

**Топологія відображень
маловимірних многовидів**

Інститут математики
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Збірник праць
Інституту математики НАН України
Т. 12 № 6

Головний редактор: *А. М. Самойленко*

Науково-редакційна рада: *Ю. М. Березанський,
М. Л. Горбачук, А. А. Дороговцев, Ю. А. Дрозд,
Ю. Б. Зелінський, В. С. Королюк, А. Н. Кочубей,
І. О. Луковський, В. Л. Макаров, А. Г. Нікітін,
В. В. Новицький, М. В. Працьовитий, О. А. Ребенко,
А. С. Романюк, Ю. С. Самойленко, С. Г. Солодкий,
В. В. Шарко, О. М. Шарковський*

Інститут математики
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

Топологія відображень
маловимірних многовидів

Київ – 2015

УДК 539.12 + 515.146.3 + 515.162.2 + 517.57 + 517.27

Топологія відображень маловимірних многовидів / Відп. ред. С. І. Максименко // Зб. Ін-ту математики НАН України, 2015. — Т. 12, № 6. — 224 с.

ISSN 1815–2910

В збірнику представлено нові результати про топологічні властивості функцій, векторних полів та відображень, визначених на многовидах малих розмірностей. Вони доповідались на семінарі відділу топології Інституту математики НАН України та на міжнародних конференціях.

Для спеціалістів, що працюють в галузі топології та теорії функцій, а також для студентів та аспірантів.

Видавнича група збірника:

доктор фіз.-мат. наук С. І. Максименко (відп. ред.),
кандидат фіз.-мат. наук Є. О. Полулях,
Б. Г. Фещенко

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. Б. Зелінський,
доктор фіз.-мат. наук, професор А. П. Петравчук

Свідоцтво про державну реєстрацію — серія КВ № 8459,
видане 19 лютого 2004 р.

© Інститут математики НАН України, 2015

Зміст

В. В. Шарко, Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока Про топологічну еквівалентність псевдо-гармонічних функцій загального положення на площині	7-47
И. Ю. Власенко, Д. А. Гольцов О классах топологической сопряженности квадратичных однородных внутренних полиномиальных отображений	48-67
И. Ю. Власенко, Т. В. Рыбалкина Примеры внутренних отображений цилиндра с нейтрально неблуждающими точками, не являющимися нейтрально рекуррентными	68-88
К. Eftekharinasab Transversality and Lipschitz-Fredholm maps	89-104
О. А. Кадубовський Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях	105-145
С. І. Максименко, О. В. Марункевич Топологічна стійкість функцій відносно усереднень за мірами з кусково постійними щільностями	146-163
О. О. Пришляк, Д. М. Скочко Топологія потоків Морса з нерухомими точками на межі повного кренделя	164-182
Н. А. Хмельницький О цепной эквивалентности проективных скрещенных цепных комплексов	183-203

Б. Г. Фещенко

Деформації гладких функцій на 2-торі, у яких граф
Кронрода-Ріба є деревом 204-219

О. М. Клименко, І. О. Блажко,

Д. О. Кублицький, Д. О. Скидан, С. М. Ящук

Програма для зведення матриці до нормальної
форми Арнольда відносно гладких перетворень
подібності 220-223

УДК 515.162, 517.51, 517.27

В. В. Шарко, **Є. О. Полулях**

Институт математики НАН України, Київ
polulyah@imath.kiev.ua

Ю. Ю. Сорока

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
soroکا_yulya@ukr.net

Про топологічну еквівалентність псевдо-гармонічних функцій загального положення на площині

Topological classification of functions in the plane is considered. Using a generalization of the Cronrod-Reeb graph we give necessary and sufficient conditions when two pseudo-harmonic functions which have finite number of singular points and comply with an additional condition are topologically equivalent.

Розглянуто питання топологічної класифікації функцій на площині. Використовуючи узагальнення графу Кронрода-Ріба дано необхідні і достатні умови, коли дві псевдо-гармонічні функції загального положення, які мають скінчену кількість сингулярних точок і відповідають певній додатковій умові, будуть топологічно еквівалентними.

1. Вступ

У роботі досліджується питання розрізнення неперервних функцій на площині з точністю до орієнтованої топологічної еквівалентності.

У такій загальній постановці ця задача дуже складна, тому ми обмежуємось класом функцій, множини рівня яких локально мають просту будову — псевдо-гармонічними функціями.

© **В. В. Шарко**, **Є. О. Полулях**, **Ю. Ю. Сорока**, 2015

Нагадаємо, що функція на площині називається *псевдо-гармонічною*, якщо локально в околі кожної точки області визначення вона топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ у деякому околі початку координат на комплексній площині ($n \in \mathbb{N}$ залежить від точки).

Ми розглядаємо псевдо-гармонічні функції загального положення (різні сингулярні точки знаходяться на різних множинах рівня), які до того ж мають скінчену кількість сингулярних точок.

У якості основи для побудови інваріанту, який розрізняє такі функції, ми беремо так званий граф Кронрода-Ріба функції $\Gamma_{K-R}(f)$ і наділяємо його додатковою комбінаторною структурою.

Відомо, що на компактних поверхнях графи Кронрода-Ріба функцій з простою локальною будовою (наприклад, функцій Морса, або більш загально — гладких функцій з ізольованими особливостями) є топологічними графами. Ситуація кардинально міняється при переході до некомпактних поверхонь — відомі приклади гладких функцій без особливостей на площині, для яких топологічний простір $\Gamma_{K-R}(f)$ навіть не є Хаусдорфовим (див. [1]).

У зв'язку з цим нам приходится ще більше обмежувати клас функцій, який ми розглядаємо і вводити додаткову технічну умову, яка гарантує, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є “майже топологічним графом” (ми називаємо такі об'єкти графами з черешками).

Не дивлячись на такі значні обмеження, ми отримуємо доволі широкий і цікавий клас функцій. Зупинимось на цьому докладніше.

Нехай M^2 — двовимірна поверхня, f — гладка функція на ній з ізольованими критичними точками.

Якщо $x \in M^2$ — регулярна точка f , то за теоремою про ранг (див. [2]) існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в \mathbb{R}^2 , який відображає компоненти перетинів множин рівня f с U_x у множини рівня координатної проекції $\operatorname{pr}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{pr}_1: (x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Відома така теорема (див. [3,4]): для кожної ізольованої критичної точки x_0 (окрім локальних екстремумів) функції $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.

Отже, кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, яка не має локальних екстремумів і всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною.

Скажемо декілька слів про структуру роботи і її основний результат.

У розділах 2 і 3 ми визначаємо клас функцій, який ми вивчаємо, і означаємо поняття графа Кронрода-Ріба.

Додаткова структура на графі Кронрода-Ріба включає орієнтацію його ребер і частковий порядок на множині вершин, які породжені напрямком зростання функції f . Цим поняттям присвячений розділ 4.

Іншою складовою додаткової структури на $\Gamma_{K-R}(f)$ є спіні у вершинах цього графа. Спіном у вершині називається вибраний певним чином *цикл* ребер, які їй інцидентні. Означенню цих понять і дослідженню властивостей спіна присвячені розділи 5–7.

У розділі 8 означені поняття *навантаженого* і *слабо навантаженого* графів Кронрода-Ріба, а також поняття їх *еквівалентності*. Крім того ми означаємо поняття *орієнтованої пошарової еквівалентності* функцій f і g , більш слабке, ніж їх *орієнтована топологічна еквівалентність*.

Нарешті, розділи 9 та 10 присвячені доведенню наступного основного результату даної роботи.

Теорема 1.1. *Нехай $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функції загального положення, що задовольняють умови \mathfrak{F} .*

Функції f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

Функції f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

Далі ми будемо позначати через \bar{A} і $\text{Fr } A$ замикання і межу множини A , відповідно.

2. УМОВИ \mathfrak{S} І ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Нехай V_1, V_2 — області на площині. Нагадаємо, що неперервні функції $g_1: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ та $g_2: V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо для деяких гомеоморфізмів $h: V_1 \rightarrow V_2$ та $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ виконується рівність $h' \circ g_1 = g_2 \circ h$. Функції g_1 та g_2 *орієнтовано топологічно еквівалентні*, якщо додатково гомеоморфізми h та h' зберігають орієнтацію.

Нехай $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна функція, яка задовольняє наступним умовам, які позначимо \mathfrak{S} .

а) Для кожного $x \in \mathbb{R}^2$ в околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\text{Re } z^n$, $n \in \mathbb{N}$, в околі початку координат (якщо $n = 1$, тоді точку x називатимемо *регулярною* точкою; якщо $n > 1$, тоді x називатимемо *сингулярною* точкою).

б) Число сингулярних точок функції f є скінченним.

в) Нехай для $a \in \mathbb{R}$, точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ належать різним компонентам множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, такі, що для кожного $b \in \mathbb{R}$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $(F_b \cap U_1 = \emptyset) \vee (F_b \cap U_2 = \emptyset)$.

Означення 2.1. Скажемо, що $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є *функцією загального положення*, якщо на кожній множині рівня міститься не більше однієї сингулярної точки.

3. ПРОСТІР КРОНРОДА-РІБА ФУНКЦІЇ f

Розглянемо розбиття площини, елементами якого є компоненти множин рівня f . Елементи розбиття, які містять сингулярні точки, назвемо *сингулярними*. Всі інші компоненти множин рівня будемо називати *регулярними*.

Фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f)$ площини по вказаному розбиттю називається *простором Кронрода-Ріба функції f* . Позначимо через $\pi_f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$ відображення проєкції.

З того, що f відображає елементи розбиття на компоненти своїх множин рівня в точки \mathbb{R} , випливає (див. [5]), що неперервне фактор-відображення $f_{K-R}: \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, таке, що $f = f_{K-R} \circ \pi_f$.

Нагадаємо деякі означення і конструкції (див. [1]).

Скажемо, що граф *скінчений*, якщо множини його вершин і ребер є скінченими. Граф *локально-скінчений*, якщо кожна його вершина інцидентна скінченій кількості ребер. Для локально-скінченого графа кількість ребер, яким інцидентна вершина, називається *порядком вершини*. *Петлею* є ребро графа, кінці котрого збігаються. *Листками* називаються вершини порядку один.

Нехай G є локально-скінчений (не обов'язково скінчений) граф без петель. Розглянемо G як одновимірний предсимпліціальний комплекс, нульвимірними симплексами котрого є вершини, а одновимірними є ребра (див. [6]). Відмітимо, що граф, який не містить кратних ребер, є симпліціальним комплексом. Розглянемо абстрактний поліедр $|G|$, що відповідає цьому комплексу. Топологія на $|G|$ породжується покриттям, яке складається з замкнених симплексів комплексу G (підмножина $A \subset |G|$ є замкненою тоді й тільки тоді, коли її перетин з кожним ребром G є замкненим). Далі говорячи про топологію на графі G ми будемо мати на увазі топологічний простір $|G|$.

Граф G , на якому задана описана вище структура топологічного простору, називається *топологічним графом*. Далі ми будемо розглядати тільки такі графи.

Замкненим ребром G будемо називати відповідний замкнений одновимірний симплекс, а *відкритим ребром* — відкритий симплекс (ребро без вершин, які є його кінцями).

Нехай V_0 є підмножиною множини листків V_l графа G (випадок $V_0 = \emptyset$ ми не виключаємо).

Нехай $e \subset G$ — (замкнене) ребро G , інцидентне деякому листку з V_0 . Множину $e \setminus V_0$ назвемо *черешком*. Простір $G_0 = G \setminus V_0$ називається *топологічним графом з черешками*. Позначимо через Σ_f і K_f множину сингулярних точок і об'єднання сингулярних компонент множин рівня f . Число $a \in f(\mathbb{R}^2)$ називається *сингулярним значенням* функції f , якщо $f^{-1}(a) \cap \Sigma_f \neq \emptyset$.

Зауваження 3.1. Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня f , яка містить x . Оскільки множина $\overline{F_x} \subset f^{-1}(f(x))$ зв'язна (див. [7]), то $\overline{F_x} = F_x$.

З умов \mathfrak{S} слідує, що множина K_f є незв'язним об'єднанням скінченної кількості замкнених сингулярних компонент множин рівня f . Тому множина $K_f \setminus F_x$ замкнена і x має окіл, який не перетинається з цією множиною.

З пунктів а)-в) умови \mathfrak{S} і з [1, теорема 1], випливає таке твердження.

Теорема 3.2. Простір Кронрода-Ріба функції $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, що задовольняє умову \mathfrak{S} є графом з черешками, множина вершин якого збігається з множиною $\pi_f(K_f)$.

Замкнені ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ є образами замикання компонент множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, черешки є образами замикання компонент $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, що мають зв'язну межу.

Зауваження 3.3. За означенням, граф $\Gamma_{K-R}(f)$ — локально-скінченний, а тому з попереднього зауваження і теореми 3.2 слідує, що цей граф скінченний, коли f відповідає умовам \mathfrak{S} .

4. ОРІЄНТАЦІЯ РЕБЕР ГРАФА КРОНРОДА-РІБА І ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ НА ЙОГО ВЕРШИНАХ, ЩО ІНДУКОВАНІ f

Нехай f є функцією загального положення. Помітимо, що на ребрах графу $\Gamma_{K-R}(f)$ функція f_{K-R} є строго монотонною.

Дійсно, у протилежному випадку на деякому відкритому ребрі e функція f_{K-R} мала б (нестрогий) локальний екстремум. Внаслідок цього обмеження $f|_{\pi^{-1}(e)}$ мало б у деякій точці x

відкритої множини $\pi^{-1}(e)$ локальний екстремум. Отже, f теж мала б локальний екстремум у точці x . А це неможливо, оскільки за умовою \mathfrak{S} у деякому околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ в околі початку координат для певного $n \in \mathbb{N}$. А точка 0 очевидно не є локальним екстремумом $\operatorname{Re} z^n$ ні при якому $n \in \mathbb{N}$.

Отже, на кожному ребрі графу $\Gamma_{K-R}(f)$ визначений напрямок зростання f_{K-R} і функція f індукує орієнтацію на $\Gamma_{K-R}(f)$.

На множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ можна ввести декілька різних відношень строгого часткового порядку, пов'язаних з f .

Означимо порядок $P_1(f)$, поклавши $v_1 < v_2$ тоді і лише тоді, коли $f_{K-R}(v_1) < f_{K-R}(v_2)$, де v_1, v_2 – вершини на графі. З означення 2.1 слідує, що $f_{K-R}(v_1) \neq f_{K-R}(v_2)$ при $v_1 \neq v_2$. Тому для функцій загального положення порядок $P_1(f)$ є лінійним.

Зрозуміло, що порядок $P_1(f)$ узгоджений з орієнтацією на $\Gamma_{K-R}(f)$ у наступному сенсі. Якщо вершини v_1 та v_2 є відповідно початком і кінцем орієнтованого ребра e , то $v_1 < v_2$.

Частковий порядок $P_2(f)$ на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ визначимо наступним чином. Скажемо, що вершина v_1 передує v_2 , якщо існує орієнтований шлях, для якого вершина v_1 є початком, а v_2 – кінцем.

Відмітимо, що порядок $P_2(f)$ є слабшим за $P_1(f)$, оскільки $\Gamma_{K-R}(f)$ може містити вершини, які не можна з'єднати за допомогою орієнтованого шляху.

Нехай f є функцією загального положення, $\Gamma_{K-R}(f)$ – її простір Кронрода-Ріба. З огляду на теорему 3.2 ми будемо називати $\Gamma_{K-R}(f)$ *орієнтованим графом з черешками Кронрода-Ріба* функції f , або скорочено *графом Кронрода-Ріба* функції f .

5. Означення циклу

Для того, щоб означити додаткову структуру на графах Кронрода-Ріба, нам буде потрібне поняття циклу елементів множини.

Отже, нехай A – деяка множина, A^∞ – множина всіх скінченних послідовностей елементів A . Нехай \mathfrak{h} – розбиття множини

A^∞ , породжене відношенням

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle \sim \langle a_2, \dots, a_r, a_1 \rangle, \quad \langle a_1, \dots, a_r \rangle \in A^\infty.$$

Елементи фактор-множини $\hat{A} = A/\mathfrak{h}$ будемо називати *циклами* на A .

Нехай $p: A \rightarrow \hat{A}$ — проекція. Позначимо

$$(a_1, \dots, a_r) = p(\langle a_1, \dots, a_r \rangle),$$

$\langle a_1, \dots, a_r \rangle \in A^\infty$.

Якщо $p(\langle b_1, \dots, b_r \rangle) = (a_1, \dots, a_r)$, назвемо послідовність $\langle b_1, \dots, b_r \rangle$ *представником* циклу (a_1, \dots, a_r) .

Елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ послідовності $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ будемо називати *сусідніми*, $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

Назвемо *сусідніми* елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ циклу (a_1, \dots, a_r) , $i \in \{1, \dots, r-1\}$, а також елементи a_r та a_1 .

6. СПІН

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$ є сингулярною точкою функції f загального положення. Нехай $F_x \ni x$ — відповідна компонента сингулярної множини рівня f . Зафіксуємо окіл $U \subset F_x \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f)$ точки x (див. зауваження 3.1) та гомеоморфізми $h: U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$, $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які зберігають орієнтацію і такі що виконуються рівності $h(x) = 0$ та $h' \circ f = \operatorname{Re} z^n \circ h$ для деякого $n \geq 2$. Нехай $V = h(U)$.

Позначимо

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^n = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

З означень слідує, що $h(f^{-1}(f(x))) = Z_n \cap h(U)$.

Існує $\varepsilon > 0$, для якого $U_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \subset V$. Множина $U_\varepsilon(0) \setminus Z_n$ розпадається на $2n$ областей V_1, \dots, V_{2n} . Прообраз $\hat{V}_s = h^{-1}(V_s)$ кожної з них є зв'язною підмножиною доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ в силу вибору U і h . Тому згідно з теоремою 3.2 для кожного $s = 1, \dots, 2n$ існує ребро e_s графа $\Gamma_{K-R}(f)$, таке, що $\hat{V}_s \subset \pi^{-1}(e_s)$.

Отже, послідовності областей $\langle V_1, \dots, V_{2n} \rangle$ відповідає послідовність $\langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle$ ребер графа Кронрода-Ріба, а тому і цикл ребер (e_1, \dots, e_{2n}) .

Означення 6.1. *Нехай індекси областей V_1, \dots, V_{2n} збільшуються від 1 до $2n$ при обході навколо початку координат у додатному напрямі, який визначається орієнтацією площини \mathbb{C} .*

Назвемо відповідний їм цикл *спіном* у вершині $v = \pi_f(x)$ графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і позначимо його $\langle v$.

Твердження 6.2. *Означення спіна коректне.*

Доведення зводиться до легкої безпосередньої перевірки.

Означення 6.3 (див. [8]). *Нехай у деякому околі сингулярної точки $x \in \mathbb{R}^2$ функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$, в околі початку координат. Число $n - 1$ називається *кратністю сингулярної точки x* .*

7. ВЛАСТИВОСТІ СПІНА

Твердження 7.1. *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умови \mathfrak{S} . Тоді кожна сингулярна компонента множини рівня функції f є об'єднанням сингулярної точки f кратності $n - 1$, ($n > 1$ — деяке число, яке залежить від компоненти), і $2n$ променів, які виходять з сингулярної точки і прямують до нескінченності.*

Доведення. Нехай F — сингулярна компонента зв'язності множини рівня f . З означення функції загального положення слідує, що існує єдина сингулярна точка $x_0 \in F$.

Розглянемо множину $F_0 = F \setminus \{x_0\}$. Нехай H — компонента зв'язності цієї множини.

Перевіримо, що $x_0 \in \overline{H}$. За означенням H є замкненою підмножиною простору F_0 в індукованій з \mathbb{R}^2 топології. Оскільки F_0 не містить інших сингулярних точок, окрім x_0 , то цей

простір є локально зв'язним (з умов \mathfrak{S} слідує, що в околі кожної точки F_0 локально гомеоморфний інтервалу) і H є його відкритою підмножиною. Нехай $x_0 \notin \overline{H}$. З одного боку, $H = \overline{H} \cap F_0 = \overline{H} \cap F$ і H замкнена в F . З іншого боку, множина F_0 відкрита в F і H відкрита в F_0 за припущенням. Тому множина H відкрита в F . Отже, H є відкрито-замкненою в F , що неможливо, оскільки за означенням F є зв'язною множиною і H — її власна підмножина.

Отже, для кожної компоненти зв'язності H множини F_0 точка x_0 міститься в її замиканні.

Згідно з лемою 1 з [1], H є або вкладеним у \mathbb{R}^2 відкритим інтервалом, або колом. Якщо H гомеоморфна колу, то H є компактом і $\overline{H} = H \ni x_0$. Ми щойно довели, що таке неможливо. Отже, кожна компонента зв'язності H множини F_0 є гомеоморфним образом інтервалу.

Згідно з [1, зауваження 3 і лема 1] має виконуватися включення $\overline{H} \subset H \cup \{x_0\}$. По доведеному $x_0 \in \overline{H}$, отже $\overline{H} = H \cup \{x_0\}$.

Нехай $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вкладення, таке, що $\alpha(\mathbb{R}) = H$. Розглянемо (див. [1]) множини

$$L' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(-\infty, -\tau)}, \quad L'' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(\tau, +\infty)}.$$

Лема 3 з [1] стверджує, що кожна з цих множин або порожня, або збігається з $\{x_0\}$.

Випадок $L' = L'' = \emptyset$ неможливий. Дійсно, з одного боку, $H \cup L' \cup L'' = \overline{H}$ згідно [1]. З іншого боку, ми встановили, що $x_0 \in \overline{H} \setminus H$.

Припустимо, що $L' = L'' = \{x_0\}$. Тоді, як легко бачити, множина \overline{H} гомеоморфна колу. За теоремою Жордана, див. [7], це коло є межею відкритого диску W . Нехай $D = \overline{W}$. Оскільки D є компактом, то функція $f|_D$ набуває у деяких точках мінімальне і максимальне значення m та M , відповідно. З умов \mathfrak{S} слідує, що функція f не є постійною на відкритій множині W , тому $m \neq M$ і одне з цих двох значень відрізняється від $f(x_0)$.

Нехай $m \neq f(x_0)$. Оскільки $\overline{H} \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$, то існує точка $x \in W$, така, що $f(x) = m$. Тоді, очевидно, x є локальним мінімумом функції f . А це суперечить умовам \mathfrak{S} .

Отже, одна з множин L' , L'' порожня, а інша збігається з $\{x_0\}$. Внаслідок цього множина H є променем, який виходить з т. x_0 і прямує до нескінченності.

Нехай $n - 1$ — кратність сингулярної точки x_0 . Тоді у деякому околі U точки x_0 функція f топологічно еквівалентна до функції $g(z) = \operatorname{Re} z^n$ в околі нуля. Нехай $h: U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ та $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі гомеоморфізми, що $h(x_0) = 0$ та $h' \circ f = g \circ h$. Зменшуючи за необхідності окіл U , ми можемо вважати, що

$$h(U) = U_a(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\}$$

для деякого $a > 0$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $h(U) = U_1(0)$.

Розглянемо множину

$$F_0 \cap U = (F \cap U) \setminus \{x_0\} = h^{-1}((Z_n \cap U_1(0)) \setminus \{0\}) .$$

Очевидно, вона має $2n$ компонент зв'язності.

Нехай знову H є компонентою зв'язності множини F_0 . Так як $x_0 \in \overline{H}$, то H перетинається принаймні з однією компонентою зв'язності множини $F_0 \cap U$. Припустимо, що H перетинається з двома різними компонентами цієї множини у точках x' та x'' , відповідно.

З вибору околу U слідує, що множина $F \cap U$ лінійно зв'язна, тому існує дуга $R_0 \subset F \cap U$ з кінцями у точках x' і x'' . Зрозуміло, що $x_0 \in R_0$.

З іншого боку, існує дуга $R_1 \subset H$, яка з'єднує точки x' і x'' . Очевидно, $x_0 \notin R_1$. Легко бачити, що разом дуги R_0 і R_1 утворюють коло $S \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$. Як було показано вище, у внутрішності диску, межею якого є S , має міститись локальний екстремум функції f . Але це суперечить умовам \mathfrak{S} .

Зрозуміло, що кожна компонента множини $F_0 \cap U$ має міститися у деякій компоненті більшої множини F_0 . Отже $H \cap U$ —

компонента зв'язності множини $F_0 \cap U$ і F_0 має рівно $2n$ компонент. \square

Наслідок 7.2. *Нехай x — сингулярна точка f , F_x — сингулярна компонента множини рівня f , яка містить x , Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.*

Якщо $\overline{Q} \cap F_x \neq \emptyset$, то $x \in \overline{Q}$.

Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Якщо $\overline{Q} \cap H \neq \emptyset$, то $H \subset \overline{Q}$.

Доведення. Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. З твердження 7.1 слідує, що $x \in \overline{H}$. Отже, перше твердження наслідку слідує з другого.

Нехай $x' \in \overline{Q} \cap H$. Візьмемо деяке $x'' \in H$. Оскільки множина H гомеоморфна інтервалу внаслідок твердження 7.1, то в ній існує підмножина R , яка гомеоморфна відріzkу і містить x' та x'' . Користуючись компактністю множини R із зауваження 3.1 легко вивести, що існує окіл U множини R , для якого виконується співвідношення $U \cap K_f \subset H$.

З твердження 7.1 випливає, що H містить лише регулярні точки f , тому до R можна застосувати твердження 2 з [1].

Отже, існують такий окіл N множини R і такий гомеоморфізм $h: \overline{N} \rightarrow [-1, 1]^2$, що $h(\overline{N} \cap F_x) = \{0\} \times [-1, 1]$. Зменшуючи окіл N , можна вважати, що $\overline{N} \subset U$ і $h(\overline{N} \cap K_f) = \{0\} \times [-1, 1]$.

Розглянемо множини

$$W_1 = (-1, 0) \times (-1, 1), \quad W_2 = (0, 1) \times (-1, 1),$$

а також їх прообрази $V_i = h^{-1}(W_i)$, $i = 1, 2$.

Зрозуміло, що множини V_1 і V_2 зв'язні. Також за побудовою $N \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) = V_1 \cup V_2$. Так як $x' \in N \cap \overline{Q}$, тому $N \cap Q \neq \emptyset$. Оскільки $Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, то $Q \cap (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$.

Нехай $Q \cap V_1 \neq \emptyset$. Множина $V_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$ зв'язна, а Q є компонентою зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ тому $V_1 \subset Q$. Зрозуміло, що $x'' \in R \subset \overline{V_1} \subset \overline{Q}$.

Аналогічно, якщо $Q \cap V_2 \neq \emptyset$, то $x'' \in \overline{V_2} \subset \overline{Q}$.

Остаточно, $H \subset \overline{Q}$ внаслідок довільності у виборі $x'' \in H$.
Наслідок доведено. \square

Твердження 7.3. *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умови \mathfrak{S} . Нехай сингулярна компонента F її множини рівня містить сингулярну точку x_0 кратності $n-1$ для деякого $n > 1$.*

Тоді множині F в $\Gamma_{K-R}(f)$ відповідає вершина, якій інцидентні рівно $2n$ ребер, $n > 1$. Причому для n з цих ребер вершина є початком, для інших n ребер — кінцем.

Доведення. Нехай U — окіл т. x_0 , в якому f топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ в деякому околі 0 . Нехай також $h: U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загальності міркувань (див. зауваження 3.1), будемо вважати, що $U \cap K_f \subset F$ і $h(U) \supset \overline{U_1(0)}$. Покладемо $D = h^{-1}(\overline{U_1(0)})$.

Позначимо через V_1, \dots, V_{2n} компоненти зв'язності множини $U_1(0) \setminus h(F) = U_1(0) \setminus Z_n$. Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. Зрозуміло, що всі W_i зв'язні, лежать у $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і містять x_0 у межі. Також з властивостей $\operatorname{Re} z^n$ слідує, що для половини індексів виконується співвідношення $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$, а для іншої половини $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$.

Нехай Q_i — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, для якої $W_i \subset Q_i$. З теореми 3.2 та з монотонності f на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$ слідує, що вершина $v = \pi_f(F)$ є початком ребра $e_i = \pi_f(Q_i)$, якщо $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$. Аналогічно v є кінцем e_i , якщо $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$.

Наслідок 7.2 стверджує, що для кожної компоненти зв'язності Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з множиною F , виконується співвідношення $x_0 \in \overline{Q}$. Оскільки $U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) \subset \bigcup_{i=1}^{2n} Q_i$, то Q збігається з однією з множин Q_1, \dots, Q_{2n} . Отже, вершині v графа Кронрода-Ріба функції f інцидентно не більше, ніж $2n$ ребер.

Для завершення доведення нам залишається перевірити, що $Q_i \neq Q_j$ при $i \neq j$.

Нехай це не так і $W_i \cup W_j \subset Q_i$ при деяких $i \neq j$.

Зафіксуємо $x_i \in W_i$, $x_j \in W_j$, і з'єднаємо їх у Q_i простою неперервною кривою $\gamma: [0, 1] \rightarrow Q_i \subset \mathbb{R}^2$. Це можливо, тому що відкрита зв'язна підмножина Q_i площини є лінійно зв'язною. Відкритість Q_i слідує з наступних міркувань. Множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ відкрита в силу зауваження 3.1, тому всі її компоненти зв'язності теж відкриті, оскільки простір \mathbb{R}^2 є локально-зв'язним (див. [7]).

Нехай $x_i = \gamma(0)$, $x_j = \gamma(1)$. Позначимо

$$t_i = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in W_i\},$$

$$t_j = \inf\{t \in [t_i, 1] \mid \gamma(t) \in W_j\}.$$

За побудовою $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \subset K_f$, тому $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \cap Q_i = \emptyset$ і $t_i < t_j$. Позначимо $y_i = \gamma(t_i)$, $y_j = \gamma(t_j)$.

Не обмежуючи загальність міркувань, можемо вважати, що $\gamma(t) \notin D$ при $t \in (t_i, t_j)$. Дійсно, якщо $\gamma(\tau) \in D$ для деякого $\tau \in (t_i, t_j)$, то знайдеться $k \in \{1, \dots, 2n\}$, таке, що $\gamma(\tau) \in \overline{W_k}$. Оскільки $\gamma(\tau) \in \overline{W_k} \cap Q_i$, то з відкритості множини Q_i слідує, що $W_k \cap Q_i \neq \emptyset$, внаслідок чого $W_k \subset Q_i$. За побудовою $k \notin \{i, j\}$, і замість пари областей $W_i \cup W_j \subset Q_i$ можемо розглянути $W_i \cup W_k \subset Q_i$.

Нехай $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_i + (t_j - t_i)t)$, $t \in [0, 1]$. За побудовою $\tilde{\gamma}$ — проста неперервна крива, $\tilde{\gamma}(0) = y_i$, $\tilde{\gamma}(1) = y_j$ і $\tilde{\gamma}(t) \notin D$ при всіх $t \in (0, 1)$. Нехай також γ_i і γ_j — прямолінійні відрізки, що з'єднують в $U_1(0)$ точку 0 з $h(y_i)$ та $h(y_j)$, відповідно. Покладемо

$$\tilde{\gamma}_i = h^{-1} \circ \gamma_i, \quad \tilde{\gamma}_j = h^{-1} \circ \gamma_j.$$

Проходячи послідовно криві $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\gamma}$ та $\tilde{\gamma}_j$, отримаємо просту замкнену криву μ , яка проходить через x_0 і лежить у Q_i за виключенням цієї точки. Нехай E — відкритий диск, межею якого є μ . Позначимо

$$S = \text{Fr}(U_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \tilde{S} = h^{-1}(S) = \text{Fr } D.$$

Коло \tilde{S} розбивається точками y_i та y_j на дві дуги S' та S'' . Оскільки $x_0 \in \mu \cap \text{Int } D \neq \emptyset$ і $\tilde{\gamma}(1/2) \in \mu \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset$ за побудовою, то одна з цих дуг лежить в E , інша не перетинає E .

Нехай $S' \subset E$. Кінцями цієї дуги є точки $y_i \in \overline{W}_i \cap Q_i$ та $y_j \in \overline{W}_j \cap Q_j$. Точки $h(y_i)$ та $h(y_j)$ містяться в різних секторах множини $\overline{U}_1(0) \setminus Z_n$. З виду функції $\text{Re } z^n$ в околі 0 легко слідує, що дуга $h(S')$ містить точки множини $h(F) = h(U) \cap Z_n$. Відповідно, $S' \cap F \neq \emptyset$. Наприклад, $F \cap \text{Fr } W_i \cap S' \neq \emptyset$ і $F \cap \text{Fr } W_j \cap S' \neq \emptyset$. Тому існує $x' \in F \cap E$. Очевидно, $x' \neq x_0$.

З твердження 7.1 слідує, що існує промінь

$$\beta: [0, +\infty) \rightarrow F \subset \mathbb{R}^2,$$

який виходить з точки $x_0 = \beta(0)$, проходить через точку x' при деякому $t' > 0$ і прямує на нескінченність. За побудовою μ перетинається з F в єдиній точці x_0 , тому $\beta(t) \in E$ для кожного $t > 0$, що неможливо, оскільки множина \overline{E} компактна.

