligned}$$

де $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$, — довільний сталі, причому $\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$.

Сталі параметри, що виникають у системі (4.54), змінюються під дією цих перетворень таким чином: $\tilde{\lambda} d = \tilde{d} \lambda$,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \frac{1}{2\Delta} \frac{\tilde{d}}{d} ((\beta_0 - \beta_1)(a_1^2 + b_1^2) + (\beta_0 + \beta_1)(a_2^2 + b_2^2) + 2\beta_2(a_1 a_2 + b_1 b_2)), \\ \tilde{\beta}_1 &= -\frac{1}{2\Delta} \frac{\tilde{d}}{d} ((\beta_0 - \beta_1)(a_1^2 - b_1^2) + (\beta_0 + \beta_1)(a_2^2 - b_2^2) + 2\beta_2(a_1 a_2 - b_1 b_2)), \\ \tilde{\beta}_2 &= \frac{1}{\Delta} \frac{\tilde{d}}{d} ((\beta_0 - \beta_1)a_1 b_1 + (\beta_0 + \beta_1)a_2 b_2 + \beta_2(a_1 b_2 + b_1 a_2)), \\ \tilde{\varphi} &= -\frac{1}{2\Delta} \frac{\tilde{d}}{d} [(\beta_0 - \beta_1)b_1 c_1 + (\beta_0 + \beta_1)b_2 c_2 + \beta_2(b_1 c_2 + c_1 b_2) \\ &\quad + 2\lambda(b_1 c_2 - c_1 b_2) + 2b_1 \psi - 2b_2 \varphi], \\ \tilde{\psi} &= \frac{1}{2\Delta} \frac{\tilde{d}}{d} [(\beta_0 - \beta_1)a_1 c_1 + (\beta_0 + \beta_1)a_2 c_2 + \beta_2(a_1 c_2 + c_1 a_2) \\ &\quad + 2\lambda(a_1 c_2 - c_1 a_2) + 2a_1 \psi - 2a_2 \varphi], \end{aligned}$$

де $\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$. Розглянувши можливості спрощення коефіцієнтів, робимо висновок, що існують лише три нееквівалентні значення наборів $(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$ в залежності від знаку $D = b_2^2 + b_1^2 - b_0^2$:

$$\begin{aligned} (0, 0, 1), & \text{ якщо } D > 0, \\ (1, 1, 0), & \text{ якщо } D = 0, \\ (1, 0, 0), & \text{ якщо } D < 0. \end{aligned}$$

Таким чином, достатньо розглянути чотири нееквівалентні набори сталих $(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\delta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$: 1. $(0, 0, 1, \delta', \lambda', 0, 0)$, 2. $(1, 0, 0, \delta', \lambda', 0, 0)$, 3. $(1, 1, 0, \delta', \lambda', 0, 0)$, 4. $(1, 1, 0, \delta', 0, \varphi', \psi')$. П'ятий набір, а саме 5. $(0, 0, 0, \delta', \lambda', 0, 0)$ виникає, коли $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.

Розгляньмо перший випадок, де $\beta_0 = \beta_1 = \varphi = \psi = 0$, $\beta_2 = 1$, δ і λ — довільні сталі, тоді система (4.54) має вигляд

$$\begin{aligned} (2\lambda - 1)uF_u + (2\lambda + 1)vF_v + (2\delta - 2\lambda + 1)F &= 0, \\ (2\lambda - 1)uG_u + (2\lambda + 1)vG_v + (2\delta - 2\lambda - 1)G &= 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Якщо $\lambda \neq 1/2$, то розв'язок системи (4.55) такий $F = u^{1+\frac{2\delta}{1-2\lambda}} \mathcal{F}(vu^{\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}})$, $G = u^{1+\frac{2\delta-2}{1-2\lambda}} \mathcal{G}(vu^{\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}})$ (випадок 1 табл. 4.7). Тут і надалі функції $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ — довільні гладкі функції своїх змінних. Якщо $\lambda = \frac{1}{2}$, то $F = v^{-\delta} \mathcal{F}(u)$, $G = v^{1-\delta} \mathcal{G}(u)$ (випадок 2 табл. 4.7).

У другому випадку система (4.54) не має дійсних розв'язків.

У третьому і четвертому випадках система (4.54) набуває вигляду

$$\begin{aligned} (\lambda u - v + \varphi)F_u + (\lambda v + \psi)F_v + (\delta - \lambda)F + G &= 0, \\ (\lambda u - v + \varphi)G_u + (\lambda v + \psi)G_v + (\delta - \lambda)G &= 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

де або $\varphi = \psi = 0$, або $\lambda = 0$. Результати інтегрування цієї системи представлені у випадках 3–5 табл. 4.7. У п'ятому випадку система (4.54) має вигляд

$$uF_u + vF_v + (\delta/\lambda - 1)F = 0, \quad uG_u + vG_v + (\delta/\lambda - 1)G = 0.$$

Її загальний розв'язок такий: $F = u^{1-\delta/\lambda} \mathcal{F}(v/u)$, $G = u^{1-\delta/\lambda} \mathcal{G}(v/u)$ (випадок 6 табл. 4.7).

Випадок II. Якщо $X = e^{at+bx+cy}((\lambda u + \varphi)\partial_u + (\lambda v + \psi)\partial_v)$, де $a, b, c, \lambda, \varphi, \psi$ — довільний сталі, причому $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, то система класифікувальних рівнянь стає незачепленою

$$\begin{aligned} (\lambda u + \varphi)F_u + (\lambda v + \psi)F_v - \lambda F + c(\lambda u + \varphi) - (a+b)(\lambda v + \psi) &= 0, \\ (\lambda u + \varphi)G_u + (\lambda v + \psi)G_v - \lambda G + (a-b)(\lambda u + \varphi) - c(\lambda v + \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Якщо $\lambda \neq 0$, то перетворення еквівалентності $\tilde{u} = \lambda u + \varphi$, $\tilde{v} = \lambda v + \psi$, $\tilde{F} = \lambda F$, $\tilde{G} = \lambda G$ відображають систему (4.57) в таку систему з $\tilde{\lambda} = 1$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$, чий загальний розв'язок дає випадок 7 табл. 4.7:

$$F = ((b+a)v - cu) \ln u + u \mathcal{F}(v/u), \quad G = ((b-a)u + cv) \ln u + u \mathcal{G}(v/u).$$

Табл. 4.7: Рівняння Дірака (4.51), що допускають щонайменше чотиривимірну алгебру лівської інваріантності.

№	Вид нелінійностей	Базисні оператори алгебри інваріантності
1	$F = u^{1+\frac{2\delta}{1-2\lambda}} \mathcal{F}(vu^{\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}}),$ $G = u^{1+\frac{2\delta-2}{1-2\lambda}} \mathcal{G}(vu^{\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}}), \lambda \neq \frac{1}{2}$	$P^0, P^1, P^2,$ $\delta D + J^2 + \lambda(u\partial_u + v\partial_v)$
2	$F = v^{-\delta} \mathcal{F}(u),$ $G = v^{1-\delta} \mathcal{G}(u)$	$P^0, P^1, P^2,$ $\delta D + J^2 + \frac{1}{2}(u\partial_u + v\partial_v)$
3	$F = -\frac{1}{\lambda} W(z)G$ $+ e^{\frac{\lambda-\delta}{\lambda} W(z)} \mathcal{F}(\ln v + \lambda u/v),$ $G = e^{\frac{\lambda-\delta}{\lambda} W(z)} \mathcal{G}(\ln v + \lambda u/v), \lambda \neq 0$	$P^0, P^1, P^2,$ $\delta D + J^0 + J^1 + \lambda(\partial_u + v\partial_v)$
4	$F = \frac{\varphi - v}{\psi} G$ $+ e^{\frac{\delta}{\psi}(\varphi - v)} \mathcal{F}(\varphi v - \psi u - \frac{1}{2}v^2),$ $G = e^{\frac{\delta}{\psi}(\varphi - v)} \mathcal{G}(\varphi v - \psi u - \frac{1}{2}v^2), \psi \neq 0$	$P^0, P^1, P^2,$ $\delta D + J^0 + J^1 + \varphi\partial_u + \psi\partial_v$
5	$F = \frac{u}{v - \varphi} G + e^{\frac{\delta u}{v - \varphi}} \mathcal{F}(v),$ $G = e^{\frac{\delta u}{v - \varphi}} \mathcal{G}(v)$	$P^0, P^1, P^2,$ $\delta D + J^0 + J^1 + \varphi\partial_u$
6	$F = u^{1-\delta/\lambda} \mathcal{F}(v/u),$ $G = u^{1-\delta/\lambda} \mathcal{G}(v/u), \lambda \neq 0$	$P^0, P^1, P^2,$ $\delta D + \lambda(u\partial_u + v\partial_v)$
7	$F = ((b+a)v - cu) \ln u + u \mathcal{F}(v/u),$ $G = ((b-a)u + cv) \ln u + u \mathcal{G}(v/u)$	$P^0, P^1, P^2,$ $e^{at+bx+cy}(u\partial_u + v\partial_v)$
8	$F = ((b+a)/\varphi - c)u + \mathcal{F}(u - \varphi v),$ $G = (b - a + c/\varphi)u + \mathcal{G}(u - \varphi v), \varphi \neq 0$	$P^0, P^1, P^2,$ $\sigma(\omega)e^{at+bx+cy}(\varphi\partial_u + \partial_v)$
9	$F = (a+b)v + \mathcal{F}(u),$ $G = cv + \mathcal{G}(u)$	$P^0, P^1, P^2,$ $\sigma(x-t)e^{at+bx+cy}\partial_v$
10	$F = -cu + \mathcal{F}(v),$ $G = (b-a)u + \mathcal{G}(v)$	$P^0, P^1, P^2,$ $\sigma(x+t)e^{at+bx+cy}\partial_u$

Тут $\delta, \lambda, \varphi, \psi, a, b, c$ — довільні сталі, причому $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, $\omega = \varphi^2(t+x) + 2\varphi y + t - x$; σ — довільний гладка ненульова функція вказаного аргументу. $W(z) = \text{LambertW}(z)$ [96], де $z = -\lambda \frac{u}{v} e^{-\lambda \frac{u}{v}}$.

Якщо $\lambda = 0$, то (φ, ψ) має такі нееквівалентні значення $(\varphi, 1)$ з $\varphi \neq 0$ і $(1, 0)$. Відповідні загальні розв'язки класифікувальних рівнянь:

$$\begin{aligned} F &= ((b+a)/\varphi - c)u + \mathcal{F}(u - \varphi v), \\ G &= (b - a + c/\varphi)u + \mathcal{G}(u - \varphi v), \end{aligned} \quad \varphi \neq 0, \quad \psi = 1,$$

$$F = (a+b)v + \mathcal{F}(u), \quad G = cv + \mathcal{G}(u), \quad \varphi = 0, \quad \psi = 1,$$

$$F = -cu + \mathcal{F}(v), \quad G = (b-a)u + \mathcal{G}(v), \quad \varphi = 1, \quad \psi = 0,$$

(випадки 8–10 табл. 4.7).

Зауважимо, що чотиривимірні алгебри ліївської інваріантності

$$\langle P^0, P^1, P^2, e^{at+bx+cy}(\varphi\partial_u + \psi\partial_v) \rangle, \quad (\varphi, \psi) \in \{(\varphi, 1), (1, 0)\}$$

не є максимальними для нелінійностей наведених у випадках 8–10. Відповідний системи (4.51) допускають нескінченновимірні алгебри ліївської інваріантності з базисними операторами, наведеними в таблиці 4.7.

Таким чином знайдено всі нелінійності F і G , для яких $(2+1)$ -вимірні нелінійні рівняння Дірака допускають розширення на один оператор симетрії. У випадках 1–7 максимальні алгебри ліївської інваріантності чотиривимірні (для довільних значень $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$), а у випадках 8–10 — нескінченновимірні. Для специфічних значень $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ можливе подальше розширення ліївської симетрії. Наприклад, нехай $\varphi = 0$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{G}_v = 0$ у випадку 5 табл. 4.7, тоді система (4.51) набуває вигляду

$$\begin{aligned} v_t + v_x - u_y &= \left(\frac{u}{v} \kappa_1 + \kappa_2 \right) e^{\frac{\delta u}{v}}, \\ u_t - u_x - v_y &= -\kappa_1 e^{\frac{\delta u}{v}}, \end{aligned}$$

де κ_1, κ_2 — сталі, $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \neq 0$. Максимальна алгебра ліївської інваріантності цієї системи є п'ятивимірною з додатковим оператором ліївської симетрії $D + u\partial_u + v\partial_v$.

Зауваження 4.30. Існують додаткові перетворення еквівалентності між випадками таблиці 4.7. Так, випадки 9 і 10 еквівалентні відносно точкового перетворення

$$t \mapsto -t, \quad x \mapsto x, \quad y \mapsto -y, \quad u \mapsto v, \quad v \mapsto u, \quad F \mapsto G, \quad G \mapsto F,$$

що належить до групи еквівалентності класу (4.51). Це саме перетворення відображає випадок 2 до випадку 1 з $\lambda = -1/2$.

4.3.2. Ліївська редукція. Наведемо кілька прикладів знаходження точних розв'язків систем з класу (4.51) методом ліївської редукції. Розгляньмо випадок 6 табл. 4.7 з $\delta = \lambda \neq 0$, а саме, систему (4.51) рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} v_t + v_x - u_y &= \mathcal{F}(v/u), \\ u_t - u_x - v_y &= -\mathcal{G}(v/u), \end{aligned} \quad (4.58)$$

що допускає алгебру ліївської симетрії $\mathfrak{g} = \langle P^0, P^1, P^2, D + u\partial_u + v\partial_v \rangle$. З використанням одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ можна редукувати систему (4.58) до системи (1+1)-вимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Візьмемо, наприклад, одновимірну підалгебру $\langle D + u\partial_u + v\partial_v \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}$, що належить оптимальній системі підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ (процедуру знаходження оптимальної системи підалгебр описано у [235], а класифікацію підалгебр дійсний три- і чотиривимірних алгебр Лі виконано в [245]). Анзаци $u = tU(z, w)$, $v = tV(z, w)$, де $z = x/t$, $w = y/t$, редукують систему (4.58) до системи (1+1)-вимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned} (1 - z)V_z - wV_w - U_w + V &= \mathcal{F}(V/U), \\ (1 + z)U_z + wU_w + V_w - U &= \mathcal{G}(V/U). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Частковий розв'язок цієї системи для випадку $\mathcal{F} = \pm\mathcal{G}$ такий

$$U = \mp V = (w \mp 1)C_1 \mp \mathcal{F}(\mp 1), \quad \mathcal{F} = \pm\mathcal{G},$$

де C_1 — довільна стала. Отже, система (4.58) має розв'язки

$$\begin{aligned} u = -v &= (y - t)C_1 - t\mathcal{F}(-1), \quad \text{якщо } \mathcal{F} = \mathcal{G}, \\ u = v &= (y + t)C_1 + t\mathcal{F}(1), \quad \text{якщо } \mathcal{F} = -\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Редуцію системи (4.58) до системи звичайних диференціальних рівнянь можна виконати за двовимірною підалгеброю з оптимальної системи підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$. Розгляньмо двовимірну підалгебру

$$\langle P^1 + \alpha_2 P^2 + \alpha_0 P^0, D + u\partial_u + v\partial_v \rangle, \quad \alpha_2, \alpha_0 \in \mathbb{R}.$$

Відповідні анзаци

$$\begin{aligned} u &= (t - \alpha_0 x)U(z), \\ v &= (t - \alpha_0 x)V(z), \end{aligned} \quad \text{де} \quad z = \frac{y - \alpha_2 x}{t - \alpha_0 x},$$

редукують систему (4.58) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} ((\alpha_0 - 1)z - \alpha_2) V_z - U_z + (1 - \alpha_0)U &= \mathcal{F}(V/U), \\ ((\alpha_0 + 1)z - \alpha_2) U_z + V_z - (1 + \alpha_0)V &= \mathcal{G}(V/U). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Якщо $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, то ця система має частковий розв'язок

$$U = -V = (\alpha_2 - 1 + (1 - \alpha_0)z)C_1 - \mathcal{F}(-1)/(1 - \alpha_0), \quad \alpha_0 \neq 1,$$

де C_1 — довільна стала. Отже, розв'язок системи (4.58) з $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ має вигляд

$$u = -v = [(t - \alpha_0 x)(\alpha_2 - 1) + (y - \alpha_2 x)(1 - \alpha_0)] C_1 - \frac{(t - \alpha_0 x)\mathcal{F}(-1)}{(1 - \alpha_0)}.$$

Використовуючи метод редукції, можна побудувати точні розв'язки інших рівнянь Дірака (4.51) з нелінійностями наведеними в табл. 4.7.

Основні результати та висновки

Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Розвинуто та формалізовано теорію групоїдів класів диференціальних рівнянь. Введено поняття регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії. Алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Застосувавши цей метод, вичерпно описано групоїд еквівалентності та виконано групову класифікацію ненормалізованого класу нелінійних хвильових та еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.
- Досліджено трансформаційні властивості загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу, для яких вичерпно описано групоїди еквівалентності. Окремо розглянуто два ненормалізовані підкласи рівнянь типу реакції–конвекції–дифузії, що є цікавими для застосувань і знайдено їхні групи еквівалентності.
- Проведено розширений груповий аналіз декількох класів рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, зокрема, класу рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від змінної часу, і декількох класів рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтами, що залежать від просторової змінної. З допомогою граничних переходів (контракцій) знайдено точні розв'язки та отримано класифікацію законів збереження класу рівнянь реакції–дифузії з експоненціальними нелінійностями. Продемонстровано, що метод контракцій дозволяє отримати вичерпний результат групової класифікації такого класу.
- З допомогою допустимих перетворень прокласифіковано ліївські та некласичні оператори редукції рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля з

коефіцієнтами, що залежать від змінної часу, а також знайдено потенціальні симетрії декількох класів дифузійних рівнянь.

- Виконано розширений груповий аналіз двох класів узагальнених рівнянь Бюргерса, знайдені симетрії застосовано для знаходження точних розв'язків таких рівнянь та розв'язання граничної задачі. Знайдено низку рівнянь, що є інваріантними відносно низькорозмірних алгебр Галілея або їх деформацій.
- Знайдено групоїди еквівалентності та проведено розширений груповий аналіз класів узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза третього і п'ятого порядків, рівнянь Кавахари та $K(m, n)$. Для деяких таких рівнянь знайдено точні розв'язки та розв'язано граничні задачі. Запропоновано алгоритм відновлення всіх випадків розширення лівської симетрії зі списку, побудованого з точністю до найширшої групи еквівалентності класу. Для класів узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза та модифікованих рівнянь Кортевега–де Фріза з багатьма довільними елементами групову класифікацію отримано методом еквівалентності. Узагальнене рівняння Кавахари зі степеневими коефіцієнтами запропоноване у якості моделі, що описує рух хвиль у морі під кригою, товщина якої збільшується з часом. Побудовано чисельні розв'язки граничної задачі для такого рівняння.
- Групоїд еквівалентності класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами застосовано до дослідження інтегровності таких рівнянь. В результаті знайдено всі інтегровні випадки, для яких побудовано пари Лакса.
- Використовуючи метод перетворень між класами диференціальних рівнянь, прокласифіковано лівські симетрії рівнянь Гарднера, Бенджаміна–Бона–Махоні та Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі змінними коефіцієнтами, а також знайдено некласичні оператори редукції двох класів рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами.

- Побудовано локальні закони збереження для декількох класів рівнянь реакції–дифузії та рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні зі змінними коефіцієнтами.
- Для двох різних калібрувань довільних елементів виконано групову класифікацію $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Колмогорова зі змінними коефіцієнтами. Показано, що групу еквівалентності і, зокрема, її тип можна використовувати у якості критерію оптимального калібрування. Для двовимірного виродженого рівняння Бюргерса, що є членом класу нелінійних рівнянь Колмогорова, проведено розширений груповий аналіз. Зокрема, побудовано точкові та узагальнені симетрії, косиметрії, локальні закони збереження, ліївські редукції, приховані симетрії та точні розв'язки такого рівняння.
- Знайдено всі нелінійності, для яких рівняння з класу $(2+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Дірака допускають чотиривимірну алгебру ліївської інваріантності. Проведено ліївську редукцію та побудовано точні розв'язки таких рівнянь.

Список використаних джерел

1. Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х., Нелокальные симметрии. Эвристический подход, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*. **34** (1989), 3–83.
2. Бахолдин И.Б., *Методы исследования, теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа*, Препринт ИПМ № 30, Москва, 2013.
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-30>
3. Букатов А.А., Оценка влияния снега и потока тепла от воды на изменение толщины льда в Азовском море, *Системы контроля окружающей среды* (2011), № 15, 175–179.
4. Ванеєва О.О., Класифікація диференціальних рівнянь за симетрійними властивостями, *Вісник НАН України* (2017), № 9, 33–40.
5. Ванеєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Доповіді НАН України* (2019), № 5, 3–10.
6. Ванеєва О.О., Точні розв’язки рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, *Збірник праць Інституту математики НАН України*, **16** (2019), № 1, 44–49.
7. Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Груповий аналіз класу рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами, *Доповіді НАН України* (2014), № 10, 12–20.
8. Дородницын В.А., *Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком*, Препринт ИПМ № 57, Москва, 1979.

9. Дородницын В.А., Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником, *Журн. выч. мат. и мат. физ.* **22** (1982), № 6, 1393–1400.
10. Гончаренко Т.Б., Яковлев В.В., Дослідження сталих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль в морі, вкритому суцільною кригою, *Прикладна гідромеханіка* **7(79)** (2005), № 2, 3–7.
11. Катков В.Л., Групповая классификация решений уравнения Хопфа, *Ж. Прикл. Мех. Техн. Физ.* (1965), № 6, 105–106.
12. Коваленко С.С., Симетрії Лі та точні розв'язки деяких нелінійних крайових задач із рухомими границями: дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Інститут математики НАН України, Київ, 2012.
13. Коваленко С.С., Симетрійний аналіз та точні розв'язки одного класу $(1+3)$ -вимірних крайових задач типу Стефана, *Укр. мат. журн.* **63** (2011), № 10, 1352–1359.
14. Коваленко С.С., Копась І.М., Стогній В.І., Попередня групова класифікація одного класу узагальнених лінійних рівнянь Колмогорова, *Наукові вісті НТУУ “КПІ”* (2013), по. 4, 67–72.
15. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С., Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанiem вещества, и его применение к одной биологической проблеме, *Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика* **1:6** (1937), 1–26.
16. Лагно В.І., Спічак С.В., Групова класифікація квазілінійних рівнянь еліптичного типу І. Інваріантність відносно алгебр з нетривіальним розкладом Леві, *Укр. мат. журн.* **59** (2007), № 11, 1532–1545.
17. Лагно В.І., Спічак С.В., Групова класифікація квазілінійних рівнянь еліптичного типу ІІ. Інваріантність відносно розв'язних алгебр Лі, *Укр. мат. журн.* **63** (2011), № 2, 200–215.
18. Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И., Симметричный анализ уравнений эволюционного типа, Москва–Ижевск, РХД, 2004.

19. Маклейн С. Категории для работающего математика, Москва, Физматлит, 2004.
20. Нікітін А.Г., Попович Р.О., Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера, *Укр. мат. журн.* **53** (2001), 1053–1060.
21. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности, *Докл. АН СССР* **125** (1959), № 3, 492–495.
22. Овсянников Л.В., *Групповые свойства дифференциальных уравнений*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
23. Овсянников Л.В., *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Москва, Наука, 1978.
24. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения, Москва, Физматлит, 2002.
25. Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности, *Укр. мат. журн.* **42** (1990), № 10, 1370–1376.
26. Серов М.І., Спічак С.В., Стогній В.І., Рассоха І.В., Групова класифікація нелінійних рівнянь колмогорівського типу, *Наукові вісті НТУУ “КПІ”* (2013), № 4, 88–93.
27. Стогній В.І., Копась І.М., Коваленко С.С., Симетрійний аналіз одного класу $(2+1)$ -вимірних лінійних ультрапараболічних рівнянь, *Наукові вісті НТУУ “КПІ”* (2014), № 4, 102–107.
28. Ткаченко В.А., Яковлев В.В., Нелінійно-дисперсійна модель трансформації поверхневих хвиль в прибережній зоні моря, що покрита льодом, *Прикладна гідромеханіка* **1(73)** (1999), № 3, 55–64.
29. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, *Теоретико-алгебраические исследования в математической физике*, 6–44, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1981.

30. Фушич В.И., Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики, *Укр. мат. журн.* **43**, по. 11, (1991), 1456–1470.
31. Фушич В.И., Никитин А.Г., *Симметрия уравнений квантовой механики*, Наука, Москва, 1994.
32. Фушич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР. Сер. А.* (1990), № 7, 24–27.
33. Фушич В.И., Штеленъ В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Наукова думка, Киев, 1989.
34. Яковлев В.В., Гончаренко Т.Б., Дослідження динамічної системи для довгих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль, *Прикладна гідромеханіка* **12(84)** (2010), № 1, 76–82.
35. Abd-el-Malek M.B. and Helal M.M., Group method solutions of the generalized forms of Burgers, Burgers–KdV and KdV equations with time-dependent variable coefficients, *Acta Mech.* **221** (2011), 281–296.
36. Abdulloev Kh.O., Bogolubsky I.L. and Makhankov V.G., One more example of inelastic soliton interaction, *Phys. Lett. A* **56** (1976), 427–428.
37. Ablowitz M.J. and Satsuma J., Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 2180–2186.
38. Ablowitz M.J. and Segur H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Studies in Applied Mathematics **4**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1981.
39. Ablowitz M.J. and Zeppetella A., Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed, *Bull. Math. Biol.* **41** (1979), 835–840.

40. Abramowitz M.J. and Stegun I.A. (editors), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1992.
41. Alexander F.J. and Lebowitz J.L., On the drift and diffusion of a rod in a lattice fluid, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), 683–696.
42. Amick C.J., Bona J.L. and Schonbek M.E., Decay of solutions of some nonlinear wave equations, *J. Differential Equations* **81** (1989), 1–49.
43. Anco S.C. and Bluman G., Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. I. Examples of conservation law classifications, *European J. Appl. Math.* **13** (2002), 545–566.
44. Anco S.C. and Bluman G., Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. II. General treatment, *European J. Appl. Math.* **13** (2002), 567–585.
45. Arrigo D.J. and Hill J.M., Nonclassical symmetries for nonlinear diffusion and absorption, *Stud. Appl. Math.* **94** (1995), 21–39.
46. Arrigo D.J., Hill J.M. and Broadbridge P., Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source, *IMA J. Appl. Math.* **52** (1994), 1–24.
47. Bagderina Yu.Yu., Rational solutions of fifth-order evolutionary equations for describing waves on water, *J. Appl. Math. Mech.* **72** (2008), 180–191.
48. Bakholdin I.B., Jumps with radiation in models described by the generalized Korteweg–de Vries equation, *J. Appl. Math. Mech.* **65** (2001), 55–63.
49. Barannyk T., Symmetry and exact solutions for systems of nonlinear reaction–diffusion equations, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 2001)*, Part 1, 80–85, *Proceedings of Institute of Mathematics* **43**, Part 1, Kyiv, 2002.

50. Basarab-Horwath P., Lahno V. and Zhdanov R., The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, *Acta Appl. Math.* **69** (2001), 43–94.
51. Basarab-Horwath P., Lahno V. and Zhdanov R., Classifying evolution equations, *Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysis, Part 8 (Catania, 2000)*, *Nonlinear Anal.* **47** (2001), 5135–5144.
52. Bateman H., Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review* **43** (1915), 163–170.
53. Benjamin T.B., Bona J.L. and Mahony J.J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **272** (1972), 47–78.
54. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E. and Popovych R.O., Complete group classification of a class of nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 123515, 32 pp.
55. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E. and Popovych R.O., Algebraic method for finding equivalence groups, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012001, 17 pp.
56. Bihlo A., Poltavets N. and Popovych R.O., Lie symmetries of two-dimensional shallow water equations with variable bottom topography, arXiv:1911.02097.
57. Bihlo A. and Popovych R.O., Group classification of linear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **448** (2017), 982–2015.
58. Bihlo A. and Popovych R.O., Zeroth-order conservation laws of two-dimensional shallow water equations with variable bottom topography, to appear in *Stud. Appl. Math.*, arXiv:1912.11468.
59. Bihlo A. and Valiquette F., Symmetry-preserving numerical schemes, *Symmetries and integrability of difference equations*, 261–324, CRM Ser. Math. Phys., Springer, Cham, 2017.

60. Biswas A., Solitary wave solution for the generalized KdV equation with time-dependent damping and dispersion, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** (2009), 3503–3506.
61. Bluman G.W., *Construction of Solutions to Partial Differential Equations by the Use of Transformation Groups*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 1968.
62. Bluman G.W., Application of the general similarity solution of the heat equation to boundary-value problems, *Quart. Appl. Math.* **31** (1974), 403–415.
63. Bluman G.W., Use and construction of potential symmetries, *Math. Comput. Modelling* **18** (1993), 1–14.
64. Bluman G.W., Potential symmetries and equivalent conservation laws, *Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics (Acireale, 1992)*, 71–84, Kluwer, Dordrecht, 1993.
65. Bluman G.W. and Anco S.C., *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **154**, Springer-Verlag, New York, 2002.
66. Bluman G.W., Cheviakov A.F. and Anco S.C., *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **168**, Springer, New York, 2010.
67. Bluman G., Cheviakov A.F. and Ivanova N.M., Framework for nonlocally related partial differential equation systems and nonlocal symmetries: Extension, simplification, and examples, *J. Math. Phys.* **47** (2006), 113505, 23 pp.
68. Bluman G.W. and Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.* **18** (1969), 1025–1042.