Внаслідок отриманого протиріччя при $i \neq j$ виконується нерівність $Q_i \neq Q_j$. \square

Наслідок 7.4. *Нехай v – вершина $\Gamma_{K-R}(f)$ і*

$$\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$$

– спін у вершині v . Тоді всі елементи циклу (e_1, \dots, e_{2n}) різні і у цьому циклі приймають участь усі ребра, інцидентні v у $\Gamma_{K-R}(f)$.

В кожній парі сусідніх ребер циклу $\triangleleft v$ ребра мають різні орієнтації відносно v (для одного ребра v є початком, для іншого – кінцем).

Доведення. Це твердження слідує з локального вигляду функції f у околі сингулярної точки (див. умови \mathfrak{S}) і з твердження 7.3. \square

Наслідок 7.5. *Нехай x – сингулярна точка f , F_x – сингулярна компонента множини рівня f , $x \in F_x$.*

Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x . Тоді множина $\overline{Q} \cap F_x$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять із цієї точки і прямують на нескінченність.

Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Тоді є рівно дві компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, спільна межа яких містить H . Замикання будь-якої іншої компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ не перетинається з H .

Припустимо, що H міститься у спільній межі компонент Q' і Q'' множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$ — відповідні їм ребра $\Gamma_{K-R}(f)$, $v = \pi_f(F_x)$ — вершина, що відповідає компоненті F_x множини рівня f , $\triangleleft v$ — спін у вершині v . Тоді ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\triangleleft v$.

Якщо ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\triangleleft v$, то у спільній межі відповідних їм областей Q' і Q'' міститься компонента множини $F_x \setminus \{x\}$, причому така компонента єдина.

Доведення. Нехай $U \subset F_x \cup (\mathbb{R}^2 \setminus K_f)$ — окіл т. x_0 , в якому f орієнтовано топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ в деякому околі 0. Нехай $h: U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $h(U) = U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Позначимо через V_1, \dots, V_{2n} компоненти зв'язності множини $U_1(0) \setminus h(F_x) = U_1(0) \setminus Z_n$ в порядку обходу в додатному напрямку навколо початку координат. Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, 2n$.

Позначимо через T_1, \dots, T_{2n} компоненти зв'язності множини

$$U_1(0) \cap (Z_n \setminus 0) = h(U \cap (F_x \setminus \{x\}))$$

таким чином, щоб компонента T_i лежала у спільній межі V_i та V_{i+1} , а T_{2n} — у спільній межі V_{2n} та V_1 . Нехай $R_i = h^{-1}(T_i)$, $i = 1, \dots, 2n$.

Нехай H_1, \dots, H_{2n} — компоненти множини $F_x \setminus \{x\}$. З твердження 7.1 слідує, що кожна з них містить рівно одну з множин

R_1, \dots, R_{2n} . Змінюючи нумерацію множин H_i , можемо вважати, що $R_i = H_i \cap U$, $i = 1, \dots, 2n$.

Аналогічно, застосовуючи твердження 7.3 можемо вважати, що для компонент Q_1, \dots, Q_{2n} множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_x , виконуються співвідношення $W_i = Q_i \cap U$, $i = 1, \dots, 2n$.

Розглянемо Q_k для деякого $k \in \{2, \dots, 2n\}$. Оскільки U є відкритою множиною, легко бачити, що

$$\overline{Q_k} \cap U = \overline{W_k} \cap U \supset R_{k-1} \cup R_k, \quad \overline{Q_k} \cap R_{m^*} = \emptyset$$

при $n \notin \{k-1, k\}$. Тому з наслідку 7.2 випливає, що

$$H_{k-1} \cup H_k \subset \overline{Q_k}, \quad H_m \cap \overline{Q_k} = \emptyset$$

при $m \notin \{k-1, k\}$. Аналогічно, коли $k = 1$ маємо

$$H_{2n} \cup H_1 \subset \overline{Q_1}, \quad H_m \cap \overline{Q_1} = \emptyset$$

при $m \notin \{1, 2n\}$.

Тому для довільної компоненти Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x , існують дві компоненти H' і H'' множини $F_x \setminus \{x\}$, такі, що

$$\overline{Q} \cap F_x = H' \cup H'' \cup \{x\}.$$

Позначимо $v = \pi_f(F_x)$, $e_i = \pi_f(Q_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. З вибору множин $W_i = Q_i \cap U$ слідує, що $\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$.

Розглянемо H_k для деякого $k \in \{1, \dots, 2n-1\}$. По вже доведеному

$$H_k \subset \overline{Q_k} \cap \overline{Q_{k+1}}, \quad H_k \cap \overline{Q_m} = \emptyset$$

при $m \notin \{k, k+1\}$. Очевидно, ребра e_k і e_{k+1} є сусідніми у циклі $\triangleleft v$.

Аналогічно, коли $k = 2n$, маємо

$$H_{2n} \subset \overline{Q_{2n}} \cap \overline{Q_1}, \quad H_{2n} \cap \overline{Q_m} = \emptyset$$

при $m \notin \{1, 2n\}$. Ребра e_{2n} і e_1 є сусідніми у циклі $\triangleleft v$.

Для завершення доведення лишається зауважити, що для кожної компоненти зв'язності H множини $F_x \setminus \{x\}$ виконується співвідношення $H \in \{H_1, \dots, H_{2n}\}$. \square

8. НАВАНТАЖЕНІ І СЛАБО НАВАНТАЖЕНІ ГРАФИ КРОНРОДА-РІБА

Легко побудувати приклади, які показують, що граф Кронрода-Ріба не є повним інваріантом функції загального положення. Тобто існують топологічно не еквівалентні функції, які мають ізоморфні графи Кронрода-Ріба.

Нехай f задовольняє умови \mathfrak{S} і є функцією загального положення. Наша мета знайти додаткове навантаження на $\Gamma_{K-R}(f)$, яке б перетворювало його на повний інваріант f .

Означення 8.1. *Слабо навантаженим графом Кронрода-Ріба називається орієнтований граф $\Gamma_{K-R}(f)$, для якого в кожній вершині визначений спін.*

Виявляється, що орієнтації ребер і спіна у вершинах $\Gamma_{K-R}(f)$ не досить, щоб розрізнити функції загального положення. Справа у тому, що частковий порядок $P_2(f)$, що породжений орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$, не є лінійним. Тобто, не кожна пара вершин порівняна по відношенню до цього порядку.

Легко будується приклад двох функцій загального положення, які мають ізоморфні слабо навантажені графи Кронрода-Ріба, але породжують різні лінійні порядки на множинах вершин цих графів.

Однак нижче ми доведемо, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба розрізняють функції відносно більш слабкої, ніж топологічна, еквівалентності, яку ми зараз і означимо.

Означення 8.2. *Нехай неперервні функції f і g відповідають умовам \mathfrak{S} . Скажемо, що f і g пошарово еквівалентні (відповідно, орієнтовно пошарово еквівалентні), якщо існує гомеоморфізм (відповідно, орієнтований гомеоморфізм) площини на себе, який відображає компоненти множин рівнів f на компоненти множин рівнів g .*

Лінійний порядок $P_1(f)$ є інваріантом відносно орієнтованої топологічної еквівалентності функцій, але виявляється, що слабо навантажений граф Кронрода-Ріба з лінійним порядком

$P_1(f)$ на множині вершин все ще не є повним інваріантом. Потрібно додатково відстежувати поведінку f “на нескінченності”.

Граф з черешками не є справжнім графом у комбінаторному сенсі. Він отриманий зі “справжнього графа” шляхом вилучення деякої підмножини вершин порядку 1.

Зрозуміло, що маючи граф з черешками і його розбиття на вершини і ребра, можна однозначно відновити на ньому комбінаторну структуру графа, “додавши назад” вилучені вершини порядку 1. Будемо називати такі вершини *віртуальними*. Множину віртуальних вершин позначимо V_{virt} .

Згадаємо, що на $\Gamma_{K-R}(f)$ визначена функція f_{K-R} , така що $f_{K-R} \circ \pi_f = f$. Для кожного ребра e визначені дві величини $m(e) = \inf_{x \in e} f_{K-R}(x)$ і $M(e) = \sup_{x \in e} f_{K-R}(x)$. Кожна з цих величин може бути як скінченою, так і $\pm\infty$.

Нехай V — множина вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. На множині $V \cup V_{virt}$ означимо функцію f_{lim} наступним чином. Якщо v є початком ребра e , нехай $f_{lim}(v) = m(e)$, а якщо v є кінцем e , то нехай $f_{lim}(v) = M(e)$.

Ми встановили вище, що f_{K-R} строго монотонна на ребрах. Внаслідок цього $f_{lim} = f_{K-R}$ на множині V “справжніх” вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. Оскільки всі віртуальні вершини мають порядок 1, то f_{lim} коректно визначена також на V_{virt} .

Нас буде цікавити не вся множина V_{virt} , а лише ті віртуальні вершини, на яких f_{lim} набуває скінчені значення. Позначимо

$$V_{fin} = \{v \in V_{virt} \mid f_{lim}(v) \neq \pm\infty\}.$$

Множину $V_{ext} = V \cup V_{fin}$ назовемо *розширеною множиною вершин графа* $\Gamma_{K-R}(f)$.

Функція f_{lim} породжує на V_{ext} відношення часткового порядку $P_{ext}(f)$, яке визначається наступним чином. Нехай $v_1, v_2 \in V_{ext}$. Якщо $f_{lim}(v_1) < f_{lim}(v_2)$, то вважатимемо, що $v_1 < v_2$. Якщо ж $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$, то v_1 і v_2 непорівнянні. Назвемо це відношення *розширеним відношенням порядку на* V_{ext} .

Зрозуміло, що $P_{ext}(f)$ збігається з $P_1(f)$ на V . Також очевидно, що $P_{ext}(f)$ узгоджене з орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$ у тому сенсі, що кінець ребра завжди більший за його початок.

Твердження 8.3. *Відношення “бути непорівнянними відносно $P_{ext}(f)$ ” є транзитивним на множині V_{ext} .*

Доведення. Нехай v_1 і v_2 , а також v_2 і v_3 непорівнянні відносно $P_{ext}(f)$. Тоді $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$ і $f_{lim}(v_2) = f_{lim}(v_3)$. Внаслідок цього v_1 і v_3 непорівнянні. \square

Означення 8.4. *Нехай на множині A задане відношення ρ часткового порядку. Якщо відношення “бути непорівнянними відносно ρ ” є транзитивним на A , то відношення ρ називається **функцієподібним**.*

Отже, відношення $P_{ext}(f)$ функцієподібне.

Означення 8.5. *Навантаженим графом Кронрода-Ріба називається слабо навантажений граф $\Gamma_{K-R}(f)$ разом із підмножиною V_{fin} множини віртуальних вершин і розширеним відношенням порядку $P_{ext}(f)$ на розширеній множині вершин $V_{ext} = V \cup V_{fin}$.*

Нехай $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ — орієнтовані графи з черешками. Розглянемо орієнтовані комбінаторні графи G_f і G_g , які їм відповідають. Множиною вершин G_f (G_g) є об’єднання звичайних і віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$), елементами множини ребер G_f (G_g) є ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$). Інцидентність вершин до ребер і орієнтація ребер переноситься з відповідного графа з черешками.

Означення 8.6. *Комбінаторним ізоморфізмом орієнтованих графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ називається ізоморфізм орієнтованих графів G_f і G_g , який відображає множину віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(g)$.*

Означення 8.7. Назвемо (слабо) навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентними, якщо існує комбінаторний ізоморфізм ψ орієнтованих графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$, який зберігає (слабке) навантаження.

Тобто ізоморфізм ψ кожному спіну на $\Gamma_{K-R}(f)$ ставить у відповідність спін на $\Gamma_{K-R}(g)$:

$$\langle v = (e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto \langle \psi(v) = (\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n)).$$

Також у випадку, коли розглядаються навантажені графи Кронрода-Ріба, ψ індукує ізоморфізм розширених порядків на розширених множинах вершин.

9. ОСНОВНА ТЕОРЕМА

Лема 9.1. Нехай f — функція загального положення, що відповідає умовам \mathfrak{S} . Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.

Тоді знайдеться гомеоморфізм $\phi: \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times f(\overline{Q}) \subset \mathbb{R}^2$, такий, що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ (тут $\text{pr}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — проекція на другу координату).

Доведення. З умов \mathfrak{S} , а також з [1, твердження 6 і наслідок 4] слідує, що

$$f(Q) = \text{Int } f(\overline{Q}), \quad f(\text{Fr } Q) = f(\overline{Q}) \cap \text{Fr } f(Q). \quad (9.1)$$

Множина \overline{Q} , а разом з нею і множина $f(\overline{Q})$ зв'язні. Тому існують $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ такі, що $f(Q) = (a, b)$, $f(\text{Fr } Q) \subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}$.

Якщо $a \in f(\text{Fr } Q)$, то $|a| < \infty$ і згідно з [1, наслідок 4], існує сингулярна компонента F_a множини рівня $f^{-1}(a)$, така, що $f^{-1}(a) \cap \overline{Q} \subset F_a$.

З наслідку 7.5 слідує, що $H_a = \overline{Q} \cap f^{-1}(a)$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять з цієї точки і прямують на нескінченність. З цього і з теореми Жордана про криву легко слідує, що множина H_a гомеоморфна \mathbb{R} і розбиває площину на дві компоненти зв'язності, замикання кожної

з яких гомеоморфне замкненій півплощині. H_a є спільною межею цих двох компонент.

Аналогічно, якщо $b \in f(\text{Fr } Q)$, то $|b| < \infty$ і існує сингулярна компонента F_b рівня $f^{-1}(b)$, яка містить множину

$$H_b = f^{-1}(b) \cap \overline{Q}.$$

Множина H_b гомеоморфна \mathbb{R} і розбиває \mathbb{R}^2 на дві півплощини, для яких H_b є спільною межею. Таким чином, маємо три можливості.

1) $f(\text{Fr } Q) = \emptyset$. Тоді $\text{Fr } Q = \emptyset$ і Q є відкрито-замкненою підмножиною \mathbb{R}^2 . Тому $Q = \mathbb{R}^2$ і f не має сингулярних точок у \mathbb{R}^2 . Наслідок 3 з [1] стверджує, що для кожного $x \in Q$ множина $f^{-1}(f(x)) \cap Q$ зв'язна. Внаслідок цього можемо застосувати теорему 1 з [9], що й доводить лему у даному випадку.

2) Множина $f(\text{Fr } Q)$ не порожня і зв'язна. У цьому випадку або $\text{Fr } Q = H_a$, або $\text{Fr } Q = H_b$.

Нехай $\text{Fr } Q = H_a$. У цьому випадку Q є одною з двох компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$. Позначимо іншу компоненту Q_a . Позначимо також через $x_0 \in H_a \subset F_a$ сингулярну точку функції f .

Зафіксуємо гомеоморфізм $\chi: \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, a]$. Розглянемо неперервну функцію $f_a = \text{pr}_2 \circ \chi: \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R}$. За побудовою $f(x) = f_a(x)$ на множині $\overline{Q} \cap \overline{Q_a}$, а тому функція $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, означена за допомогою формули

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}, \\ f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}, \end{cases}$$

буде неперервною на \mathbb{R}^2 .

Зрозуміло, що для кожного $x \in \mathbb{R}^2 \setminus H_a$ у деякому околі точки x функція g топологічно еквівалентна до координатної проекції pr_2 . Також для кожного $x \in H_a$ у деякому околі точки x у просторі $\overline{Q_a}$ функція f_a орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі точки 0 у просторі $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

З першої умови \mathfrak{S} слідує, що для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція f у деякому околі точки x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у \mathbb{R}^2 . Оскільки за побудовою $f(y) > f(x)$ для кожного $y \in Q$, то функція $f|_{\bar{Q}}$ у околі x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у просторі $[0, +\infty)$.

Внаслідок цього для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція g топологічно еквівалентна до pr_2 .

Існує окіл U_0 точки x_0 , в якому f топологічно еквівалентна до $g_n = \text{Re } z^n$ в околі 0 . Нехай $h: U_0 \rightarrow h(U_0) \subset \mathbb{C}$ і $h': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідна пара гомеоморфізмів, для яких $g_n \circ h = h' \circ f$.

З тверджень 7.1 і 7.3 слідує, що образ $h(U_0 \cap \bar{Q})$ збігається з перетином $h(U_0)$ і замикання одного з секторів V , що є компонентою зв'язності множини $\mathbb{C} \setminus Z_n = \mathbb{C} \setminus g_n^{-1}(0)$. Тому на множині $h(U_0 \cap \bar{Q})$ означене неперервне відображення $\hat{h}(z) = \sqrt[n]{z}$, яке відображає V на півплощину. Нехай іще $\hat{h}'(t) = \text{Sign } t \cdot \sqrt[n]{|t|}$.

Легко бачити, що пара відображень $\hat{h} \circ h$ і $\hat{h}' \circ h'$ реалізує орієнтовану топологічну еквівалентність функції $f|_{\bar{Q}}$ в околі $U_0 \cap \bar{Q}$ точки x_0 до функції pr_2 у деякому околі 0 в просторі $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Внаслідок цього в околі точки x_0 функція f також топологічно еквівалентна до pr_2 .

За побудовою $g^{-1}(t) = f^{-1}(t) \cap Q$ при $t \in (a, b)$. Тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна при $t > a$ (див. [1, наслідок 3]). Аналогічно, $g^{-1}(t) = \chi^{-1}(\mathbb{R} \times \{t\})$ при $t \leq a$, тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна також при $t \leq a$.

Отже, ми можемо застосувати теорему 1 з [9] до функції g .

Отримаємо гомеоморфізм $\phi_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, b)$, такий що $g = \text{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\bar{Q}}: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, b)$ є вкладенням і $\phi_1(\bar{Q}) = [a, b)$. Тому ϕ_1 індукує гомеоморфізм $\phi: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b)$, $\phi(x) = \phi_1(x)$, $x \in \bar{Q}$, який відповідає вимогам леми.

3) $f(\text{Fr } Q) = \{a, b\}$. Тоді $\text{Fr } Q = H_a \cup H_b$, множини $H_a \subset F_a$ і $H_b \subset F_b$ гомеоморфні \mathbb{R} і кожна з них розбиває \mathbb{R}^2 на дві півплощини. Позначимо через Q_a і Q_b ті компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$ і $\mathbb{R}^2 \setminus H_b$ відповідно, які не перетинаються

з Q . Оскільки $H_a \subset f^{-1}(a)$, $H_b \subset f^{-1}(b)$, то $H_a \cap H_b = \emptyset$ і $\mathbb{R}^2 = \overline{Q_a} \cup \overline{Q} \cup \overline{Q_b}$, причому $\overline{Q_a} \cap \overline{Q} = H_a$, $\overline{Q_b} \cap \overline{Q} = H_b$.

Зафіксуємо гомеоморфізми

$$\chi_a : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, a], \quad \chi_b : \overline{Q_b} \rightarrow \mathbb{R} \times [b, +\infty)$$

і розглянемо неперервні функції

$$f_a = \text{pr}_2 \circ \chi_a : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_b = \text{pr}_2 \circ \chi_b : \overline{Q_b} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Очевидно, $f_a|_{H_a} = f|_{H_a}$ і $f_b|_{H_b} = f|_{H_b}$, тому коректно означена функція $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}, \\ f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}, \\ f_b(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_b}. \end{cases}$$

Оскільки замкнені множини $\overline{Q_a}$, \overline{Q} і $\overline{Q_b}$ утворюють скінчене замкнене покриття \mathbb{R}^2 і на кожній з них g неперервна, то g неперервна на \mathbb{R}^2 .

Міркування, аналогічні до наведених у попередньому випадку, доводять наступне. По-перше, у деякому околі кожної точки площини функція g топологічно еквівалентна до координатної проєкції. По-друге, всі множини рівня g зв'язні.

Отже, можемо застосувати теорему 1 з [9] до g .

Як і раніше, отримаємо гомеоморфізм $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такий що $g = \text{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}} : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ індукує гомеоморфізм $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b] = \phi_1(\overline{Q})$, який відповідає вимогам леми. \square

Зауваження 9.2. За рахунок додаткової підкрутки за допомогою відображення $\mathcal{S} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}(x, y) = (-x, y)$, завжди можна добитися щоб гомеоморфізм ϕ з леми 9.1 був орієнтований.

Лема 9.3. *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умову \mathfrak{S} . Тоді її граф Кронрода-Ріба є деревом з черешками.*

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Твердження 9.4. *Нехай G є локально скінченним топологічним графом, V_0 — підмножина множини V_l листків G . Нехай $H = G \setminus V_0$ — граф з черешками.*

Якщо H не містить циклів, то G є деревом.

Доведення. Нехай існує цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v_0)$$

в G . Тут $v_i, i = 0, \dots, n$, — вершини, e_j — ребра, v_{j-1} та v_j інцидентні ребру $e_j, j = 1, \dots, n$.

Тоді $v_i \notin V_l$ для кожного i . Отже, $v_i \notin V_0$ і $v_i \in H, i = 0, \dots, n$. Внаслідок цього цикл C міститься в H .

З наведених аргументів слідує, що якщо в H немає циклів, то й G не містить циклів. \square

Доведення лема 9.3. Припустимо, що в $\Gamma_{K-R}(f)$ існує простий (без самоперетинів) цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v_0).$$

Тут v_i — вершини, e_j — відкриті ребра простору $\Gamma_{K-R}(f)$, такі що $v_{j-1}, v_j \in \bar{e}_j, j = 1, \dots, n$.

Нагадаємо, що через K_f ми позначили об'єднання сингулярних компонентів рівня функції f . Нехай $F_i = \pi_f^{-1}(v_i)$ — відповідні сингулярні компоненти рівнів f , $Q_j = \pi_f^{-1}(e_j)$ — компоненти зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.

З теореми 3.2, твердження 7.1 і наслідку 7.4 слідує, що кожна компонента множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$ містить прообраз рівно одного відкритого ребра графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яке інцидентне вершині v_0 .

Тому множини Q_1 і Q_n належать до різних компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Розглянемо множину

$$C_0 = \bigcup_{i=1}^{n-1} v_i \cup \bigcup_{j=1}^n e_j$$

і її прообраз

$$\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \cup \bigcup_{j=1}^n Q_j.$$

Очевидно, множина C_0 зв'язна. Перевіримо, що множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ теж зв'язна.

Нехай $s \in \{1, \dots, n\}$. З теореми 3.2 слідує, що існують точки $x_s \in \overline{Q_s} \cap F_s$ і $y_s \in \overline{Q_{s+1}} \cap F_s$. Множини Q_s, F_s, Q_{s+1} зв'язні, тому зв'язні також множини $Q_s \cup \{x_s\} \subset \overline{Q_s}, Q_{s+1} \cup \{y_s\} \subset \overline{Q_{s+1}}$. Отже, зв'язна і множина

$$W_s = Q_s \cup F_s \cup Q_{s+1} = (Q_s \cup \{x_s\}) \cup F_s \cup (Q_{s+1} \cup \{y_s\}).$$

Множина $\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{s=1}^{n-1} W_s$ теж зв'язна внаслідок того, що $W_s \cap W_{s+1} \supset Q_{s+1} \neq \emptyset, s = 1, \dots, n-2$.

Помітимо, що $\pi_f^{-1}(C_0) \cap F_0 = \emptyset$, оскільки $W_s \cap F_0 = \emptyset$ для кожного $s = 1, \dots, n-1$. Але $Q_1 \cup Q_n \subset \pi_f^{-1}(C_0)$ і зв'язна множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ має перетинатись принаймні з двома різними компонентами множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Отримане протиріччя доводить, що $\Gamma_{K-R}(f)$ не містить циклів. Отже, $\Gamma_{K-R}(f)$ є деревом з черешками внаслідок твердження 9.4. \square

Розглянемо наступну конструкцію. Нехай $a < b$ і $c < d$ — деякі дійсні числа, $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $\chi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ — неперервні відображення. Нехай $\hat{\chi}: [a, b] \rightarrow [0, 1]$,

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\chi(t) - c}{d - c}, \quad t \in [a, b],$$

є композицією χ і лінійного відображення відрізка $[c, d]$ на $[0, 1]$.

Визначимо неперервне відображення $\Phi: \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$ за формулою:

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x)(1 - \hat{\chi}(y)) + \beta(x)\hat{\chi}(y), \chi(y)), \quad (9.2)$$

для $(x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b]$. Доведення наступної леми ми лишаємо читачу.

Лема 9.5. *Якщо α , β і χ є сюр'єктивними і строго зростають, то Φ є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію і відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.*

10. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1.1

Необхідність. Нехай існує гомеоморфізм $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, який відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g . Відомо, що образ зв'язної множини під дією неперервного відображення зв'язний. Внаслідок того, що h і h^{-1} бієктивні та неперервні, образами різних компонент є різні компоненти. Отже, означене бієктивне неперервне фактор-відображення $\eta: \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \Gamma_{K-R}(g)$ просторів Кронрода-Ріба. Зрозуміло, що гомеоморфізм h^{-1} породжує фактор-відображення, обернене до η . Тому η є гомеоморфізмом.

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня функції f , яка містить x . З умов \mathfrak{S} слідує, що порядок $\text{ord}_x(F_x)$ топологічного простору F_x у точці x більший 2 тоді й тільки тоді, коли x є сингулярною точкою f (див. [7]). Тому множини Σ_g і K_g сингулярних точок і сингулярних компонент зв'язності множин рівня g є образами відповідних множин Σ_f і K_f , що відносяться до функції f .

Зі сказаного слідує, що η відображає множину вершин графа з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину вершин $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що h відображає компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ на компоненти множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$. Тому з теореми 3.2 слідує, що η є ізоморфізмом графів з черешками.

Нехай h зберігає орієнтацію на площині. За умовами теореми f і g є функціями загального положення, тому кожна їх сингулярна компонента лінії рівня містить рівно одну сингулярну точку. Отже множини Σ_f і Σ_g знаходяться у бієктивній відповідності з множинами вершин графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки h зберігає порядок обходу навколо точок площини, то η відображає спін у кожній вершині $\Gamma_{K-R}(f)$ на спін в образі цієї вершини, а отже η є еквівалентність графів зі спінами.

До цих пір ми не згадували про орієнтацію ребер. Нехай $\Gamma_{K-R}(g)$ — граф з черешками функції g , у кожній вершині якого задано спіні. Нехай e — деяке ребро цього графа. Тоді орієнтація всіх ребер $\Gamma_{K-R}(g)$, що породжена напрямком зростання функції g_{K-R} , однозначно відновлюється по орієнтації ребра e . Перевіримо це.

Якщо ребро e інцидентне деякій вершині v , ми можемо скористатися наслідком 7.4 і, маючи спіні $\langle v$, відновити орієнтацію всіх ребер, що інцидентні v .

Нехай e' — інше ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Зафіксуємо шлях

$$P(e, e') = (e = e_1, \dots, e_n = e'),$$

який з'єднує e і e' . Нехай $P(e, e')$ послідовно проходить через вершини v_1, \dots, v_{n-1} (v_i є спільним кінцем ребер e_i та e_{i+1}). За допомогою спінів $\langle v_1, \dots, \langle v_{n-1}$ ми можемо послідовно відновити орієнтації ребер $e_2, \dots, e_n = e'$. Згідно з лемою 9.3 $\Gamma_{K-R}(g)$ є деревом з черешками, тому шлях $P(e, e')$, який з'єднує e і e' визначений однозначно. Отже, орієнтація ребра e' залежить тільки від орієнтації ребра e .

Внаслідок сказаного на графі зі спінами $\Gamma_{K-R}(g)$ можливі рівно дві різних орієнтації ребер.

Очевидно, функція $-g$ відповідає умовам \mathfrak{S} і є функцією загального положення. Слабо навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(g)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ ізоморфні як графи з черешками, мають однакові спіни у відповідних вершинах і відрізняються тільки орієнтацією ребер. Оскільки η є еквівалентністю графів зі спінами, то це відображення індукує еквівалентність слабо навантаженого графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Це доводить необхідність твердження теореми для орієнтовано пошарово еквівалентних функцій f і g .

Нехай функції f та g орієнтовано топологічно еквівалентні, тобто існують гомеоморфізми $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ та $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що зберігають орієнтацію і такі, що $k \circ f = g \circ h$. Тоді гомеоморфізм $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ відображає множини рівня функції f на множини

рівня g . Зрозуміло, що, будучи бієктивним, h відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g . Отже f і g орієнтовано пошарово еквівалентні, внаслідок чого слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Нехай, як і вище, $\eta: \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \Gamma_{K-R}(g)$ є фактор-відображенням гомеоморфізму h відносно проєкцій π_f і π_g . Тоді виконується рівність

$$k \circ f_{K-R} = g_{K-R} \circ \eta. \quad (10.3)$$

Враховуючи, що функція k монотонно зростає, легко бачити, що η зберігає напрямок зростання індукованої функції на ребрах графа Кронрода-Ріба. Отже, слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що η індукує бієктивне відображення множини $V_{virt}(f)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину $V_{virt}(g)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$. Щоб не нагромаджувати позначень, ми його теж будемо позначати η .

Нехай e — ребро $\Gamma_{K-R}(f)$, $\tilde{e} = \eta(e)$ — відповідне йому ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай, як і раніше,

$$\begin{aligned} m(e) &= \inf_{x \in e} f_{K-R}(x), & M(e) &= \sup_{x \in e} f_{K-R}(x), \\ m(\tilde{e}) &= \inf_{x \in \tilde{e}} g_{K-R}(x), & M(\tilde{e}) &= \sup_{x \in \tilde{e}} g_{K-R}(x). \end{aligned}$$

Функція k монотонно зростає, тому

$$m(\tilde{e}) = k \circ m(e), \quad M(\tilde{e}) = k \circ M(e).$$

Отже на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ (включаючи віртуальні) виконується рівність $k \circ f_{lim} = g_{lim} \circ \eta$.

Враховуючи те, що $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом, маємо, що $\eta(V_{fin}(f)) = V_{fin}(g)$. Отже $\eta(V_{ext}(f)) = V_{ext}(g)$ і η індукує ізоморфізм розширених відношень порядку на розширених множинах вершин.

Це доводить необхідність твердження теореми для орієнтовано топологічно еквівалентних функцій f і g .

Достатність. Розглянемо дві функції

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Будемо вважати, що для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, $\Gamma_{K-R}(g)$ цих функцій заданий комбінаторний ізоморфізм ψ , що зберігає спіни.

Нехай K_f і K_g — множини сингулярних компонент зв'язності рівнів функцій f та g відповідно.

Візьмемо вершину $v \in \Gamma_{K-R}(f)$ і розглянемо відповідну вершину $w = \psi(v) \in \Gamma_{K-R}(g)$. Нехай $F_v = \pi_f^{-1}(v)$ і $\widetilde{F}_w = \pi_g^{-1}(w)$ — сингулярні компоненти множин рівня f і g , які відповідають вершинам v і w .

Побудуємо гомеоморфізм $h_v^0: F_v \rightarrow \widetilde{F}_w$, такий, що для будь-якої компоненти доповнення $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, якій відповідає ребро e графа $\Gamma_{K-R}(f)$, виконується рівність

$$h_v^0(\text{Fr } U \cap F_v) = \text{Fr } \widetilde{U} \cap \widetilde{F}_w, \quad (10.4)$$

де \widetilde{U} — компонента доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, якій відповідає ребро $\psi(e)$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки f є функцією загального положення, то множина F_v містить єдину сингулярну точку x_v функції f . Аналогічно, \widetilde{F}_w містить єдину сингулярну точку \widetilde{x}_w функції g . З твердження 7.3 слідує, що кратності x_v і \widetilde{x}_w збігаються. Нехай вони дорівнюють $n - 1$ для деякого $n > 1$. Тоді з твердження 7.1 випливає, що кожна з множин F_v і \widetilde{F}_w складається з сингулярної точки і $2n$ променів, що з неї виходять і прямують на нескінченність.

Нехай $\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$. Позначимо через $Q_i = \pi_f^{-1}(e_i)$, $i = 1, \dots, 2n$, компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_v . Скористаємось наслідком 7.5 і оберемо нумерацію компонент зв'язності множини $F_v \setminus \{x_v\}$ так, щоб компонента H_i містилась у $\text{Fr } Q_i \cap \text{Fr } Q_{i+1}$ при $i = 1, \dots, 2n-1$, а також $H_{2n} \subset \text{Fr } Q_{2n} \cap \text{Fr } Q_1$.