69. Bluman G. and Kumei S., On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)] - \partial u/\partial t = 0$, *J. Math. Phys.* **21** (1980), 1019–1023.
70. Bluman G. and Kumei S., On invariance properties of the wave equation, *J. Math. Phys.* **28** (1987), 307–318.
71. Bluman G.W. and Kumei S., *Symmetries and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **81**, Springer-Verlag, New York, 1989.
72. Bluman G.W., Reid G.J. and Kumei S., New classes of symmetries for partial differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 806–811.
73. Bona J.L., Pritchard W.G. and Scott L.R., A comparison of solutions of two model equations for long waves, *Fluid Dynamics in Astrophysics and Geophysics (Chicago, Ill., 1981)*, 235–267, Lectures in Appl. Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983.
74. Boyd J.P., Weakly non-local solitons for capillary-gravity waves: fifth-degree Korteweg–de Vries equation, *Phys. D* **48** (1991), 129–146.
75. Boyko V.M., Kunzinger M. and Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 101503, 34 pp.
76. Bradshaw-Hajek B.H., *Reaction-Diffusion Equations for Population Genetics*, PhD thesis, School of Mathematics and Applied Statistics, University of Wollongong, 2004. <http://ro.uow.edu.au/theses/201>
77. Bradshaw-Hajek B.H., Edwards M.P., Broadbridge P. and Williams G.H., Nonclassical symmetry solutions for reaction-diffusion equations with explicit spatial dependence, *Nonlinear Anal.* **67** (2007), 2541–2552.
78. Brugarino T., Painlevé property, auto-Bäcklund transformation, Lax pairs, and reduction to the standard form for the Korteweg–De Vries equation with nonuniformities, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 1013–1015.

79. Bruzón M.S. and Gandarias M.L., Symmetry reductions and exact solutions of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, 45–61, University of Cyprus, Nicosia, 2009.
80. Burde G.I., New similarity reductions of steady-state boundary layer equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996), 1665–1683.
81. Burgers J.M., A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* **1** (1948), 171–199.
82. Calogero F., Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?, Zakharov V.E. (ed.), *What is Integrability?*, 1–62, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1991.
83. Calogero F. and Degasperis A., *Spectral Transform and Solitons. Vol. I. Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*, Studies in Mathematics and its Applications **13**, Lecture Notes in Computer Science **144**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1982.
84. Cariello F. and Tabor M., Similarity reductions from extended Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Phys. D* **53** (1991), 59–70.
85. Cascaval R.C., Variable coefficient KdV equations and waves in elastic tubes, *Evolution equations*, 57–69, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **234**, Dekker, New York, 2003.
86. Caudrey P.J., Dodd R.K. and Gibbon J.D., A new hierarchy of Korteweg–de Vries equations, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **351** (1976), 407–422.
87. Cherniha R. and Davydovych V., *Nonlinear Reaction–Diffusion Systems. Conditional Symmetry, Exact Solutions and their Applications in Biology*, Springer, Cham, 2017.

88. Cherniha R., Serov M. and Pliukhin O. *Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations. Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions, and their Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2018.
89. Cheviakov A.F., GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations, *Comp. Phys. Comm.* **176** (2007), 48–61.
90. Cheviakov A.F. Symbolic computation of local symmetries of nonlinear and linear partial and ordinary differential equations, *Math. Comput. Sci.* **4** (2010), 203–222.
91. Citti G., Pascucci A. and Polidoro S., On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance, *Differential Integral Equations* **14** (2001), 701–738.
92. Clarkson P.A. and Kruskal M.D. New similarity solutions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 2201–2213.
93. Clarkson P.A. and Mansfield E.L., Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations, *Phys. D* **70** (1994), 250–288.
94. Cole J.D., On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), 225–236.
95. Colinge J.-P. and Greer J.C., *Nanowire Transistors: Physics of Devices and Materials in One Dimension*, Cambridge University Press, 2016.
96. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J. and Knuth D.E., On the Lambert W function, *Adv. Comput. Math.* **5** (1996), 329–359.
97. Cui Sh. and Tao Sh., Strichartz estimates for dispersive equations and solvability of the Kawahara equation, *J. Math. Anal. Appl.* **304** (2005), 683–702.
98. Danilov V.G. and Subochev P.Yu., Wave solutions of semilinear parabolic equations, *Theoret. and Math. Phys.* **89** (1991), 1029–1046.

99. Demetriou E., Christou M.A. and Sophocleous C., On the classification of similarity solutions of a two-dimensional diffusion-advection equation, *Appl. Math. Comput.* **187** (2007), 1333–1350.
100. Demina M.V. and Kudryashov N.A., From Laurent series to exact meromorphic solutions: the Kawahara equation, *Phys. Lett. A* **374** (2010), 4023–4029.
101. Djidjeli K., Price W.G., Twizell E.H. and Wang Y., Numerical methods for the solution of the third- and fifth-order dispersive Korteweg–de Vries equations, *J. Comput. Appl. Math.* **58** (1995), 307–336.
102. Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Bihlo A. and Popovych R.O., Enhanced preliminary group classification of a class of generalized diffusion equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 3622–3638.
103. Doyle J. and Englefield M.J., Similarity solutions of a generalized Burgers equation, *IMA J. Appl. Math.* **44** (1990), 145–153.
104. Dubrovin B., Grava T. and Klein C., Numerical study of breakup in generalized Korteweg–de Vries and Kawahara equations, *SIAM J. Appl. Math.* **71** (2011), 983–1008.
105. Duzhin S.V. and Tsujishita T., Conservation laws of the BBM equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** (1984), 3267–3276.
106. Ebaid A., Exact solitary wave solutions for some nonlinear evolution equations via Exp-function method, *Phys. Lett. A* **365** (2007), 213–219.
107. Escobedo M., Vazquez J.L. and Zuazua E., Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 829–842.
108. Faddeev L.D., *40 years in Mathematical Physics*, World Scientific Publishing, 1995.

109. Fisher D.J., Gray R.J. and Hydon P.E., Automorphisms of real Lie algebras of dimension five or less, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013), 225204, 18 pp.
110. Fisher R.A., The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics* **7** (1937), 353–369.
111. Fokas A.S. and Yortsos Y.C., On the exactly solvable equation $S_t = [(\beta S + \gamma)^{-2} S_x]_x + \alpha(\beta S + \gamma)^{-2} S_x$ occurring in two-phase flow in porous media, *SIAM J. Appl. Math.* **42** (1982), 318–332.
112. Forsyth A.R., *Theory of Differential Equations. Partial Differential Equations* (Vol. 5–6), Dover Publications, Inc., New York, 1959.
113. Frey H.-D., Glöckle W.G. and Nonnenmacher T.F., Symmetries and integrability of generalized diffusion reaction equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 665–679.
114. Fuchssteiner B., Integrable nonlinear evolution equations with time-dependent coefficients, *J. Math. Phys.* **34** (1993), 5140–5158.
115. Fushchych W.I., Conditional symmetry of equations of nonlinear mathematical physics, *Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics*, 7–27, Institute Mathematics, Kyiv, 1992.
116. Fushchych W.I., Ansatz '95, *J. Nonlinear Math. Phys.* **2** (1995), 216–235.
117. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov M.I. and Popovych R.O., Q -conditional symmetry of the linear heat equation, *Proc. Acad. of Sci. Ukraine* (1992), no. 12, 28–33.
118. Fushchich W.I. and Tsyfra I.M., On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987), L45–L48.
119. Fushchych W.I. and Zhdanov R.Z., Conditional symmetry and reduction of partial differential equations, *Ukrainian Math. J.* **44** (1992), no. 7, 875–886.

120. Fushchych W.I. and Zhdanov R.Z., *Symmetries of Nonlinear Dirac Equations*, Mathematical Ukraina Publishers, Kyiv, 1997.
121. Gagnon L. and Winternitz P., Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. A* **26** (1993), 7061–7076.
122. Gandarias M.L., Potential symmetries of a porous medium equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996), 5919–5934.
123. Gandarias M.L., New potential symmetries for some evolution equations, *Phys. A* **387** (2008), 2234–2242.
124. Gandarias M.L., Torrisi M. and Valenti A., Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **39** (2004), 389–398.
125. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. and Miura R.M., Method for solving the Korteweg–de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1095–1097.
126. Gazeau J.P. and Winternitz P., Symmetries of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 4087–4102.
127. Goard J. and Al-Nassar S., Symmetries for initial value problems, *Appl. Math. Lett.* **28** (2014), 56–59.
128. Grimshaw R., Korteweg–de Vries equation, *Nonlinear Waves in Fluids: Recent Advances and Modern Applications*, 1–28, CISM International Centre for Mechanical Sciences **483**, Springer, Wien, 2005.
129. Grimshaw R., Slowly varying solitary waves. I. Korteweg–de Vries equation, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **368** (1979), 359–375.
130. Grimshaw R., Slowly varying solitary waves. II. Nonlinear Schrödinger equation, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **368** (1979), 377–388.
131. Grimshaw R. and Joshi N., Weakly nonlocal solitary waves in a singularly perturbed Korteweg–de Vries equation, *SIAM J. Appl. Math.* **55** (1995), 124–135.

132. Grundland A.M. and Tafel J., On the existence of nonclassical symmetries of partial differential equations, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 1426–1434.
133. Güngör F., Lahno V.I. and Zhdanov R.Z., Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **45** (2004), 2280–2313.
134. Güngör F., Sanielevici M., and Winternitz P., On the integrability properties of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *Can. J. Phys.* **74** (1996), 676–684.
135. Gunney B.T.N., Li Y.A. and Olver P.J., Solitary waves in the critical surface-tension model, *J. Engrg. Math.* **36** (1999), 99–112.
136. Gupta P.D., Raj S. and Chaudhuri D., Some exact stationary state solutions of a nonlinear Dirac equation in 2+1 dimensions, arXiv:1012.0976.
137. Gürses M. and Karasu A., Variable coefficient third order Korteweg–de Vries type of equations, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 3485–3491.
138. Haddad L.H. and Carr L.D., The nonlinear Dirac equation in Bose–Einstein condensates: Foundation and symmetries, *Phys. D* **238** (2009), 1413–1421.
139. Hammerton P.W. and Crighton D.G., Approximate solution methods for nonlinear acoustic propagation over long ranges, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **426** (1989), 125–152.
140. Hammond J.F. and Bortz D.M., Analytical solutions to Fisher’s equation with time-variable coefficients, *Appl. Math. Comput.* **218** (2011), 2497–2508.
141. Hasimoto H., Water waves, *Kagaku* **40** (1970), 401–408 (in Japanese).
142. Hirota R., Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971), 1192–1194.

143. Hlavatý L., Painlevé analysis of nonautonomous evolution equations, *Phys. Lett. A* **128** (1988), 335–338.
144. Hopf E., The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.* **3** (1950), 201–230.
145. Huang D.-J. and Ivanova N.M., Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *J. Math. Phys.* **48** (2007), 073507, 23 pp.
146. Huang D.-J. and Zhou S., Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *Acta Appl. Math.* **117** (2012), 135–183.
147. Huang Q., Lahno V., Qu C.Z. and Zhdanov R., Preliminary group classification of a class of fourth-order evolution equations, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 023503, 23 pp.
148. Huang Q., Qu C. and Zhdanov R., Group classification of linear fourth-order evolution equations, *Rep. Math. Phys.* **70** (2012), 331–343.
149. Hunter J.K. and Scheurle J., Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves, *Phys. D* **32** (1988), 253–268.
150. Hydon P.E., Discrete point symmetries of ordinary differential equations, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **454** (1998), 1961–1972.
151. Hydon P.E., How to construct the discrete symmetries of partial differential equations, *European J. Appl. Math.* **11** (2000), 515–527.
152. Hydon P.E., *Symmetry methods for differential equations. A beginner's guide*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
153. Hyman J.M. and Rosenau P., Pulsating multiplet solutions of quintic wave equations, *Phys. D* **123** (1998), 502–512.

154. Ibragimov N.H. (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
155. Ibragimov N.H., Torrisi M. and Valenti A., Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, *J. Math. Phys.* **32** (1991), 2988–2995.
156. Iguchi T., A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara equation, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **2** (2007), 179–220.
157. Il'ichev A.T. and Marchenko A.V., Propagation of long nonlinear waves in a ponderable fluid beneath an ice sheet, *Fluid Dynam.* **24** (1989), 73–79.
158. Inan I.E. and Kaya D., Exact solutions of some nonlinear partial differential equations, *Phys. A* **381** (2007), 104–115.
159. Ivanova N.M., Exact solutions of diffusion-convection equations, *Dyn. Partial Differ. Equ.* **5** (2008), 139–171.
160. Ivanova N.M., On Lie symmetries of a class of reaction-diffusion equations, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, 84–86, University of Cyprus, Nicosia, 2009.
161. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Conservation laws of variable coefficient diffusion-convection equations, *Proc. of Tenth International Conference in Modern Group Analysis (Larnaca, 2004)*, 107–113, University of Cyprus, Nicosia, 2005; arXiv:math-ph/0505015.
162. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification, *Lobachevskii J. Math.* **31** (2010), 100–122.
163. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. II. Contractions and exact solutions, arXiv:0710.3049.

164. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. III. Conservation laws, arXiv:0710.3053.
165. Ivanova N.M., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. IV. Potential symmetries, arXiv:0710.4251.
166. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. and Vaneeva O.O., Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations, *Phys. A* **388** (2009), 343–356.
167. Ivanova N.M. and Sophocleous C., On nonclassical symmetries of generalized Huxley equations, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, 91–98, University of Cyprus, Nicosia, 2011; arXiv:1010.2388.
168. Jeffrey A. and Kakutani T., Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg–de Vries equation, *SIAM Rev.* **14** (1972), no. 4, 582–643.
169. Johnpillai A.G. and Khalique C.M., Group analysis of KdV equation with time dependent coefficients, *Appl. Math. Comput.* **216** (2010), 3761–3771.
170. Johnpillai A.G. and Khalique C.M., Lie group classification and invariant solutions of mKdV equation with time-dependent coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 1207–1215.
171. Johnson R.S., On the inverse scattering transform, the cylindrical Korteweg–de Vries equation and similarity solutions, *Phys. Lett. A* **72** (1979), 197–199.
172. Joshi N., Painlevé property of general variable-coefficient versions of the Korteweg–de Vries and nonlinear Schrödinger equations, *Phys. Lett. A* **125** (1987), 456–460.

173. Kakutani T., Ono H., Taniuti T. and Wei Ch.-Ch., Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation II. Application to hydromagnetic waves in cold plasma, *J. Phys. Soc. Japan.* **24** (1968), 1159–1166.
174. Kakutani T. and Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma, *J. Phys. Soc. Japan.* **26** (1969), 1305–1318.
175. Kamran N., *Selected Topics in the Geometrical Study of Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **96**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
176. Kano K. and Nakayama T., An exact solution of the wave equation $u_t + uu_x - u_{(5x)} = 0$, *J. Phys. Soc. Japan.* **50** (1981), 361–362.
177. Karpman V.I., Radiating solitons of the fifth order KdV-type equations, *Phys. Lett. A* **186** (1994), 303–308.
178. Karpman V.I., Lyapunov approach to the soliton stability in highly dispersive systems. II. KdV-type equations, *Phys. Lett. A* **215** (1996), 257–259.
179. Kaup D.J., On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$, *Stud. Appl. Math.* **62** (1980), 189–216.
180. Kaur L. and Gupta R.K., Kawahara equation and modified Kawahara equation with time dependent coefficients: Lie symmetry analysis and generalized (G'/G) -expansion method, *Math. Meth. Appl. Sci.* **36** (2013), 584–600.
181. Kawahara T., Oscillatory solitary waves in dispersive media, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33** (1972), 260–271.
182. Kingston J.G., On point transformations of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), L769–L774.

183. Kingston J.G. and Sophocleous C., On point transformations of a generalised Burgers equation, *Phys. Lett. A* **155** (1991), 15–19.
184. Kingston J.G. and Sophocleous C., On form-preserving point transformations of partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 1597–1619.
185. Korteweg D.J. and de Vries G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* **39** (1895), 422–443.
186. Kostin V.M., Certain invariant solutions of equations of the Korteweg–de Vries type, *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* (1969), no. 4, 69–73.
187. Kruskal M., Nonlinear wave equations, Moser J. (ed.), *Dynamical Systems, Theory and Applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974)*, 310–354, Lecture Notes in Phys. **38**, Springer, Berlin, 1975.
188. Kudryashov N.A., Exact solutions of a family of Fisher equations, *Theoret. and Math. Phys.* **94** (1993), 211–218.
189. Kudryashov N.A., A note on new exact solutions for the Kawahara equation using Exp-function method, *J. Comput. Appl. Math.* **234** (2010), 3511–3512.
190. Kumar V., Gupta R.K. and Jiware R., Painlevé analysis, Lie symmetries and exact solutions for variable coefficients Benjamin–Bona–Mahony–Burger (BBMB) equation, **60** *Commun. Theor. Phys. (Beijing)* (2013), 175–182.
191. Kumar V., Gupta R.K. and Jiware R., Lie group analysis, numerical and non-traveling wave solutions for the (2+1)-dimensional diffusion-advection equation with variable coefficients, *Chin. Phys. B* **23** (2014), 030201, 6 pp.

192. Kundu A., Integrable nonautonomous nonlinear Schrödinger equations are equivalent to the standard autonomous equation, *Phys. Rev. E* **79** (2009), 015601, 4 pp.
193. Kunzinger M. and Popovych R.O., Singular reduction operators in two dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 505201, 24 pp.
194. Kunzinger M. and Popovych R.O., Is a nonclassical symmetry a symmetry?, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, 107–120, University of Cyprus, Nicosia, 2009; arXiv:0903.0821.
195. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 045201, 19 pp.
196. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of generalized fifth-order Korteweg–de Vries equations with time-dependent coefficients, *Lie Theory and its Application in Physics*, 311–321, Springer Proc. Math. Stat. **111**, Springer, Tokyo, 2014.
197. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of variable coefficient generalized fifth-order KdV equations, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **11** (2014), 990–995.
198. Kurujyibwami C., Basarab-Horwath P. and Popovych R.O., Algebraic method for group classification of (1+1)-dimensional linear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **157** (2018), 171–203.
199. Lahno V. and Zhdanov R., Group classification of nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 053301, 37 pp.
200. Lahno V., Zhdanov R. and Magda O., Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations, *Acta Appl. Math.* **91** (2006), 253–313.
201. Lanconelli E., Pascucci A. and Polidoro S., Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory

- and in finance, *Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics, II*, 243–265, Int. Math. Ser. (N. Y.) **2**, Kluwer/Plenum, New York, 2002.
202. Lax P.D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968), 467–490.
 203. Levi D. and Winternitz P., Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989), 2915–2924.
 204. Lie S., Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung, *Arch. for Math.* **6** (1881), no. 3, 328–368. English translation by Ibragimov N.H.: Lie S., On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences*, 473–508, CRC Press, Boca Raton, FL., 1995.
 205. Lie S., Diskussion der Differentialgleichung $d^2z/dx dy = F(z)$, *Arch. fur Math.* **6** (1881), 112–124. (Reprinted in: Lie S., *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 3, B.G. Teubner, Leipzig and H. Aschehoug & Co, Kristiania, pp. 469–478.)
 206. Lie S. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, B.G. Teubner, Leipzig, 1891.
 207. Liu H., Li J. and Liu L., Lie symmetry analysis, optimal systems and exact solutions to the fifth-order KdV types of equations, *J. Math. Anal. Appl.* **368** (2010), 551–558.
 208. Liu J. and Yang K., The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDEs, *Chaos Solitons Fractals* **22** (2004), 111–121.
 209. Lugovtsov A.A. and Lugovtsov B.A., Study of axially symmetric long waves in the Korteweg–de Vries approximation, *Dinamika Sploshnoy Sredy*, Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, 1969, **1**, 195–206 (in Russian).

210. Magadeev B.A., On group classification of nonlinear evolution equations, *St. Petersburg Math. J.* **5** (1994), 345–359.
211. Marchenko A.V., Long waves in shallow liquid under ice cover, *J. Appl. Math. Mech.* **52** (1988), 180–183.
212. Meleshko S.V., Group classification of the equations of two-dimensional motions of a gas, *J. Appl. Math. Mech.* **58** (1994), 629–635.
213. Meleshko S.V., Generalization of the equivalence transformations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **3** (1996), 170–174.
214. Mikhailov A.V., Shabat A.B. and Sokolov V.V., The symmetry approach to classification of integrable equations, Zakharov V.E. (ed.), *What is Integrability?*, 115–184, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1991.
215. Miura R.M., Korteweg–de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.* **9** (1968), 1202–1204.
216. Miura R.M., Gardner C.S. and Kruskal M.D., Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.* **9** (1968), 1204–1209.
217. Molati M. and Khalique C.M., Symmetry classification and invariant solutions of the variable coefficient BBM equation *Appl. Math. Comput.* **219** (2013), 7917–7922.
218. Molati M. and Ramollo M.P., Symmetry classification of the Gardner equation with time-dependent coefficients arising in stratified fluids, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2012), 1542–1548.
219. Moran M.J. and Gaggioli R.A., Reduction of the number of variables in systems of partial differential equations, with auxiliary conditions, *SIAM J. Appl. Math.* **16** (1968), 202–215.

220. Moran M.A. and Gaggioli R.A., A new systematic formalism for similarity analysis, *J. Engrg. Math.* **3** (1969), 151–162.
221. Murray J.D. *Mathematical Biology I: An Introduction*, Third edition, Interdisciplinary Applied Mathematics **17**, Springer-Verlag, New York, 2002.
222. Nagashima H., Experiment on solitary waves in the nonlinear transmission line described by the equation $\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial^5 u}{\partial \xi^5} = 0$, *J. Phys. Soc. Japan.* **47** (1979), 1387–1388.
223. Naumkin P.I., Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, **126** *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* (1996), 1–18.
224. Nesterenko M., Pošta S. and Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016), no. 11, 115203, 26 pp.
225. Newell A.C. and Whitehead J.A., Finite bandwidth, finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.* **38** (1969), 279–303.
226. Nikitin A.G. and Barannyk T.A., Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations, *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2004), 840–858.
227. Noether E., Invariante Variationsprobleme, *Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.-phys. Klasse* (1918), 235–257. English translation by Tavel M.A.: Noether E., Invariant variation problems, *Transport Theory Statist. Phys.* **1** (1971), no. 3, 186–207.
228. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Katsnelson M.I., Grigorieva I.V., Dubonos S.V. and Firsov A.A., Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene, *Nature* **438** (2005), 197–200.
229. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V. and Firsov A.A., Electric field effect in atomically thin carbon films, *Science* **306** (2004), 666–669.

230. Nucci M.C. and Clarkson P.A., The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation, *Phys. Lett. A* **164** (1992), 49–56.
231. Ögün A. and Kart C., Exact solutions of Fisher and generalized Fisher equations with variable coefficients, *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* **23** (2007), 563–568.
232. O’Hara J.G., Sophocleous C. and Leach P.G.L., Application of Lie point symmetries to the resolution of certain problems in financial mathematics with a terminal condition, *J. Engrg. Math.* **82** (2013), 67–75.
233. Olver P.J., Evolution equations possessing infinitely many symmetries, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1212–1215.
234. Olver P.J., Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85** (1979), 143–160.
235. Olver P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **107**, Springer-Verlag, New York, 1993.
236. Olver P.J. and Rosenau P., Group-invariant solutions of differential equations, *SIAM J. Appl. Math.* **47** (1987), 263–278.
237. Olver P.J. and Vorob’ev E.M., Nonclassical and conditional symmetries, Ibragimov N.H. (ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3. New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, 291–328, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.
238. Ono H., Algebraic soliton of the modified Korteweg–de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **41** (1976), 1817–1818.
239. Opanasenko S., Equivalence groupoid of a class of general Burgers–Korteweg–de Vries equations with space-dependent coefficients, *Collection of Works of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, **16** (2019), no. 1, 50–65, arXiv:1909.00477.

240. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, 37 pp.
241. Opanasenko S., Bihlo A. and Popovych R.O., Equivalence groupoid and group classification of a class of variable-coefficient Burgers equations, *J. Math. Anal. Appl.* **490** (2020), 124215, 22 pp.
242. Opanasenko S., Boyko V. and Popovych R., Enhanced group classification of nonlinear diffusion-reaction equations with gradient-dependent diffusion, *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739, 30 pp.
243. Parkes E.J. and Duffy B.R., An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Comp. Phys. Comm.* **98** (1996), 288–300.
244. Pascucci A. and Polidoro S., On the Cauchy problem for a nonlinear Kolmogorov equation, *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), 579–595.
245. Patera J. and Winternitz P., Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1449–1455.
246. Peregrine D.H., Calculations of the development of an undular bore, **25** *J. Fluid Mech.* (1966), 321–330.
247. Pocheketa O.A. and Popovych R.O., Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations, *Phys. Lett. A* **376** (2012), 2847–2850.
248. Pocheketa O.A. and Popovych R.O., Extended symmetry analysis of generalized Burgers equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101501, 28 pp.
249. Pocheketa O.A., Popovych R.O. and Vaneeva O.O., Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping, *Appl. Math. Comput.* **243** (2014), 232–244.

250. Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **73** (2019), 379–390.
251. Polyanin A.D., Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **114** (2019), 29–40.
252. Polyanin A.D. and Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2012.
253. Popovych R.O., No-go theorem on reduction operators of linear second-order parabolic equations, *Collection of Works of Institute of Mathematics* **3** (2006), no. 2, 231–238.
254. Popovych R.O., Classification of admissible transformations of differential equations, *Collection of Works of Institute of Mathematics (Kyiv, Ukraine)* **3** (2006), no. 2, 239–254.
255. Popovych R.O., Reduction operators of linear second-order parabolic equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 185202, 31 pp.
256. Popovych R.O. and Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp.
257. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O. and Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 7337–7360; arXiv:math-ph/0301029v7.
258. Popovych R.O. and Ivanova N.M., New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 7547–7565.
259. Popovych R.O. and Ivanova N.M., Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion–convection equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), 3145–3155.

260. Popovych R.O. and Ivanova N.M., Hierarchy of conservation laws of diffusion–convection equations, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 043502, 22 pp.
261. Popovych R.O., Kunzinger M. and Eshraghi H., Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359.
262. Popovych R.O., Kunzinger M. and Ivanova N.M., Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations, *Acta Appl. Math.* **100** (2008), 113–185.
263. Popovych R.O. and Samoilenko A.M., Local conservation laws of second-order evolution equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 362002, 11 pp.
264. Popovych R.O. and Vaneeva O.O., More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. I, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), 3887–3899.
265. Popovych R.O., Vaneeva O.O. and Ivanova N.M., Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation, *Phys. Lett. A* **362** (2007), 166–173.
266. Pucci E. and Saccomandi G., Potential symmetries and solutions by reduction of partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 681–690.
267. Rassokha I., Serov M., Spichak S. and Stogniy V., Group classification of a class of generalized nonlinear Kolmogorov equations and exact solutions, *J. Math. Phys.* **596** (2018), 071514, 14 pp.
268. Rosenau P., Nonlinear dispersion and compact structures, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), 1737–1741.
269. Rosenau P., On nonanalytic solitary waves formed by a nonlinear dispersion, *Phys. Lett. A* **230** (1997), 305–318.

270. Rosenau P., Compact and noncompact dispersive patterns, *Phys. Lett. A* **275** (2000), 193–203.
271. Rosenau P., What is ... a compacton?, *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005), 738–739.
272. Rosenau P. and Hyman J.M., Compactons: solitons with finite wavelength, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), 564–567.
273. Sabry R. and El-Taibany W.F., New exact solutions for a generalized variable-coefficient KdV equation, *Nonlinear Anal.* **69** (2008), 2763–2770.
274. Saccomandi G., Potential symmetries and direct reduction methods of order two, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997), 2211–2217.
275. Sachdev P.L., *Nonlinear Diffusive Waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
276. Sachdev P.L., *Self-Similarity and Beyond. Exact Solutions of Nonlinear Problems*, CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **113**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
277. Sawada K. and Kotera T., A method for finding N -soliton solutions of the K.d.V. equation and K.d.V.-like equation, *Progr. Theoret. Phys.* **51** (1974), 1355–1367.
278. Segel L.A. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection, *J. Fluid Mech.* **38** (1969), 203–224.
279. Senthilkumaran M., Pandiaraja D. and Vaganan B.M., New exact explicit solutions of the generalized KdV equations, *Appl. Math. Comput.* **202** (2008), 693–699.
280. Sergyeyev A., On symmetries of KdV-like evolution equations, *Rep. Math. Phys.* **44** (1999), 183–190.

281. Shabat A.B., Adler V.E., Marikhin V.G., Sokolov V.V. (eds.), *Encyclopedia of Integrable Systems*, L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, 2010. <http://home.itp.ac.ru/~adler/E/e.pdf>
282. Sharma A.S. and Tasso H., *Connection Between Wave Envelope and Explicit Solution of a Nonlinear Dispersive Wave Equation*, Report IPP 6/158, 1977.
283. Sirendaoreji, A new auxiliary equation and exact travelling wave solutions of nonlinear equations, *Phys. Lett. A* **356** (2006), 124–130.
284. Song L. and Zhang H., Preliminary group classification for the nonlinear wave equation $u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u)$, *Nonlinear Anal.* **70** (2009), 3512–3521.
285. Sophocleous C., *Transformation Methods in the Study of Nonlinear Partial Differential Equations*, PhD Thesis, University of Nottingham, 1991.
286. Sophocleous C., Potential symmetries of inhomogeneous nonlinear diffusion equations, *Bull. Austral. Math. Soc.* **61** (2000), 507–521.
287. Sophocleous C., Symmetries and form-preserving transformations of generalised inhomogeneous nonlinear diffusion equations, *Physica A* **324** (2003), 509–529.
288. Sophocleous C., Further transformation properties of generalised inhomogeneous nonlinear diffusion equations with variable coefficients, *Physica A* **345** (2005), 457–471.
289. Sophocleous C., O'Hara J.G. and Leach P.G.L., Algebraic solution of the Stein–Stein model for stochastic volatility, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 1752–1759.
290. Sophocleous C., O'Hara J.G. and Leach P.G.L., Symmetry analysis of a model of stochastic volatility with time-dependent parameters, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 4158–4164.

291. Storm M.L., Heat conduction in simple metals, *J. Appl. Phys.* **22** (1951), 940–951.
292. Strampp W., Bäcklund transformations for diffusion equations, *Phys. D* **6** (1982), 113–118.
293. Tang X.Y., Zhao J., Huang F. and Lou S.Y., Monopole blocking governed by a modified KdV type equation, *Stud. Appl. Math.* **122** (2009), 295–304.
294. Tian Ch., Symmetries and a hierarchy of the general KdV equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987), 359–366.
295. Triki H. and Wazwaz A.M., Trial equation method for solving the generalized Fisher equation with variable coefficients, *Phys. Lett. A* **380** (2016), 1260–1262.
296. Vaganan B.M. and Senthilkumaran M., Exact linearization and invariant solutions of the generalized Burgers equation with linear damping and variable viscosity, *Stud. Appl. Math.* **117** (2006), 95–108.
297. Vaganan B.M. and Senthilkumaran M., Exact linearization and invariant solutions of a generalized Burgers equation with variable viscosity, *Int. J. Appl. Math. Stat.* **14** (2009), 97–105.
298. Vaneeva O., Group classification via mapping between classes: an example of semilinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity, *Sveske fizičkih nauka. Ser. A* **XXII** (2009), no. A1, 463–471; arXiv:0811.2587.
299. Vaneeva O., Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** (2012), 611–618.
300. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient KdV-like equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, 451–459, Springer Proc. Math. Stat. **36**, Springer, Tokyo, 2013.