За попереднім припущенням $\triangleleft w = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_{2n}))$. Позначимо $\widetilde{Q}_i = \pi_g^{-1}(\psi(e_i))$, $i = 1, \dots, 2n$, — компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$,

які межують з \widetilde{F}_w . Знову наслідок 7.5 гарантує можливість обрати нумерацію компонент зв'язності множини $\widetilde{F}_w \setminus \{\widetilde{x}_w\}$ таким чином, щоб компонента \widetilde{H}_i містилась у $\text{Fr } \widetilde{Q}_i \cap \text{Fr } \widetilde{Q}_{i+1}$ при $i = 1, \dots, 2n - 1$, а також $\widetilde{H}_{2n} \subset \text{Fr } \widetilde{Q}_{2n} \cap \text{Fr } \widetilde{Q}_1$.

Для кожного $i = 1, \dots, 2n$ зафіксуємо гомеоморфізм

$$h_{v, H_i}^0: \{x_v\} \cup H_i \rightarrow \{\widetilde{x}_w\} \cup \widetilde{H}_i$$

променя $\overline{H}_i = \{x_v\} \cup H_i$ на промінь $\widetilde{H}_i = \{\widetilde{x}_w\} \cup \widetilde{H}_i$.

Зрозуміло, що $h_{v, H_i}^0(x_v) = \widetilde{x}_w$, а також $\overline{H}_i \cap \overline{H}_j = \{x_v\}$ при $i \neq j$. Тому коректно означене відображення $h_v^0: F_v \rightarrow \widetilde{F}_w$,

$$h_v^0(x) = h_{v, H_i}^0(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{H}_i, \quad i \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Набір множин $\{\overline{H}_i\}$ утворює скінчене замкнене покриття F_v , отже відображення h_v^0 неперервне. З того, що всі h_{v, H_i}^0 є гомеоморфізмами, слідує, що означене і неперервне обернене відображення $(h_v^0)^{-1}$. Отже, h_v^0 є гомеоморфізмом.

За побудовою $H_{i-1} \cup H_i \cup \{x_v\} = \text{Fr } Q_i$, $i = 2, \dots, 2n$, і також $H_{2n} \cup H_1 \cup \{x_v\} = \text{Fr } Q_{2n}$ (див. наслідки 7.2 і 7.5).

Аналогічно, $\widetilde{H}_{i-1} \cup \widetilde{H}_i \cup \{\widetilde{x}_w\} = \text{Fr } \widetilde{Q}_i$, $i = 2, \dots, 2n$, також $\widetilde{H}_{2n} \cup \widetilde{H}_1 \cup \{\widetilde{x}_w\} = \text{Fr } \widetilde{Q}_{2n}$. Тому виконується співвідношення (10.4).

Нагадаємо, що за означенням множини K_f і K_g є прообразами множин вершин графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно проєкцій π_f і π_g , відповідно. Тому коректно визначене відображення $h^0: K_f \rightarrow K_g$ за такою формулою: $h^0(x) = h_{\pi_f(x)}^0(x)$.

Множини F_v , $v \in \pi_f(K_f)$, попарно не перетинаються, є замкненими, і їх скінчене число (див. зауваження 3.1). Те ж стосується і їх образів відносно h^0 . Обмеження h^0 на кожен з множин F_v є гомеоморфізмом на свій образ $\widetilde{F}_{\psi(v)}$. Тому відображення h^0 є гомеоморфізмом.

Зараз ми продовжимо h^0 до відображення $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, яке компонентам зв'язності множин рівня функції f ставить у відповідність компоненти множин рівня g .

Позначимо через \mathcal{Q}_f і \mathcal{Q}_g множини, елементами яких є компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і відповідно $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$.

Нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро $\Gamma_{K-R}(f)$. З леми 9.1 та зауваження 9.2 випливає, що існує гомеоморфізм $\phi: \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times f(\overline{Q})$, який зберігає орієнтацію і задовольняє умову $f = \text{pr}_2 \circ \phi$.

Нехай $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, для якої $\pi_g(\tilde{Q}) = \psi(e)$. Тоді існує гомеоморфізм $\tilde{\phi}: \overline{\tilde{Q}} \rightarrow \mathbb{R} \times g(\overline{\tilde{Q}})$, який зберігає орієнтацію і такий, що $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$.

Множина $f(Q) = f_{K-R}(e)$ зв'язна. Зі співвідношень (9.1) слідує, що множина $f(\overline{Q})$ гомеоморфна інтервалу, півінтервалу або відрізьку, $f(Q) = \text{Int } f(\overline{Q})$ гомеоморфна відкритому інтервалу.

Нагадаємо, що f_{K-R} строго монотонна на ребрі e . Тому, якщо $f(\overline{Q})$ містить кінець інтервала $f(Q)$, він відповідає вершині графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яка інцидентна ребру e . Якщо не містить, то кінець інтервала відповідає віртуальній вершині.

Аналогічне справедливо і для множин $g(\overline{\tilde{Q}})$ та $g(\tilde{Q})$.

Оскільки ізоморфізм ψ зберігає орієнтації ребер і відображає множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$, то зі сказаного вище слідує, що існує строго зростаюче бієктивне відображення $\chi: f(\overline{Q}) \rightarrow g(\overline{\tilde{Q}})$.

Отже, нехай $a < b, c < d \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ такі, що

$$\begin{aligned} f(Q) &= (a, b), & f(\text{Fr } Q) &\subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}, \\ g(\tilde{Q}) &= (c, d), & g(\text{Fr } \tilde{Q}) &\subset \{c, d\} \cap \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Множина $f(\text{Fr } Q)$ може мати не більше двох елементів. Розглянемо всі можливі випадки.

(а) Нехай $\text{Fr } Q = \emptyset$. Тоді обидва кінці ребра $e = \pi_f(Q)$ віртуальні. Внаслідок цього $\text{Fr } \tilde{Q} = \emptyset$, $\Gamma_{K-R}(f) = e$, $\Gamma_{K-R}(g) = \psi(e)$, $Q = \tilde{Q} = \mathbb{R}^2$ (див. доведення леми 9.1).

Розглянемо відображення

$$\Phi = \text{id}_{\mathbb{R}} \times \chi: \mathbb{R} \times f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \times g(\mathbb{R}^2).$$

Зрозуміло, що Φ є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію, а тому

$$h = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$$

має подібні властивості.

Очевидно, ϕ відображає компоненти зв'язності множин рівня f на горизонтальні прямі, а $\tilde{\phi}^{-1}$ відображає горизонтальні прямі на компоненти множин рівня g . Тому h задає пошарову еквівалентність f і g .

(b) Нехай $f(\text{Gr } Q)$ містить рівно один елемент. Тоді з наслідку 4 з [1], слідує, що множина $\text{Gr } Q$ зв'язна, отже існує єдина компонента зв'язності F_v множини K_f , така, що $F_v \cap \overline{Q} \neq \emptyset$. Тут v — вершина $\Gamma_{K-R}(f)$, для якої $F_v = \pi_f^{-1}(v)$.

Тоді $g(\text{Gr } \tilde{Q})$ теж містить один елемент. Отже, для вершини $w = \psi(v)$ і відповідної компоненти зв'язності $\tilde{F}_w = \pi_g^{-1}(w)$ множини K_g має виконуватись співвідношення $\overline{\tilde{Q}} \cap K_g \subset \tilde{F}_w$.

Нехай $\triangleleft v$ — спір при вершині v графа $\Gamma_{K-R}(f)$. Позначимо через e' ребро, яке передує e у цьому циклі. Нехай e'' — ребро, яке слідує за e . Розглянемо відповідні елементи $Q' = \pi_f^{-1}(e')$ і $Q'' = \pi_f^{-1}(e'')$ множини Q_f .

Нехай $x_v \in F_v$ — сингулярна точка f . Позначимо H' та H'' компоненти множини $F_v \setminus \{x_v\}$, для яких виконуються співвідношення $H' \subset \overline{Q'} \cap \overline{Q}$, $H'' \subset \overline{Q} \cap \overline{Q''}$.

Аналогічно, нехай $\tilde{x}_w \in \tilde{F}_w$ — сингулярна точка g , $\triangleleft w$ — спір при вершині w графа $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай ребро $\tilde{e}' = \pi_g(\tilde{Q}')$ передує \tilde{e} у циклі $\triangleleft w$, $\tilde{e}'' = \pi_g(\tilde{Q}'')$ слідує за \tilde{e} . Позначимо через \tilde{H}' та \tilde{H}'' компоненти множини $\tilde{F}_w \setminus \{\tilde{x}_w\}$, такі що $\tilde{H}' \subset \overline{\tilde{Q}'} \cap \overline{\tilde{Q}}$, $\tilde{H}'' \subset \overline{\tilde{Q}} \cap \overline{\tilde{Q}''}$.

З наслідку 7.5 випливає, що

$$\overline{Q} \cap F_v = H' \cup H'' \cup \{x_v\}, \quad \overline{\tilde{Q}} \cap \tilde{F}_w = \tilde{H}' \cup \tilde{H}'' \cup \{\tilde{x}_w\}.$$

Оскільки ψ зберігає спіни, то $\tilde{e}' = \psi(e')$, $\tilde{e}'' = \psi(e'')$.

Відображення h^0 побудовано таким чином, що

$$\begin{aligned} h^0(F_v) &= h_v^0(F_v) = \widetilde{F}_w, & h^0(x_v) &= \widetilde{x}_w, \\ h^0(H') &= \widetilde{H}', & h^0(H'') &= \widetilde{H}''. \end{aligned}$$

Отже, $h^0(\overline{Q} \cap F_v) = \overline{Q} \cap \widetilde{F}_w$. Очевидно, обмеження h^0 на $\overline{Q} \cap F_v$ індукує гомеоморфізм

$$h_{v,Q}^0: \overline{Q} \cap F_v \rightarrow \overline{Q} \cap \widetilde{F}_w.$$

Припустимо, що $f(\text{Gr } Q) = \{a\}$. З існування χ слідує, що $g(\text{Gr } \widetilde{Q}) = \{c\}$.

Нехай $q \in \mathbb{R}$. Введемо наступні позначення.

$$\begin{aligned} R_q^- &= (-\infty, 0) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2, \\ R_q^+ &= (0, +\infty) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Із співвідношень (9.1) слідує, що $\phi(\overline{Q} \cap F_v) = \mathbb{R} \times \{a\}$.

Не обмежуючи загальність міркувань, можемо вважати, що $\phi(x_v) = (0, a)$, $\widetilde{\phi}(\widetilde{x}_w) = (0, c)$. Будемо також вважати, що додатний напрямок обходу навколо точки на площині є напрямком проти годинникової стрілки.

При обході навколо точки x_v ми рухаємося у області Q від множини H' у напрямку множини H'' . Аналогічно, при обході навколо точки $(0, a) = \phi(x_v)$ ми рухаємося всередині області $\mathbb{R} \times (a, b) = \phi(Q)$ від R_a^+ у напрямку R_a^- . Оскільки ϕ зберігає орієнтацію, то $\phi(H') = R_a^+$, $\phi(H'') = R_a^-$.

Аналогічно, $\widetilde{\phi}(\overline{Q} \cap \widetilde{F}_w) = \mathbb{R} \times \{c\}$, $(0, c) = \widetilde{\phi}(\widetilde{x}_w)$, $\widetilde{\phi}(\widetilde{H}') = R_c^+$ і $\widetilde{\phi}(\widetilde{H}'') = R_c^-$.

Розглянемо відображення

$$\Phi_a = \widetilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}}: \mathbb{R} \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, Φ_a є гомеоморфізмом на свій образ $\mathbb{R} \times \{c\}$. Також справедливі рівності $\Phi_a(R_a^-) = \widetilde{\phi} \circ h^0(H'') = \widetilde{\phi}(\widetilde{H}'') = R_c^-$ і $\Phi_a(R_a^+) = R_c^+$.

Нехай $i_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $t \in \mathbb{R}$. Означимо функцію

$$\alpha = \text{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Тут $\text{pr}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — проекція на першу координату.

Легко бачити, що α є гомеоморфізмом. Тому ця функція або строго зростає, або строго спадає. Оскільки для множини

$$R^- = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$$

виконуються співвідношення $i_a(R^-) = R_a^-$ і $\text{pr}_1(R_c^-) = R^-$, то за побудовою $\alpha(R^-) = R^-$ і функція α зростає.

Означимо відображення $\Phi: \mathbb{R} \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d)$,

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x), \chi(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b).$$

З властивостей α і χ слідує, що це гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію. Також за побудовою $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$.

Нарешті, нехай

$$h_Q = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi: \bar{Q} \rightarrow \bar{\tilde{Q}}.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Оскільки $\phi(\text{Fr } Q) = \mathbb{R} \times \{a\}$, то

$$h_Q|_{\text{Fr } Q} = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi_a \circ \phi = h^0.$$

За означенням множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ є об'єднанням усіх регулярних компонент рівня функції f . Внаслідок цього кожна компонента рівня f , яка перетинається з Q , міститься в Q . Аналогічно, якщо компонента зв'язності рівня g має непорожній перетин з \tilde{Q} , вона міститься в цій області.

Отже, з властивостей ϕ і $\tilde{\phi}^{-1}$ слідує, що h_Q для кожної точки $x \in Q$ відображає компоненту зв'язності множини $f^{-1}(f(x))$, яка містить x , на компоненту множини рівня g , що містить точку $h_Q(x)$.

Випадок $f(\text{Fr } Q) = \{b\}$ розглядається аналогічно.

(с) Нехай множина $f(\text{Fr } Q)$ містить два елементи. Тоді обидва кінця ребра e не віртуальні. Позначимо їх v' і v'' . Як і

раніше, застосовуючи наслідок 4 з [1], приходимо до висновку, що для компонент зв'язності $F_{v'} = \pi_f^{-1}(v')$ і $F_{v''} = \pi_f^{-1}(v'')$ множини K_f справедливі співвідношення $F_{v'} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, $F_{v''} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, $\overline{Q} \subset F_{v'} \cup F_{v''}$.

Так як вершини $w' = \psi(v')$ і $w'' = \psi(v'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ є кінцями ребра $\psi(e)$, а тому компоненти зв'язності $\widetilde{F}_{w'} = \pi_f^{-1}(w')$ і $\widetilde{F}_{w''} = \pi_f^{-1}(w'')$ множини K_g відповідають співвідношенням $\widetilde{F}_{w'} \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$, $\widetilde{F}_{w''} \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$, $\widetilde{Q} \subset \widetilde{F}_{w'} \cup \widetilde{F}_{w''}$.

Нехай, як і вище, гомеоморфізми

$$\phi: \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b], \quad \tilde{\phi}: \widetilde{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$$

зберігають орієнтацію, $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$.

Не обмежуючи загальності міркувань, ми можемо вважати, що $\phi(F_{v'} \cap \overline{Q}) = \{a\}$, $\phi(F_{v''} \cap \overline{Q}) = \{b\}$.

Ізоморфізм ψ зберігає орієнтацію ребер. Оскільки вона визначається напрямком зростання функцій f і g , то

$$\tilde{\phi}(\widetilde{F}_{w'} \cap \widetilde{Q}) = \{c\}, \quad \tilde{\phi}(\widetilde{F}_{w''} \cap \widetilde{Q}) = \{d\}.$$

Як і у попередньому випадку, з наслідку 7.5 слідує, що коректно визначені відображення

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}}: \mathbb{R} \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \Phi_b &= \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{b\}}: \mathbb{R} \times \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

які гомеоморфно відображають $\mathbb{R} \times \{a\}$ і $\mathbb{R} \times \{b\}$ на $\mathbb{R} \times \{c\}$ та $\mathbb{R} \times \{d\}$, відповідно.

Нехай $i_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $i_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_b(t) = (t, b)$, $t \in \mathbb{R}$. Як і вище, перевіряється, що функції

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \beta &= \text{pr}_1 \circ \Phi_b \circ i_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

є біективними і такими, що строго зростають.

Зафіксуємо також гомеоморфізм $\chi: [a, b] \rightarrow [c, d]$, такий, що $\chi(a) = c$.

З леми 9.5 слідує, що відображення $\Phi: \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$, означене за допомогою формули (9.2), є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію, а також відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.

Оскільки $\hat{\chi}(a) = 0$ і $\hat{\chi}(b) = 1$, то з формули (9.2) випливає, що $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$ і $\Phi(x, y) = \Phi_b(x, y)$ для кожного $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{b\}$.

Означимо

$$h_Q = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi: \overline{Q} \rightarrow \overline{Q}.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Оскільки $\phi(\text{Fr } Q) = \mathbb{R} \times \{a, b\}$, то аналогічно до попереднього випадку

$$h_Q|_{\text{Fr } Q} = h^0.$$

Як і вище, перевіряється, що h_Q відображає кожну компоненту зв'язності множини рівня f , яка перетинається з Q , на деяку компоненту множини рівня g .

Поеднуючи (а)-(с), для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$ ми отримали гомеоморфізм h_Q її замикання на замикання деякого $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, що відображає компоненти зв'язності множин рівня f , що належать Q , на компоненти множин рівня g .

Нехай Q' і Q'' — два різні елементи \mathcal{Q}_f . Тоді за означенням $\overline{Q'} \cap \overline{Q''} = \text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q'' \subset K_f$. Отже, за побудовою для кожного $x \in \overline{Q'} \cap \overline{Q''}$ виконується рівність $h_{Q'}(x) = h_{Q''}(x) = h^0(x)$. Крім того, з наслідку 7.2 випливає, що $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_f} \overline{Q}$.

Тому коректно означене відображення $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$h(x) = h_Q(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{Q}, \quad Q \in \mathcal{Q}_f. \quad (10.5)$$

Оскільки граф $\Gamma_{K-R}(f)$ скінчений (див. зауваження 3.3), то набір множин $\{\overline{Q} \mid Q \in \mathcal{Q}_f\}$ утворює скінчене замкнене покриття площини, і на кожному елементі цього покриття h неперервне за означенням. Тому h неперервне на \mathbb{R}^2 (див. [5]).

За побудовою $h|_{K_f} = h^0$ і h бієктивно відображає K_f на K_g . Також h бієктивно відображає кожну множину $Q \in \mathcal{Q}_f$ на деякий елемент сім'ї \mathcal{Q}_g .

Нехай $Q', Q'' \in \mathcal{Q}_f$, $Q' \neq Q''$, $\widetilde{Q}' = h(Q')$, $\widetilde{Q}'' = h(Q'')$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$, $\widetilde{e}' = \pi_g(\widetilde{Q}')$, $\widetilde{e}'' = \pi_g(\widetilde{Q}'')$ — відповідні ребра графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$. Оскільки $\widetilde{e}' = \psi(e')$, $\widetilde{e}'' = \psi(e'')$ і ψ — комбінаторний ізоморфізм, то \widetilde{Q}' і \widetilde{Q}'' — різні елементи \mathcal{Q}_g . Отже, $\widetilde{Q}' \cap \widetilde{Q}'' = \emptyset$.

Очевидно, для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$ виконуються співвідношення $\mathbb{R}^2 \setminus Q = K_f \cup \bigcup_{Q' \in \mathcal{Q}_f, Q' \neq Q} Q'$. Зі сказаного вище слідує, що $h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = K_g \cup \bigcup_{\widetilde{Q}' \in \mathcal{Q}_g, \widetilde{Q}' \neq h(Q)} \widetilde{Q}'$. Тому $h(Q) \cap h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = \emptyset$ для всіх $Q \in \mathcal{Q}_f$ і відображення h бієктивне.

Отже, означене відображення h^{-1} . Оскільки $h(Q) \in \mathcal{Q}_g$ і $h^{-1}|_{h(Q)} = h_Q^{-1}$ для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$, всі h_Q^{-1} неперервні за побудовою і сім'я $\{\widetilde{Q} \mid \widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_g\}$ утворює скінчене замкнене покриття площини, то відображення h^{-1} неперервне і h є гооморфізмом.

Ми довели вище, що всі відображення $h|_Q$, $Q \in \mathcal{Q}_f$ і h_0 ставлять у відповідність компонентам зв'язності множин рівня f компоненти множин рівня g . Отже, h є пошаровою еквівалентністю f і g .

Аналогічно, якщо для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ заданий комбінаторний ізоморфізм, що зберігає спіни, то функції f і $-g$ пошарово еквівалентні. Але зрозуміло, що розбиття \mathbb{R}^2 , елементами якого є компоненти зв'язності множин рівнів функції $-g$, збігається з аналогічним розбиттям на компоненти множин рівнів g . Тому і у цьому випадку функції f і g пошарово еквівалентні.

Припустимо тепер, що навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ є еквівалентними. Це означає, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні і комбінаторний ізоморфізм ψ , який зберігає слабке навантаження, також індукує ізоморфізм $\hat{\psi}$ частково впорядкованих розширених множин вершин V_{ext} і \widetilde{V}_{ext} графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно порядків P_{ext} і \widetilde{P}_{ext} , відповідно.

Нагадаємо, що частковий порядок P_{ext} (відповідно, \tilde{P}_{ext}) індукується на множині V_{ext} (відповідно, \tilde{V}_{ext}) зі стандартного лінійного порядку на прямій за допомогою відображення $f_{lim}: V_{ext} \rightarrow \mathbb{R}$ (відповідно, $g_{lim}: \tilde{V}_{ext} \rightarrow \mathbb{R}$).

Позначимо $A_f = f_{lim}(V_{ext})$, $A_g = g_{lim}(\tilde{V}_{ext})$. З твердження 8.3 слідує, що існує бієктивне строго зростаюче відображення $\hat{k}: A_f \rightarrow A_g$, таке, що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} V_{ext} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \tilde{V}_{ext} \\ f_{lim} \downarrow & & \downarrow g_{lim} \\ A_f & \xrightarrow{\hat{k}} & A_g \end{array}$$

Множини A_f і A_g скінчені (див. зауваження 3.3) і мають однакову кількість елементів m .

Нехай $A_f = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_1 < \dots < a_m$; $A_g = \{b_1, \dots, b_m\}$, $b_1 < \dots < b_m$. Очевидно, $b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Означимо відображення $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за допомогою співвідношення

$$k(t) = \begin{cases} t + (b_1 - a_1), & \text{якщо } t < a_1, \\ \frac{1}{a_{i+1} - a_i} [b_i(a_{i+1} - t) + b_{i+1}(t - a_i)], & \text{якщо } t \in [a_i, a_{i+1}], \\ t + (b_m - a_m), & \text{якщо } t > a_m. \end{cases}$$

Тоді k є гомеоморфізмом і $k(a_i) = b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Оскільки слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні, то ми можемо побудувати гомеоморфізми $h^0: K_f \rightarrow K_g$ і $h_Q: \bar{Q} \rightarrow \tilde{\bar{Q}}$, $Q \in \mathcal{Q}_f$, як ми це зробили при доведенні пошарової еквівалентності f і g .

При побудові відображень h_Q є певна неоднозначність. Виявляється, що ці відображення можна вибрати таким чином, що гомеоморфізм h , визначений за допомогою (10.5), дасть разом із k топологічну еквівалентність f і g .

Отже, нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро графа $\Gamma_{K-R}(f)$, $v', v'' \in V \cup V_{virt}$ — вершини, які з'єднує ребро e . Тоді вершини $w' = \psi(e')$ і $w'' = \psi(e'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ з'єднані ребром $\psi(e)$. Нехай $\tilde{Q} = \pi_g^{-1}(\psi(e))$ — відповідний елемент \mathcal{Q}_g .

Вище ми побудували h_Q у вигляді $\tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$, де ϕ і $\tilde{\phi}$ — відображення з леми 9.1, а Φ має вигляд $\Phi(x, y) = (\eta(x, y), \chi(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times f(\overline{Q})$ (див. формулу (9.2)). Отже, комутативна наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q} & \xrightarrow{h_Q} & \overline{\tilde{Q}} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi} \\ \mathbb{R} \times f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R} \times g(\overline{\tilde{Q}}) \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \widetilde{\text{pr}}_2 \\ f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\chi} & g(\overline{\tilde{Q}}) \end{array}$$

Лема 9.1 стверджує, що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$. Тому комутативна наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} \overline{Q} & \xrightarrow{h_Q} & \overline{\tilde{Q}} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\chi} & g(\overline{\tilde{Q}}) \end{array} \quad (10.6)$$

У цій конструкції в якості $\chi: \overline{Q} \rightarrow \overline{\tilde{Q}}$ можна взяти довільне неперервне бієктивне зростаюче відображення.

Функція f_{K-R} строго монотонна на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$. Отже, не обмежуючи загальності міркувань, ми можемо вважати, що $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$. Оскільки ψ зберігає орієнтацію ребер, то $g_{lim}(w') < g_{lim}(w'')$.

Нехай $v' \notin V_{ext}$. Тоді $f_{lim}(v') \in \pm\infty$. Так як $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$, то $f_{lim}(v') = -\infty$. За означенням $\psi(V_{ext}) = \tilde{V}_{ext}$, а значить $w' = \psi(v') \notin \tilde{V}_{ext}$ і по аналогії з попереднім $g_{lim}(w') = -\infty$.

Якщо $v' \in V_{ext}$, то $f_{lim}(v') = a_r$ для деякого $r \in \{1, \dots, m\}$.
Тоді

$$g_{lim}(w') = g_{lim} \circ \psi(v') = \hat{k} \circ f_{lim}(v') = k \circ f_{lim}(v') = b_r.$$

Так само, або $f_{lim}(v'') = g_{lim}(w'') = +\infty$, або $f_{lim}(v'') = a_s$ і $g_{lim}(w'') = k \circ f_{lim}(v'') = b_s$ для деякого $s \in \{1, \dots, m\}$.

Внаслідок сказаного виконується рівність $k(f(\overline{Q})) = g(\overline{Q})$.
Отже, можемо взяти $\chi(t) = k(t)$, $t \in f(\overline{Q})$. Тоді зі співвідношень (10.5) і (10.6) слідує, що $k \circ f = g \circ h$. Теорему 1.1 доведено.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Полулях Е. А.* Графы Кронрода-Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 2015. — **67**, 3. — С. 375–396.
- [2] *Зорич В. А.* Математический анализ, I. — М.: МЦНМО, 2002. — С. xvi+664.
- [3] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topology Appl.* — 2002. — **119**, 3. — P. 257–267.
- [4] *Church P. T., Timourian J. G.* Differentiable open maps of $(p + 1)$ -manifold to p -manifold // *Pacific J. Math.* — 1973. — **48**. — P. 35–45.
- [5] *Розлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977. — С. 488.
- [6] *Hilton P. J., Wylie S.* Homology theory: An introduction to algebraic topology. — Cambridge University Press, New York, 1960. — P. xv+484.
- [7] *Куратовский К.* Топология, том. 2. — М.: Мир, 1969. — С. 624.
- [8] *Морс М.* Топологические методы теории функции комплексного переменного. — М.: Изд. иностр. лит., 1951. — С. 248.
- [9] *Sharko V. V., Soroka Yu. Yu.* Topological equivalence to a projection // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2015. — **21**, 1. — P. 3–5.

И. Ю. Власенко, Д. А. Гольцов

Институт математики НАН Украины, Киев
vlasenko@imath.kiev.ua, adanos@i.ua

О классах топологической сопряженности квадратичных однородных внутренних полиномиальных отображений

We study classes of topological conjugacy of quadratic homogeneous polynomial maps of a plane which are internal maps. Partial results are achieved, but this problem needs further research.

Досліджуються класи топологічної спряженості однорідних квадратичних відображень площини, які є внутрішніми відображеннями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Отображения из одного пространства в другое топологически классифицируются как классы топологической эквивалентности, то есть замены координат гомеоморфизмами в образе и прообразе. В случае, когда отображение отображает пространство в себя, существуют и другие, более детальные способы классификации, дополнительно подразделяющие классы топологической эквивалентности. Это классификация с точностью до левого или правого действия гомеоморфизмом и классификация с точностью до топологической сопряженности (то есть описание свойств, инвариантных относительно сопряженности гомеоморфизмом¹).

¹Гомеоморфизмы $f, g : X \rightarrow X$ топологически сопряжены, если существует гомеоморфизм $h : X \rightarrow X$ такой, что $f \circ h = h \circ g$. Подробнее см. [1].

Для классификации с точностью до топологической сопряженности получено много результатов, относящихся к различным классам обратимых отображений — гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В то же время необратимые эндоморфизмы, по сравнению с обратимыми, сравнительно не изучены. Голоморфные отображения одной комплексной переменной являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Однако и для них классификация даже семейства полиномов второго порядка $z^2 + c$ является непростой задачей (см. [2]).

Отображения, отличные от голоморфных и некоторых других специальных классов необратимых отображений, таких, как одномерные отображения отрезка, как правило, представляют собой “terra incognita” для задач топологической классификации.

В работах [3,4] был введен ряд новых инвариантов топологической сопряженности внутренних (т.е. открытых дискретных) отображений, в качестве модели для которых использовались динамические инвариантные множества гомеоморфизмов.

Используя эти инварианты, в [5] для некоторого класса внутренних отображений, включающих отображения, у которых координатные функции являются однородными многочленами произвольной степени двух действительных переменных, были изучены некоторые топологические инварианты сопряженности, описаны их свойства и дан критерий топологической сопряженности.

Критерий топологической сопряженности, полученный в [5], применяется в данной работе для изучения границ классов топологической сопряженности квадратичных однородных внутренних полиномиальных отображений плоскости.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Внутренним отображением будем называть непрерывный открытый (образ любого открытого множества открыт) конечнократный (у каждой точки число прообразов конечно) эпиморфизм. Подробнее о внутренних отображениях см. [6].

Отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ назовем *однородным порядка k* , если $\forall t \geq 0 \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n f(t^k \bar{x}) = t^k f(\bar{x})$.

Пусть $\hat{\mathbb{C}}$ — двумерная сфера, являющаяся замыканием двумерного цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ точками $\bar{0}$ и ∞ , и $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — его внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\bar{0}$ и ∞ .

Заметим, что не всякое однородное отображение является внутренним. Например, однородное порядка 2 отображение $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ складывает блинчиком окрестность точки $\bar{0}$ и внутренним не является.

Обозначим через $O_f^+(x)$ *положительную* полутраекторию точки x , то есть множество $\{f^n(x) \mid n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ *отрицательную* полутраекторию точки x , то есть множество $\{f^n(x) \mid n < 0\}$. *Широкой* траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.

В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$, которое будем обозначать $O_f^\perp(x)$.

Как легко видеть из определения, если среди образов x нет периодической точки, а f имеет в точках орбиты больше одного прообраза, то широкая траектория точки x распадается на

бесконечное число нейтральных сечений, причем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 2.1. Точка x называется *блуждающей* точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что для всех $m \in \mathbb{Z}$ выполнено условие $f^m(U) \cap U = \emptyset$.

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих даны в [4]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 2.2. Точка x называется *нейтрально блуждающей* точкой f , если найдется такая ее связная окрестность U , что $\forall n \geq 0$ открытое множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности такие, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одну точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$.

Определение 2.3. Точка x называется *суперблуждающей* точкой f , если она блуждающая и нейтрально блуждающая.

Обозначим через Ω множество неблуждающих (не являющихся блуждающими) точек. Обозначим через Ω^\perp множество нейтрально неблуждающих (не являющихся нейтрально блуждающими) точек. Заметим, что это замкнутые множества.

Определение 2.4. Блуждающая точка x называется *регулярной*, если для каждого $\epsilon > 0$ существует δ -окрестность $\delta(x)$ точки x , и $N > 0$ такие, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ такого, что $|k| > N$ выполняется условие: $f^k(\delta(x)) \subset \epsilon(\Omega)$, где $\epsilon(\Omega)$ — ϵ -окрестность множества Ω .

Очевидно, что множество регулярных точек открыто.

3. КРИТЕРИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ВНУТРЕННИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Напомним, что $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое (степени > 1) отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\bar{0}$ и ∞ .

В работе [5] получены следующие свойства этих отображений:

- (1) $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}, \forall t > 0$, нейтральные сечения $O^\perp(\bar{x})$ и $O^\perp(t\bar{x})$ подобны с центром подобия в $\bar{0}$.
- (2) У отображения f точки $\bar{0}$ и ∞ обладают открытыми бассейнами притяжения.
- (3) На каждом луче, исходящем из центра координат, лежит ровно одна точка, не принадлежащая бассейнам притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ .
- (4) Множество точек, не принадлежащих бассейнам притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , образует гомеоморфную окружности нейтрально инвариантную (то есть содержащую с каждой своей точкой ее нейтральное сечение) жорданову кривую, разделяющую бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ .

Возьмем некоторый луч, выходящий из центра координат. Обозначим точку пересечения этого луча и γ_1 через p_1 . Тогда точки луча можно представить как $p_t = tp_1, t > 0$. Используя t как коэффициент подобия, построим набор кривых $\gamma_t, t > 0$, являющихся гомотетиями кривой γ_1 относительно начала координат. По построению, это некоторое слоение цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, причем это слоение нейтрально инвариантно.

Обозначим через S_ϕ гомеоморфное окружности множество лучей, исходящих из начала координат, где расстояние между двумя лучами равно минимуму углов между ними. Тогда f индуцирует на S_ϕ необратимое внутреннее отображение f_ϕ без особых точек, то есть накрытие.

В [4] полный топологический инвариант накрытий окружности описан в терминах нейтрально инвариантных множеств, и

в этих терминах дан критерий топологической сопряженности накрытий окружности одной и той же степени.