301. Vaneeva O.O., Bihlo A. and Popovych R.O., Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **91** (2020), 105419, 28 pp.
302. Vaneeva O., Boyko V., Zhaliy A. and Sophocleous C., Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), 264–275.
303. Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O. and Sophocleous C., Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **330** (2007), 1363–1386.
304. Vaneeva O. and Karadzhov Yu., Lie symmetries of (2+1)-dimensional nonlinear Dirac equations, *Sveske fizičkih nauka. Ser. A XXVI* (2013), no. A1, 349–359.
305. Vaneeva O., Karadzhov Yu. and Sophocleous C., Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, 349–360, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016.
306. Vaneeva O., Kuriksha O. and Sophocleous C. Enhanced group classification of Gardner equations with time-dependent coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** (2015), 1243–1251.
307. Vaneeva O.O., Papanicolaou N.C., Christou M.A. and Sophocleous C., Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** (2014), 3074–3085.
308. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, 191–209, University of Cyprus, Nicosia, 2009.

309. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46.
310. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with an exponential source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, 207–219, University of Cyprus, Nicosia, 2011.
311. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), 225–242.
312. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, 225–237, University of Cyprus, Nicosia, 2013.
313. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89** (2014), 038003, 9 pp.
314. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of Benjamin–Bona–Mahony equations with time dependent coefficients, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012016, 12 pp.
315. Vaneeva O. and Pošta S., Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101504, 12 pp.
316. Vaneeva O.O., Sophocleous C. and Leach P.G.L., Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems, *J. Engrg. Math.* **91** (2015), 165–176.
317. Vaneeva O. and Zhalij A., Group classification of variable coefficient quasilinear reaction-diffusion equations, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **94(108)** (2013), 81–90.

318. Vašíček J., Symmetries and conservation laws for a generalization of Kawahara equation, *J. Geom. Phys.* **150** (2020), 103579, 6 pp.
319. Wafo Soh C., Symmetry reductions and new exact invariant solutions of the generalized Burgers equation arising in nonlinear acoustics. *Internat. J. Engrg. Sci.* **42** (2004), 1169–1191.
320. Wang G.-W., Liu X.-Q., Zhang Y.-Y. Lie symmetry analysis and invariant solutions of the generalized fifth-order KdV equation with variable coefficients, *J. Appl. Math. Inform.* **31** (2013), 229–239.
321. Wang G.W. and Xu T.Z., Group analysis and new explicit solutions of simplified modified Kawahara equation with variable coefficients, *Abstr. Appl. Anal.* **2013** (2013), 139160, 8 pp.
322. Wang X.Y. Exact and explicit solitary wave solutions for the generalised Fisher equation, *Phys. Lett. A* **131** (1988), 277–279.
323. Wazwaz A.-M., Soliton solutions for the fifth-order KdV equation and the Kawahara equation with time-dependent coefficients, *Phys. Scr.* **82** (2010), 035009, 4 pp.
324. Winternitz P. and Gazeau J.-P., Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *Phys. Lett. A* **167** (1992), 246–250.
325. Whittaker E.T. and Watson G.N., *A Course of Modern Analysis, An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
326. Wu G.-Ch. and Xia T.-Ch., A new method for constructing soliton solutions and periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A* **372** (2008), 604–609.
327. Xu G.-Q., Painlevé integrability of a generalized fifth-order KdV equation with variable coefficients: Exact solutions and their interactions, *Chin. Phys. B* **22** (2013), 050203, 8 pp.

328. Yamamoto Y. and Takizawa É.I., On a solution on non-linear time-evolution equation of fifth order, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981), 1421–1422.
329. Yamamoto Y., Head-on collision of shallow-water solitary waves near the critical depth where dispersion due to gravity balances with that due to surface tension, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989), 4410–4415.
330. Yang Y., Tao Z.-L. and Austin F.R., Solutions of the generalized KdV equation with time-dependent damping and dispersion, *Appl. Math. Comput.* **216** (2010), 1029–1035.
331. Yehorchenko I., Solutions of the system of d'Alembert and eikonal equations, and classification of reductions of PDEs, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012018, 6 pp.
332. Yin J., Lai S. and Qing Y. *Exact Solutions to a Nonlinear Dispersive Model with Variable Coefficients*, *Chaos Solitons Fractals* **40** (2009), 1249–1254.
333. Yomba E., The extended Fan's sub-equation method and its application to KdV–MKdV, BKK and variant Boussinesq equations, *Phys. Lett. A* **336** (2005), 463–476.
334. Yu X., Gao Y.-T., Sun Zh.-Y. and Liu Y., N -soliton solutions, Bäcklund transformation and Lax pair for a generalized variable-coefficient fifth-order Korteweg–de Vries equation, *Phys. Scr.* **81** (2010), 045402, 6 pp.
335. Yu X., Gao Y.-T., Sun Zh.-Y. and Liu Y., Investigation on a nonisospectral fifth-order Korteweg–de Vries equation generalized from fluids, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 013502, 8 pp.
336. Yusufoglu E., New solitary solutions for the MBBM equations using Exp-function method, *Phys. Lett. A* **372** (2008), 442–446.
337. Zabusky N.J. and Kruskal M.D., Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965), 240–243.

338. Zhang Sh. and Xia T., A generalized new auxiliary equation method and its applications to nonlinear partial differential equations, *Phys. Lett. A* **363** (2007), 356–360.
339. Zhang Y.B., Tan Y.W., Stormer H.L. and Kim P., Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene, *Nature* **438** (2005), 201–204.
340. Zhao X., Zhi H., Yu Y. and Zhang H., A new Riccati equation expansion method with symbolic computation to construct new travelling wave solution of nonlinear differential equations, *Appl. Math. Comput.* **172** (2006), 24–39.
341. Zhdanov R.Z. and Lahno V.I., Conditional symmetry of a porous medium equation, *Phys. D* **122** (1998), 178–186.
342. Zhdanov R.Z., Revenko I.V. and Fushchych W.I., Orthogonal and nonorthogonal separation of variables in the wave equation $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 5959–5972.
343. Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M. and Popovych R.O., A precise definition of reduction of partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **238** (1999), 101–123.
344. Zhurov A.I. and Polyanin A.D., Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **27** (2020), 227–242.

Додаток А

Ліївські й некласичні симетрії квазілінійних рівнянь реакції–дифузії

У цьому додатку наведено результати класифікації ліївських й некласичних (умовних і потенціальних) операторів редукції для класів $(1+1)$ -вимірних рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтами, залежними від просторової змінної.

Підрозділ А.1 присвячено груповій класифікації ненормалізованого класу рівнянь дифузії з нелінійним джерелом $u_t = u_{xx} + h(x)B(u)$, $hB_{uu} \neq 0$. Для отримання вичерпної класифікації використано умовну групу еквівалентності, знайдену в процесі вивчення допустимих перетворень у цьому класі.

У підрозділі А.2 з використанням методу відображень між класами досліджено ліївські й некласичні оператори редукції квазілінійних рівнянь реакції–дифузії з експоненціальним джерелом і змінними коефіцієнтами $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)e^{mu}$, $fghm \neq 0$. Результати аналогічного дослідження щодо некласичних операторів редукції для таких рівнянь зі степеневим джерелом $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m$, $fgh \neq 0$, $m \neq 0, 1$, наведено в підрозділі А.3. Знайдені оператори редукції використано для побудови точних розв'язків.

У підрозділі А.4 досліджено потенціальні симетрії нелінійних рівнянь дифузії зі змінними коефіцієнтами $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x$, $fgn \neq 0$.

Результати, наведені у додатку А, опубліковано у роботах [7, 166, 298, 308, 310].

А.1. Групова класифікація класу рівнянь реакції–дифузії

Розгляньмо $(1+1)$ -вимірні квазілінійні рівняння реакції–дифузії

$$u_t = u_{xx} + h(x)B(u), \quad hB_{uu} \neq 0, \quad (\text{A.1})$$

де $h = h(x)$ і $B = B(u)$ — довільні функції відповідних змінних. Ці рівняння, зокрема, моделюють процеси популяційної генетики й мікрохвильового нагрівання [77]. Групову класифікацію рівнянь (A.1) з $h = 1$ виконано В.А. Дородніциним ще у 1979 році [8]. Клас (A.1) також містить рівняння Гакслі,

$$u_t = u_{xx} + h(x)u^2(1 - u),$$

ліївські симетрії яких вивчались у роботах [76, 160]. Також існує незначний перетин з результатами роботи [309], у якій з симетрійної точки зору досліджено класи рівнянь

$$u_t = u_{xx} + H(x)u^m + F(x)u, \quad (\text{A.2})$$

$$u_t = u_{xx} + H(x)u^2 + G(x), \quad (\text{A.3})$$

де $m \neq 0, 1$, $H \neq 0$. Зауважимо, що задачу групової класифікації для загального класу квазілінійних рівнянь

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x), \quad F \neq 0,$$

розв'язано в роботі [50]. Однак групова класифікація рівнянь (A.1) з використанням тих результатів є більш складною задачею, ніж її безпосереднє розв'язання.

Допустимі перетворення класу A.1 знайдено прямим методом [184].

Теорема А.1. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ класу (A.1) складають невироджені точкові перетворення*

$$\tilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \delta_4 u + \delta_5, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_4}{\delta_1^2 \delta_0} h, \quad \tilde{B} = \delta_0 B,$$

де δ_j , $j = 0, \dots, 5$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_0 \delta_1 \delta_4 \neq 0$.

Табл. А.1: Групова класифікація класу (A.1).

№	$B(u)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	$\forall$	δx^{-2}	$\partial_t, \quad 2t\partial_t + x\partial_x$
2	$\forall$	δ	$\partial_t, \quad \partial_x$
3	u^m	δx^s	$\partial_t, \quad 2(m-1)t\partial_t + (m-1)x\partial_x - (s+2)u\partial_u$
4	u^m	δe^x	$\partial_t, \quad (1-m)\partial_x + u\partial_u$
5	u^m	δ	$\partial_t, \quad \partial_x, \quad 2(m-1)t\partial_t + (m-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
6	e^u	δx^s	$\partial_t, \quad 2t\partial_t + x\partial_x - (s+2)\partial_u$
7	e^u	$\delta e^{\pm x^2}$	$\partial_t, \quad \partial_x \mp 2x\partial_u$
8	e^u	δ	$\partial_t, \quad \partial_x, \quad 2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_u$
9	$u \ln u$	δ	$\partial_t, \quad \partial_x, \quad e^{\delta t}u\partial_u, \quad e^{\delta t}(\partial_x - \frac{\delta}{2}xu\partial_u)$

Тут δ, m, s — довільні сталі, причому $m \neq 0, 1, s \neq 0, \delta = \pm 1 \bmod G^\sim$.

Існують точкові перетворення між рівняннями з класу (A.1), які не належать до групи $G^\sim$, тобто клас (A.1) ненормалізований. А саме існує підклас класу (A.1), група еквівалентності якого є не звичайною, а розширеною узагальненою.

Теорема А.2. Розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_{\text{exp}}^\sim$ підкласу

$$u_t = u_{xx} + h(x)(e^{nu} + r) \quad (\text{A.4})$$

класу (A.1) утворюють перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \delta_4 u + \varphi(x), \\ \tilde{h} &= \frac{\delta_4}{\delta_1^2} e^{-\frac{n}{\delta_4} \varphi} h, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_4}, \quad \tilde{r} = e^{\frac{n}{\delta_4} \varphi} \left(r - \frac{\varphi_{xx}}{\delta_4 h} \right), \end{aligned}$$

де $r, \delta_j, j = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_4 \neq 0$. Компоненту перетворення для сталої r можна інтерпретувати як умову на функцію φ :

$$\varphi_{xx} = \delta_4 h(r - \tilde{r} e^{-\frac{n}{\delta_4} \varphi}).$$

З теореми A.2 випливає, що клас (A.4) зводиться до класу $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + \tilde{h}(x)e^{n\tilde{u}}$ перетворенням $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u + \varphi(x)$, де $\tilde{h}(\tilde{x}) = e^{-\varphi(x)}h(x)$ та $\varphi_{xx} = rh(x)$. Клас (A.4) нормалізований. Отже, групі еквівалентності підкласу класу (A.4), виокремленого умовою $r = 0$, можна знайти, поклавши $\tilde{r} = r = 0$ у перетвореннях з групи $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$. Отримуємо наслідок теореми A.2.

Наслідок A.3. *Клас рівнянь*

$$u_t = u_{xx} + h(x)e^{nu}$$

допускає звичайну групу еквівалентності $G_{\text{exp}}^{\sim}$, утворену невідродженими точковими перетвореннями

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \delta_1^2 t + \delta_2, & \tilde{x} &= \delta_1 x + \delta_3, & \tilde{u} &= \delta_4 u + \delta_5 x + \delta_6, \\ \tilde{h} &= \frac{\delta_4}{\delta_1^2} e^{-\frac{n}{\delta_4}(\delta_5 x + \delta_6)} h, & \tilde{n} &= \frac{n}{\delta_4},\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 6$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_4 \neq 0$.

Під час дослідження лівської симетрії перетворення еквівалентності використано для спрощення обчислень та для запису отриманих результатів у компактній формі [7, 317]. Дослідження лівських симетрій у класі (A.1) виконуємо класичним методом [23], доповненим технікою розгалуженого розщеплення [258]. Результати групової класифікації рівнянь (A.1) підсумовано у A.1.

Алгеброю Лі, що відповідає ядру основних груп рівнянь з класу (A.1), є одновимірна алгебра $A^\cap = \langle \partial_t \rangle$. Усі нееквівалентні випадки розширення лівської симетрії у класі (A.1) представлено вип. 1–9 табл. A.1.

Зауважимо, що групову класифікацію підкласу (A.4) виконано з точністю до перетворень з групи еквівалентності $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$, а класифікацію для решти рівнянь з класу (A.1) — з точністю до перетворень зі звичайної групи еквівалентності $G^{\sim}$ всього класу. Результати групової класифікації можна застосувати для пошуку точних розв'язків рівнянь з класу (A.1) з коефіцієнтами, наведеними у табл. A.1.

А.2. Ліївські та неklasичні оператори редукції класу напівлінійних рівнянь дифузії з експоненційним джерелом

У цьому розділі використаємо метод відображень між класами, щоб знайти неklasичні оператори редукції рівняння реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та експоненційною нелінійністю

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)e^{mu}, \quad (\text{A.5})$$

де f, g, h — довільні гладкі функції від x , причому $fgh \neq 0$, m — довільна ненульова стала.

Ліївські симетрії і перетворення еквівалентності. Клас (A.5) має складні трансформаційні властивості. Індикатором цього є той факт, що він має нетривіальну узагальнену розширену групу еквівалентності, яка не співпадає з його звичайною групою еквівалентності, див. теорему A.4 нижче. Для того, щоб виконати групову класифікацію класу (A.5), необхідно відкалібрувати довільні елементи цього класу перетвореннями еквівалентності, після чого відобразити його на більш простий клас [298, 309]. Виявляється, прообразом кожного рівняння з відображеного класу є двопараметрична сім'я рівнянь з початкового класу (A.5). Більш того, прообрази одного й того ж рівняння належать тій самій орбіті групи еквівалентності початкового класу. Це дозволяє шукати лише найпростішого представника прообразу для отримання його симетрій, розв'язків тощо, а потім відтворити ці результати для двопараметричної сім'ї рівнянь з початкового класу, використавши перетворення еквівалентності.

Теорема A.4. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$ класу (A.5) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, & \tilde{x} &= \varphi(x), & \tilde{u} &= \delta_3 u + \psi(x), \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_0 \delta_1}{\varphi_x} f, & \tilde{g} &= \delta_0 \varphi_x g, & \tilde{h} &= \frac{\delta_0 \delta_3}{\varphi_x} \exp\left(-\frac{m}{\delta_3} \psi\right) h, & \tilde{m} &= \frac{m}{\delta_3}, \end{aligned}$$

де φ — довільна нестала гладка функція змінної x , $\psi = \delta_4 \int \frac{dx}{g(x)} + \delta_5$; δ_j , $j = 0, 1, \dots, 5$, — довільні сталі, такі що $\delta_0 \delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Наслідок А.5. Звичайна група еквівалентності класу (А.5) є підгрупою $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$, виокремленою умовою $\delta_4 = 0$.

Перетворення з $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$, пов'язані зі зміною значень параметра δ_0 , насправді не змінюють рівняння з класу (А.5). Звідси випливає, що вони утворюють групу калібрувальної еквівалентності цього класу. Значення довільних елементів, пов'язані таким перетворенням, відповідають різним формам одного й того ж рівняння.

Спочатку відобразимо клас (А.5) на його підклас

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)e^u \quad (\text{А.6})$$

(тильди над змінними опущено), використовуючи сім'ю перетворень еквівалентності, параметризовану довільними елементами f , g та m :

$$\tilde{t} = \text{sign}(f(x)g(x))t, \quad \tilde{x} = \int \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|^{\frac{1}{2}} dx, \quad \tilde{u} = m u. \quad (\text{А.7})$$

Нові довільні елементи виражаються через старі таким чином:

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}) = \text{sign}(g(x))|f(x)g(x)|^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{h}(\tilde{x}) = m \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right|^{\frac{1}{2}} h(x), \quad \tilde{m} = 1.$$

Наступний крок — змінимо залежну змінну у класі (А.6):

$$v(t, x) = u(t, x) + G(x), \quad \text{де} \quad G(x) = \ln |f(x)^{-1}h(x)|. \quad (\text{А.8})$$

Таким чином отримаємо клас

$$v_t = v_{xx} + F(x)v_x + \varepsilon e^v + H(x), \quad (\text{А.9})$$

де $\varepsilon = \text{sign}(f(x)h(x))$, а нові довільні елементи F та H виражаються через довільні елементи класу (А.9) як

$$F = f_x f^{-1} \quad \text{та} \quad H = -G_{xx} - G_x F. \quad (\text{А.10})$$

Табл. А.2: Групова класифікація класу А.9.

№	$F(x)$	$H(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	$\alpha x^{-1} + \mu x$	$\beta x^{-2} + 2\mu$	$\partial_t, e^{-2\mu t}(\partial_t - \mu x \partial_x + 2\mu \partial_v)$
2	αx^{-1}	βx^{-2}	$\partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_v$
3	μx	γ	$\partial_t, e^{-\mu t}\partial_x$
4	λ	γ	∂_t, ∂_x
5	μx	2μ	$\partial_t, e^{-\mu t}\partial_x, e^{-2\mu t}(\partial_t - \mu x \partial_x + 2\mu \partial_v)$
6	λ	0	$\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + (x - \lambda t)\partial_x - 2\partial_v$

Тут $\lambda \in \{0, 1\} \bmod G_{\text{exp}}^{\sim}, \mu = \pm 1 \bmod G_{\text{exp}}^{\sim}; \alpha, \beta$ та γ — довільні сталі, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Крім цього, у випадку 3 $\gamma \neq 2\mu$; у випадку 4 $\gamma \neq 0$.

Всі результати щодо ліівських симетрій та розв'язків рівнянь з класу (А.9) можна поширити на клас (А.6) за допомогою перетворення, оберненого до (А.8).

Довільні елементи f та h класу (А.9) виражаються через функції F та H таким чином:

$$f = c_0 \exp\left(\int F dx\right), \quad h = \varepsilon c_0 \exp\left(\int F dx + G\right), \quad (\text{А.11})$$

де $G = \int e^{-\int F dx} \left(c_1 - \int H e^{\int F dx} dx\right) dx + c_2$.

Тут c_0, c_1 та c_2 — довільні сталі, $c_0 \neq 0$. Стала c_0 є несуттєвою: її можна покласти рівною одиниці, застосувавши очевидне перетворення калібрувальної еквівалентності. Рівняння з класу (А.6), що мають той самий образ у класі (А.9) під дією перетворення (А.8), тобто довільні елементи яких мають вигляд (А.11) і відрізняються лише значеннями сталих c_1 і c_2 , є $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$ -еквівалентними. Перетворення еквівалентності

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + c_1 \int e^{-\int F dx} dx + c_2 \quad (\text{А.12})$$

відображає рівняння (А.9), у якому f та h мають вигляд (А.11) і $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, у рівняння з $c_1 = c_2 = 0$. Звідси випливає, що з точністю до

$\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$ -еквівалентності можна розглядати (без обмеження загальності) лише ті рівняння з класу (A.6), які мають довільні елементи вигляду (A.11) з $c_1 = c_2 = 0$.

Теорема A.6. *Узагальнена розширена група еквівалентності $G_{\text{exp}}^{\sim}$ класу (A.9) співпадає з його звичайною групою еквівалентності й складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = v - \ln \delta_1^2, \quad \tilde{F} = \delta_1^{-1} F, \quad \tilde{H} = \delta_1^{-2} H,$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3$, — довільні сталі, $\delta_1 \neq 0$.

Ядро максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (A.9) — одновимірна алгебра $\langle \partial_t \rangle$. Це означає, що довільне рівняння з класу (A.9) є інваріантним відносно зсувів по t . Інших лівських симетрій, спільних для всіх рівнянь з цього класу, не існує.

Теорема A.7. *$G_{\text{exp}}^{\sim}$ -нееквівалентні випадки розширення максимальної алгебри лівської інваріантності у класі (A.9) вичерпуються наведеними в таблиці A.2.*

Відповідні результати групової класифікації для класу (A.5) з точністю до $\hat{G}_{\text{exp}}^{\sim}$ -еквівалентності було отримано в роботі [298]. Їх зібрано в таблиці A.3. Перша цифра у номері кожного випадку відсилає до відповідного випадку таблиці A.2.

Також знайдено додаткові перетворення еквівалентності між $G_{\text{exp}}^{\sim}$ -нееквівалентними випадками розширень лівських симетрій. Пари точково-еквівалентних випадків з таблиці A.2 та відповідні перетворення вичерпуються наступними:

$$\begin{aligned} 1 \mapsto \tilde{2}, \quad 5 \mapsto \tilde{6}|_{\tilde{\lambda}=0}: \quad \tilde{t} &= \frac{1}{2\mu} e^{2\mu t}, \quad \tilde{x} = e^{\mu t} x, \quad \tilde{v} = v - 2\mu t, \\ 4 \mapsto \tilde{4}|_{\tilde{\lambda}=0}, \quad 6 \mapsto \tilde{6}|_{\tilde{\lambda}=0}: \quad \tilde{t} &= t, \quad \tilde{x} = x + \lambda t, \quad \tilde{v} = v. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Нееквівалентність всіх інших випадків таблиці A.2 можна довести, використовуючи відмінності у тих властивостях відповідних максимальних

Табл. А.3: Групова класифікація класу (A.6)

№	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	$x^\alpha e^{\frac{\mu}{2}x^2}$	$\delta x^\alpha e^{\frac{\mu}{2}x^2 + \omega^1}$	$\partial_t, e^{-2\mu t} [\partial_t - \mu x \partial_x + \mu (2 + x \omega_x^1) \partial_u]$
2.1	x^α	$\delta x^{\alpha + \frac{\beta}{1-\alpha}}$	$\partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - \left(2 + \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \partial_u$
2.2	x	$\delta x^{1 - \frac{\beta}{2} \ln x}$	$\partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - (2 - \beta \ln x) \partial_u$
3	$e^{\frac{\mu}{2}x^2}$	$\delta e^{\frac{\mu}{2}x^2 + \omega^3}$	$\partial_t, e^{-\mu t} \partial_x - e^{-\mu t} \omega_x^3 \partial_u$
4.1	e^x	$\delta e^{\rho x}$	$\partial_t, \partial_x + (1 - \rho) \partial_u$
4.2	1	$\delta e^{-\frac{\gamma}{2}x^2}$	$\partial_t, \partial_x + \gamma x \partial_u$
5	$e^{\frac{\mu}{2}x^2}$	$\delta e^{\frac{\mu}{2}x^2 + \omega^5}$	$\partial_t, e^{-\mu t} \partial_x - e^{-\mu t} \omega_x^5 \partial_u,$ $e^{-2\mu t} [\partial_t - \mu x \partial_x + \mu (2 + x \omega_x^5) \partial_u]$
6.1	e^x	δe^x	$\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + (x - t) \partial_x - 2\partial_u$
6.2	1	δ	$\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_u$

Тут $\delta = \pm 1$, $\mu = \pm 1 \bmod \hat{G}_1^\sim$; $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ — довільні сталі, $\rho \neq 1$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. У випадку 2.1 $\alpha \neq 1$. У випадку 3 $\gamma \neq 2\mu$. У випадку 4.2 $\gamma \neq 0$. $\omega^1 = -\int x^{-\alpha} e^{-\frac{\mu}{2}x^2} \int (\beta x^{-2} + 2\mu) x^\alpha e^{\frac{\mu}{2}x^2} dx dx$, $\omega^3 = -\gamma \int e^{-\frac{\mu}{2}x^2} \int e^{\frac{\mu}{2}x^2} dx dx$, $\omega^5 = \omega^3|_{\gamma=2\mu}$, $\omega_x^i = \frac{d\omega^i}{dx}$, $i=1,3,5$.

алгебр лівської інваріантності, які для подібних рівнянь повинні співпасти. Таким чином, максимальні алгебри лівської інваріантності мають розмірності: один — для загального випадку 0, три — для випадків 5 та 6, два — для всіх інших випадків.

Більш складна задача — довести, що між параметризованими випадками таблиці A.2 (насправді тут всі випадки є параметризованими) не існує ніяких інших додаткових еквівалентностей. Множина допустимих перетворень у класі (A.9) описується наступними твердженнями.

Твердження А.8. *Допустимі точкові перетворення в класі (A.9) мають вигляд*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta \sqrt{T_t} x + X(t), \quad \tilde{v} = v - \ln T_t,$$

де $\delta = \pm 1$; T та X — довільні гладкі функції від t , причому $T_t > 0$. Відповідні значення довільних елементів пов'язані співвідношеннями

$$\tilde{F} = \frac{\delta}{\sqrt{T_t}} F - \frac{\delta}{2} \frac{T_{tt}}{\sqrt{T_t^3}} x - \frac{X_t}{T_t}, \quad \tilde{H} = \frac{1}{T_t} H - \frac{T_{tt}}{T_t^2}.$$

Наслідок А.9. Тільки ті рівняння з класу (А.9), довільні елементи яких мають вигляд

$$F = \mu x + \lambda + \frac{\alpha}{x + \kappa}, \quad H = \gamma + \frac{\beta}{(x + \kappa)^2}, \quad (\text{А.14})$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ та μ — сталі, мають допустимі перетворення, не породжені перетвореннями з групи еквівалентності $G_{\text{exp}}^{\sim}$.

Підклас класу (А.9), виокремлений умовами (А.14), є замкненим відносно будь-якого допустимого перетворення класу (А.9). Сталі параметри у виразах (А.14) перетворюються допустимими перетвореннями наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha, \quad \tilde{\beta} = \beta, \quad \tilde{\kappa} = \delta \sqrt{T_t} \kappa - X \quad \text{if} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0), \\ \tilde{\gamma} &= \frac{\gamma}{T_t} - \frac{T_{tt}}{T_t^2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{T_t} - \frac{1}{2} \frac{T_{tt}}{T_t^2}, \quad \tilde{\lambda} = -\tilde{\mu} X - \frac{X_t}{T_t} + \frac{\delta \lambda}{\sqrt{T_t}}. \end{aligned}$$

Зокрема, $T_{tt} = 0$ при $\gamma \neq 2\mu$.

Нарешті, можна сформулювати твердження щодо групової класифікації відносно множини допустимих перетворень.

Теорема А.10. З точністю до точкової еквівалентності випадки розширення максимальної алгебри лівівської інваріантності у класі (А.9) вичерпуються випадками $0, 2, 3, 4|_{\lambda=0}$ та $6|_{\lambda=0}$ таблиці А.2.

А.2.1. Некласичні оператори редукції та точні розв'язки. Оператори редукції рівнянь з класу (А.6) легко знайти за відомими операторами редукції відповідних рівнянь з (А.9), використовуючи формулу

$$\tilde{Q} = \tau \partial_t + \xi \partial_x + (\eta - \xi G_x) \partial_u. \quad (\text{А.15})$$

Тут τ , ξ та η — коефіцієнти при ∂_t , ∂_x та ∂_v в операторі редукції рівняння з класу (A.9). Функцію G визначено в (A.11).

В [308, 309] обговорено два способи використання відображень між класами рівнянь при дослідженні операторів редукції та їх застосуванні для знаходження розв'язків. Найкращий спосіб полягає у реалізації редукцій у відображеному класі та взятті прообразу отриманих розв'язків замість взяття прообразу відповідних операторів редукції.

Використовуючи описаний вище алгоритм, шукаємо $G_{\text{exp}}^{\sim}$ -нееквівалентні оператори редукції з ненульовим коефіцієнтом при ∂_t для рівнянь з відображеного класу (A.9). З точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції потрібно розглянути лише оператори вигляду $Q = \partial_t + \xi(t, x, v)\partial_x + \eta(t, x, v)\partial_v$.

Застосовуючи умовний критерій інваріантності до рівняння (A.9), отримаємо многочлен третього степеня від v_x з коефіцієнтами, що залежать від t , x та v , який має тотожно дорівнювати нулю. Розщеплення за різними степенями v_x дає наступні визначальні рівняння на коефіцієнти ξ та η :

$$\begin{aligned}\xi_{vv} &= 0, \quad \eta_{vv} = 2(\xi_{xv} - \xi\xi_v - F\xi_v), \\ \xi_t - \xi_{xx} + 2\xi_x\xi + 3\xi_v(H + \varepsilon e^v) + 2\eta_{vx} - 2\xi_v\eta + F\xi_x + \xi F_x &= 0, \\ \eta_t - \eta_{xx} + 2\xi_x\eta &= \xi H_x + F\eta_x + (2\xi_x - \eta_v)H + \varepsilon e^v(\eta + 2\xi_x - \eta_v).\end{aligned}\tag{A.16}$$

Інтегруючи перші два рівняння (A.16), отримаємо вирази для ξ та η , які явно залежать від v :

$$\xi = av + b, \quad \eta = -\frac{1}{3}a^2v^3 + (a_x - ab - aF)v^2 + cv + d,\tag{A.17}$$

де $a = a(t, x)$, $b = b(t, x)$, $c = c(t, x)$ та $d = d(t, x)$ — гладкі функції.

Підставляючи вирази (A.17) для ξ та η в третє і четверте рівняння (A.16) та збираючи коефіцієнти при різних степенях v , виводимо умови $a = c = 0$, $d = -2b_x$ та два класифікуючі рівняння, які містять як ко-

ефіцієнт $b = b(t, x)$, так і довільні елементи $F = F(x)$ та $H = H(x)$.
Справедливе твердження.

Твердження А.11. *Будь-який регулярний оператор редукції рівняння з відображеного класу (A.9) еквівалентний оператору вигляду*

$$Q = \partial_t + b\partial_x - 2b_x\partial_v, \quad (\text{A.18})$$

де коефіцієнт $b = b(t, x)$ задовольняє перевизначену систему диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{aligned} b_t - b_{xx} + 2bb_x + Fb_x + bF_x &= 0, \\ bH_x + 2b_xH - 4bb_{xx} - 2(Fb)_{xx} - 2Fb_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

з відповідними значеннями довільних елементів $F = F(x)$ та $H = H(x)$.

Ми не змогли завершити дослідження всіх випадків інтегрування системи (A.19) в залежності від значень F та H . Тому намагалися розв'язати цю систему, накладаючи різні додаткові обмеження на b чи на (F, H) .

Найбільш цікаві результати отримано при обмеженні $b_t = 0$: після часткового інтегрування рівнянь (A.19) F та H виражаються через функцію $b = b(x)$, що приводить до наступного твердження.

Теорема А.12. *Для довільної гладкої функції $b = b(x)$ рівняння з класу (A.9) з довільними елементами*

$$F = \frac{1}{b} (b_x + k_1 - b^2), \quad H = \frac{2}{b^2} (k_2 + b_x(k_1 - b^2) + bb_{xx}), \quad (\text{A.20})$$

де k_1 та k_2 — сталі, допускає оператор редукції (A.18) з тією ж функцією b .

Анзац, побудований за оператором редукції (A.18) з $b_t = 0$, має вигляд

$$v = z(\omega) - 2 \ln |b|, \quad \text{де} \quad \omega = t - \int \frac{dx}{b}.$$

Підстановка цього анзацу в рівняння (A.9) призводить до редукованого звичайного диференціального рівняння

$$z_{\omega\omega} - k_1 z_{\omega} + \varepsilon e^z + 2k_2 = 0. \quad (\text{A.21})$$

При $k_1 = 0$ загальний розв'язок (A.21) можна подати в неявній формі:

$$\int (c_1 - 4k_2 z - 2\varepsilon e^z)^{-\frac{1}{2}} dz = \pm(\omega + c_2). \quad (\text{A.22})$$

З точністю до інваріантних розв'язків рівняння (A.9) стала c_2 є несуттєвою: її можна покласти рівною нулю за допомогою зсуву по ω , який завжди породжується зсувом по t .

Поклавши додатково $k_2 = 0$, рівняння (A.22) можна проінтегрувати в явному вигляді і явно записати загальний розв'язок рівняння (A.21). Якщо $\varepsilon = 1$, то $c_1 > 0$ і (A.22) дає наступний вираз для e^z :

$$e^z = \frac{2s_1^2}{\text{ch}^2(s_1\omega + s_2)}.$$

Тут і далі $s_1 = \sqrt{|c_1|}/2$ та $s_2 = c_2 s_1$. Якщо $\varepsilon = -1$, то

$$e^z = \begin{cases} \frac{2s_1^2}{\text{sh}^2(s_1\omega + s_2)}, & c_1 > 0, \\ \frac{2s_1^2}{\text{cos}^2(s_1\omega + s_2)}, & c_1 < 0, \\ \frac{2}{(\omega + c_2)^2}, & c_1 = 0. \end{cases}$$

В результаті для рівняння з класу (A.9) вигляду

$$v_t = v_{xx} + \frac{1}{b} (b_x - b^2) v_x + \varepsilon e^v + \frac{2}{b} (b_{xx} - b b_x) \quad (\text{A.23})$$

з $\varepsilon = -1$ будемо три сім'ї точних розв'язків у явному вигляді:

$$\begin{aligned} v &= -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2s_1} b \text{sh} \left(s_1 t - s_1 \int \frac{dx}{b} + s_2 \right) \right|, \\ v &= -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2s_1} b \text{cos} \left(s_1 t - s_1 \int \frac{dx}{b} + s_2 \right) \right|, \\ v &= -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} b \left(t - \int \frac{dx}{b} + c_2 \right) \right|, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

де s_1 , s_2 та c_2 — довільні сталі, $s_1 \neq 0$. Також маємо сім'ю розв'язків

$$v = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2s_1} b \operatorname{ch} \left(s_1 t - s_1 \int \frac{dx}{b} + s_2 \right) \right| \quad (\text{A.25})$$

рівняння (A.23) з $\varepsilon = 1$.

Продовжимо розгляд дослідженням наступного питання: чи мають рівняння з класу (A.9), які володіють нетривіальними властивостями ліївських симетрій (тобто мають максимальні алгебри ліївської інваріантності розмірності два чи три), нетривіальні (нееквівалентні ліївським) регулярні оператори редукції? Як вже було відзначено, рівняння з класу (A.9) зі сталими коефіцієнтами таких операторів редукції не допускають [46, 93]. Отже, немає необхідності розглядати випадки 4 та 6 таблиці A.2, так само як і випадок 5, пов'язаний з випадком 6 точковим перетворенням (A.13). Оскільки випадок 1 зводиться до випадку 2 тим самим перетворенням (A.13), залишається дослідити лише випадки 2 та 3. Підставимо відповідні пари значень функцій-параметрів F та H у систему (A.19), щоб знайти значення b . Переконуємося, що $b_t = 0$ — необхідна умова існування неліївських регулярних операторів редукції для рівнянь з такими значеннями (F, H) . Тому в подальшому можна користуватися рівняннями (A.20) замість (A.19).

Дослідження випадку 3 таблиці A.2 приводить до висновку, що неліївських регулярних операторів редукції для цього випадку не існує.

Функції F та H , наведені у випадку 2 таблиці A.2, задовольняють (A.20) тоді і тільки тоді, коли $\beta = 2(1 - \alpha)$, тобто вони мають вигляд $F = \alpha x^{-1}$ і $H = 2(1 - \alpha)x^{-2}$, причому $k_1 = k_2 = 0$. Відповідним значенням b буде $b = -(1 + \alpha)x^{-1}$. Звідси випливає, що $\alpha \neq -1$, оскільки інакше $b = 0$. Підставляючи виведений вигляд функції b у формули (A.24) та (A.25), отримуємо той факт, що рівняння

$$v_t = v_{xx} + \frac{\alpha}{x} v_x + \varepsilon e^v + \frac{2(1 - \alpha)}{x^2} \quad (\text{A.26})$$

має сім'ї розв'язків

$$v = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}(1+\alpha)}{2s_1x} \operatorname{ch} \left(s_1t + \frac{s_1x^2}{2(1+\alpha)} + s_2 \right) \right|$$

при $\varepsilon = 1$, а також

$$v = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}(1+\alpha)}{2s_1x} \operatorname{sh} \left(s_1t + \frac{s_1x^2}{2(1+\alpha)} + s_2 \right) \right|,$$

$$v = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}(1+\alpha)}{2s_1x} \cos \left(s_1t + \frac{s_1x^2}{2(1+\alpha)} + s_2 \right) \right|,$$

$$v = -2 \ln \left| \frac{\sqrt{2}(1+\alpha)}{2x} \left(t + \frac{x^2}{2(1+\alpha)} + c_2 \right) \right|,$$

при $\varepsilon = -1$. Нагадаємо, що s_1 , s_2 та c_2 — довільні сталі, $s_1 \neq 0$.

В якості представника прообразу рівняння (A.45) при перетворенні (A.8) можна обрати рівняння

$$x^\alpha u_t = (x^\alpha u_x)_x + \varepsilon x^{\alpha+2} e^u. \quad (\text{A.27})$$

Розв'язки цього рівняння легко отримати з розв'язків рівняння (A.45), наведених вище, використовуючи перетворення $u = v - 2 \ln |x|$. Якщо $\alpha = 1$, то обране рівняння (A.27) можна замінити, наприклад, рівнянням $xu_t = (xu_x)_x + \varepsilon x e^u$, яке є просто іншою формою рівняння (A.45).

Нелінійські розв'язки рівняння

$$v_t = v_{xx} + \left(\frac{\alpha}{x} + \mu x \right) v_x + \varepsilon e^v + \frac{2(1-\alpha)}{x^2} + 2\mu,$$

де $\alpha \neq -1$ (випадок 1 таблиці A.2), можна легко отримати з точних розв'язків рівняння (A.27), використовуючи перетворення (A.13). Відповідний оператор редукції має вигляд (A.18), де $b = -(1+\alpha)x^{-1} - \mu x$.

Доведемо наступні твердження.

Твердження A.13. *Рівняння з класу (A.9) при $F = \text{const}$ або $H = \text{const}$ можуть допускати лише нетривіальні регулярні оператори редукції, які еквівалентні операторам вигляду (A.18), де функція b не залежить від змінної t .*

Твердження А.14. *Кожен оператор редукції деякого рівняння з класу (A.9) вигляду (A.18), де $b_{xx} = 0$, еквівалентний оператору лівської симетрії цього рівняння.*

А.3. Некласичні оператори редукції класу квазілінійних рівнянь дифузії зі степеневим джерелом

У роботі [309] одночасне використання перетворень еквівалентності та відображень між класами дозволило провести групову класифікацію класу квазілінійних рівнянь реакції-дифузії зі степеневою нелінійністю та змінними коефіцієнтами

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m, \quad (\text{A.28})$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$ та $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x , причому $f(x)g(x)h(x) \neq 0$; m — довільна стала ($m \neq 0, 1$). Спочатку було виконано калібрування $f = g$ за допомогою перетворення еквівалентності цього класу — таким чином клас було зведено до його підкласу (A.28)

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^m, \quad fh \neq 0, \quad m \neq 0, 1. \quad (\text{A.29})$$

Наступний крок — заміна залежної змінної

$$v(t, x) = \sqrt{|f(x)|} u(t, x) \quad (\text{A.30})$$

у класі (A.29). В результаті отримано клас пов'язаних рівнянь

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^m + F(x)v, \quad (\text{A.31})$$

де нові довільні елементи F та H виражаються через старі за формулами

$$F(x) = -\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}, \quad H(x) = \frac{h(x) \operatorname{sign} f(x)}{(\sqrt{|f(x)|})^{m+1}}. \quad (\text{A.32})$$

Дослідимо некласичні оператори редукції рівнянь (A.31) та використаємо їх для побудови точних розв'язків рівнянь (A.29).

Оператори редукції для загальних значень m . Знайдемо $G_{FH}^{\sim}$ -нееквівалентні оператори редукції відображеного класу (A.31). У цьому класі оператори редукції мають загальний вигляд $Q = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_v$, де τ , ξ та η — функції від t , x та v , причому $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$. Оскільки рівняння (A.31) — еволюційне, ми стикаємося з двома суттєво різними випадками знаходження Q : $\tau \neq 0$ та $\tau = 0$ [117, 193, 341]. Сингулярний випадок $\tau = 0$ для загальних еволюційних рівнянь вичерпно досліджено у роботах [193, 341].

Якщо $\tau \neq 0$, то з точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції можна вважати, що $\tau = 1$. Тоді визначальні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \xi_{vv} &= 0, \quad \eta_{vv} = 2(\xi_{xv} - \xi\xi_v), \\ \eta_t - \eta_{xx} + 2\xi_x\eta &= \\ \xi(H_x v^m + F_x v) + (2\xi_x - \eta_v)(H v^m + F v) + \eta(F + H v^{m-1} m), \\ 3\xi_v(H v^m + F v) + 2\xi_x\xi + \xi_t + 2\eta_{vx} - \xi_{xx} - 2\xi_v\eta &= 0. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Інтегрування перших двох рівнянь цієї системи дає вирази для ξ та η :

$$\xi = av + b, \quad \eta = -\frac{1}{3}a^2v^3 + (a_x - ab)v^2 + cv + d, \tag{A.34}$$

де $a = a(t, x)$, $b = b(t, x)$, $c = c(t, x)$, $d = d(t, x)$ — довільні функції.

Підставляючи ξ та η з (A.34) в третє та четверте рівняння (A.33), отримуємо класифікуючі рівняння, що містять як решту не визначених поки що коефіцієнтів оператора, так і довільні елементи класу, що розглядається.

Оскільки функції a , b , c , d , F , H не залежать від змінної v , класифікуючі рівняння слід розщепити за різними степенями v . Два суттєво різні випадки ($a = 0$ і $a \neq 0$) розглядаємо окремо.

Якщо $a = 0$, то для будь-якого $m \neq 0, 1, 2$ розщеплення дає систему з п'яти рівнянь

$$\begin{aligned} mHd &= 0, \quad d_t - d_{xx} + 2b_xd - Fd = 0, \\ b_t - b_{xx} + 2bb_x + 2c_x &= 0, \quad bH_x + (c(m-1) + 2b_x)H = 0, \\ bF_x + 2b_xF + c_{xx} - c_t - 2b_xc &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Оскільки $mH \neq 0$, маємо $d = 0$ і друге рівняння (A.35) стає тотожністю.

Знаходження загального розв'язку інших трьох рівнянь системи (A.35) виявилось дуже складною задачею. Але неважко побудувати певні часткові розв'язки, поклавши, наприклад, $b_t = 0$. З цього припущення випливає, що $c_t = 0$. Тоді інтегрування (A.35) дає можливість виразити c , F та H через функцію $b(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b_x + k_1, \\ F &= -\frac{1}{4}b^2 + k_1 + k_2b^{-2} + b_x + \frac{1}{4}\left(\frac{b_x}{b}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{b_{xx}}{b}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$H = k_3b^{-\frac{m+3}{2}} \exp\left[(m-1) \int \left(\frac{b}{2} - \frac{k_1}{b}\right) dx\right], \quad (\text{A.37})$$

де k_1, k_2, k_3 — довільні сталі, причому $k_3 \neq 0$.

Теорема А.15. Рівняння з класу (A.31) з довільними елементами, заданими формулами (A.36) та (A.37), допускають оператори редукції вигляду

$$Q = \partial_t + b\partial_x + \left(-\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b_x + k_1\right)v\partial_v, \quad (\text{A.38})$$

де $b = b(x)$ — довільна гладка функція, k_1 — довільна стала.

Зауваження А.16. Теорема A.15 справедлива для будь-якого $m \in \mathbb{R}$, включаючи $m \in \{0, 1, 2\}$.

Наведемо ілюстративний приклад для конкретної функції b , а саме розглянемо $b = x^{-1}$. З огляду на теорему A.15 рівняння з класу (A.31) з довільними елементами

$$F = k_1 + k_2x^2 - 2x^{-2}, \quad H = k_3x^{m+1}e^{\frac{1}{2}(1-m)k_1x^2} \quad (\text{A.39})$$

допускають оператор редукції $Q = \partial_t + x^{-1}\partial_x + (k_1 - x^{-2})v\partial_v$. За цим оператором будуюмо анзац $v = x^{-1}e^{k_1 t}z(\omega)$, де $\omega = x^2 - 2t$. Тоді редукзоване рівняння набуває вигляду

$$4z_{\omega\omega} + k_3 e^{\frac{1}{2}(1-m)k_1\omega} z^m + k_2 z = 0.$$

Якщо $k_1 = k_2 = 0$, то редукзоване рівняння має частковий розв'язок

$$z = \begin{cases} \left(\pm \frac{m-1}{2} \sqrt{-\frac{k_3}{2(m+1)}} \omega \right)^{\frac{2}{1-m}}, & m \neq -1, \\ \exp \left(- \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{k_3}{\pi}} \omega \right) \right]^2 \right), & m = -1. \end{cases}$$

Підставивши отримані z в анзац, побудуємо точні розв'язки рівняння з класу (A.31) з довільними елементами (A.39) для значень $k_1 = k_2 = 0$.

Рівняння-прообраз $x^4 u_t = (x^4 u_x)_x + k_3 x^{3(m+1)} u^m$ має точний розв'язок

$$u = \begin{cases} x^{-3} \left(\pm \frac{m-1}{2} \sqrt{-\frac{k_3}{2(m+1)}} (x^2 - 2t) \right)^{\frac{2}{1-m}}, & m \neq -1, \\ x^{-3} \exp \left\{ - \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{k_3}{\pi}} (x^2 - 2t) \right) \right]^2 \right\}, & m = -1. \end{cases}$$

Більше прикладів наведено у роботі [308]. Ми показали застосовність теореми A.15 до побудови нелінійних точних розв'язків рівнянь з класів (A.29) і (A.31). Більш того, використовуючи ці розв'язки, можна знайти точні розв'язки й інших рівнянь з класів (A.31) та (A.29) за допомогою перетворень еквівалентності з відповідної групи еквівалентності.

У випадку $m = 3$ можна побудувати більше точних розв'язків рівнянь з класу (A.31), коефіцієнти яких наведено у (A.36)–(A.37), при $k_1 = 0$, а саме для рівнянь

$$v_t = v_{xx} + k_3 b^{-3} e^{\int b dx} v^3 + \left(\frac{k_2}{b^2} - \frac{1}{4} b^2 + b_x + \frac{1}{4} \left(\frac{b_x}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{b_{xx}}{b} \right) v, \quad (\text{A.40})$$

де $b = b(x)$, $k_3 \neq 0$.

Відповідно до теореми A.15, рівняння (A.40) допускає оператор редукції (A.38) з $k_1 = 0$. Побудований за цим оператором анзац

$$v = z(\omega) \sqrt{|b|} e^{-\frac{1}{2} \int b dx}, \quad \text{де} \quad \omega = t - \int \frac{dx}{b},$$

редукує (A.40) до звичайного диференціального рівняння

$$z_{\omega\omega} = -k_3 z^3 - k_2 z.$$

Цікаво, що це редукзоване рівняння не залежить від функції $b(x)$. Домноживши його на z_ω та один раз проінтегрувавши, отримаємо рівняння

$$z_\omega^2 = -\frac{k_3}{2} z^4 - k_2 z^2 + C_1.$$

Його загальний розв'язок виражається через еліптичні функції Якобі, що залежать від значень сталих k_2 , k_3 та C_1 .

Наприклад, якщо $k_2 = 1 + \mu^2$, $k_3 = -2\mu^2$ ($0 < \mu < 1$) та $C_1 = 1$, можна знайти два точні розв'язки рівняння (A.40):

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{sn} \left(t - \int \frac{1}{b} dx, \mu \right) \sqrt{|b|} e^{-\frac{1}{2} \int b dx}, \\ v &= \operatorname{cd} \left(t - \int \frac{1}{b} dx, \mu \right) \sqrt{|b|} e^{-\frac{1}{2} \int b dx}, \end{aligned}$$

де $\operatorname{sn}(\omega, \mu)$, $\operatorname{cd}(\omega, \mu)$ — еліптичні функції Якобі [325].

Розглянемо випадок $a \neq 0$. Після підстановки ξ та η з (A.34) до системи (A.33) її останнє рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} a^3 v^3 + 2a(ab - 2a_x)v^2 + (a_t + 3a_{xx} + 3aF - 2(ab)_x - 2ac)v \\ + b_t + 2b_x b - b_{xx} - 2ad + 2c_x + 3aHv^m = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Легко бачити, що $a \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $m = 3$.

Спеціальні оператори редукції для кубічної нелінійності. Розщеплюючи рівняння (A.41) за змінною u при умовах $m = 3$ та $a \neq 0$, бачимо, що функції a , b , c , d не залежать від змінної t і виражаються

через функції F та H таким чином:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2}\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{-H}, \quad b = \frac{H_x}{H}, \\ c &= \frac{1}{8}\left(12F - 2\left(\frac{H_x}{H}\right)_x - \left(\frac{H_x}{H}\right)^2\right), \\ d &= \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2\sqrt{-H}}\left(F_x + \frac{1}{2}\frac{H_x}{H}\left(\frac{H_x}{H}\right)_x - \frac{1}{2}\left(\frac{H_x}{H}\right)_{xx}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

де $\varepsilon = \pm 1$. Якщо $H < 0$, то відповідні оператори редукції мають дійсні коефіцієнти.

Тоді розщеплення третього рівняння системи (A.33) при $m = 3$ дасть систему з двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} H^3 H_{xxxx} - 13 H_x^4 + 2 F_x H^3 H_x + 22 H H_x^2 H_{xx} - 4 F H^2 H_x^2 \\ - 4 H^2 H_{xx}^2 - 6 H^2 H_x H_{xxx} + 4 F H^3 H_{xx} - 6 F_{xx} H^4 = 0, \\ 16 F_{xxx} H^5 + 16 H^2 H_x H_{xx}^2 + 3 H^2 H_x^2 H_{xxx} - 4 F_x H^4 H_{xx} \\ - 6 H^3 H_{xx} H_{xxx} - 18 H H_x^3 H_{xx} - 8 F F_x H^5 + 2 F_x H^3 H_x^2 \\ - 20 F H^2 H_x^3 - 12 F H^4 H_{xxx} + 5 H_x^5 + 32 F H^3 H_x H_{xx} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Справедливе твердження.

Теорема А.17. Рівняння з класу (A.31) з $m = 3$ і довільними елементами, що задовольняють систему (A.43), допускають оператори редукції вигляду

$$\begin{aligned} Q &= \partial_t + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{-H}v + \frac{H_x}{H}\right)\partial_x \\ &+ \left[\frac{3}{2}Hv^3 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\varepsilon\frac{H_x}{\sqrt{-H}}v^2 + \frac{1}{8}\left(12F - 2\left(\frac{H_x}{H}\right)_x - \left(\frac{H_x}{H}\right)^2\right)v \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2\sqrt{-H}}\left(F_x + \frac{1}{2}\frac{H_x}{H}\left(\frac{H_x}{H}\right)_x - \frac{1}{2}\left(\frac{H_x}{H}\right)_{xx}\right)\right]\partial_v, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

де $\varepsilon = \pm 1$.

Система (A.43) складається з двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого та третього порядку. На жаль, знайти її загальний розв'язок неможливо. Але ми перевірили шість пар функцій F та H , що зустрічаються в таблиці 1, на предмет того, чи задовольняють вони систему (A.43). Якщо це так, то відповідний оператор редукції легко побудувати за формулою (A.44). Виявилось, що систему (A.43) задовольняють функції F та H з випадків 1, 2 та 6, а також ті функції з випадків 3 і 4, для яких $(k, a_2) = (-3, \frac{9}{4})$ або $(k, a_2) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{16})$.

Приклад A.18. Клас (A.31) містить рівняння з кубічною нелінійністю, які не зводяться точковими перетвореннями до рівнянь зі сталими коефіцієнтами та допускають оператори редукції вигляду (A.44). Одне з них має вигляд

$$v_t = v_{xx} - x^{-3}v^3 + \frac{9}{4}x^{-2}v. \quad (\text{A.45})$$

Відповідно до теореми A.17, це рівняння допускає два подібні оператори редукції ($\varepsilon = \pm 1$):

$$Q_{\pm} = \partial_t + \frac{3}{2}\sqrt{2} \left(\varepsilon x^{-\frac{3}{2}}v - \sqrt{2}x^{-1} \right) \partial_x - \frac{3}{4}\sqrt{2} \left(\sqrt{2}x^{-3}v^3 - 3\varepsilon x^{-\frac{5}{2}}v^2 - \sqrt{2}x^{-2}v + 4\varepsilon x^{-\frac{3}{2}} \right) \partial_v.$$

Вони дають розв'язки, що відрізняються лише знаками. Оскільки рівняння (A.45) є інваріантним відносно перетворення $v \mapsto -v$, розглянемо детально лише випадок $\varepsilon = 1$. Аби усі вирази були коректно визначеними, обмежимося значеннями $x > 0$ (інший спосіб — замінити x на $|x|$).

Для зручності при редукції застосуємо перетворення годографа

$$\tilde{t} = v, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{v} = t,$$

яке відображає рівняння (A.45) та оператор редукції Q_+ у рівняння

$$\tilde{v}_t^2 \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{x}}^2 \tilde{v}_{\tilde{t}\tilde{t}} - 2\tilde{v}_{\tilde{t}} \tilde{v}_{\tilde{x}} \tilde{v}_{\tilde{t}\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{t}}^2 + \frac{\tilde{t}^3}{\tilde{x}^3} \tilde{v}_{\tilde{t}}^3 - \frac{9}{4} \frac{\tilde{t}}{\tilde{x}^2} \tilde{v}_{\tilde{t}}^3 = 0 \quad (\text{A.46})$$

та його оператор редукції

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_+ = & -\frac{3}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\tilde{x}^{-3}\tilde{t}^3 - 3\tilde{x}^{-\frac{5}{2}}\tilde{t}^2 - \sqrt{2}\tilde{x}^{-2}\tilde{t} + 4\tilde{x}^{-\frac{3}{2}}\right)\partial_{\tilde{t}} \\ & + \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\tilde{x}^{-\frac{3}{2}}\tilde{t} - \sqrt{2}\tilde{x}^{-1}\right)\partial_{\tilde{x}} + \partial_{\tilde{v}}.\end{aligned}$$

Побудований за оператором $\tilde{Q}_+$ анзац має вигляд

$$\tilde{v} = \frac{1}{24}\tilde{x}^2\frac{\tilde{t} + \sqrt{2\tilde{x}}}{\tilde{t} - \sqrt{2\tilde{x}}} - \frac{1}{12}\tilde{x}^2 + z(\omega), \quad \text{де} \quad \omega = \tilde{x}^2\frac{\tilde{t} - \sqrt{2\tilde{x}}}{\tilde{t} + \sqrt{2\tilde{x}}}.$$

Він редукує (A.46) до лінійного звичайного диференціального рівняння $\omega z_{\omega\omega} + 2z_{\omega} = 0$, загальний розв'язок якого $z = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\omega^{-1}$ при підстановці в анзац дає точний розв'язок

$$\tilde{v} = \frac{\tilde{x}^4 + 24\tilde{c}_2\tilde{t} + \sqrt{2\tilde{x}}}{24\tilde{x}^2} \frac{\tilde{t} - \sqrt{2\tilde{x}}}{\tilde{t} + \sqrt{2\tilde{x}}} - \frac{1}{12}\tilde{x}^2 + \tilde{c}_1$$

рівняння (A.46). Застосувавши обернене перетворення годографа та позбувшись сталої $\tilde{c}_1$ зсувом по t , будуюмо неліівський розв'язок

$$v = \sqrt{2x} \frac{3x^4 + 24tx^2 + c_2}{x^4 + 24tx^2 - c_2} \quad (\text{A.47})$$

рівняння (A.45). Розв'язок (A.47) з $c_2 = 0$ є ліівським розв'язком, інваріантним відносно оператора дилатації $D = 4t\partial_t + 2x\partial_x + v\partial_v$ з максимальної алгебри ліівської інваріантності рівняння (A.45). Проте знайти цей розв'язок за допомогою редукції за оператором D складніше. Відповідний анзац $v = \sqrt{x}z(\omega)$, де $\omega = t^{-1}x^2$, має простий вигляд, але редуковане звичайне диференціальне рівняння $4\omega^2 z_{\omega\omega} + \omega(\omega + 4)z_{\omega} + 2z - z^3 = 0$ є нелінійним.

Цей приклад підтверджує спостереження В.І. Фуцича [30]: “Анзаци, породжені операторами умовної симетрії, часто редукують початкове нелінійне рівняння до лінійного. Як правило, ліівська редукція не змінює нелінійної структури рівняння”.

Можна сформулювати й більш загальне твердження: складний неліівський анзац може приводити до простого редукованого рівняння, в той

час як простий ліївський анзац може дати редуковане рівняння, яке складно проінтегрувати.

Одним з прообразів рівняння (A.45) при перетворенні (A.30) є таке рівняння

$$x \sin^2(\sqrt{2} \ln x) u_t = \left(x \sin^2(\sqrt{2} \ln x) u_x \right)_x - x^{-1} \sin^4(\sqrt{2} \ln x) u^3,$$

що має неліївський точний розв'язок

$$u = \sqrt{\frac{2}{x}} \left| \operatorname{cosec}(\sqrt{2} \ln x) \right| \frac{3x^4 + 24tx^2 + c_2}{x^4 + 24tx^2 - c_2}.$$

Приклад A.19. Розгляньмо рівняння з відображеного класу (A.31)

$$v_t = v_{xx} - x^{-\frac{3}{2}} v^3 + \frac{3}{16} \frac{v}{x^2} \quad (\text{A.48})$$

при $x > 0$. Воно допускає оператор редукції вигляду (A.44):

$$Q_+ = \partial_t + \frac{3}{2} \left(\sqrt{2} x^{-\frac{3}{4}} v - x^{-1} \right) \partial_x - \frac{3}{8} \left(4x^{-\frac{3}{2}} v^3 - 3 \sqrt{2} x^{-\frac{7}{4}} v^2 + x^{-2} v \right) \partial_v.$$

Використовуючи таку ж техніку, як у попередньому прикладі, отримаємо неліївський точний розв'язок рівняння (A.48):

$$v = \frac{1}{2} 5 \sqrt{2} x^{\frac{1}{4}} \frac{3t + x^2}{\sqrt{x}(15t + x^2) + c_2}. \quad (\text{A.49})$$

Застосувавши до нього перетворення

$$v = \sqrt{x} (b_1 x^{\frac{1}{4}} + b_2 x^{-\frac{1}{4}}) u,$$

отримаємо неліївський розв'язок рівняння

$$x (b_1 x^{\frac{1}{4}} + b_2 x^{-\frac{1}{4}})^2 u_t = \left(x (b_1 x^{\frac{1}{4}} + b_2 x^{-\frac{1}{4}})^2 u_x \right)_x - \sqrt{x} (b_1 x^{\frac{1}{4}} + b_2 x^{-\frac{1}{4}})^4 u^3$$

з класу (A.29), де b_1 та b_2 — довільні сталі, причому $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

Більше прикладів та неklasичних операторів редукції рівнянь з класу (A.29), що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з класу (A.31), можна знайти у роботі [308].