Теорема 3.1 (Критерий топологической сопряженности, [4]). *Пусть f и g — внутренние и однородные порядка $k > 1$ необратимые отображения, не имеющие в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ особых точек, с точками ветвления $\bar{0}$ и ∞ , и $f_\phi, g_\phi: S_\phi \rightarrow S_\phi$ — индуцированные ими внутренние отображения множества S_ϕ . f и g топологически сопряжены $\iff f_\phi$ и g_ϕ топологически сопряжены.*

4. КЛАССЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ

В работе [5] однородные отображения были классифицированы в терминах инвариантных множеств индуцированного отображения на множестве лучей. Этот подход работает, если инвариантные множества сравниваемых отображений уже известны.

Однако такой важный частный случай однородных отображений, как однородные полиномиальные отображения, задаются коэффициентами своих координатных полиномиальных функций. В таком случае их инвариантные множества индуцированного отображения на множестве лучей заранее не известны. Поэтому для однородных полиномиальных отображений возникает задача вычислить по коэффициентам их координатных полиномиальных функций их топологические инварианты, чтобы к ним можно было бы применить результаты работы [5].

Отметим, что, несмотря на простоту постановки, задачи такого вида весьма сложны в реализации. Здесь уместно вспомнить и однопараметрическое семейство отображений прямой $x^2 + c$, для изучения которого понадобилось развитие методов эргодической динамики. С их помощью удалось установить, что на интервале значений параметра c , порождающих хаотическую динамическую систему, энтропия Колмогорова-Синяя

отображений различна, а значит, отображения попарно топологически не сопряжены.

Более общее комплексное однопараметрическое семейство отображений комплексной плоскости $z^2 + c$, порождает знаменитое множество Мальдеброта, изучению которого посвящено большое количество работ, а многие вопросы о его строении не решены до сих пор.

Рассматриваемая здесь задача сродни упомянутым выше задачам тем, что, как и они, она не решается “в лоб”. Индуцированное отображение на множестве лучей можно явно вычислить. Однако далее из результатов работы [5] следует, что топологические инварианты индуцированного отображения определяются наличием и взаимным расположением его периодических интервалов. Чтобы определить расположение периодических интервалов, необходимо исследовать периодические точки отображения, которых бесконечное число, выделить среди них неотталкивающие траектории, определить, входят ли такие траектории в границу периодических интервалов, и определить взаимное расположение периодических интервалов.

В работе [4] высказано предположение, что число периодических интервалов такого отображения конечно. Однако априори это число может быть как угодно большим, в частности, превосходить возможности компьютерного эксперимента. Поэтому описать топологические инварианты однородных полиномиальных отображений в терминах коэффициентов его координатных полиномиальных функций — крайне непростая задача даже для квадратичных полиномиальных функций.

Тем не менее, некоторые частичные результаты получить можно, чем мы и займемся далее. Для дальнейшего продвижения в будущем можно будет провести масштабные компьютерные эксперименты, в основе которых будут полученные здесь частичные результаты.

4.1. Однородные квадратичные внутренние отображения. Каждое однородное квадратичное отображение имеет

вид:

$$f: (x, y) \mapsto (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2).$$

У него имеется единственная неподвижная особая точка $(0, 0)$. Матрица Якоби f принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2a_{20}x + a_{11}y & a_{11}x + 2a_{02}y \\ 2b_{20}x + b_{11}y & b_{11}x + 2b_{02}y \end{pmatrix},$$

а ее детерминант равен

$$(2a_{20}x + a_{11}y)(b_{11}x + 2b_{02}y) - (2b_{20}x + b_{11}y)(a_{11}x + 2a_{02}y) = \\ = 2(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})x^2 + 4(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})xy + 2(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11})y^2.$$

Чтобы однородное квадратичное отображение было внутренним, необходимо, чтобы особая точка была изолированной, то есть, чтобы вырожденная кривая II порядка

$$(a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})x^2 + 2(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})xy + (a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11})y^2 = 0$$

вырождалась в точку (представляла собой вырожденный эллипс в классификации кривых II порядка). Для этого необходимым и достаточным условием является неравенство $I_2 > 0$ для второго инварианта кривых II порядка. В наших обозначениях

$$I_2 = (a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20})(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - (a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20})^2 > 0.$$

В таком виде однородные квадратичные отображения цилиндра являются шестипараметрическим семейством отображений. Для задачи топологического описания этого семейства такое количество параметров избыточно. Заменаи координат выделим из этого семейства более простое для изучения подсемейство, содержащее представителей всех классов топологической сопряженности исходного семейства.

Легко видеть, что однородные квадратичные отображения с неподвижной особой точкой в $(0, 0)$ обладают инвариантным

слоением на координатные кривые $\phi = \text{const}$ в полярных координатах — исходящие из точки O лучи. Также, отображение симметрично относительно центра координат.

На окружности — пространстве исходящих из точки O лучей — наше однородное квадратичное внутреннее отображение индуцирует двулистное накрытие. Такое отображение всегда имеет как минимум одну неподвижную точку (лемма 7.5 в [4]), которой соответствует инвариантный луч. Поворотом системы координат можно добиться, чтобы этот инвариантный луч перешел в положительный луч координатной оси OX . При этом b_{20} будет равно 0, однородное квадратичное внутреннее отображение принимает вид

$$f: (x, y) \mapsto (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, b_{11}xy + b_{02}y^2),$$

а условие для I_2 принимает вид

$$I_2 = a_{20}b_{11}(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - a_{20}^2b_{02}^2 > 0.$$

Ограничение f на положительный луч координатной оси OX является отображением $a_{20}x^2$. Поскольку этот луч инвариантен, то $a_{20} > 0$ и $a_{20}x^2$ — гомеоморфизм с притягивающими точками 0 и ∞ и неподвижной отталкивающей точкой $\frac{1}{a_{20}}$. Тогда линейной заменой координат $x' = \frac{x}{\sqrt{a_{20}}}$ можно добиться, что $a_{20} = 1$, на луче координатной оси OX $(1, 0)$ является отталкивающей неподвижной точкой, и однородное квадратичное внутреннее отображение принимает вид

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, b_{11}xy + b_{02}y^2)$$

с условием $I_2 = b_{11}(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - b_{02}^2 > 0$.

Рассмотрим нейтральное сечение неподвижной точки $(1, 0)$. Вычислим ее нейтральные итерации¹. $\Delta_1^\perp((1, 0)) = \{(-1, 0)\}$. Сосчитаем $\Delta_2^\perp((1, 0))$. Для этого найдем прообраз точки $(-1, 0)$:

¹ $\Delta_n^\perp(x) = f^{-n} \circ f^n(x) \setminus f^{-(n-1)} \circ f^{n-1}(x)$, см. тж. определение 3.7 в [4].

$$\begin{aligned} x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 &= -1 \\ b_{11}xy + b_{02}y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Если $b_{02} = 0$, то $x = 0$ и $y^2 = \frac{1}{-a_{02}}$.

Если $b_{02} \neq 0$, то $y = -\frac{b_{11}}{b_{02}}x$ и

$$x^2 = \frac{b_{02}^2}{b_{11}(a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11}) - b_{02}^2} = \frac{b_{02}^2}{I_2} > 0.$$

В первом случае ($b_{02} = 0$) из условия $I_2 > 0$ получим, что $a_{02} < 0$. Тогда линейной заменой $y' = \sqrt{-a_{02}}y$ отображение в новой системе координат приводится к виду

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 + a_{11}xy - y^2, b_{11}xy) \quad (4.1)$$

с условием $I_2 = b_{11}^2 > 0$, или, эквивалентно, $b_{11} \neq 0$.

При этом в новых координатах $\Delta_1^\perp((0, 1)) = \{(-1, 0)\}$, $\Delta_2^\perp((0, 1)) = \{(0, -1), (0, 1)\}$.

Во втором случае ($b_{02} \neq 0$) мы имеем

$$\Delta_2^\perp((0, 1)) = \left\{ \left(\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, -\frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right), \left(-\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, \frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right) \right\}.$$

Возьмем линейную замену координат, которая ось OX оставляет неизменной, а прямую, соединяющую точки $O = (0, 0)$ и $\left(\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, -\frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right)$ переводит в ось OY так, что образом точки $\left(\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}}, -\frac{b_{11}}{b_{02}}\sqrt{\frac{b_{02}^2}{I_2}} \right)$ станет точка $(0, 1)$.

С помощью такой замены во втором случае ($b_{02} \neq 0$) внутреннее отображение в новой системе координат также приводится к виду (4.1).

Следствие 4.2. *Однородные внутренние квадратичные отображения цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus O$ линейно эквивалентны отображениям двухпараметрического семейства (4.1).*

Отметим, что для отображений семейства (4.1)

$$J_f = \det \begin{pmatrix} 2x + a_{11}y & a_{11}x - 2y \\ b_{11}y & b_{11}x \end{pmatrix} = 2b_{11}(x^2 + y^2).$$

Поэтому знак Якобиана J_f определяется знаком b_{11} . Соответственно, семейство (4.1) содержит 2 подсемейства: отображения, сохраняющие ориентацию, с $b_{11} > 0$, и обращающие ориентацию, с $b_{11} < 0$.

Изучим отображения этого семейства с точностью до топологической сопряженности.

Заметим, что однородные квадратичные отображения являются частным случаем однородных отображений из работы [5], поэтому для них справедливы утверждения лемм 1–5 и теорема 1 из этой работы.

Следствие 4.3. *У отображений семейства (4.1) замыкание нейтрального сечения точки $(1, 0)$ входит в общую границу бассейнов притяжения точек O и ∞ .*

Пусть f — отображение семейства (4.1). Обозначим через $f_1(x, y) = x^2 + a_{11}xy - y^2$, $f_2(x, y) = b_{11}xy$ координатные функции отображения f .

Обозначим через S_ϕ гомеоморфное окружности множество лучей, исходящих из начала координат. Отображение f индуцирует на S_ϕ внутреннее отображение f_ϕ .

В качестве S_ϕ можно взять единичную окружность. Ее точки имеют вид $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, где φ — угловая координата. При этом

$$f_1(\varphi) = \cos 2\varphi + \frac{a_{11}}{2} \sin 2\varphi, \quad f_2(\varphi) = \frac{b_{11}}{2} \sin 2\varphi.$$

Тогда внутреннее отображение $f_\phi: S_\phi \rightarrow S_\phi$ можно выразить из уравнений $\cos(f_\phi) = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$, $\sin(f_\phi) = \frac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$, $\text{ctg}(f_\phi) = \frac{f_1}{f_2}$. Из них последнее выражение наиболее удобно для вычислений. Получим

$$f_\phi(\varphi) = \begin{cases} \operatorname{arccctg} \left(\frac{2}{b_{11}} \operatorname{ctg}(2\varphi) + \frac{a_{11}}{b_{11}} \right), & f_2 > 0 \\ \operatorname{arccctg} \left(\frac{2}{b_{11}} \operatorname{ctg}(2\varphi) + \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) - \pi, & f_2 < 0, f_1 > 0 \\ \operatorname{arccctg} \left(\frac{2}{b_{11}} \operatorname{ctg}(2\varphi) + \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) + \pi, & f_2 < 0, f_1 \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f_2 = 0, f_1 > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & f_2 = 0, f_1 < 0 \end{cases}$$

Предположим, что φ не принимает значения $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Для удобства обозначим $a = a_{11}, b = b_{11}$. Тогда производная отображения $f_\phi(\varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (f_\phi)'(\varphi) &= \left(\operatorname{arccctg} \left(\frac{2}{b} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b} \right) \right)' = \\ &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{2}{b} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b} \right)^2} \left(\frac{2}{b} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 2\varphi} \right) \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{4}{b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b} \right)^2 \right)}. \end{aligned}$$

Таким выражением удобно пользоваться для всех точек, кроме $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Для вычисления значения $(f_\phi)'(\varphi)$ в этих точках удобнее воспользоваться выражением $\sin(f_\phi) = \frac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$. Из него следует, что в этих точках $(f_\phi)' = b$.

В работе [5] описаны классы топологической сопряженности индуцированного отображения f_ϕ , а значит, и отображений семейства (4.1). Для f_ϕ возникает следующая дихотомия: либо $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, либо $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$.

4.4. Отображения сопряженные с $z \mapsto z^2$. Рассмотрим вначале случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$. Тогда у f_ϕ нет периодических интервалов и f_ϕ топологически сопряжено стандартному линейному растяжению окружности $\phi \mapsto 2\phi$ либо $\phi \mapsto -2\phi$, в

зависимости от того, f_ϕ сохраняет ориентацию окружности S_ϕ или нет.

Тогда для отображений семейства (4.1) имеют место результаты из [5] и главы 7 [4]. В частности, замыкание нейтрального сечения точки $(1, 0)$ является той гомеоморфной окружности жордановой кривой, которая разделяет бассейны притяжения точек O и ∞ , и такой, что сужение на нее отображения семейства (4.1) порождает отображение f_ϕ . При этом, если f сохраняет ориентацию, то f топологически сопряжено z^2 , а если обращает — то \bar{z}^2 .

Возникает естественный вопрос: при каких значениях коэффициентов a и b у отображения f_ϕ , индуцированного отображением f семейства (4.1), имеет место $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$?

Для проверки можно было бы воспользоваться тем, что отображение f_ϕ гладкое, и сосчитать производную вдоль каждой периодической траектории. Если $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, то все периодические траектории топологически отталкивающие. Если при некоторых значениях коэффициентов a и b у отображения f_ϕ найдется траектория, такая, что производная вдоль траектории (произведение значений производной во всех точках) меньше 1, то отображение f_ϕ имеет притягивающую траекторию, и $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$. И наоборот, если для всех периодических траекторий производная вдоль траектории больше 1, то все периодические траектории топологически отталкивающие и $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$. Если же для какой-то периодической траектории производная вдоль траектории равна 1, то для такой траектории требуется дополнительное исследование, является ли она топологически отталкивающей.

Однако такой критерий на практике не применим, так как для исследования бесконечного числа траекторий требуется произвести бесконечное число вычислений. Тем не менее, один важный частный случай этого критерия можно легко вычислить. Когда производная отображения f_ϕ строго больше 1 на

всей окружности, то тем более для всех периодических траекторий производная вдоль траектории больше 1.

Ограничимся частным случаем, когда отображения семейства (4.1) сохраняют ориентацию, ($b > 0$). Вычислим, когда производная отображения f_ϕ строго больше 1 на всей окружности.

Как и выше, можно считать, что $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Тогда из $b > 0$ получаем, что $b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b}\right)^2\right) > 0$. Следовательно, $|f'(\varphi)| > 1$ влечет

$$\begin{aligned} & \frac{4}{b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b}\right)^2\right)} > 1, \\ & b \cdot \sin^2 2\varphi \left(1 + \left(\frac{2}{b} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a}{b}\right)^2\right) < 4, \\ & b \cdot \left(\sin^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \cdot \left(\frac{4}{b^2} \operatorname{ctg}^2 2\varphi + \frac{4a}{b^2} \operatorname{ctg} 2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\right)\right) < 4, \\ & b \sin^2 2\varphi + \frac{4}{b} \cos^2 2\varphi + \frac{4a}{b} \cos 2\varphi \sin 2\varphi + \frac{a^2}{b} \sin^2 2\varphi < 4, \\ & b^2 \sin^2 2\varphi + 4 \cos^2 2\varphi + 4a \cos 2\varphi \sin 2\varphi + a^2 \sin^2 2\varphi < 4b, \\ & (a^2 + b^2) \sin^2 2\varphi + 4a \cos 2\varphi \sin 2\varphi + 4 \cos^2 2\varphi - 4b < 0, \\ & (a^2 + b^2) \frac{(2 \operatorname{tg} \varphi)^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} + 4a \frac{2 \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \\ & \quad + 4 \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} - 4b < 0, \\ & (a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + 2a \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) + (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 - \\ & \quad - b(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 < 0. \end{aligned}$$

Используя замену $u = \operatorname{tg} \varphi$ получим:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2) u^2 + 2au(1 - u^2) + (1 - u^2)^2 - b(1 + u^2)^2 < 0, \\ & (1 - b)u^4 - 2au^3 + (a^2 + b^2 - 2b - 2)u^2 + 2au + (1 - b) < 0. \end{aligned}$$

Положим

$$q(u) = (1 - b)u^4 - 2au^3 + (a^2 + b^2 - 2b - 2)u^2 + 2au + (1 - b).$$

Заметим, что когда $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, то $u > 0$. Чтобы имело место неравенство $q_1(u) < 0$, для каждого $u > 0$ график полинома q_1 должен лежать под осью Ox . Рассмотрим два случая

1) Пусть $b = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} q_1(u) &= -2au^3 + (a^2 - 3)u^2 + 2au < 0, \\ u(2au^2 - (a^2 - 3)u - 2a) &> 0, \\ 2au^2 - (a^2 - 3)u - 2a &> 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим последнее неравенство. При $a \neq 0$ оно задано полиномом второй степени. Отметим, что дискриминант левой части последнего неравенства равен

$$D = (a^2 - 3)^2 + 16a^2 > 0.$$

Он всегда положителен, а значит, уравнение всегда имеет корни и случай $a \neq 0$ не подходит. Если же $a = 0$, то получим неравенство $-3u^2 < 0$, которое не выполняется при $a = 0$. Поэтому при $b = 1$ имеем только нестрогое неравенство $-3u^2 \leq 0$ и f_φ не является строго метрически растягивающим отображением.