А.4. Потенціальні симетрії класу неоднорідних рівнянь дифузії

У цьому розділі розглянемо нелінійні рівняння дифузії зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x, \quad fgn \neq 0. \quad (\text{A.50})$$

Використовуючи перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = \int \frac{dx}{g(x)}$, $\tilde{u} = u$, кожне рівняння з цього класу можна звести до рівняння $\tilde{f}(\tilde{x})\tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{u}^n \tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}}$, де $\tilde{f}(\tilde{x}) = g(x)f(x)$ та $\tilde{g}(\tilde{x}) = 1$. Тому без обмеження загальності можна досліджувати лише ті рівняння, що мають вигляд

$$f(x)u_t = (u^n u_x)_x, \quad fn \neq 0. \quad (\text{A.51})$$

Група еквівалентності $G^\sim$ класу (A.51) має просту структуру і складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_4, & \tilde{x} &= \delta_2 x + \delta_5, & \tilde{u} &= \delta_3 u, \\ \tilde{f} &= \delta_1 \delta_2^{-2} \delta_3^n f, & \tilde{n} &= n, \end{aligned}$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 5$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \neq 0$. Разом з тим клас (A.51) має узагальнену групу еквівалентності, яка є більш широкою, ніж $G^\sim$.

Теорема А.20. *Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^\sim$ класу (A.51) при умові $n \neq -1$ складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, & \tilde{x} &= \frac{\delta_3 x + \delta_4}{\delta_5 x + \delta_6}, & \tilde{u} &= \delta_7 |\delta_5 x + \delta_6|^{-\frac{1}{n+1}} u, \\ \tilde{f} &= \delta_1 \delta_7^n |\delta_5 x + \delta_6|^{\frac{3n+4}{n+1}} f, & \tilde{n} &= n, \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 7$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_7 \neq 0$ та $\delta_3 \delta_6 - \delta_4 \delta_5 = \pm 1$.

У випадку $n = -1$ перетворення з групи $\hat{G}^\sim$ мають вигляд

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_5 e^{\delta_6 x} u, \quad \tilde{f} = \delta_1 \delta_3^{-2} \delta_5^{-1} e^{-\delta_6 x} f,$$

де δ_j , $j = 1, \dots, 6$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \delta_5 \neq 0$.

Оскільки параметр n є інваріантом всіх допустимих (точкових) перетворень у класі (A.51), цей клас можна розглядати як об'єднання неперетинних підкласів, кожен з яких відповідає фіксованому значенню n . Таке зображення дає можливість розглядати узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^\sim$ як сім'ю звичайних умовних груп еквівалентності підкласів, параметризованих сталою n (значення $n = 0$ та $n = -1$ сингулярні).

Закони збереження для класу (A.51) знайдено у [161, 164]. Простір локальних законів збереження довільного рівняння (A.51) з $n \neq 0$ є двовимірним та породжується законами збереження зі збережними векторами $(fu, -u^n u_x)$ та $(xfu, -xu^n u_x + \int u^n du)$.

З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності ці закони збереження приводять до наступних нееквівалентних потенціальних систем для рівнянь (A.51):

1. $v_x^1 = fu, \quad v_t^1 = u^n u_x;$
2. $v_x^2 = xfu, \quad v_t^2 = xu^n u_x - \int u^n du;$
3. $v_x^1 = fu, \quad v_t^1 = u^n u_x, \quad v_x^2 = xfu, \quad v_t^2 = xu^n u_x - \int u^n du.$

Системи **1** та **2** — відповідають законам збереження, що мають характеристики 1 та x , відповідно. Об'єднана система **3** відповідає всьому простору законів збереження. Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^\sim$, продовжена на потенціали, встановлює додаткову еквівалентність між потенціальними системами. Таким чином, у випадку $n \neq -1$ перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t, \quad \tilde{x} = x^{-1}, \quad \tilde{u} = |x|^{-\frac{1}{n+1}} u, \\ \tilde{v}^1 &= -(\text{sign } x)v^2, \quad \tilde{v}^2 = -(\text{sign } x)v^1 \end{aligned} \tag{A.52}$$

відображає системи **1** та **2** у системи **2** та **1** (в тильдованих змінних), відповідно, де $\tilde{f} = |\tilde{x}|^{-\frac{3n+4}{n+1}} f(\tilde{x}^{-1})$. Системи **1** та **2** є $\hat{G}^\sim$ -нееквівалентними для довільної пари значень f тоді і тільки тоді, коли $n = -1$.

Потенціальні симетрії рівняння (A.51), що відповідають системі **1**, вперше отримано в [286, 287] (див. також [1, 71, 72] для випадку сталого коефіцієнта $f = 1$). Існує два нееквівалентних рівняння вигляду (A.51), що допускають такі нелокальні симетрії. Відповідні значення довільних елементів і базиси максимальних алгебр лівської інваріантності:

1.1. $f = 1, n = -2$:

$$\langle \partial_t, \partial_{v^1}, 2t\partial_t + u\partial_u + v^1\partial_{v^1}, x\partial_x - u\partial_u, -v^1x\partial_x + (xu + v^1)u\partial_u + 2t\partial_{v^1}, \\ 4t^2\partial_t - ((v^1)^2 + 2t)x\partial_x + ((v^1)^2 + 6t + 2xuv^1)u\partial_u + 4tv^1\partial_{v^1}, \varphi\partial_x - \varphi_{v^1}u^2\partial_u \rangle;$$

1.2. $f = x^{-4/3}, n = -2$:

$$\langle \partial_t, \partial_{v^1}, 2t\partial_t + u\partial_u + v^1\partial_{v^1}, 3x\partial_x - u\partial_u - 2v^1\partial_{v^1}, \\ 3xv^1\partial_x - (v^1 + 3x^{-1/3}u)u\partial_u - (v^1)^2\partial_{v^1} \rangle.$$

Тут і далі $\varphi = \varphi(t, v^1)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $\varphi_t = \varphi_{v^1}v^1$.

Потенціальні симетрії рівняння (A.51), що відповідають системі **2**, було вперше досліджено у роботі [288] (див. також [165]). З точністю до групи еквівалентності $G^\sim$ існує два випадки рівнянь у класі (A.51), що допускають такі потенціальні симетрії:

2.1. $f = x^{-2}, n = -2$:

$$\langle \partial_t, \partial_{v^2}, x\partial_x, 2t\partial_t + u\partial_u + v^2\partial_{v^2}, v^2x\partial_x - u^2\partial_u + 2t\partial_{v^2}, \\ 4t^2\partial_t + ((v^2)^2 + 2t)x\partial_x + 2(2t - uv^2)u\partial_u + 4tv^2\partial_{v^2}, x^2\psi\partial_x - xu(\psi + \psi_{v^2}u)\partial_u \rangle.$$

2.2. $f = x^{-2}(c_1 + c_2x^{-1})^{-4/3}, c_2 \neq 0, n = -2$:

$$\langle \partial_t, \partial_{v^2}, 2t\partial_t + u\partial_u + v^2\partial_{v^2}, 3(c_1x + c_2)x\partial_x - (2c_2 + 3c_1x)u\partial_u + 2c_2v^2\partial_{v^2}, \\ 3v^2(c_1x + c_2)x\partial_x - (3x^{4/3}(c_1x + c_2)^{-1/3}u + (2c_2 + 3c_1x)v^2)u\partial_u + c_2(v^2)^2\partial_{v^2} \rangle.$$

Тут і далі $\psi = \psi(t, v^2)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $\psi_t = \psi_{v^2}v^2$. Перетворення (A.52) дозволяє звести випадки 2.1 і 2.2 до випадків 1.1 та 1.2 відповідно. Для строгого проведення редукції $2.2 \rightarrow 1.2$ слід додатково виконати перетворення $\hat{t} = \tilde{t}, \hat{x} = c_1 + c_2\tilde{x}, \hat{u} = c_2^{-1}\tilde{u}$ з групи $G^\sim$.

Об'єднана система **3** еквівалентна потенціальній системі другого рівня

$$v_x^1 = fu, \quad w_x = v^1, \quad w_t = \int u^n du, \quad (\text{A.53})$$

отриманій з системи **1** з використанням її збереженого вектора $(v, -\int u^n du)$. Тут $w = xv^1 - v^2$. Нетривіальні $G^\sim$ -нееквівалентні випад-

ки потенціальних симетрій, що відповідають системі (A.53), є новими й вичерпуються такими:

3.1. $f = 1$, $n = -2$:

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t, \partial_w, \partial_{v^1} + x\partial_w, 2t\partial_t + u\partial_u + v^1\partial_{v^1} + w\partial_w, x\partial_x - u\partial_u + w\partial_w, \\ &(w - 2v^1x)\partial_x + (2xu + v^1)u\partial_u + 2t\partial_{v^1} + (2t - (v^1)^2)x\partial_w, \\ &4t^2\partial_t + (2v^1w - 3x(v^1)^2 - 6tx)\partial_x + (6xuv^1 - 2uw + (v^1)^2 + 10t)u\partial_u + 4tv^1\partial_{v^1} \\ &+ ((v^1)^2w - 2tw - 2x(v^1)^3)\partial_w, \varphi_{v^1}\partial_x - \varphi_t u^2\partial_u + (v^1\varphi_{v^1} - \varphi)\partial_w \rangle; \end{aligned}$$

3.2. $f = 1$, $n = -2/3$:

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t, \partial_x, \partial_w, \partial_{v^1} + x\partial_w, 2t\partial_t + 3u\partial_u + 3v^1\partial_{v^1} + 3w\partial_w, \\ &x\partial_x - 3u\partial_u - 2v^1\partial_{v^1} - w\partial_w, w\partial_x - 3uv^1\partial_u - (v^1)^2\partial_{v^1} \rangle; \end{aligned}$$

3.3. $f = x^{-2}$, $n = -2$:

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t, \partial_w, \partial_{v^1} + x\partial_w, x\partial_x - v^1\partial_{v^1}, 2t\partial_t + u\partial_u + v^1\partial_{v^1} + w\partial_w, \\ &x(2xv^1 - w)\partial_x - u(xv^1 + 2u)\partial_u + v^1(w - xv^1)\partial_{v^1} + (x^2(v^1)^2 - 2t)\partial_w, \\ &4t^2\partial_t + x(6t + 3x^2(v^1)^2 - 4xv^1w + w^2)\partial_x \\ &+ 2u(2t - 3xuv^1 + 2uw - x^2(v^1)^2 + xv^1w)\partial_u \\ &+ (2xv^1w - 2t - x^2(v^1)^2 - w^2)v^1\partial_{v^1} + 2(2tw + x^3(v^1)^3 - x^2(v^1)^2w)\partial_w, \\ &x^2\psi_{v^2}\partial_x + (\psi_{v^2} + u\psi_t)xu\partial_u - \psi\partial_{v^1} + x(xv^1\psi_{v^2} - \psi)\partial_w \rangle; \end{aligned}$$

3.4. $f = x^{-6}$, $n = -2/3$:

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t, \partial_w, \partial_{v^1} + x\partial_w, 2t\partial_t + 3u\partial_u + 3v^1\partial_{v^1} + 3w\partial_w, x\partial_x + 6u\partial_u + v^1\partial_{v^1} + 2w\partial_w, \\ &x^2\partial_x + 3xu\partial_u + (w - xv^1)\partial_{v^1} + xw\partial_w, \\ &xw\partial_x - 3(xv^1 - 2w)u\partial_u - (xv^1 - w)v^1\partial_{v^1} + w^2\partial_w \rangle. \end{aligned}$$

Тут $v^2 = xv^1 - w$. Перетворення (A.52), якщо його переписати для v^1 і w як $\tilde{v}^1 = w \operatorname{sign} x - |x|v^1$ та $\tilde{w} = |x|^{-1}w$, дозволяє звести випадки 3.3 та 3.4 до випадків 3.1 та 3.2 відповідно.

Додаток Б

Груповий аналіз рівнянь $K(m, n)$, рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса та рівнянь типу Кортевега–де Фріза

У цьому додатку наведено результати групового аналізу рівнянь $K(m, n)$, рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса й узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза третього і п'ятого порядків. Використання перетворень з групоїда еквівалентності кожного класу відіграє вирішальну роль в повному розв'язанні задачі групової класифікації для класів, що розглядаються.

У підрозділі Б.1 виконано групову класифікацію рівняння Гарднера зі змінними коефіцієнтами $u_t + k(t)uu_x + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $fg \neq 0$. Ми покажемо, що використання навіть звичайної групи еквівалентності дозволяє отримати повний результат. Але використання більш широкої, а саме розширеної узагальненої групи еквівалентності, дає ще більше спрощення, а тому більш перспективне.

Вичерпну групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + h(t)u + g(t)u_{xxx} = 0$, $ng \neq 0$, наведено в підрозділі Б.2. Знайдені ліївські симетрії застосовано для того, щоб звести задачу з початковими та крайовими умовами для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза до задачі Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку.

Підрозділи Б.3 та Б.4 присвячено вичерпній груповій класифікації узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку з коефіцієнтами,

що залежать від часу, загального вигляду $u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxxx} = 0$, $n\beta \neq 0$. Випадки $n = 1$ та $n \neq 1$ відрізняються трансформаційними властивостями, тому розглянемо їх окремо в розділах В.3 та В.4, відповідно.

У підрозділі В.5 досліджено властивості ліівських симетрій рівнянь $K(m, n)$ зі змінними коефіцієнтами $u_t + g(t)(u^m)_x + f(t)(u^n)_{xxx} = 0$, $fn \neq 0$. Групову класифікацію наведено з точністю до найширших можливих груп еквівалентності: звичайної групи еквівалентності всього класу для загального випадку та умовних груп еквівалентності для окремих значень показників степеня m та n .

Використовуючи метод відображення між класами, в розділі В.6 ми наведемо повну групову класифікацію класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + k(t)u_{xx} + h(t)u_{xxt} = 0$, $ghk \neq 0$. Як побічний продукт цього підходу також отримано групову класифікацію пов'язаного класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з джерелом $u_t + uu_x + K(t)u_{xx} + H(t)u_{xxt} = F(t)$, $HK \neq 0$.

Для багатьох рівнянь з розглянутих класів також побудовано точні розв'язки.

Результати, наведені у цьому додатку опубліковано в роботах [?, 196, 197, 306]

В.1. Групова класифікація рівнянь Гарднера з залежними від часу коефіцієнтами

У цьому розділі виконано групову класифікацію рівнянь Гарднера зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + k(t)uu_x + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} = 0, \quad fg \neq 0. \quad (\text{В.1})$$

Тут k , f та g — гладкі функції від t . Часткові результати щодо ліівських симетрій таких рівнянь наведено у роботі [218]. Вичерпна класифікація досягається використанням груп перетворень еквівалентності класу (В.1).

Покажемо, що використання навіть звичайної групи еквівалентності дозволяє отримати повний результат. Разом з тим використання більш широкої, а саме розширеної узагальненої групи еквівалентності, дає ще більше спрощення, а тому більш перспективне. Це проілюстровано в процесі знаходження ліївських симетрій рівнянь (Б.1).

Спочатку дослідимо допустимі перетворення у класі (Б.1). Справедливі наступні твердження.

Теорема Б.1. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^\sim$ класу (Б.1) складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \frac{\delta_1 \delta_3}{\delta_2^2} \int (\delta_2 k(t) - \delta_3 f(t)) dt + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_2 u + \delta_3,$$

$$\tilde{k}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1}{\delta_2 \alpha_t} \left(k(t) - 2 \frac{\delta_3}{\delta_2} f(t) \right), \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1}{\delta_2^2 \alpha_t} f(t), \quad \tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^3}{\alpha_t} g(t),$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_2 \neq 0$; α — довільна гладка функція, причому $\alpha_t \neq 0$.

Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (Б.1) складається з наведених вище перетворень з $\delta_3 = 0$.

Теорема Б.2. *Уся множина допустимих перетворень (групоїд еквівалентності) класу (Б.1) породжується перетвореннями з групи $\hat{G}^\sim$. Клас (Б.1) нормалізований у розширеному узагальненому сенсі.*

Таким чином, інших точкових перетворень між рівняннями з класу (Б.1), крім перетворень з групи $\hat{G}^\sim$, не існує. Щоб з'ясувати, які з рівнянь зі змінними коефіцієнтами вигляду (Б.1) зводяться до своїх відповідників зі сталими коефіцієнтами, слід припустити, що довільні елементи $\tilde{k}$ та $\tilde{f}$ в перетворенні з $\hat{G}^\sim$ — сталі. Це приводить до наступного твердження.

Твердження Б.3. *Рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (Б.1) зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього ж класу тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти f , g та k задовольняють умови*

$$(f/k)_t = (g/k)_t = 0.$$

Оскільки в перетвореннях з групи $\hat{G}^\sim$ лише одна довільна функція $\alpha(t)$, можна вважати один з довільних елементів класу (Б.1) ненульовою сталою. Оберемо калібрування $g = 1$ та виконаємо його за допомогою перетворення

$$\tilde{t} = \int g(t)dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u. \quad (\text{Б.2})$$

Тоді довільне рівняння з класу (Б.1) відображається у рівняння з його підкласу, виокремленого умовою $g = 1$. Старі вигляди довільних елементів пов'язані з новими формулами $\tilde{k} = k/g$ та $\tilde{f} = f/g$.

Найбільш загальне перетворення, що відображає рівняння з класу (Б.1) в інше рівняння з цього ж класу з $g = 1$, має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1^3 \int g(t)dt + \delta_0, \quad \tilde{u} = \delta_2 u + \delta_3, \\ \tilde{x} &= \delta_1 x + \frac{\delta_1 \delta_3}{\delta_2^2} \int (\delta_2 k(t) - \delta_3 f(t))dt + \delta_4, \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

де δ_i , $i = 0, \dots, 4$, — сталі, причому $\delta_1 \delta_2 \neq 0$.

Без обмеження загальності достатньо дослідити клас

$$u_t + k(t)uu_x + f(t)u^2u_x + u_{xxx} = 0. \quad (\text{Б.4})$$

Оскільки клас (Б.1) нормалізований у розширеному узагальненому сенсі, для знаходження групи еквівалентності його підкласу з $g = 1$ достатньо покласти $\tilde{g} = g = 1$ в перетвореннях з групи $\hat{G}^\sim$, наведених у теоремі 1. Це приводить до рівняння $\alpha_t = \delta_1^3$, звідки $\alpha = \delta_1^3 t + \delta_0$, де δ_0 — довільна стала. Справедливе наступне твердження.

Теорема Б.4. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу (Б.4) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1^3 t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \frac{\delta_1 \delta_3}{\delta_2^2} \int (\delta_2 k(t) - \delta_3 f(t))dt + \delta_4, \\ \tilde{u} &= \delta_2 u + \delta_3, \quad \tilde{k}(\tilde{t}) = \frac{\delta_2 k(t) - 2\delta_3 f(t)}{\delta_1^2 \delta_2^2}, \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{f(t)}{\delta_1^2 \delta_2^2}, \end{aligned}$$

Табл. Б.1: Групова класифікація класу (Б.1) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

№	$f(t)$	$k(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
I.1	$\lambda_1 t^\rho$	$\lambda_2 t^{\frac{3\rho-2}{6}} + \delta t^\rho$	$\partial_x, 3t\partial_t + \left(x - \varkappa \frac{3\rho+2}{2} \left(\frac{6\lambda_2}{3\rho+4} t^{\frac{3\rho+4}{6}} + \frac{\delta}{\rho+1} t^{\rho+1}\right)\right) \partial_x -$ $- \frac{3\rho+2}{2} (u + \varkappa) \partial_u$
I.2	$\lambda_1 t^{-\frac{2}{3}}$	$t^{-\frac{2}{3}} \ln t $	$\partial_x, 2\lambda_1 t\partial_t + \left(\frac{2}{3}\lambda_1 x - 3(\ln t - 3)t^{\frac{1}{3}}\right) \partial_x - \partial_u$
I.3	$\lambda_1 t^{-1}$	$\lambda_2 t^{-\frac{5}{6}} + \delta t^{-1}$	$\partial_x, 3t\partial_t + \left(x + \varkappa \left(3\lambda_2 t^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\delta \ln t \right)\right) \partial_x + \frac{1}{2}(u + \varkappa) \partial_u$
I.4	$\lambda_1 t^{-\frac{4}{3}}$	$\lambda_2 t^{-1} + \delta t^{-\frac{4}{3}}$	$\partial_x, 3t\partial_t + \left(x + \varkappa \left(\lambda_2 \ln t - 3\delta t^{-\frac{1}{3}}\right)\right) \partial_x + (u + \varkappa) \partial_u$
II	$\lambda_1 e^t$	$\lambda_2 e^{\frac{t}{2}} + \delta e^t$	$\partial_x, 2\partial_t - \varkappa \left(2\lambda_2 e^{\frac{t}{2}} + \delta e^t\right) \partial_x - (u + \varkappa) \partial_u$
III	λ_1	t	$\partial_x, 2\lambda_1 \partial_t - \frac{1}{2}t^2 \partial_x - \partial_u$
IV	ε	δ	$\partial_x, \partial_t, 3t\partial_t + (x - \varkappa \delta t) \partial_x - (u + \varkappa) \partial_u$

Тут $g = 1 \bmod G^\sim$; $\lambda_i, i = 1, 2$, та ρ — довільні сталі, причому $\lambda_1 \neq 0$, $\rho \neq -\frac{4}{3}, -1$; $\delta \in \{0, 1\} \bmod G^\sim$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$ та $\varkappa = \frac{1}{2}\delta/\lambda_1$. У випадку I.1 $(\rho, \delta) \neq (0, 0)$.

де $\delta_i, i = 0, \dots, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_2 \neq 0$.

Звичайна група еквівалентності $G_1^\sim$ класу (Б.4) складається з наведених вище перетворень з $\delta_3 = 0$.

Зауважимо, що клас (Б.4) нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. З твердження Б.3 випливає, що рівнянь (Б.4) зі змінними коефіцієнтами, які б точковими перетвореннями зводилися до рівнянь з цього ж класу зі сталими коефіцієнтами, не існує.

У наступному розділі продемонстровано використання знайдених перетворень еквівалентності при груповій класифікації. Порівнюються спрощення, досягнуті звичайною та узагальненою групами еквівалентності.

Класифікація ліївських симетрій. Використовуючи класичний метод Лі–Овсяннікова, доведемо наступне твердження.

Теорема Б.5. *Ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (Б.1) співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Всі можливі*

Табл. Б.2: Групова класифікація класу (Б.1) з точністю до $\hat{G}^\sim$ -еквівалентності.

№	$f(t)$	$k(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_x
I.1	$\lambda_1 t^\rho$	$\delta t^{\frac{3\rho-2}{6}}$	$\partial_x, 3t\partial_t + x\partial_x - \frac{3\rho+2}{2}u\partial_u$
I.2	$\lambda_1 t^{-\frac{2}{3}}$	$t^{-\frac{2}{3}} \ln t $	$\partial_x, 2\lambda_1 t\partial_t + \left(\frac{2}{3}\lambda_1 x - 3(\ln t - 3)t^{\frac{1}{3}}\right)\partial_x - \partial_u$
II	$\lambda_1 e^t$	$\delta e^{\frac{t}{2}}$	$\partial_x, 2\partial_t - u\partial_u$
III	λ_1	t	$\partial_x, 2\lambda_1\partial_t - \frac{1}{2}t^2\partial_x - \partial_u$
IV	ε	0	$\partial_x, \partial_t, 3t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут $g = 1 \bmod \hat{G}^\sim$; λ_1 та ρ — довільні сталі, $\lambda_1 \neq 0$, $\delta \in \{0, 1\} \bmod \hat{G}^\sim$ та $\varepsilon = \pm 1 \bmod \hat{G}^\sim$. У випадку I.1 $(\rho, \delta) \neq (0, 0)$.

$\hat{G}^\sim$ -нееквівалентні (відповідно, $\hat{G}^\sim$ -нееквівалентні) випадки розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності вичерпуються випадками I–IV таблиці Б.1 (відповідно, таблиці Б.2).

Для того, щоб отримати найбільш загальні форми довільних елементів класу (Б.1) (які не спрощено перетвореннями еквівалентності), потрібно застосувати перетворення (Б.3) до рівнянь (Б.4) з k та f , наведеними у таблиці Б.1, або навіть більш просте перетворення (Б.3) з $\delta_3 = 0$ до рівнянь (Б.4) з k та f , наведеними у таблиці Б.2. Повні результати наведено у роботі [306]. В цій роботі також використано метод відображень між класами з метою виконання групової класифікації подібного до класу (Б.1) класу рівнянь.

Розглянемо сім'ю точкових перетворень, параметризованих довільними елементами f, g, k класу (Б.1),

$$\tilde{t} = \int g(t) dt, \quad \tilde{x} = x + \int \frac{k(t)^2}{4f(t)} dt, \quad \tilde{u} = u + \frac{k(t)}{2f(t)}, \quad (\text{Б.5})$$

що відображає клас (Б.1) в клас

$$u_t + F(t)u^2u_x + u_{xxx} = L(t), \quad F \neq 0. \quad (\text{Б.6})$$

Довільні елементи F , L пов'язані з довільними елементами f , g , k через формули

$$F(\tilde{t}) = \frac{f(t)}{g(t)}, \quad L(\tilde{t}) = \frac{1}{2g(t)} \left(\frac{k(t)}{f(t)} \right)_t. \quad (\text{Б.7})$$

Теорема Б.6. Клас (Б.6) нормалізований у звичайному сенсі. Звичайну групу еквівалентності цього класу $G_2^\sim$ складають перетворення

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1^3 t + \delta_0, & \tilde{x} &= \delta_1 x + \delta_3, & \tilde{u} &= \delta_2 u, \\ \tilde{F}(\tilde{t}) &= \frac{F(t)}{\delta_1^2 \delta_2^2}, & \tilde{L}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_2}{\delta_1^3} L(t), \end{aligned}$$

де δ_i , $i = 0, \dots, 3$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_2 \neq 0$.

Теорема Б.7. Ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (Б.6) співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Усі можливі $G_2^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення ліївської інваріантності вичерпуються випадками:

- I. $F = \lambda_1 t^\rho$, $L = \delta t^{-\frac{3\rho+8}{6}}$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 3t\partial_t + x\partial_x - \frac{3\rho+2}{2}u\partial_u \rangle$;
- II. $F = \lambda_1 e^t$, $L = \delta e^{-\frac{1}{2}t}$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 2\partial_t - u\partial_u \rangle$;
- III. $F = \varepsilon$, $L = 1$: $A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t \rangle$;
- IV. $F = \varepsilon$, $L = 0$: $A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t, 3t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle$.

Тут λ_1 , ρ — довільні сталі, причому $\lambda_1 \neq 0$, $\delta \in \{0, 1\}$, $\varepsilon = \pm 1$. У випадку I $(\rho, \delta) \neq (0, 0)$.

Окрім звичайної групи еквівалентності $G^\sim$ клас (Б.1) допускає більш широку, розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}^\sim$. Незважаючи на те, що вичерпну групову класифікацію класу (Б.1) можна провести, навіть використовуючи звичайну групу еквівалентності, ми показали, що розширена узагальнена група еквівалентності дає ще більше спрощення та дозволяє записати класифікаційний список в простій та лаконічній формі (досить порівняти таблицю Б.2 з таблицею Б.1).

Зауважимо, що випадок тривимірної максимальної алгебри ліївської симетрії у роботі [218] не відзначено.

Б.2. Застосування ліївських симетрій до крайових задач для узагальнених рівнянь Кортевега—де Фріза зі змінними коефіцієнтами

На практиці часто бувають цікавими розв’язки даного диференціального рівняння з частинними похідними, що задовольняють деяким початковим і/або крайовим умовам. У роботі [316] успішно застосовано ліївські симетрії, щоб розв’язати задачу з початковими і крайовими умовами для узагальненого рівняння Бюргерса, що виникає в нелінійній акустиці. Цю задачу було зведено до задачі Коші пов’язаного нелінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку. Як результат, у явному вигляді знайдено точний розв’язок задачі з початковими і крайовими умовами для узагальненого рівняння Бюргерса. Вмотивовані цією роботою, ми вирішили застосувати ліївські симетрії до побудови розв’язків задачі з початковими і крайовими умовами для узагальненого рівняння Кортевега—де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + u^n u_x + h(t)u + g(t)u_{xxx} = 0, \quad ng \neq 0, \quad (\text{Б.8})$$

що має кілька застосувань (див. [279] та посилання у цій роботі). З цією метою проведемо вичерпну групову класифікацію рівнянь з цього класу. Іншими словами, спочатку знайдемо ліївську алгебру інваріантності, що допускається будь-яким рівнянням з цього класу — так зване ядро, а тоді прокласифікуємо всі можливі випадки розширення алгебр ліївської інваріантності таких рівнянь відносно групи еквівалентності класу [23]. Деякі випадки розширення ліївських симетрій для (Б.8) було знайдено у роботі [279], а саме випадки $h = \text{const}$ та $h = 1/(at + b)$, де a та b сталі. Тут ми наводимо повну групову класифікацію, використавши переваги перетворень еквівалентності (у роботі [279] цією можливістю було знехтувано). Зазначимо, що повну групову класифікацію класу (Б.8) для $n = 1$ та $n = 2$ отримано в [264, 299] (див. також [300]). У цих роботах результати представлено двома способами: з врахуванням відповідної гру-

пи еквівалентності та без використання еквівалентності. Слід зауважити, що в [133] проведено групові класифікації для більш загальних класів, що містять клас (Б.8). Проте виводити групові класифікації для класу (Б.8) з цих результатів було б незручно, оскільки вони отримані для дуже широкої групи еквівалентності.

Також зазначимо, що більш загальний клас вигляду

$$u_t + f(t)u^n u_x + h(t)u + g(t)u_{xxx} = 0, \quad nfg \neq 0, \quad (\text{Б.9})$$

зводиться до класу (Б.8) шляхом заміни змінної t . Ось чому без обмеження загальності достатньо дослідити клас (Б.8), а всі результати щодо точних розв'язків, симетрій, законів збереження тощо для класу (Б.9) можна вивести з результатів для (Б.8).

Допустимі перетворення. Допустимі перетворення у класі (Б.8) досліджено прямим методом [184]. Пропустимо деталі обчислень і відразу наведемо результат.

Теорема Б.8. Група еквівалентності $G^\sim$ класу (Б.8) складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \varepsilon_1 \int \theta^{-n} dt + \varepsilon_2, \quad \tilde{x} = \varepsilon_1 x + \varepsilon_0, \quad \tilde{u} = \theta u, \\ \tilde{g} &= \varepsilon_1^2 \theta^n g, \quad \tilde{h} = \frac{\theta^n}{\varepsilon_1} \left(h - \frac{\theta_t}{\theta} \right), \quad \tilde{n} = n, \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

де ε_j , $j = 0, 1, 2$, — довільні сталі, $\varepsilon_1 \neq 0$; $\theta = \theta(t)$ — довільна гладка функція, що не має нулів.

Тепер можна використати перетворення еквівалентності (Б.10), щоб відкалібрувати один з довільних елементів g чи h до простого сталого значення. У роботі [264] показано, що функцію-параметр h у рівнянні (Б.8) можна перетворити в нуль точковим перетворенням

$$\tilde{t} = \int e^{-n \int h(t) dt} dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = e^{\int h(t) dt} u, \quad (\text{Б.11})$$

причому перетворене значення довільного елемента $\tilde{g}(\tilde{t}) = e^{n \int h(t) dt} g(t)$. Це перетворення легко знайти з теореми Б.8, поклавши $\tilde{h} = 0$ в (Б.10)

та розв'язавши отримане рівняння на θ . Той факт, що довільний елемент h можна завжди покласти рівним нулю, означає, що зафіксувавши довільний елемент h , неможливо отримати випадки рівнянь (Б.8) з додатковими симетрійними властивостями. Таким чином, без обмеження загальності достатньо дослідити лише клас

$$u_t + u^n u_x + g(t) u_{xxx} = 0, \quad ng \neq 0. \quad (\text{Б.12})$$

Інших точкових перетворень, крім (Б.10), які пов'язували б рівняння з класу (Б.8) з $n \neq 0, 1$, не існує. Отже, цей клас нормалізований. Це означає, що групу еквівалентності для (Б.12) можна вивести з теореми Б.8, просто поклавши $\tilde{h} = h = 0$. Тоді отримаємо, що $\theta = \varepsilon_3$ — довільна ненульова стала і справедливе твердження:

Наслідок Б.9. Група еквівалентності $G_0^\sim$ класу (Б.12) складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \varepsilon_1 \varepsilon_3^{-n} t + \varepsilon_0, & \tilde{x} &= \varepsilon_1 x + \varepsilon_2, & \tilde{u} &= \varepsilon_3 u, \\ \tilde{g} &= \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^n g, & \tilde{n} &= n, \end{aligned}$$

де ε_j , $j = 0, \dots, 3$, — довільні сталі, причому $\varepsilon_1 \varepsilon_3 \neq 0$.

Б.2.1. Ліівські симетрії. Групова класифікація класу (Б.8) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності зводиться до групової класифікації класу (Б.12) з точністю до $G_0^\sim$ -еквівалентності. Групову класифікацію класу (Б.12) проведено з використанням класичного алгоритму [235].

Сказане вище підсумуємо твердженням.

Теорема Б.10. Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності $A^{\max}$ рівнянь з класу (Б.12) (відповідно, (Б.8)) співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Усі можливі $G_0^\sim$ -нееквівалентні (відповідно, $G^\sim$ -нееквівалентні) випадки розширення $A^{\max}$ вичерпуються випадками 1–3 таблиці Б.3.

Табл. Б.3: Групова класифікація класу (Б.8) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

№	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\partial_x, 3nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 2)u\partial_u$
2	εe^t	$\partial_x, 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u$
3	ε	$\partial_x, \partial_t, 3nt\partial_t + nx\partial_x - 2u\partial_u$

Тут $h = 0 \bmod G^\sim$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$, ρ — довільна ненульова стала.

Табл. Б.4: Групова класифікація класу (Б.8) без використання еквівалентності.

№	$g(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	$\lambda \left(\int e^{-n \int h(t) dt} dt + \kappa \right)^\rho e^{-n \int h(t) dt}$	$\partial_x, H\partial_t + n(\rho + 1)x\partial_x + (\rho - 2 - h(t)H)u\partial_u$
2	$\lambda e^{\int (m e^{-n \int h(t) dt} - n h(t)) dt}$	$\partial_x, 3n e^{n \int h(t) dt} \partial_t + m n x \partial_x + (m - 3n h(t) e^{n \int h(t) dt}) u \partial_u$
3	$\lambda e^{-n \int h(t) dt}$	$\partial_x, e^{n \int h(t) dt} (\partial_t - h(t)u\partial_u),$ $H\partial_t + nx\partial_x - (2 + h(t)H)u\partial_u$

Тут λ , κ , ρ та m — довільні сталі, $\lambda \rho m \neq 0$. Функція $h(t)$ є довільною в усіх випадках; $H = 3n e^{n \int h dt} \left(\int e^{-n \int h dt} dt + \kappa \right)$, причому у випадку 3 $\kappa = 0$.

У таблиці Б.4 також наведено результати групової класифікації класу (Б.8) без калібрування h та g перетвореннями еквівалентності. Розширений класифікаційний список можна вивести з наведеного у таблиці Б.3, використовуючи перетворення еквівалентності (докладно цей алгоритм описано у роботі [299, 300]). Легко бачити, що таблиця Б.4 включає всі випадки, описані у роботі [279].

Інваріантні розв'язки узагальненого рівняння Кортвега–де Фріза. Ліівські симетрії дають алгоритмічний метод знаходження точних розв'язків методом редукції [23, 235]. С. Лі довів, що знаючи один оператор ліівської симетрії звичайного диференціального рівняння, по-

Табл. Б.5: Оптимальні системи підалгебр $A^{\max}$, наведених у таблиці Б.3.

№	Оптимальна система підалгебр
$1_{\rho \neq -1}$	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.1} = \langle 3nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 2)u\partial_u \rangle$
$1_{\rho = -1}$	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.2}^a = \langle nt\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$
2	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_2 = \langle 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle$
3	$\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{3.1}^\sigma = \langle \partial_t + \sigma\partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{3.2} = \langle 3nt\partial_t + nx\partial_x - 2u \rangle$

В усіх випадках $a \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$.

рядок цього рівняння можна зменшити на одиницю; якщо ж відомий оператор лівської симетрії для n -вимірного диференціального рівняння з частинними похідними, то це рівняння можна редукувати до $(n-1)$ -вимірного. Це справедливо для операторів лівських симетрій, що відповідають однопараметричним групам лівських симетрій, які діють регулярно і трансверсально на многовиді, визначеному цим диференціальним рівнянням [235]. Таким чином, у нашому випадку $(1+1)$ -вимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними достатньо виконати редукції за одновимірними підалгебрами знайденої максимальної алгебри лівської інваріантності, щоб отримати редукції до звичайних диференціальних рівнянь.

Редукції слід виконувати, використовуючи підалгебри з оптимальної системи [235]. Оптимальні системи одновимірних підалгебр алгебр лівської інваріантності з таблиці Б.3 подано у таблиці Б.5.

Ми не розглянемо редукції, що відповідають підалгебрі $\mathfrak{g}_1 = \langle \partial_x \rangle$, оскільки вони приводять тільки до сталих розв'язків. Анзаци та редуквані рівняння, отримані для рівнянь з класу (Б.12) за допомогою одновимірних підалгебр з таблиці Б.5, зібрано в таблиці Б.6.

Розв'язавши редукзоване звичайне диференціальне рівняння

$$\varepsilon \varphi''' + (\varphi^n - \sigma)\varphi' = 0 \quad (\text{Б.13})$$

з випадку 4 таблиці Б.6, можна отримати точні розв'язки типу біжучої

Табл. Б.6: Ліівські редукції класу $u_t + u^n u_x + g(t)u_{xxx} = 0$, $ng \neq 0$, що відповідають підалгебрам, наведеним у таблиці Б.5.

№	$g(t)$	$\mathfrak{g}$	ω	Анзац, u	Редуковане рівняння
1	εt^ρ , $\rho \neq -1$	$\mathfrak{g}_{1.1}$	$xt^{-\frac{\rho+1}{3}}$	$t^{\frac{\rho-2}{3n}}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{\rho+1}{3}\omega\right)\varphi' + \frac{\rho-2}{3n}\varphi = 0$
2	εt^{-1}	$\mathfrak{g}_{1.2}^a$	$x - \frac{a}{n}\ln t$	$t^{-\frac{1}{n}}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{a}{n}\right)\varphi' - \frac{1}{n}f = 0$
3	εe^t	$\mathfrak{g}_2$	$xe^{-\frac{1}{3}t}$	$e^{\frac{1}{3n}t}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{1}{3}\omega\right)\varphi' + \frac{1}{3n}\varphi = 0$
4	ε	$\mathfrak{g}_{3.1}^\sigma$	$x - \sigma t$	$\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi''' + (\varphi^n - \sigma)\varphi' = 0$
5	ε	$\mathfrak{g}_{3.2}$	$xt^{-\frac{1}{3}}$	$t^{-\frac{2}{3n}}\varphi(\omega)$	$\varepsilon\varphi''' + \left(\varphi^n - \frac{1}{3}\omega\right)\varphi' - \frac{2}{3n}\varphi = 0$

В усіх випадках $a \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$.

хвилі для рівняння $u_t + u^n u_x + \varepsilon u_{xxx} = 0$. При $\sigma \neq 0$ двома частинними розв'язками цього рівняння є, наприклад, $\varphi = \left(-\frac{\sigma(n+1)(n+2)}{2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon}}\omega + C\right)}\right)^{\frac{1}{n}}$ та $\varphi = \left(\frac{\sigma(n+1)(n+2)}{2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{n}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon}}\omega + C\right)}\right)^{\frac{1}{n}}$, де C — довільна стала. Вони приводять до розв'язків типу біжучої хвилі узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза зі сталими коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + \varepsilon u_{xxx} = 0$ вигляду

$$u = \left(-\frac{\sigma(n+1)(n+2)}{2 \operatorname{sh}^2 z}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad u = \left(\frac{\sigma(n+1)(n+2)}{2 \operatorname{ch}^2 z}\right)^{\frac{1}{n}},$$

де $z = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon}}(x - at) + C$. Зауважимо, що в [60, 330] вже було побудовано деякі точні розв'язки узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \varepsilon e^{-n \int \alpha(t) dt} u_{xxx} = 0$. Але цього вдалося досягти саме завдяки тому, що останні рівняння зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Крайова задача для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза. Існує декілька способів використання ліівських симетрій при зведенні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Класичний метод — вимагати, щоб і рівняння, і крайові умови залишалися інваріантними відносно однопараметричної групи Лі інфінітезимальних пере-

творень. Звичайно, цей інфінітезимальний підхід застосовується частіше (див., наприклад, [65, Section 4.4]). Ми застосуємо його до задачі з початковими і крайовими умовами для узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами як з лінійним демпфуванням, так і без нього.

Задача з початковими і крайовими умовами для узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза без лінійного демпфування. Застосуємо спочатку цей алгоритм до задач з рівнянням Кортевега–де Фріза вигляду (Б.12), тобто розглянемо задачу з початковими і крайовими умовами

$$u_t + u^n u_x + g(t) u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (\text{Б.14})$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad x > 0, \\ u(0, t) &= q(t), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad t > 0, \\ u_{xx}(0, t) &= 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

де $q(t)$ — гладка функція, що не має нулів.

Алгоритм розпочинається з припущення, що загальна симетрія має вигляд

$$Q = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i, \quad (\text{Б.16})$$

де n — кількість базисних операторів максимальної алгебри ліівської інваріантності даного диференціального рівняння з частинними похідними, а α_i , $i = 1, \dots, n$, — сталі, які потрібно визначити.

Розглянемо випадок 1 таблиці Б.3. Загальна симетрія (Б.16) набуває вигляду

$$Q = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 [3nt \partial_t + (\rho + 1)nx \partial_x + (\rho - 2)u \partial_u].$$

Застосувавши Q до першої крайової умови $x = 0$, $u(t, 0) = q(t)$, маємо

$$\alpha_1 = 0, \quad q(t) = \gamma t^{\frac{\rho-2}{3n}}, \quad \gamma = \text{const}.$$

Записавши друге розширення оператора Q , а саме

$$Q^{(2)} = 3nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 2)u\partial_u \\ + (\rho - n\rho - n - 2)u_x\partial_{u_x} + (\rho - 2n\rho - 2n - 2)u_{xx}\partial_{u_{xx}}$$

(доданки, що не використовуються, тут пропущено), можна показати, що воно залишає початкову умову та три останні крайові умови інваріантними. Нарешті, симетрія Q породжує анзац

$$u = t^{\frac{\rho-2}{3n}}\varphi(\omega), \quad \omega = xt^{-\frac{\rho+1}{3}}, \quad (\text{Б.17})$$

який редукує задачу (Б.14) до задачі Коші

$$\varepsilon\varphi''' + \varphi^n\varphi' - \frac{\rho+1}{3}\omega\varphi' + \frac{\rho-2}{3n}\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \gamma, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0. \quad (\text{Б.18})$$

У випадку 2 таблиці Б.3 відповідна симетрія не залишає крайові умови інваріантними. У випадку 3 отримаємо наведені вище результати з $\rho = 0$. **Задача з початковими і крайовими умовами для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза з лінійним демпфуванням.** Розглянемо задачу з початковими і крайовими умовами для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами з лінійним демпфуванням

$$u_t + u^n u_x + \frac{j}{t}u + g(t)u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (\text{Б.19})$$

з початковою та крайовими умовами (Б.15). В попередньому розділі показано, що оператор симетрії, який допускається як рівнянням з класу (Б.8), так і початковою та крайовими умовами (Б.15), де q є степеневою функцією, — це так званий оператор дилатації, тобто оператор, що відповідає однопараметричній групі Лі масштабувань змінних t , x та u . Рівняння (Б.20) допускає оператор лівської симетрії, який залишає крайові умови інваріантними, тоді і тільки тоді, коли g — степенева функція чи стала (випадки 1 та 3 таблиці Б.4). Підставляючи $h = j/t$ у формули

для g та відповідні оператори симетрії, наведені у випадку 1 таблиці Б.4 (де без обмеження загальності можна покласти $\kappa = 0$), переконуємося, що рівняння

$$u_t + u^n u_x + \frac{j}{t} u + \lambda t^{\rho(1-nj)-nj} u_{xxx} = 0 \quad (\text{Б.20})$$

допускає оператори лівських симетрій ∂_x та

$$Q = \frac{3n}{1-nj} t \partial_t + n(\rho+1) x \partial_x + \left(\rho - 2 - \frac{3nj}{1-nj} \right) u \partial_u.$$

Крайові умови (Б.15) інваріантні відносно перетворення симетрії, породженого оператором Q , тоді і тільки тоді, коли $q = \gamma t^{\frac{(\rho-2)(1-nj)-3nj}{3n}}$, де $\gamma = \text{const}$. Отже, можна застосувати лівські симетрії, щоб розв'язати крайову задачу для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза з лінійним демпфуванням

$$u_t + u^n u_x + \frac{j}{t} u + \lambda t^{\rho(1-nj)-nj} u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (\text{Б.21})$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & x > 0, \\ u(0, t) &= \gamma t^{\frac{\rho(1-nj)-nj-2}{3n}}, & t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_{xx}(0, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

Симетрія Q породжує перетворення

$$u = t^{\frac{\rho(1-nj)-nj-2}{3n}} \varphi(\omega), \quad \omega = x t^{\frac{(\rho+1)(nj-1)}{3}},$$

що зводить задачу (Б.21)–(Б.22) до

$$\begin{aligned} \lambda \varphi''' + \varphi^n \varphi' + \frac{(\rho+1)(nj-1)}{3} \omega \varphi' + \frac{(\rho-2)(1-nj)}{3n} \varphi &= 0, \\ \varphi(0) &= \gamma, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

Для $j = 1/2$ та $j = 1$ рівняння (Б.21) стає узагальненим циліндричним та сферичним рівнянням Кортевега–де Фріза, відповідно.

Групову класифікацію узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами (Б.8) проведено вичерпно. Результати представлено двома способами: з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (таблиця Б.3) та без спрощення перетвореннями еквівалентності (таблиця Б.4). Прокласифіковано інваріантні розв'язки (таблиця Б.6). Знайдені ліївські симетрії узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза застосовано до задачі з початковими і крайовими умовами (Б.14)–(Б.15) з метою перетворення її у задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (Б.18) [307]. Результуючу нелінійну задачу розв'язано чисельно за допомогою скінченно-різницевої схеми другого порядку та методу простих ітерацій. Схему перевірено шляхом її застосування до подібних задач, які вже було розв'язано іншими методами: результати чудово узгоджуються. Перевірено ефект керованих параметрів на розв'язках (Б.14)–(Б.15). Використовуючи вищезгадані перетворення, побудовано розв'язки оригінального диференціального рівняння з частинними похідними.

Б.3. Груповий аналіз рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами

Рівняння Кортевега–де Фріза виникає, зокрема, при моделюванні одновимірних плоских хвиль у холодній квазінейтральній безколізійній плазмі, що поширюються вздовж осі x , під дією однорідного магнітного поля [173]. Виявилося, що коли кут поширення хвилі відносно зовнішнього магнітного поля стає критичним, похідну третього порядку (дисперсію) в модельному рівнянні потрібно замінити на похідну п'ятого порядку [174]. Тобто магнітно-акустичні хвилі, що поширюються вздовж цього критичного напрямку, моделюються найпростішим рівнянням Кортевега–де Фріза п'ятого порядку

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxxxx} = 0, \quad \mu = \text{const.} \quad (\text{Б.24})$$

У роботі [222] показано, що рівняння (Б.24) з $\mu = -1$ описує поодинокі хвилі в нелінійній лінії передачі типу LC-ladder.

Рівняння (Б.24) та його узагальнення вивчали у великій кількості робіт. Так, у [176, 328] знайдено точний солітонний розв'язок рівняння (Б.24) у термінах еліптичної функції Якобі сп. Розв'язки типу «пульсуючого мультиплету» цього рівняння перевірено у роботі [153]. Там же наведено локальні закони збереження зі збереженими струмами u , u^2 та $u^3 + \frac{3}{2}(u_{xx})^2$. На відміну від класичного рівняння Кортевега–де Фріза, рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку не інтегрується методом перетворення оберненого розсіяння [214]. У роботі [207] знайдено ліівські симетрії та відповідні редукції (Б.24) до звичайного диференціального рівняння.

У [320] зроблено спробу класифікувати ліівські симетрії узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку з коефіцієнтами, що залежать від часу, вигляду $u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxxxx} = 0$. Проте наведені там результати, взагалі кажучи, некоректні. У цій дисертаційній роботі виконано коректну та повну групову класифікацію класу

$$u_t + uu_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxxxx} = 0, \quad \beta \neq 0, \quad (\text{Б.25})$$

де α та β — гладкі функції змінної t . Щоб зменшити кількість змінних коефіцієнтів і продовжити симетрійний аналіз оптимальним шляхом, спочатку знайдено допустимі перетворення [261] у класі (Б.25). Тепер можна навести класифікацію ліівських симетрій та ліівських редукцій.

Допустимі перетворення. Групоїд еквівалентності класу (Б.25) описано таким твердженням.

Теорема Б.11. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^\sim$ класу (Б.25) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = (x + \delta_1)X^1 + \delta_2, \quad \tilde{u} = \frac{1}{T_t} (X^1 u + X_t^1 (x + \delta_1)), \\ \tilde{\alpha}(\tilde{t}) &= \frac{1}{T_t} \left(\alpha(t) - 2 \frac{X_t^1}{X^1} + \frac{T_{tt}}{T_t} \right), \quad \tilde{\beta}(\tilde{t}) = \frac{(X^1)^5}{T_t} \beta(t), \end{aligned}$$

де $X^1 = (\delta_3 \int e^{-\int \alpha(t) dt} dt + \delta_4)^{-1}$; δ_j , $j = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, причому $(\delta_3, \delta_4) \neq (0, 0)$; $T = T(t)$ — гладка функція, для якої $T_t \neq 0$.

Уся множина допустимих перетворень класу (Б.25) породжується перетвореннями з групи $\hat{G}^\sim$.

Використовуючи цю теорему, можна сформулювати критерій звідності рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Теорема Б.12. Рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (Б.25) зводиться до рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами (Б.24) тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти α та β пов'язані формулою

$$\beta = e^{-\int \alpha(t) dt} \left(c_1 \int e^{-\int \alpha(t) dt} dt + c_2 \right)^3, \quad (\text{Б.26})$$

де c_1 та c_2 — довільні сталі, причому $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

Використавши перетворення еквівалентності

$$\hat{t} = \int e^{-\int \alpha(t) dt} dt, \quad \hat{x} = x, \quad \hat{u} = e^{\int \alpha(t) dt} u \quad (\text{Б.27})$$

з групи $\hat{G}^\sim$, можна відкалібрувати довільний елемент α до нульового значення. Дійсно, це перетворення відображає клас (Б.25) у його підклас з $\hat{\alpha} = 0$. Довільний елемент $\hat{\beta}$ відображеного рівняння виражається в термінах α та β як $\hat{\beta} = e^{\int \alpha(t) dt} \beta$. Тому без обмеження загальності достатньо дослідити клас

$$u_t + uu_x + \beta(t)u_{xxxx} = 0. \quad (\text{Б.28})$$

Перетворення еквівалентності у класі (Б.28) можна отримати, поклавши $\tilde{\alpha} = \alpha = 0$ у перетворенні, наведеному в теоремі Б.11.

Наслідок Б.13. Звичайна група еквівалентності $G_{\alpha=0}^\sim$ класу (Б.28) складається з перетворень

$$\tilde{t} = \frac{at + b}{ct + d}, \quad \tilde{x} = \frac{e_2x + e_1t + e_0}{ct + d}, \quad \tilde{u} = \frac{e_2(ct + d)u - e_2cx - e_0c + e_1d}{\Delta},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{e_2^5}{(ct + d)^3} \frac{\beta}{\Delta},$$

де a, b, c, d, e_0, e_1 та e_2 — довільні сталі, причому $\Delta = ad - bc \neq 0$ та $e_2 \neq 0$. Набір $(a, b, c, d, e_0, e_1, e_2)$ визначено з точністю до ненульового множника, тому без обмеження загальності можна вважати, що $\Delta = \pm 1$.

Уся множина допустимих перетворень класу (Б.28) породжується перетвореннями з групи $G_{\alpha=0}^{\sim}$.

Компоненти цього перетворення для t, x та u співпадають з відповідними компонентами, отриманими для класу рівнянь Бюргерса $u_t + uu_x + \beta(t)u_{xx} = 0$ [247] та для класу рівнянь Кортевега–де Фріза $u_t + uu_x + \beta(t)u_{xxx} = 0$ [264].

Наслідок Б.14. Рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (Б.28) зводиться до рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами (Б.24) тоді і тільки тоді, коли $\beta = (c_1 t + c_2)^3$, де c_1 та c_2 — довільні сталі, причому $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

Ліівські симетрії. Розв'яжемо задачу групової класифікації, використовуючи класичний підхід Лі–Овсяннікова. Справедливе наступне твердження.

Теорема Б.15. Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу (Б.28) — двовимірна абелева алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$. Усі можливі $G_{\alpha=0}^{\sim}$ -нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр ліівської інваріантності вичерпуються випадками 1–4 таблиці Б.7.

Зауваження Б.16. Класифікаційний список для класу (Б.25) з точністю до $\hat{G}^{\sim}$ -еквівалентності співпадає зі списком, наведеним у таблиці Б.7.

Зауваження Б.17. Рівняння вигляду (Б.25) допускає чотирьохвимірну алгебру ліівської симетрії тоді і тільки тоді, коли воно точково-еквівалентне рівнянню Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами (Б.24).

Табл. Б.7: Групова класифікація класу (Б.28) з точністю до $G_{\alpha=0}^{\sim}$ -еквівалентності.

№	$\beta(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u$
1	t^ρ	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad 5t\partial_t + (\rho + 1)x\partial_x + (\rho - 4)u\partial_u$
2	e^t	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad 5\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
3	$(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}e^{5\nu \operatorname{arctg} t}$	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad (t^2 + 1)\partial_t + (t + \nu)x\partial_x + ((\nu - t)u + x)\partial_u$
4	1	$\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad \partial_t, \quad 5t\partial_t + x\partial_x - 4u\partial_u$

Тут ρ та ν — дійсні сталі, $\rho \neq 0$. З точністю до $G_{\alpha=0}^{\sim}$ -еквівалентності можна вважати, що $\rho \leq 3/2$, $\nu \geq 0$.

У таблиці Б.8 також подано повний список розширень ліївських симетрій для класу (Б.25), де довільні елементи не спрощено точковими перетвореннями. Для його отримання використано підхід, що ґрунтується на понятті еквівалентності [299].

Випадки, наведені у таблиці Б.8, дають усі рівняння (Б.25), для яких ефективним є класичний метод ліївських редукцій.

Ліївські редукції. Ліївські симетрії дають нам потужний інструмент знаходження розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними — дозволяють звести їх до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, або навіть до звичайних диференціальних рівнянь. Якщо $(1+1)$ -вимірне диференціальне рівняння з частинними похідними допускає оператор ліївської симетрії $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$, то анзац, що редукує це рівняння до звичайного диференціального рівняння, можна знайти як розв'язок умови інваріантності поверхні $Q[u] := \tau u_t + \xi u_x - \eta = 0$ [23, 235]. На практиці для цього слід розв'язати відповідну характеристичну систему $\frac{dt}{\tau} = \frac{dx}{\xi} = \frac{du}{\eta}$. Щоб отримати нееквівалентні редукції, потрібно використовувати підалгебри з оптимальної системи (див. [235, розділ 3.3]).

Ми побудували оптимальні системи одновимірних підалгебр для всіх максимальних алгебр ліївської інваріантності, наведених у таблиці Б.7.

Табл. Б.8: Групова класифікація класу (Б.25) без використання еквівалентності.

№	$\beta(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u$
1	$\lambda T_t(aT + b)^\rho(cT + d)^{3-\rho}$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u, \quad 5T_t^{-1}(aT + b)(cT + d)\partial_t + [5acT + ad(\rho + 1) + bc(4 - \rho)]x\partial_x + \left(5acxT_t - [5acT + 5\alpha T_t^{-1}(aT + b)(cT + d) + bc(\rho + 1) + ad(4 - \rho)]u\right)\partial_u$
2	$\lambda T_t(cT + d)^3 \exp\left(\frac{aT+b}{cT+d}\right)$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u, \quad 5T_t^{-1}(cT + d)^2\partial_t + (5c(cT + d) + \Delta)x\partial_x + [5c^2xT_t + (\Delta - 5(cT + d)(c + \alpha(cT + d)T_t^{-1}))u]\partial_u$
3	$\lambda T_t e^{5\nu \arctg\left(\frac{aT+b}{cT+d}\right)} \times ((aT + b)^2 + (cT + d)^2)^{\frac{3}{2}}$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u, \quad T_t^{-1}((aT + b)^2 + (cT + d)^2)\partial_t + [a(aT + b) + c(cT + d) + \nu\Delta]x\partial_x + [(a^2 + c^2)xT_t - (a(aT + b) + c(cT + d) - \nu\Delta + \alpha T_t^{-1}((aT + b)^2 + (cT + d)^2))u]\partial_u$
4a	λT_t	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u, \quad T_t^{-1}(\partial_t - \alpha u\partial_u),$ $5TT_t^{-1}\partial_t + x\partial_x - (4 + 5TT_t^{-1}\alpha)u\partial_u$
4b	$T_t(cT + d)^3$	$\partial_x, \quad T\partial_x + T_t\partial_u,$ $5T_t^{-1}(cT + d)\partial_t + 4cx\partial_x - (c + 5T_t^{-1}(cT + d)\alpha)u\partial_u,$ $T_t^{-1}(cT + d)^2\partial_t + c(cT + d)x\partial_x$ $+ [c^2xT_t - (cT + d)(c + T_t^{-1}(cT + d)\alpha)u]\partial_u$

Тут a, b, c, d, λ, ν та ρ — довільні сталі, причому $\lambda \neq 0$ та $\rho \neq 0, 3$, $\Delta = ad - bc \neq 0$; функція $\alpha(t)$ є довільною в усіх випадках; $T = \int e^{-\int \alpha(t)dt} dt$.

Результати зібрано в таблиці Б.9.

Редукції за підалгеброю $\mathfrak{g}$ приводять тільки до сталих розв'язків. Редукцію за підалгеброю $\mathfrak{g}_{4.3}$ не наводимо, оскільки вона співпадає з редукцією за $\mathfrak{g}_{1.1}$ при $\rho = 0$. Інші редукції перелічено в таблиці Б.10.

Табл. Б.9: Оптимальні системи одновимірних підалгебр $A^{\max}$ з таблиці Б.7.

Випадок	Оптимальна система
0	$\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}^a = \langle (t+a)\partial_x + \partial_u \rangle$
$1_{\rho \neq -1,4}$	$\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}^\sigma = \langle (t+\sigma)\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.1} = \langle 5t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-4)u\partial_u \rangle$
$1_{\rho=-1}$	$\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}^\sigma = \langle (t+\sigma)\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{1.2}^a = \langle t\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle$
2	$\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}^0 = \langle t\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_2 = \langle 5\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle$
3	$\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_3 = \langle (t^2+1)\partial_t + (t+\nu)x\partial_x + (x+(\nu-t)u)\partial_u \rangle$
4	$\mathfrak{g} = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{4.1} = \langle \partial_t \rangle, \quad \mathfrak{g}_{4.2}^\sigma = \langle \sigma\partial_t + t\partial_x + \partial_u \rangle, \quad \mathfrak{g}_{4.3} = \langle 5t\partial_t + x\partial_x - 4u\partial_u \rangle$

Тут a — дійсні стала, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$. З точністю до $G_{\alpha=0}^\sim$ -еквівалентності можна вважати, що $\rho \leq 3/2, \nu \geq 0$.

Табл. Б.10: Ліівські редукції рівняння (Б.28).

Випадок	$\mathfrak{g}$	ω	Анзац, $u =$	Редуковане рівняння
0	$\mathfrak{g}^a$	t	$\varphi(\omega) + \frac{x}{t+a}$	$(\omega+a)\varphi' + \varphi = 0$
$1_{\rho \neq -1,4}$	$\mathfrak{g}_{1.1}$	$xt^{-\frac{\rho+1}{5}}$	$t^{\frac{\rho-4}{5}}\varphi(\omega)$	$\varphi'''' + \left(\varphi - \frac{\rho+1}{5}\omega\right)\varphi' + \frac{\rho-4}{5}\varphi = 0$
$1_{\rho=-1}$	$\mathfrak{g}_{1.2}^a$	$x - a \ln t$	$t^{-1}\varphi(\omega)$	$\varphi'''' + (\varphi - a)\varphi' - \varphi = 0$
2	$\mathfrak{g}_2$	$xe^{-\frac{1}{5}t}$	$e^{\frac{1}{5}t}\varphi(\omega)$	$\varphi'''' + \left(\varphi - \frac{1}{5}\omega\right)\varphi' + \frac{1}{5}\varphi = 0$
3	$\mathfrak{g}_3$	$\frac{xe^{-\nu \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2+1}}$	$\frac{e^{\nu \operatorname{arctg} t}}{\sqrt{t^2+1}}\varphi(\omega) + \frac{xt}{t^2+1}$	$\varphi'''' + (\varphi - \nu\omega)\varphi' + \nu\varphi + \omega = 0$
4.1	$\mathfrak{g}_{4.1}$	x	$\varphi(\omega)$	$\varphi'''' + \varphi\varphi' = 0$
4.2	$\mathfrak{g}_{4.2}^\sigma$	$x \pm \frac{t^2}{2}$	$\varphi(\omega) \mp t$	$\varphi'''' + \varphi\varphi' \mp 1 = 0$

Тут a — довільна стала.

Розв'язавши редуковане рівняння першого порядку з таблиці Б.10 та застосувавши після цього перетворення (Б.31), можна отримати «вироджений» розв'язок рівняння (Б.25), а саме

$$u = \frac{x+b}{\int e^{-\int \alpha(t)dt} dt + a} e^{-\int \alpha(t)dt},$$

який є коректним для будь-якої гладкої функції α . Тут a та b — довільні

сталі.

За допомогою перетворень еквівалентності можна побудувати точний розв'язок рівнянь (Б.25), які зводяться до їхніх відповідників зі сталими коефіцієнтами, тобто коефіцієнти яких пов'язані співвідношенням (Б.26). Візьмемо відомий розв'язок рівняння (Б.24) у термінах еліптичної функції Якобі сп з роботи [328] та отримаємо точний розв'язок

$$u = \frac{\frac{105}{16}a \operatorname{sn}^4\left(W(t, x); \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_1(x + d)}{e^{\int \alpha(t) dt} Z}$$

для рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + uu_x + \alpha(t)u - e^{-\int \alpha(t) dt} Z^3 u_{xxxx} = 0,$$

де $W(t, x) = \frac{\sqrt{2}}{4}a^{\frac{1}{4}}\left(\frac{x+d}{Z} - \frac{21}{8}a \int \frac{e^{-\int \alpha(t) dt}}{Z^2} dt\right) + b$, $Z = c_1 \int e^{-\int \alpha(t) dt} dt + c_2$, a — додатна стала, c_1, c_2, b та d — довільні сталі, причому $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

Одновимірні підалгебри алгебр лівських симетрій, що допускаються рівняннями з класу (Б.25), прокласифіковано в таблиці Б.9. Усі нееквівалентні редукції за такими підалгебрами зібрано в таблиці Б.10. Виконані редукції можна використати для побудови точних і/або чисельних розв'язків. Приклади такої побудови для узагальненого рівняння Кавасхари наведено у роботі [195]. Два прості розв'язки побудовано в цьому розділі.

Б.4. Груповий аналіз класу узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку

У цьому розділі з точки зору лівських симетрій досліджено клас узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \beta(t)u_{xxxx} = 0. \tag{Б.29}$$

Тут α та β — гладкі функції від t , що не мають нулів; n — додатне ціле число, $n \geq 2$. Ця робота — природне продовження нашого дослідження [197], де проведено вичерпну групову класифікацію рівнянь (Б.29) з $n = 1$. Симетрійний аналіз класу (Б.29) розпочато в роботі [320], але ми покажемо, що наведені там результати некоректні. Випадок $n = 2$ розглядався також у [321], але повної групової класифікації там не досягнуто.

Різноманітні узагальнення рівняння Кортевега–де Фріза виникають у багатьох фізичних моделях, включаючи такі, що описують гравітаційні хвилі, хвилі у плазмі та у решітках [168]. Наприклад, рівняння (Б.29) з $n = 1$, $\alpha = 0$ та $\beta = \text{const}$ моделює одновимірні гідромагнітні хвилі у холодній квазінейтральній безколізійній плазмі, що поширюються вздовж осі x під дією однорідного магнітного поля за деяких умов, а саме — коли кут поширення хвилі відносно зовнішнього магнітного поля стає критичним [174]. Більше посилань на дослідження, присвячені цим рівнянням, можна знайти у роботі [197].

Допустимі перетворення. Пошук допустимих перетворень у класі (Б.29) проведено з використанням прямого методу [184]. Справедливе твердження:

Теорема Б.18. *Узагальнена група еквівалентності $G^\sim$ класу (Б.29) складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{T_t}\right)^{\frac{1}{n}} u, \\ \tilde{\alpha}(\tilde{t}) &= \frac{\alpha}{T_t} + \frac{T_{tt}}{nT_t^2}, \quad \tilde{\beta}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^5}{T_t} \beta(t), \quad \tilde{n} = n,\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2$, — довільні сталі, T — довільна гладка функція, причому $\delta_1 T_t > 0$.

Вся множина допустимих перетворень класу (Б.29) породжується перетвореннями з групи $G^\sim$.

Якщо вважати, що стала n змінюється в класі (Б.29), то група еквівалентності $G^\sim$ — узагальнена, оскільки n явно присутня в перетворенні

змінної u . Оскільки n є інваріантом під дією перетворень з групи еквівалентності, клас (Б.29) можна розглядати як об'єднання його неперетинних підкласів з фіксованим n . Для кожного такого підкласу група еквівалентності $G^\sim$ є звичайною.

Використовуючи теорему Б.18, виведемо критерій звідності рівнянь зі змінними коефіцієнтами (Б.29) до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з цього ж класу.

Теорема Б.19. *Рівняння зі змінними коефіцієнтами з класу (Б.29) зводиться до рівняння з цього ж класу зі сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти α та β задовольняють рівність*

$$n(\alpha/\beta)_t = (1/\beta)_{tt}. \quad (\text{Б.30})$$

Перетворення еквівалентності з групи $G^\sim$ дозволяють відкалібрувати один з довільних елементів α чи β до простого сталого значення. Наприклад, α можна покласти рівним нулю, або ж β — рівним одиниці. Калібрування $\alpha = 0$ приводить до більш суттєвого спрощення дослідження, тобто є більш виграним. Довільне рівняння з класу (Б.29) можна відобразити у рівняння з цього ж класу з $\tilde{\alpha} = 0$ перетворенням еквівалентності

$$\tilde{t} = \int e^{-n \int \alpha(t) dt} dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = e^{\int \alpha(t) dt} u. \quad (\text{Б.31})$$

Тоді єдиний змінний коефіцієнт у перетвореному рівнянні виражається через α та β як $\tilde{\beta} = e^{n \int \alpha(t) dt} \beta$ (тут і далі інтеграл за t слід розуміти як деяку фіксовану первісну). Отже, можна обмежитися дослідженням класу

$$u_t + u^n u_x + \beta(t) u_{xxxx} = 0. \quad (\text{Б.32})$$

Щоб отримати групу еквівалентності для (Б.32), у відповідному перетворенні, наведеному в теоремі Б.18, покладемо $\tilde{\alpha} = \alpha = 0$. Тоді легко довести, що функція T — лінійна за t і справедливе твердження:

Табл. Б.11: Групова класифікація класу (Б.32) з точністю до $G_0^\sim$ -еквівалентності.

№	$\beta(t)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	∂_x
2	εt^ρ	$\partial_x, 5nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 4)u\partial_u$
3	εe^t	$\partial_x, 5n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u$
4	ε	$\partial_x, \partial_t, 5nt\partial_t + nx\partial_x - 4u\partial_u$

Тут $n \neq 0, 1$, ρ — довільна ненульова стала; $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_0^\sim$.

Наслідок Б.20. Узагальнена група еквівалентності $G_0^\sim$ класу (Б.32) складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_3 t + \delta_4, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)^{\frac{1}{n}} u, \\ \tilde{\beta}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1^5}{\delta_3} \beta(t), \quad \tilde{n} = n, \end{aligned} \quad (\text{Б.33})$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_3 > 0$.

Уся множина допустимих перетворень класу (Б.32) породжується перетвореннями з групи $G_0^\sim$.

Ліівські симетрії. У попередньому розділі показано, що задача групової класифікації для класу (Б.29) зводиться до подібної задачі для його підкласу (Б.32). Доведено твердження:

Теорема Б.21. Ядро максимальних алгебр ліівської інваріантності нелінійних рівнянь з класу (Б.32) з $n \neq 1$ співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Усі можливі $G_0^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр ліівської інваріантності вичерпуються наведеними у випадках 2–4 таблиці Б.11.

Твердження Б.22. Класифікаційний список для класу (Б.29) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності співпадає зі списком, наведеним у таблиці Б.11.

Табл. Б.12: Групова класифікація класу (Б.29) з $n \neq 0, 1$ без використання еквівалентності.

№	$\beta(t)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	∂_x
2	$\lambda T_t (T + \kappa)^\rho$	$\partial_x, 5n(T + \kappa)T_t^{-1}\partial_t + n(\rho + 1)x\partial_x + (\rho - 4 - 5n\alpha(t)(T + \kappa)T_t^{-1})u\partial_u$
3	$\lambda T_t e^{mT}$	$\partial_x, 5nT_t^{-1}\partial_t + mn x\partial_x + (m - 5n\alpha(t)T_t^{-1})u\partial_u$
4	λT_t	$\partial_x, T_t^{-1}(\partial_t - \alpha(t)u\partial_u), 5nTT_t^{-1}\partial_t + nx\partial_x - (4 + 5n\alpha(t)TT_t^{-1})u\partial_u$

Тут λ, κ, ρ та m — довільні сталі, причому $\lambda \rho m \neq 0$, $T = T(t) = \int e^{-n \int \alpha(t) dt} dt$, а функція $\alpha(t)$ є довільною у всіх випадках.

Твердження Б.23. Рівняння вигляду (Б.29) допускає трьохвимірну алгебру лівських симетрій тоді і тільки тоді, коли воно точково-еквівалентне рівнянню Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами $u_t + u^n u_x + \varepsilon u_{xxxxx} = 0$ з цього ж класу.

Для зручності подальших застосувань наведемо в таблиці Б.12 повний список розширень лівської симетрії для початкового класу (Б.29), де довільні елементи не спрощено перетвореннями еквівалентності (докладний алгоритм отримання таких списків зі спрощених описано в [299]).

Отримані результати групової класифікації дають всі рівняння (Б.29), до яких можна застосувати класичний метод лівських редукцій.

Симетрійні редукції та побудова точних розв'язків. Щоб знайти оптимальні системи одновимірних підалгебр для алгебр Лі $A^{\max}$, наведених у таблиці Б.11, спочатку розглянемо їхню структуру, використавши позначення роботи [245]. У випадках 2 та 3 максимальні алгебри лівської інваріантності — двовимірні. У випадку 2 з $\rho = -1$ вони абелеві ($2A_1$). Алгебри у випадку 2 з $\rho \neq -1$ та у випадку 3 — неабелеві (A_2). Трьохвимірна алгебра з базисними операторами, наведеними у випадку 4, належить до типу $A_{3,5}^a$, де $a = 1/5$.

Отже, оптимальні системи одновимірних підалгебр максимальних алгебр лівської інваріантності $A^{\max}$, наведених у таблиці Б.11, такі:

Табл. Б.13: Ліівські редукції рівняння $u_t + u^n u_x + \beta(t) u_{xxxx} = 0$.

№	$\beta(t)$	$\mathfrak{g}$	ω	Анзац	Редуковане рівняння
1	$\varepsilon t^\rho, \rho \neq -1$	$\mathfrak{g}_{2.1}$	$xt^{-\frac{\rho+1}{5}}$	$u = t^{\frac{\rho-4}{5n}} \varphi(\omega)$	$\varepsilon \varphi'''' + \left(\varphi^n - \frac{\rho+1}{5}\omega\right) \varphi' + \frac{\rho-4}{5n} \varphi = 0$
2	εt^{-1}	$\mathfrak{g}_{2.2}^a$	$x - \frac{a}{n} \ln t$	$u = t^{-\frac{1}{n}} \varphi(\omega)$	$\varepsilon \varphi'''' + \left(\varphi^n - \frac{a}{n}\right) \varphi' - \frac{1}{n} \varphi = 0$
3	εe^t	$\mathfrak{g}_3$	$xe^{-\frac{1}{5}t}$	$u = e^{\frac{1}{5n}t} \varphi(\omega)$	$\varepsilon \varphi'''' + \left(\varphi^n - \frac{1}{5}\omega\right) \varphi' + \frac{1}{5n} \varphi = 0$
4	ε	$\mathfrak{g}_{4.1}^\sigma$	$x - \sigma t$	$u = \varphi(\omega)$	$\varepsilon \varphi'''' + (\varphi^n - \sigma) \varphi' = 0$
5	ε	$\mathfrak{g}_{4.2}$	$xt^{-\frac{1}{5}}$	$u = t^{-\frac{4}{5n}} \varphi(\omega)$	$\varepsilon \varphi'''' + \left(\varphi^n - \frac{\omega}{5}\right) \varphi' - \frac{4}{5n} \varphi = 0$

Тут a — довільна стала, $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_0^\sim$, $n \neq 0, 1$.

$$2_{\rho \neq -1}: \mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2.1} = \langle 5nt\partial_t + (\rho + 1)nx\partial_x + (\rho - 4)u\partial_u \rangle;$$

$$2_{\rho = -1}: \mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{2.2}^a = \langle nt\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle, \quad \text{де } a \text{ — довільна стала};$$

$$3: \mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_3 = \langle 5n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle;$$

$$4: \mathfrak{g}_0 = \langle \partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{4.1}^\sigma = \langle \partial_t + \sigma\partial_x \rangle, \quad \mathfrak{g}_{4.2} = \langle 5nt\partial_t + nx\partial_x - 4u\partial_u \rangle,$$

$$\sigma \in \{-1, 0, 1\}.$$

Редукції за підалгеброю $\mathfrak{g}_0$ не виконуємо, оскільки вони приводять тільки до сталих розв'язків. Редукції за іншими одновимірними підалгебрами й отримані оптимальні списки подано в таблиці Б.13.

Можна розглянути також редукції узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза п'ятого порядку до алгебраїчних рівнянь, використовуючи двовимірні підалгебри їхніх алгебр ліівської інваріантності. Існує лише одна така підалгебра, що приводить до несталою розв'язку. Це підалгебра

$$\langle \partial_t, 5nt\partial_t + nx\partial_x - 4u\partial_u \rangle$$

алгебри $A^{\max}$, наведеної у випадку 4 таблиці Б.11. Відповідний анзац $u = Cx^{-\frac{4}{n}}$ редукує рівняння

$$u_t + u^n u_x + \varepsilon u_{xxxx} = 0 \tag{Б.34}$$

до алгебраїчного рівняння на сталу C . Розв'язавши його, отримаємо стаціонарний розв'язок

$$u = (-8\varepsilon(n+1)(n+2)(n+4)(3n+4))^{\frac{1}{n}}(nx)^{-\frac{4}{n}}$$

рівняння (Б.34). Використовуючи цей розв'язок та перетворення еквівалентності (Б.31), побудуємо простий нестационарний точний розв'язок

$$u = \left(-8\varepsilon(n+1)(n+2)(n+4)(3n+4) \right)^{\frac{1}{n}} (nx)^{-\frac{4}{n}} e^{-\int \alpha(t) dt}$$

рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку з коефіцієнтами, що залежать від часу

$$u_t + u^n u_x + \alpha(t)u + \varepsilon e^{-n \int \alpha(t) dt} u_{xxxxx} = 0, \quad (\text{Б.35})$$

де α — довільна гладка функція, що не має нулів.

При $n = 2$ розглянемо розв'язок типу біжучої хвилі

$$u = \pm 2\sqrt{-10\varepsilon} \left(3 \operatorname{th}(x + 24\varepsilon t)^2 - 2 \right)$$

рівняння (Б.34), відомий з [243]. Використовуючи (Б.31), отримаємо точний розв'язок рівняння (Б.35) з $n = 2$

$$u = \pm 2\sqrt{-10\varepsilon} \left(3 \operatorname{th} \left(x + 24\varepsilon \int e^{-2 \int \alpha(t) dt} dt \right)^2 - 2 \right) e^{-\int \alpha(t) dt}.$$

Слід зауважити, що отримані редукції до звичайних диференціальних рівнянь можна використати для чисельного розв'язання узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза п'ятого порядку, див. [195, 307].

Прикінцеві зауваження. Симетрійний аналіз класу (Б.29) було розпочато у роботі [320], а випадок $n = 2$ окремо розглянуто в [321]. Проте наведені там результати є некоректними [320] або неповними [321]. Конкретизуємо основні недоліки результатів, отриманих в цих двох роботах.

У [321] було знайдено лише деякі випадки розширень ліївських симетрій рівнянь вигляду (Б.29) з $n = 2$, а саме випадки з $\alpha = \text{const}$ та $\alpha = 1/t$. При виконанні групової класифікації з точністю до відповідних перетворень еквівалентності достатньо розглянути випадок $\alpha = 0$. Щоб отримати класифікацію, що містить всі рівняння, які допускають розширення ліївської симетрії, а не лише їхні нееквівалентні представники, всі такі рівняння повинні мати довільний коефіцієнт α , тобто випадки $\alpha = \text{const}$

та $\alpha = 1/t$ можна розглядати тільки як часткові приклади. Більш того, навіть вивчаючи ці часткові випадки, автори [321] пропустили один випадок розширення ліївських симетрій для кожного розглянутого значення α . Наприклад, для випадку $\alpha = 0$ це $\beta = \varepsilon(t + \delta)^\rho$, де ε , δ та ρ — довільні сталі, причому $\varepsilon\rho \neq 0$. Тим не менше, принаймні розмірності та базисні оператори знайдених у роботі [321] алгебр ліївських симетрій для цих часткових випадків коректні, чого не можна сказати про результати роботи [320].

У [320] автори стверджують, що вони знайшли три випадки розширень ліївської симетрії для рівнянь (Б.29) і в кожному виведеному випадку відповідна алгебра ліївської симетрії — чотирьохвимірна. Це твердження хибне. У цій дисертаційній роботі та в [197] показано, що рівняння (Б.29) допускає чотирьохвимірну алгебру ліївської симетрії тоді і тільки тоді, коли $n = 1$. Більш того, це рівняння є точково-еквівалентним найпростішому рівнянню Кортевега–де Фріза п'ятого порядку зі сталими коефіцієнтами $u_t + uu_x + \mu u_{xxxxx} = 0$, де $\mu = \text{const}$. Таким чином, результати [320] принципово некоректні.

Б.5. Групова класифікація рівнянь $K(m, n)$ зі змінними коефіцієнтами

Для того, щоб зрозуміти роль нелінійної дисперсії у формуванні візерунків у краплинах рідини, Розено та Хімен [272] запропонували узагальнення рівняння Кортевега–де Фріза вигляду

$$u_t + \varepsilon(u^m)_x + (u^n)_{xxx} = 0,$$

де $\varepsilon = \pm 1$. Ці рівняння, відомі також як рівняння $K(m, n)$, мають таку властивість: для певних значень m та n їхні солітонні розв'язки мають компактний носій (тотожно дорівнюють нулю за межами деякої скінченної центральної області). Подальші дослідження: [268–271].

Розглянемо клас рівнянь $K(m, n)$ зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + \varepsilon(u^m)_x + f(t)(u^n)_{xxx} = 0, \quad (\text{Б.36})$$

де $f(t)$ — довільна функція, що не має нулів; n та m — довільні сталі, $n \neq 0$; $\varepsilon = \pm 1$. Зауважимо, що більш загальний клас рівнянь (згаданий, наприклад, у роботі [332]) вигляду

$$u_t + g(t)(u^m)_x + f(t)(u^n)_{xxx} = 0, \quad fn \neq 0, \quad (\text{Б.37})$$

зводиться до класу (Б.36) перетворенням $\tilde{t} = \varepsilon \int g(t) dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$. Це перетворення відображає клас (Б.37) у його підклас (Б.36), де $\tilde{f} = \varepsilon f/g$. Ось чому без обмеження загальності достатньо дослідити клас (Б.36).

У цьому розділі проведемо групову класифікацію для класу (Б.36). Опишемо всі точкові перетворення, що пов'язують рівняння з цього класу. Спочатку знайдемо групу еквівалентності всього класу, а тоді виокремимо три його підкласи, що мають нетривіальні умовні групи еквівалентності. Отримані ліівські симетрії застосуємо також до спеціальної крайової задачі.

Допустимі перетворення. Результати щодо допустимих перетворень для рівнянь з класу (Б.36) зібрано у теоремах, які описують групоїд еквівалентності (доведення теорем не наводимо). Лінійні рівняння, тобто рівняння з $(n, m) \in \{(1, 0), (1, 1)\}$, виключено з розгляду.

Теорема Б.24. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (Б.36) складається з перетворень*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \pm \delta_1 \delta_3^{1-m} t + \delta_0, & \tilde{x} &= \delta_1 x + \delta_2, & \tilde{u} &= \delta_3 u, \\ \tilde{f} &= \pm \delta_1^2 \delta_3^{m-n} f, & \tilde{\varepsilon} &= \pm \varepsilon, & \tilde{n} &= n, & \tilde{m} &= m, \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Виявляється, що при $(n, m) \in \{(n, 0), (n, 1), (1, 2)\}$ існують нетривіальні умовні групи еквівалентності класу (Б.36), більш широкі, ніж $G^\sim$. Справедливі твердження:

Теорема Б.25. Клас (Б.36) з $m = 0$

$$u_t + f(t) (u^n)_{xxx} = 0 \quad (\text{Б.38})$$

допускає звичайну групу еквівалентності $G_{(n,0)}^\sim$, що складається з перетворень

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \quad \tilde{f} = \frac{\delta_1^3 \delta_3^{1-n}}{T_t} f, \quad \tilde{n} = n,$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_3 \neq 0$, $T(t)$ — довільна гладка функція, причому $T_t \neq 0$.

Теорема Б.26. Узагальнена група еквівалентності $G_{(n,1)}^\sim$ класу (Б.36) з $m = 1$

$$u_t + \varepsilon u_x + f(t) (u^n)_{xxx} = 0 \quad (\text{Б.39})$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1(x - \varepsilon t) \pm \varepsilon T(t) + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \\ \tilde{f} &= \frac{\delta_1^3 \delta_3^{1-n}}{T_t} f, \quad \tilde{\varepsilon} = \pm \varepsilon, \quad \tilde{n} = n, \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_3 \neq 0$; $T(t)$ — довільна гладка функція, для якої $T_t \neq 0$.

Теорема Б.27. Узагальнена група еквівалентності $G_{(1,2)}^\sim$ класу

$$u_t + \varepsilon(u^2)_x + f(t)u_{xxx} = 0 \quad (\text{Б.40})$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \pm \frac{2\varepsilon\kappa(\gamma t + \delta)u - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{2\varepsilon(\alpha\delta - \beta\gamma)}, \\ \tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{\varepsilon} = \pm \varepsilon, \quad \tilde{f} = \frac{\kappa^3}{\alpha\delta - \beta\gamma} \frac{f}{\gamma t + \delta}, \end{aligned}$$

де α , β , γ , δ , μ_1 , μ_0 та κ — сталі, визначені з точністю до ненульового множника, $\kappa(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$.

Табл. Б.14: Класифікація рівнянь (Б.36) з $n \neq 1$.

№	n	m	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
1	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_x
2	$\forall$	$\frac{n+2}{3}$	$\forall$	$\partial_x, x\partial_x + \frac{3}{n-1}u\partial_u$
3	$\forall$	0	1	$\partial_t, \partial_x, x\partial_x + \frac{3}{n-1}u\partial_u, 3t\partial_t + x\partial_x$
4	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\partial_t, \partial_x, x\partial_x - 2u\partial_u, 3t\partial_t + x\partial_x, x^2\partial_x - 4xu\partial_u$
5	$\forall$	$\forall$	1	$\partial_t, \partial_x, (3m-n-2)t\partial_t + (m-n)x\partial_x - 2u\partial_u$
6_a	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\partial_t, \partial_x, 3t\partial_t + 2u\partial_u,$ $\sin x \partial_x - 2 \cos x u \partial_u, \cos x \partial_x + 2 \sin x u \partial_u$
6_b	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\partial_t, \partial_x, 3t\partial_t + 2u\partial_u, e^x \partial_x - 2e^x u \partial_u, e^{-x} \partial_x + 2e^{-x} u \partial_u$
7	$\forall$	$\forall$	t^k	$\partial_x, (3m-n-2)t\partial_t + (km-k+m-n)x\partial_x + (k-2)u\partial_u$
8	$\forall$	$\frac{n+2}{3}$	t^2	$\partial_x, x\partial_x + \frac{3}{n-1}u\partial_u, t\partial_t + x\partial_x$
9	$\forall$	$\forall$	e^t	$\partial_x, (3m-n-2)\partial_t + (m-1)x\partial_x + u\partial_u$

Тут k — довільна ненульова стала. У випадках 6_a та 6_b $\varepsilon = 1$ та $\varepsilon = -1$, відповідно.

Рівняння з класу (Б.39) можна звести до рівнянь з класу (Б.38) (з тильдованими змінними) додатковим перетворенням еквівалентності $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x - \varepsilon t$, $\tilde{u} = u$. Отже, випадок $m = 1$ насправді еквівалентний випадку $m = 0$ і його слід виключити з класифікаційного списку.

Ліївські симетрії. Виконаємо групову класифікацію класу (Б.36), використовуючи класичний підхід [23, 71, 235]. Тут виникає два суттєво різні випадки: $n \neq 1$ та $n = 1$.

Ліївські симетрії рівнянь (Б.36) з $n \neq 1$ в залежності від вигляду $f(t)$ наведено у таблиці Б.14. Усі випадки цієї таблиці, за винятком випадків 3 та 4, прокласифіковано з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Для випадків 3 та 4, де $m = 0$, використано групу еквівалентності $G_{(n,0)}^\sim$, яка є більш широкою, ніж $G^\sim$. Таким чином, рівняння (Б.38) з $n \neq -1/2$ допускає чотирьохвимірну алгебру ліївської симетрії з базисними операторами

$$\frac{1}{f(t)}\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_x + \frac{3}{n-1}u\partial_u, \quad 3\frac{\int f(t)dt}{f(t)}\partial_t + x\partial_x$$

Табл. Б.15: Класифікація класу (Б.36) з $n = 1$.

№	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
$m \neq 2$		
1	$\forall$	∂_x
2	1	$\partial_t, \partial_x, 3(m-1)t\partial_t + (m-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
3	t^k	$\partial_x, 3(m-1)t\partial_t + (m-1)(k+1)x\partial_x + (k-2)u\partial_u$
4	e^t	$\partial_x, 3(m-1)\partial_t + (m-1)x\partial_x + u\partial_u$
$m = 2$		
5	$\forall$	$\partial_x, 2\varepsilon t\partial_x + \partial_u$
6	1	$\partial_t, 2\varepsilon t\partial_x + \partial_u, \partial_x, 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u$
7	t^k	$\partial_x, 2\varepsilon t\partial_x + \partial_u, 3t\partial_t + (k+1)x\partial_x + (k-2)u\partial_u$
8	e^t	$\partial_x, 2\varepsilon t\partial_x + \partial_u, 3\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
9	$e^{k \arctg t \sqrt{t^2 + 1}}$	$\partial_x, 2\varepsilon t\partial_x + \partial_u, 6\varepsilon(t^2 + 1)\partial_t + 2\varepsilon(3t + k)x\partial_x + (2\varepsilon(k - 3t)u + 3x)\partial_u$

Тут k — довільна стала з такими обмеженнями: $k \neq 0$ у випадку 3; $k \neq 0, 1$ та $k \geq 1/2 \bmod G_{(1,2)}^\sim$ у випадку 7; $k \geq 0 \bmod G_{(1,2)}^\sim$ у випадку 9.

незалежно від вигляду функції f . Тут і далі інтеграл за t слід розуміти як деяку фіксовану первісну. Якщо $n = -1/2$, то алгебра ліівських симетрій рівняння (Б.38) — п'ятивимірною і породжується наведеними вище операторами й оператором $x^2\partial_x - 4xu\partial_u$. Використовуючи перетворення еквівалентності $\tilde{t} = \int f(t)dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$ з групи $G_{(n,0)}^\sim$, зводимо ці випадки до випадків з $f = 1$ (див. випадки 3 та 4 таблиці Б.14).

Ліівські симетрії рівнянь (Б.36) з $n = 1$ в залежності від вигляду $f(t)$ наведено у таблиці Б.15.

Групову класифікацію класу (Б.36) з $n = 1$ та $m \neq 2$ виконано з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Для класифікації ліівських симетрій рівняння (Б.36) з $n = 1$ та $m = 2$ використано більш широку, умовну групу еквівалентності $G_{(1,2)}^\sim$. Оскільки перетворення з групи $G_{(1,2)}^\sim$ досить складні, додамо також додаткові випадки розширень ліівської симетрії

рівнянь (Б.36) з $n = 1$ та $m = 2$, які не еквівалентні випадкам 6–9 таблиці Б.15 відносно групи $G^\sim$.

1. $f = (t + \beta)^k t^{1-k}$, $k \neq 0, 1$, $\beta \neq 0$: $\langle \partial_x, 2\epsilon t \partial_x + \partial_u, Q_3 \rangle$, де $Q_3 = 6\epsilon t(t + \beta)\partial_t + 2\epsilon(3t + \beta(2 - k))x\partial_x + [3x - 2\epsilon(3t + \beta(k + 1))u]\partial_u$;
2. $f = te^{\frac{1}{t}}$: $\langle \partial_x, 2\epsilon t \partial_x + \partial_u, 6\epsilon t^2 \partial_t + 2\epsilon(3t - 1)x\partial_x + (3x - 2\epsilon(3t + 2)u)\partial_u \rangle$;
3. $f = t$: $\langle \partial_x, 2\epsilon t \partial_x + \partial_u, 3t\partial_t + 2x\partial_x - u\partial_u, 2\epsilon t^2 \partial_t + 2\epsilon t x \partial_x + (x - 2\epsilon t u)\partial_u \rangle$.

На перший погляд здається, що аналог випадку 9 таблиці Б.14 пропущено. Але виявляється, що функція $f = \lambda \exp\left(k \arctg \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ локально дорівнює функції $\check{f} = \check{\lambda} \exp(k \arctg(\check{\alpha} t + \check{\beta}))$ (див. у [249] докладніше).

Як приклад редукції до звичайного диференціального рівняння розглянемо випадок 7 таблиці Б.15, який відповідає рівнянню Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + \epsilon(u^2)_x + t^k u_{xxx} = 0, \quad (\text{Б.41})$$

що допускає трьохвимірну алгебру ліівських симетрій

$$Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = 2\epsilon t \partial_x + \partial_u, \quad Q_3 = 3t \partial_t + (k + 1)x \partial_x + (k - 2)u \partial_u,$$

В залежності від значення k оптимальна система одновимірних підалгебр цієї алгебри ліівських симетрій складається з підалгебр

$$\begin{aligned} &\langle Q_1 \rangle, \quad \langle Q_2 + \sigma Q_1 \rangle, \quad \langle Q_3 \rangle, && \text{якщо } k \neq -1, 2, \\ &\langle Q_1 \rangle, \quad \langle Q_2 + \sigma Q_1 \rangle, \quad \langle Q_3 + a Q_1 \rangle, && \text{якщо } k = -1, \\ &\langle Q_1 \rangle, \quad \langle Q_2 + \sigma Q_1 \rangle, \quad \langle Q_3 + a Q_2 \rangle, && \text{якщо } k = 2. \end{aligned}$$

Тут $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Редукції, що відповідають підалгебрі $\langle Q_1 \rangle$, не розглядаємо, оскільки вони приводять тільки до сталих розв'язків. Анзац, побудований за підалгеброю $\langle Q_2 + \sigma Q_1 \rangle$, має вигляд $u = \frac{x}{2\epsilon t + \sigma} + \phi(\omega)$ з інваріантною змінною $\omega = t$. Цей анзац редукує рівняння (7) до звичайного диференціального рівняння $(2\epsilon\omega + \sigma)\phi_\omega + 2\epsilon\phi = 0$, загальним розв'язком якого

є $\phi = \frac{c_1}{2\varepsilon\omega + \sigma}$, де c_1 — довільна стала. Відповідний розв'язок (7) набуває вигляду $u = \frac{x + c_1}{2\varepsilon t + \sigma}$. Слід зауважити, що цей розв'язок задовольняє рівняння вигляду (Б.40) для довільних f . Інші редукції залежать від показника степеня k . Наведемо анзаци і відповідні редуктовані рівняння:

$$k \neq -1, 2. \quad \langle Q_3 \rangle: u = t^{\frac{k-2}{3}} \phi(\omega), \quad \omega = xt^{-\frac{k+1}{3}},$$

$$3\phi_{\omega\omega\omega} + 6\varepsilon\phi\phi_{\omega} - (k+1)\phi_{\omega}\omega + (k-2)\phi = 0;$$

$$k = -1. \quad \langle Q_3 + aQ_1 \rangle: u = \frac{1}{t}\phi(\omega), \quad \omega = x - \frac{1}{3}\ln t,$$

$$3\phi_{\omega\omega\omega} + 6\varepsilon\phi\phi_{\omega} - a\phi_{\omega} - 3\phi = 0;$$

$$k = 2. \quad \langle Q_3 + aQ_2 \rangle: u = \frac{a}{3}\ln t + \phi(\omega), \quad \omega = \frac{x}{t} - \frac{2a\varepsilon}{3}\ln t,$$

$$3\phi_{\omega\omega\omega} + 6\varepsilon\phi\phi_{\omega} - 3\phi_{\omega}\omega - 2a\varepsilon\phi_{\omega} + a = 0.$$

Зауважимо, що останні два випадки еквівалентні. Дійсно, рівняння $u_t + \varepsilon(u^2)_x + t^2 u_{xxx} = 0$ відображається у рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \varepsilon(\tilde{u})_{\tilde{x}}^2 + \tilde{t}^{-1}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0$ перетворенням

$$\tilde{t} = \frac{1}{t}, \quad \tilde{x} = -\frac{x}{t}, \quad \tilde{u} = \frac{2\varepsilon t u - x}{2\varepsilon}$$

з групи $G_{(1,2)}^{\sim}$.

Редукція крайової задачі. Розглянемо задачу з початковою та крайовими умовами

$$u_t + \varepsilon(u^m)_x + t^k(u^n)_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (Б.42)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad (Б.43)$$

$$u(0, t) = q(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Знайдемо несталий розв'язок цієї задачі, використовуючи «прямий» підхід, запропонований Блюманом [65, 68].

Ліївські симетрії для рівняння зі змінними коефіцієнтами (Б.42) отримано в попередньому розділі. Тепер перевіримо, які з цих симетрій за-

лишають відповідні початкову та крайові умови інваріантними. Для рівняння (Б.42) потрібно розглянути загальний оператор симетрії вигляду

$$Q = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 [(3m-n-2)t\partial_t + (km-k+m-n)x\partial_x + (k-2)u\partial_u].$$

Застосування Q до першої крайової умови $x = 0$, $u(t, 0) = q(t)$ дає $\alpha_1 = 0$ та $q(t) = \gamma t^{\frac{k-2}{3m-n-2}}$, $m \neq \frac{n+2}{3}$. Використовуючи друге розширення Q

$$Q^{(2)} = 3nt\partial_t + (k+1)nx\partial_x + (k-2)u\partial_u + (k-nk-n-2)u_x\partial_{u_x} + (k-2nk-2n-2)u_{xx}\partial_{u_{xx}},$$

у записі якого невикористані доданки пропущено, можна показати, що воно залишає інваріантними початкову умову та дві крайові умови (Б.43), що залишилися. Нарешті, симетрія Q породжує перетворення

$$u = t^{\frac{k-2}{3m-n-2}}\phi(\omega), \quad \omega = xt^{-\frac{km-k+m-n}{3m-n-2}}, \quad (\text{Б.44})$$

що редукує задачу (Б.42)–(Б.43) до задачі Коші

$$(\phi^n)''' + \varepsilon(\phi^m)' - \frac{km-k+m-n}{3m-n-2}\omega\phi' + \frac{k-2}{3m-n-2}\phi = 0, \quad (\text{Б.45})$$

$$\phi(0) = \gamma, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) = 0.$$

Цю задачу Коші можна розв'язати чисельно. Тоді розв'язок задачі з початковою і крайовими умовами (Б.42)–(Б.43) можна знайти, використовуючи перетворення (Б.44). У роботі [307] успішно розв'язано подібну задачу для узагальненого рівняння Кортевега–де Фріза з використанням методу скінченних різниць.

Отже, у цьому додатку прокласифіковано ліївські симетрії рівнянь $K(m, n)$ з коефіцієнтами, що залежать від часу. Групову класифікацію наведено з точністю до найширших можливих груп еквівалентності: звичайної групи еквівалентності для всього класу в загальному випадку та умовних груп еквівалентності для окремих значень показників степеня m та n .

Б.6. Груповий аналіз класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса

Регуляризоване рівняння довгої хвилі $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$ запропоновано Перегріном [246] та пізніше Бенджаміном з іншими авторами [53] для опису довгих хвиль малої амплітуди на поверхні води в каналі. Для врахування механізмів, що приводять до затухання хвилі, у [42] було розглянуто модель, що містить дисипативний член u_{xx} , а саме

$$u_t + u_x + uu_x - \nu u_{xx} - u_{xxt} = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}^+.$$

Тут $u = u(x, t)$ — дійснозначна функція двох дійсних змінних x та t , які зазвичай пропорційні відстані в напрямку поширення та затраченому часу, відповідно. Залежна змінна може означати переміщення середовища або швидкість [42]. Регуляризоване рівняння довгої хвилі з дисипативним членом типу Бюргерса частіше називають рівнянням Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса [223].

Рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з залежними від часу коефіцієнтами мають вигляд

$$u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + k(t)u_{xx} + h(t)u_{xxt} = 0, \quad ghk \neq 0, \quad (\text{Б.46})$$

де f, g, h, k — гладкі функції змінної t .

У цьому додатку наша мета — дослідити цей клас з точки зору ліівських симетрій, а саме навести повну групову класифікацію рівнянь цього класу. Подібне дослідження розпочато у роботі [190], але повної та коректної групової класифікації там не отримано. Ліівські симетрії та закони збереження рівнянь (Б.46) без дисипативного члена (тобто з $k = 0$) було досліджено у роботі [314].

Групову класифікацію класу (Б.46) проведемо з використанням методу відображення між класами, який запропоновано у роботі [309] та успішно застосовано до кількох класів диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами (див., наприклад, [306, 314]).

Отримавши повну групову класифікацію, виконаємо лівські редукції рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса до звичайних диференціальних рівнянь та побудуємо деякі точні розв'язки.

Групоїд еквівалентності і групова класифікація. Розглянемо трансформаційні властивості класу (Б.46). Шукаємо допустимі точкові перетворення, використовуючи прямий метод [184]. Доведення тверджень аналогічні наведеним у роботі [314] для рівнянь (Б.46) з $k = 0$. Таким чином, пропустимо деталі обчислень та наведемо остаточні результати.

Усі допустимі перетворення у класі (Б.46) породжуються перетвореннями еквівалентності. Отже, цей клас нормалізований у звичайному сенсі. Справедливе твердження:

Теорема Б.28. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу (Б.46) складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \delta_4, \quad \tilde{k}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1^2}{T_t} k(t), \\ \tilde{f}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1}{T_t \delta_3} (\delta_3 f(t) - \delta_4 g(t)), \quad \tilde{g}(\tilde{t}) = \frac{\delta_1}{T_t \delta_3} g(t), \quad \tilde{h}(\tilde{t}) = \delta_1^2 h(t),\end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1 \delta_3 \neq 0$; $T = T(t)$ — довільна гладка функція, для якої $T_t \neq 0$. Клас (Б.46) нормалізований у звичайному сенсі.

Використовуючи цю теорему, можна сформулювати критерій звідності рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі змінними коефіцієнтами з класу (Б.46) до їхніх відповідників зі сталими коефіцієнтами:

Твердження Б.29. *Рівняння з класу (Б.46) зі змінними коефіцієнтами зводиться точковим перетворенням до рівняння зі сталими коефіцієнтами з цього ж класу тоді і тільки тоді, коли відповідні коефіцієнти f , g , h та k задовольняють умови*

$$(f/g)_t = h_t = k_t = 0,$$

тобто k та h — сталі, а функція f пропорційна до g .

Табл. Б.16: Групова класифікація класу (Б.48) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності.

№	$H(t)$	$K(t)$	$F(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\lambda t^{\rho-1}$	$\delta t^{\frac{\rho-4}{2}}$	$\partial_x, 2t\partial_t + \rho x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	εe^t	λe^t	$\delta e^{\frac{1}{2}t}$	$\partial_x, 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
3	ε	λ	δ	∂_x, ∂_t

Тут $\varepsilon, \delta, \lambda$ та ρ — довільні сталі, причому $\varepsilon\lambda \neq 0, \varepsilon = \pm 1 \bmod G_1^\sim$.

У випадку 3 $\delta = 0, 1 \bmod G_1^\sim$, а також $\lambda = -1 \bmod G_1^\sim$ при $\delta = 0$.

Зауважимо, що максимальну алгебру лівської інваріантності $A^{\max}$ рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі сталими коефіцієнтами було знайдено у роботі [79]. Це двовимірна абелева алгебра $\langle \partial_t, \partial_x \rangle$, породжена зсувами у просторі та часі.

Присутність чотирьох довільних елементів у класі (Б.46) ускладнює розв'язання задачі групової класифікації. Отже, доцільно спростити задачу, зменшивши кількість довільних елементів у класі. Це можна зробити або шляхом калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності, або використовуючи метод відображення між класами. Оберемо другий варіант.

Сім'я точкових перетворень

$$\tilde{t} = \int g(t)dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + \frac{f(t)}{g(t)}, \quad (\text{Б.47})$$

параметризована двома довільними елементами класу (Б.46), відображає клас (Б.46) у пов'язаний клас рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі змінними коефіцієнтами з джерелом

$$u_t + uu_x + K(t)u_{xx} + H(t)u_{xxt} = F(t), \quad HK \neq 0 \quad (\text{Б.48})$$

(тильди в рівнянні (Б.48) пропущено). Довільні елементи початкового класу (Б.46) та відображеного класу (Б.48) пов'язані формулами

$$K(\tilde{t}) = \frac{k(t)}{g(t)}, \quad H(\tilde{t}) = h(t), \quad F(\tilde{t}) = \frac{1}{g(t)} \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right)_t. \quad (\text{Б.49})$$

Керуючись методом відображення між класами, спочатку прокласифікуємо ліівські симетрії відображеного класу (Б.48), а тоді використаємо сім'ю точкових перетворень (Б.47) та співвідношення (Б.49), аби поширити результат на початковий клас (Б.46).

Для того, щоб ефективно розв'язати задачу групової класифікації для класу (Б.48), шукаємо допустимі перетворення в цьому класі, використовуючи прямий метод. Аналогічно до класу (Б.46), такі перетворення вичерпуються перетвореннями зі звичайної групи еквівалентності, яку допускає цей клас.

Теорема Б.30. *Звичайна група еквівалентності $G_1^\sim$ класу (Б.48) складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \frac{\delta_1}{\delta_3}t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3u,$$

$$\tilde{K}(\tilde{t}) = \delta_1\delta_3K(t), \quad \tilde{H}(\tilde{t}) = \delta_1^2H(t), \quad \tilde{F}(\tilde{t}) = \frac{\delta_3^2}{\delta_1}F(t),$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі, причому $\delta_1\delta_3 \neq 0$. Клас (Б.48) нормалізований у звичайному сенсі.

Результати групової класифікації класу (Б.48) наведено в таблиці Б.16.

Зауваження Б.31. Будь-яке рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса зі сталими коефіцієнтами $u_t + fu_x + guu_x + ku_{xx} + hu_{txx} = 0$ можна звести до рівняння $u_t + uu_x - u_{xx} + \varepsilon u_{txx} = 0$, де $\varepsilon = \text{sign}(h)$ (випадок 4 таблиці Б.17 з $\delta = 0$ та $\lambda = -1$) перетворенням $\tilde{t} = -\frac{k}{|h|}t$, $\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{|h|}}$, $\tilde{u} = -\frac{\sqrt{|h|}}{k}(gu + f)$ з групи $G^\sim$.

Класифікаційний список для початкового класу (Б.46) можна побудувати, використавши перетворення (Б.47), співвідношення (Б.49) та результати групової класифікації, отримані для відображеного класу (Б.48) (таблиця Б.16). Перетворення (Б.47) можна розглядати як композицію перетворення еквівалентності $\tau^\sim$: $\tilde{t} = \int g(\bar{t})d\bar{t}$, $\tilde{x} = \bar{x}$, $\tilde{u} = \bar{u}$ з групи $G^\sim$

Табл. Б.17: Групова класифікація класу (Б.46) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

№	$h(t)$	$k(t)$	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\lambda t^{\rho-1}$	$\delta t^{\frac{\rho-2}{2}}$	$\partial_x, 2t\partial_t + \rho x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	εt^2	λt	$\delta \ln t$	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x - \delta\partial_u$
3	εe^t	λe^t	$\delta e^{\frac{1}{2}t}$	$\partial_x, 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
4	ε	λ	δt	$\partial_x, \partial_t - \delta\partial_u$

Тут $g(t) = 1 \bmod G^\sim$; $\varepsilon, \delta, \lambda$ та ρ — довільні сталі, причому $\varepsilon\lambda \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$.

У випадку 4 $\delta = 0, 1 \bmod G^\sim$ та додатково $\lambda = -1 \bmod G^\sim$ якщо $\delta = 0$.

та перетворення τ : $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u + \frac{f(t)}{g(t)}$, що не належить до групи $G^\sim$. Перетворення $\tau^\sim$ відображає довільне рівняння з (1) у рівняння з цього ж класу з $g = 1$. Для того, щоб отримати групову класифікацію класу (Б.46) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, достатньо розглянути перетворення (Б.47) з $g = 1$. Тоді формули (Б.49), які поєднують довільні елементи в класах (Б.46) та (Б.48), набувають простого вигляду: $H = h$, $K = k$, $F = f_t$. Інтегруючи останнє звичайне диференціальне рівняння для різних значень F , що зустрічаються у таблиці Б.16, отримаємо такі вигляди $f = f(t)$:

1. $f = \bar{\delta} t^{\frac{\rho-2}{2}} + C$ ($\bar{\delta} = 2\delta/(\rho-2)$) при $\rho \neq 2$, інакше $f = \delta \ln t + C$;
2. $f = \bar{\delta} e^{\frac{1}{2}t} + C$ ($\bar{\delta} = 2\delta$);
3. $f = \delta t + C$.

Стала інтегрування $C = 0 \bmod G^\sim$. Останній крок — заміна змінної $\tilde{u} = u + f(t)$ в базисних операторах максимальної алгебри лівської інваріантності, наведених у таблиці Б.16. Результати — у таблиці Б.17.

Також наводимо повний список розширень лівської симетрії для всього класу (Б.46), де довільні елементи не спрощено точковими перетвореннями (таблиця Б.18).

Редукції та точні розв'язки. Класи рівнянь Бенджаміна–Бона–

Табл. Б.18: Групова класифікація класу (Б.46) без використання еквівалентності.

№	$h(t)$	$k(t)$	$f(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	$\mu_1(\varepsilon T + \kappa)^\rho$	$\mu_2 g(\varepsilon T + \kappa)^{\rho-1}$	$\mu_3 g(\varepsilon T + \kappa)^{\frac{\rho-2}{2}} + \mu_4 g$	$\partial_x, \frac{2}{g}(\varepsilon T + \kappa)\partial_t + \varepsilon \rho x \partial_x$ $+ \varepsilon(\rho - 2)(u + \mu_4)\partial_u$
2	$\mu_1(\varepsilon T + \kappa)^2$	$\mu_2 g(\varepsilon T + \kappa)$	$\mu_3 g \ln(\varepsilon T + \kappa) + \mu_4 g$	$\partial_x, \frac{1}{g}(\varepsilon T + \kappa)\partial_t + \varepsilon x \partial_x - \varepsilon \mu_3 \partial_u$
3	$\mu_1 \exp(\sigma T)$	$\mu_2 g \exp(\sigma T)$	$\mu_3 g \exp(\frac{1}{2}\sigma T) + \mu_4 g$	$\partial_x, \frac{2}{g}\partial_t + \sigma x \partial_x + \sigma(u + \mu_4)\partial_u$
4	μ_1	$\mu_2 g$	$\mu_3 g T + \mu_4 g$	$\partial_x, \frac{1}{g}\partial_t - \mu_3 \partial_u$

Тут g — довільна гладка функція, що не має нулів; $T = \int g(t) dt$; $\varepsilon = \pm 1$; $\mu_i, i = 1, \dots, 4$, σ, κ та ρ — довільні сталі, причому $\sigma \mu_1 \mu_2 \neq 0$.

Махоні–Бюргерса (Б.46) та (Б.48) — подібні відносно перетворень (Б.47). Якщо один з них має точні розв’язки для рівнянь (Б.48), то подібні розв’язки для рівнянь (Б.46) легко знайти, використовуючи (Б.47). Тому зручно виконати класифікацію лівських редукцій для класу (Б.48), де кількість нееквівалентних випадків розширень лівської симетрії менша.

Щоб виконати класифікацію лівських редукцій, потрібні оптимальні системи одновимірних підалгебр максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса (Б.48). Такі алгебри — щонайбільше двовимірні. Оптимальна система двовимірних алгебр Лі $\langle X_1, X_2 \rangle$ — це $\{\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle\}$ (якщо алгебра неабелева) або $\{\langle X_1 \rangle, \langle X_2 + \alpha X_1 \rangle\}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ (якщо алгебра абелева). У випадку 1 з $\rho \neq 0$ та у випадку 2 таблиці Б.16 маємо неабелеві алгебри; у випадку 1 з $\rho = 0$ та у випадку 3 — абелеві алгебри. Редукції за підалгеброю $\langle X_1 = \partial_x \rangle$ приводять до тривіальних сталих розв’язків. Отже, виконаємо лише редукції за другою підалгеброю. Для кожного випадку наведемо рівняння Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса, одновимірну підалгебру, побудований за цією підалгеброю анзац та відповідне редуковане звичайне дифе-

ренціальне рівняння.

Випадок $1_{\rho \neq 0}$:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \lambda t^{\rho-1} u_{xx} + \varepsilon t^{\rho} u_{xxt} &= \delta t^{\frac{\rho-4}{2}}, \\ \langle 2t\partial_t + \rho x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u \rangle, \quad u &= t^{\frac{\rho}{2}-1} \varphi(\omega), \quad \text{де } \omega = xt^{-\frac{\rho}{2}}, \\ \varepsilon \rho \omega \varphi''' + (\varepsilon(\rho+2) - 2\lambda) \varphi'' - 2\varphi \varphi' + \rho \omega \varphi' + (2-\rho) \varphi + 2\delta &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.50})$$

Це звичайне диференціальне рівняння має частковий точний розв'язок $\varphi = \omega + \frac{2\delta}{\rho}$, який дає «вироджений» розв'язок $u = \frac{x}{t} + \frac{2\delta}{\rho} t^{\frac{\rho}{2}-1}$ рівняння (Б.50) з $\rho \neq 0$.

Випадок $1_{\rho=0}$:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \lambda t^{-1} u_{xx} + \varepsilon u_{xxt} &= \delta t^{-2}, \\ \langle t\partial_t + \alpha \partial_x - u\partial_u \rangle, \quad u &= \frac{1}{t} \varphi(\omega), \quad \text{де } \omega = x - \alpha \ln t, \\ \varepsilon \alpha \varphi''' + (\varepsilon - \lambda) \varphi'' - \varphi \varphi' + \alpha \varphi' + \varphi + \delta &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.51})$$

При $\alpha = -\delta$ це звичайне диференціальне рівняння має частковий розв'язок $\varphi = \omega + c$, де c — довільна стала. Він приводить до «виродженого» розв'язку $u = \frac{1}{t}(x + \delta \ln t + c)$ рівняння (Б.51).

Випадок 2:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \lambda e^t u_{xx} + \varepsilon e^t u_{xxt} &= \delta e^{\frac{1}{2}t}, \\ \langle 2\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle, \quad u &= e^{\frac{t}{2}} \varphi(\omega), \quad \text{де } \omega = xe^{-\frac{t}{2}}, \\ \varepsilon \omega \varphi''' + (\varepsilon - 2\lambda) \varphi'' - 2\varphi \varphi' + \omega \varphi' - \varphi + 2\delta &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.52})$$

Випадок 3:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \lambda u_{xx} + \varepsilon u_{xxt} &= \delta, \\ \langle \partial_t + \alpha \partial_x \rangle, \quad u &= \varphi(\omega), \quad \text{де } \omega = x - \alpha t, \\ \varepsilon \alpha \varphi''' - \lambda \varphi'' - \varphi \varphi' + \alpha \varphi' + \delta &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.53})$$

З точністю до еквівалентності можна розглянути $\lambda = -1$. Ми знайшли точні розв'язки для випадку $\delta = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi &= -2 \operatorname{th} \omega, \quad \alpha = 0, \\ \varphi &= \pm \frac{1-12\varepsilon}{10\varepsilon} - \frac{12}{5} \operatorname{th} \omega \pm \frac{6}{5} \operatorname{th}^2 \omega, \quad \alpha = \pm \frac{1}{10\varepsilon}.\end{aligned}$$

Таким чином, рівняння $u_t + uu_x - u_{xx} + \varepsilon u_{xxt} = 0$ допускає точні розв'язки $u = -2 \operatorname{th} x$ та

$$u = \pm \frac{1-12\varepsilon}{10\varepsilon} - \frac{12}{5} \operatorname{th} \left(x \pm \frac{t}{10\varepsilon} \right) \pm \frac{6}{5} \operatorname{th}^2 \left(x \pm \frac{t}{10\varepsilon} \right).$$

Використовуючи метод відображення між класами, ми виконали повну групову класифікацію рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса (Б.46). Як побічний продукт цього підходу також отримано групову класифікацію пов'язаного класу рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргерса з джерелом (Б.48). Для зручності застосування результати наводимо двома способами: класифікаційний список, що містить лише нееквівалентні рівняння (таблиця Б.17) та список з їхнім найбільш загальним виглядом (таблиця Б.18).

Додаток В

Список публікацій і апробація результатів

Результати дисертації висвітлено в 30 наукових публікаціях. Основні результати опубліковано у наукових фахових виданнях України [1,3,11] і наукових періодичних виданнях інших держав [2,4–10,12–26], проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science. Результати дисертації додатково відображено у публікаціях [27–30], а також у 22 тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій.

1. Ванеєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, *Доповіді НАН України* (2019), № 5, 3–10.
2. Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A. and Sophocleous C., Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), no. 1, 264–275.
3. Ванеєва О.О., Точні розв’язки рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **16** (2019), № 1, 44–49.
4. Vaneeva O. and Pošta S., Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), no. 10, 101504, 12 pp.
5. Vaneeva O., Pošta S. and Sophocleous C., Enhanced group classification of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Lett.* **65** (2017), 19–25.

6. Vaneeva O., Karadzhov Yu. and Sophocleous C., Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, 349–360, Springer Proc. Math. Stat. **191**, Springer, Singapore, 2016.
7. Nesterenko M., Pošta S. and Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016), no. 11, 115203, 26 pp.
8. Vaneeva O., Kuriksha O. and Sophocleous C. Enhanced group classification of Gardner equations with time-dependent coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** (2015), no. 1–3, 1243–1251.
9. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group analysis of Benjamin–Bona–Mahony equations with time dependent coefficients, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012016, 12 pp.
10. Vaneeva O.O., Sophocleous C. and Leach P.G.L., Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems, *J. Engrg. Math.* **91** (2015), no. 1, 165–176.
11. Ванєєва О.О., Жалій О.Ю., Груповий аналіз класу рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, *Доповіді НАН України* (2014), № 10, 12–20.
12. Vaneeva O.O., Papanicolaou N.C., Christou M.A. and Sophocleous C., Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** (2014), no. 9, 3074–3085.
13. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 045201, 19 pp.
14. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of generalized fifth-order Korteweg–de Vries equations with time-dependent coefficients, *Lie Theory and its Application in Physics*, 311–321, Springer Proc. Math. Stat. **111**, Springer, Tokyo, 2014.

15. Kuriksha O., Pošta S. and Vaneeva O., Group analysis of variable coefficient generalized fifth-order KdV equations, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **11** (2014), no. 7, 990–995.
16. Charalambous K., Vaneeva O. and Sophocleous C., Group classification of variable coefficient $K(m, n)$ equations, *J. Geom. Symmetry. Phys.* **33** (2014), 79–90.
17. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89** (2014), 038003, 9 pp.
18. Pocheketa O.A., Popovych R.O. and Vaneeva O.O., Group classification and exact solutions of variable-coefficient generalized Burgers equations with linear damping, *Appl. Math. Comput.* **243** (2014), 232–244.
19. Vaneeva O., Group classification of variable coefficient KdV-like equations, *Lie Theory and its Applications in Physics*, 451–459, Springer Proc. Math. Stat. **36**, Springer, Tokyo, 2013.
20. Vaneeva O. and Karadzhov Yu., Lie symmetries of (2+1)-dimensional nonlinear Dirac equations, *Sveske fizičkih nauka (SFIN)* **XXVI** (2013), no. A1, 349–359.
21. Vaneeva O., Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** (2012), no. 2, 611–618.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), 225–242.
23. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with an exponential source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2010)*, 207–219, University of Cyprus, Nicosia, 2011.
24. Popovych R.O. and Vaneeva O.O., More common errors in finding exact

- solutions of nonlinear differential equations. I, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), no. 12, 3887–3899.
25. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. and Vaneeva O.O., Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations, *Phys. A* **388** (2009), no. 4, 343–356.
 26. Vaneeva O., Group classification via mapping between classes: an example of semilinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity, *Sveske fizičkih nauka (SFIN)* **XXII** (2009), no. A1, 463–471.
 27. Vaneeva O.O., Bihlo A. and Popovych R.O., Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **91** (2020), 105419, 28 pp.
 28. Ванєєва О.О., Класифікація диференціальних рівнянь за симетрійними властивостями, *Вісник НАН України* (2017), № 9, 33–40.
 29. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2012)*, 225–237, University of Cyprus, Nicosia, 2013.
 30. Vaneeva O.O., Popovych R.O. and Sophocleous C., Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems (Protaras, 2008)*, 191–209, University of Cyprus, Nicosia, 2009.

Результати роботи доповідались на таких конференціях і семінарах:

- Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (2019, September 24–26, Kyiv, Ukraine);
- X Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics (2019, September 9–14, Belgrade, Serbia);

- XIII International Workshop “Lie Theory and Its Applications in Physics” (2019, June 17–23, Varna, Bulgaria);
- Міжнародна конференція молодих математиків (2019, 6–8 червня, Київ);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2018, 21–24 грудня, Київ);
- Міжнародна конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (2018, 21–22 червня, Київ);
- Ninth Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2018, June 10–14, Larnaca, Cyprus);
- Міжнародна конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” (2018, 22–25 травня, Львів);
- Міжнародна конференція молодих математиків (2017, 7–10 червня, Київ);
- Eighth Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2016, June 12–17, Larnaca, Cyprus);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2015, 27–29 грудня, Київ);
- XI International Workshop “Lie Theory and Its Applications in Physics” (2015, June 15–21, Varna, Bulgaria);
- Міжнародна конференція молодих математиків (2015, 3–6 червня, Київ);
- Конференція молодих учених “Підстригачівські читання — 2015” (2015, 26–28 травня, Львів);
- Seventh Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2014, June 15–19, Larnaca, Cyprus);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2013, 21–24 грудня, Київ);
- Sixth Petrov International Symposium on High Energy Physics, Cosmology and Gravity (2013, September 5–8, Kyiv, Ukraine);

- International Workshop “Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS’2013” (2013, July 29 – August 3, Dubna, Russia);
- X International Workshop “Lie Theory and Its Applications in Physics” (2013, June 17–23, Varna, Bulgaria);
- Seventh Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics (2012, September 9–19, Belgrade, Serbia);
- XVII Geometrical Seminar (2012, September 3–8, Zlatibor, Serbia);
- Sixth Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (2012, June 17–21, Protaras, Cyprus);
- International Workshop “Young Women in PDEs” (2012, May 10–12, Bonn, Germany);
- Міжнародний семінар “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (2011, 18–19 грудня, Київ);
- IX International Workshop “Lie Theory and Its Applications in Physics” (2011, June 20–26, Varna, Bulgaria);
- наукові семінари відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 2008–2020);
- засідання Вченої ради Інституту математики НАН України (2015, 2017, 2018);
- засідання Відділення математики НАН України (2015);
- засідання Президії НАН України (2017);
- науковий семінар кафедри математики і статистики університету Саскачевана (Саскатун, Канада, 2010);
- науковий семінар кафедри математики Чеського технічного університету в Празі (Прага, Чехія, 2013);
- науковий семінар кафедри математики і статистики університету Кіпру (Нікосія, Кіпр, 2013).