2) Предположим, что $b \neq 1$. Тогда

$$(1 - b)u^4 - 2au^3 + (a^2 + b^2 - 2b - 2)u^2 + 2au + (1 - b) < 0.$$

Сокращая на u^2 , получим:

$$\begin{aligned} (1 - b)\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) - 2a\left(u - \frac{1}{u}\right) + (a^2 + b^2 - 2b - 2) &< 0 \\ (1 - b)\left(\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + 2\right) - 2a\left(u - \frac{1}{u}\right) + (a^2 + b^2 - 2b - 2) &< 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену $t = u - \frac{1}{u}$, тогда

$$(1 - b)t^2 - 2at + (a^2 + b^2 - 4b) < 0.$$

Если u пробегает все множество положительных чисел, то t пробегает всю числовую прямую, поэтому последнее неравенство должно выполняться для всех $t \in \mathbb{R}$, то есть дискриминант левой части должен быть отрицательным и $1 - b < 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} D &= 4a^2 + 4(b-1)(a^2 + b^2 - 4b) < 0, \\ a^2 + (b-1)(a^2 + b^2 - 4b) &< 0, \\ a^2b + b(b-4)(b-1) &< 0, \\ a^2 + b^2 - 5b + 4 &< 0, \end{aligned}$$

что дает нам открытый диск (внутренность эллипса):

$$a^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Заметим, что точка $a = 0, b = 2$ (соответствующая отображению z^2) лежит у него внутри, а точка $a = 0, b = 1$ лежит на граничной окружности этого диска. Также, этот диск целиком лежит в области $b > \frac{a^2}{4} + 1$ (от $a^2 < 4(b-1)$), которая будет рассмотрена далее.

4.5. Отображения, не сопряженные с $z \mapsto z^2$. В предыдущем разделе были найдены достаточные условия, когда отображения семейства (4.1) сопряжены z^2 . Найдем теперь достаточные условия, когда отображения семейства (4.1) не сопряжены z^2 . Для этого рассмотрим оставшийся случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$. Тогда у множества $W^\perp(f_\phi)$ отображения f_ϕ есть периодические интервалы.

Как следует из результатов главы 7 [4], в этом случае каждому циклу периодических компонент отображения f_ϕ соответствует в \mathbb{R}^2 инвариантный для отображения f набор секторов, заполненных лучами, исходящими из начала координат. Границы таких периодических компонент состоят из периодических лучей, в сужении на каждый цикл из своих периодических компонент отображение f_ϕ является гомеоморфизмом, а

внутри таких периодических компонент под действием отображения f_ϕ каждый луч со временем сходится к периодическому лучу внутри или на границе такой периодической компоненты.

Поскольку отображение квадратично, то на каждом периодическом луче существует единственная периодическая точка, которая разделяет бассейны притяжения точек O и ∞ . Соответственно, на каждом движущемся луче существует единственная точка, которая принадлежит в зависимости от направления движения устойчивому или неустойчивому многообразию соответствующей периодической точки и разделяет бассейны притяжения точек O и ∞ , причем точки, попадающие в бассейны притяжения точек O и ∞ , являются суперблуждающими.

Таким образом, и в случае, когда $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$, бассейны притяжения точек O и ∞ также разделяет образованная динамически выделенными топологически инвариантными множествами жорданова кривая γ , в сужении на которую отображение f сопряжено f_ϕ .

При этом все периодические точки отображения f , кроме $O = (0, 0)$ и ∞ , лежат на жордановой кривой γ , и их можно естественно отождествить с периодическими точками отображения f_ϕ .

Если отображения семейства (4.1) сопряжены z^2 , то у них есть ровно три неподвижные точки: $O = (0, 0)$, ∞ и единственную неподвижную точку на жордановой кривой γ , которая по построению имеет координаты $(1, 0)$.

Соответственно, если у отображения возникнут дополнительные неподвижные точки, то такое отображение не сопряжено z^2 .

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Найдем конечные неподвижные точки отображения

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 + axy - y^2, bxy),$$

т. е. решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + axy - y^2 = x \\ bxy = y \end{cases}$$

Если $y = 0$, то имеем уже упомянутые неподвижные точки $(1, 0)$ и $(0, 0)$. Пусть $y \neq 0$. Тогда $x = \frac{1}{b}$, и

$$\frac{1}{b^2} + \frac{a}{b}y - y^2 = \frac{1}{b} \quad \implies \quad 1 + aby - b^2y^2 = b.$$

Пусть $t = by$. Рассмотрим уравнение $t^2 - at + b - 1 = 0$.

Если $D < 0$, то, как и выше, у нас только две (конечные) неподвижные точки $(1, 0)$ и $(0, 0)$ отображения f . Но так как $D = a^2 - 4b + 4$, то это достигается, если $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$.

Рассмотрим случай, когда $D = 0$. Тогда $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, и $t = \frac{a}{2}$, следовательно, $x = \frac{1}{b}$, $y = \frac{a}{2b}$.

При $a = 0$, $b = 1$ все равно две неподвижные точки, так как $y = 0$, а при любых других значениях a и b , лежащих на параболе $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, возникает 3 неподвижные точки: $(1, 0)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{b}, \frac{a}{2b}\right)$.

Если $D > 0$ ($b < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$), то у нас может быть до четырех неподвижных точек:

$$(0, 0), (1, 0), \left(\frac{1}{b}, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2b}\right), \left(\frac{1}{b}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2b}\right).$$

Но если $b = 1$, то точка $\left(\frac{1}{b}, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2b}\right)$ совпадает с точкой $(1, 0)$ и остаются три неподвижные точки: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, a)$. Для остальных значений параметров из области $b < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ все четыре точки различны.

Рассмотрим неподвижные точки, лежащие на кривой γ . Когда $0 < b < 1$, то, сосчитав производную, легко видеть, что точка $(1, 0)$ — притягивающая, и две другие неподвижные точки образуют границы инвариантного интервала бассейна притяжения точки $(1, 0)$.

Когда $1 < b < \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, то отображение f_ϕ также обладает инвариантным интервалом, но точка $(1, 0)$ уже входит в границу этого инвариантного интервала, который представляет собой бассейн притяжения, образованный одной из оставшихся неподвижных притягивающих точек.

Суммируем полученные результаты в следующей теореме:

Теорема 5.1. *Однородные внутренние квадратичные отображения цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus O$ линейными заменами координат сводятся к отображениям двухпараметрического семейства (4.1). При этом для полученных коэффициентов справедливы следующие утверждения:*

(а) если параметры a и b попадают внутрь области

$$a^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

то отображение топологически сопряжено голоморфному отображению z^2 ;

(б) за исключением точки $a = 0$ $b = 1$, область $b \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ в полуплоскости параметров $\{(a, b) | b > 0\}$, сохраняющих ориентацию отображений семейства (4.1), содержит отображения, которые топологически не сопряжены голоморфному отображению z^2 ;

(с) в области $b \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ можно выделить следующие подмножества:

- точка $a = 0$ $b = 1$;
- прямая $b = 1$ без точки $a = 0$ $b = 1$;
- парабола $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ без точки $a = 0$ $b = 1$;
- двумерные открытые области - связные компоненты дополнения к объединению вышеперечисленных подмножеств в полуплоскости параметров.

такие, что отображения, параметры которых принадлежат подмножествам разных размерностей, топологически не сопряжены между собой, так как имеют разное число неподвижных точек.

Для дальнейшего описания классов топологической сопряженности отображений семейства (4.1) необходимо дальнейшее исследование их периодических точек.

При этом исследование точек периода 2 еще может быть выполнено аналитическим способом, так как сводится к уравнениям 4-й степени, однако исследование точек более высоких периодов приводит к уравнениям 8-й и больше степени, что потребует приближенных вычислений и экспериментов на компьютере. В работе [4] было высказано предположение, что число периодических интервалов у индуцированного отображения окружности будет конечным. Используя компьютерные эксперименты, можно попытаться оценить это число, затем доказывать полученную гипотезу методами одномерной динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кузаконь В. М., Кириченко В. Ф., Пришляк О. О. Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. — Институт математики НАН України. Киев, 2013. — **97**. — С. 500.
- [2] *Cabrera Carlos*. On the classification of laminations associated to quadratic polynomials // *J. Geom. Anal.* — 2008. — **18**, 1. — P. 29–67.
- [3] *Власенко И. Ю.* Особенности динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов. // *Труды Международной конференции “Геометрия в Одессе – 2008”*. — 2008. — С. 373–389.
- [4] *Власенко И. Ю.* Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. — Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Інститут математики НАН України, Київ, 2014. — **101**. — С. 225.
- [5] *Власенко И. Ю.* Топологические инварианты однородных многочленов на цилиндре // *Proc. Intern. Geom. Center.* — 2015. — 1. — С. 7–11.
- [6] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. — Институт математики НАН України. Киев, 2008. — **70**. — С. 539.

И. Ю. Власенко, Т. В. Рыбалкина

Институт математики НАН Украины, Киев.
vlasenko@imath.kiev.ua, rybalkina_t@ukr.net

Примеры внутренних отображений цилиндра с нейтрально неблуждаю- щими точками, не являющимися нейтрально рекуррентными

We construct examples of inner mappings of cylinder with neutrally non-wandering points that are not neutrally recurrent.

Побудовано приклади внутрішніх відображень циліндра, які мають нейтрально неблуждаючі точки, що не є нейтрально рекуррентними.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1,2] были введены новые топологические инварианты внутренних отображений, в качестве модели для которых были взяты инвариантные множества динамических систем, образованные гомеоморфизмами. В частности, были введены множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Как известно, их аналоги — множества рекуррентных и неблуждающих точек различны (см. [3], глава 1.1). Однако оставался открытым вопрос, различны ли множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Построенный в [4] пример дал на этот вопрос положительный ответ. Однако построенное отображение является внутренним отображением некоторого абстрактного топологического пространства, не вложимого ни в какое конечномерное многообразие. В данной работе также построены примеры отображений, у которых нейтрально неблуждающее множество отлично от

нейтрально рекуррентного множества, а также дополнительно нейтрально неблуждающее множество отлично от нейтрально предельного множества, и нейтрально предельное множество отлично от нейтрально рекуррентного множества. Кроме того, в отличие от примера в [4], построенного на некотором абстрактном топологическом пространстве, данные примеры являются накрытиями двумерного цилиндра.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Внутренним отображением будем называть открытое (образ открытого множества открыт) изолированное (прообраз каждой точки состоит из изолированных точек) отображение. Пусть $f: X \rightarrow X$ — внутренний эндоморфизм цилиндра $X = \mathbb{R} \times S^1$.

Следующие определения были введены в [1, 2].

Определение 2.1. *Нейтральным сечением точки x назовем множество*

$$O_f^\perp(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(x)). \quad (2.1)$$

Определение 2.2. *Точка x называется нейтрально рекуррентной (или \perp -рекуррентной), если x граничная точка для множества $O_f^\perp(x) \setminus \{x\}$.*

Определение 2.3. *Точка x называется блуждающей точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. При этом U называется окрестностью блуждания для x . Иначе точка называется неблуждающей.*

Определение ниже применимо только для локально связных пространств, но в данном случае его достаточно. Общая форма этого определения есть в [2].

Определение 2.4. Точка x называется *нейтрально блуждающей* (или \perp -блуждающей) точкой f , если найдется открытая окрестность U точки x такая, что U является компонентой связности множества $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(U))$. При этом U называется *окрестностью \perp -блуждания* для x . Иначе точка называется \perp -неблуждающей.

Здесь и везде знак \perp - будет синонимом и сокращением слова “нейтрально”. Тогда в определениях выше \perp -блуждающее означает нейтрально блуждающее, \perp -рекуррентное означает нейтрально рекуррентное и т. д.

Определение 2.5. Множество U назовем *нейтрально инвариантным* относительно f , если для всех $x \in U$, $O_f^\perp(x) \subset U$.

Определение 2.6. Множество $f^{-n}(f^n(U)) \setminus f^{-(n-1)}(f^{n-1}(U))$ назовем *n -й нейтральной итерацией* множества U .

Определение 2.7. *Нейтральным предельным множеством* точки x назовем

$$\perp(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_f^\perp(x) \setminus f^{-n}(f^n(x))}$$

Определение 2.8. Множество точек y таких, что найдется x , такое, что $y \in \perp(x)$, назовем *множеством нейтральных предельных точек* отображения f и обозначим через $\text{Lim}^\perp(f)$.

3. ИТЕРИРОВАННАЯ ГРУППА МОНОДРОМИИ

Определение 3.1. Открытое множество U *правильно накрыто* отображением f , если $f^{-1}(U)$ можно представить в виде дизъюнктного объединения открытых множеств $V_i \subset X$, каждое из которых гомеоморфно отображается на U при помощи f .

Определение 3.2. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$ называется *накрывающим*, если любая точка $x \in X$ имеет

открытую окрестность, правильно накрытую отображением f . В этом случае мы говорим, что f — накрытие.

Определение 3.3. Гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$ называется *скольжением* или же *автоморфизмом накрытия* $f: X \rightarrow X$, если $f \circ h = f$.

Предположим, что X — многообразие с абелевой фундаментальной группой $\pi_1(X)$, для которого существует накрывающее отображение $f: X \rightarrow X$. Тогда для каждого $n \geq 1$ отображения f^n также являются накрытиями. Отметим, что f индуцирует гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в себя. Поскольку $\pi_1(X)$ — абелева, то образ $\pi_1(X)$ является нормальной подгруппой в $\pi_1(X)$. Такие накрытия называют *регулярными*. В этом случае фактор-группа $G_f = \pi_1(X)/f(\pi_1(X))$ действует на X , так, что отображение f можно рассматривать как фактор-отображение $f: X \rightarrow X/G_f \cong X$.

Аналогично, так как $\pi_1(X)$ абелева, то накрытие $f^n: X \rightarrow X$ также будет регулярным, а значит $f^n: X \rightarrow X/G_{f^n} \cong X$, где $G_{f^n} = \pi_1(X)/f^n(\pi_1(X))$ — группа автоморфизмов накрытия f^n (см., например, [5]).

Другими словами, мы имеем убывающую последовательность нормальных подгрупп

$$\pi_1 X \supset f(\pi_1 X) \supset \dots \supset f^n(\pi_1 X) \supset f^{n+1}(\pi_1 X) \supset \dots,$$

и соответствующую возрастающую последовательность фактор-групп:

$$G_f \subset G_{f^2} \subset \dots \subset G_{f^n} \subset \dots.$$

Прямой предел этих групп по вложению обозначим через G_{f^∞} и назовем *группой итерированной монодромии накрытия f* . Эта группа действует на X гомеоморфизмами.

Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим точку $f^n(x)$. Элементы группы G_{f^n} — гомеоморфизмы $X \rightarrow X$, которые отображают точку x в различные прообразы точки $f^n(x)$ под действием f^{-n} . Поэтому значение многозначного отображения

$f^{-n} \circ f^n$ в точке x совпадает с объединением значений всех элементов группы G_{f^n} в точке x , т. е.

$$f^{-n}(f^n(x)) = \bigcup_{h \in G_{f^n}} h(x).$$

Отсюда вытекает, что группа G_{f^∞} итерированной монодромии накрытия f оставляет инвариантными нейтральные сечения точек.

4. СЕМЕЙСТВО НАКРЫТИЙ ЦИЛИНДРА

Будем строить примеры с помощью специального семейства внутренних отображений двумерного цилиндра $\mathbb{R} \times S^1$, с координатами $r \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in [0, 1)$. Эти внутренние отображения имеют вид $f(r, \varphi) = (r + 1 + d(r, \varphi), 2\varphi)$, где функция $d(r, \varphi)$ подобрана так, что при любом фиксированном значении φ отображение $r + d(r, \varphi)$ является гомеоморфизмом отрезка $[0, 1]$ на себя, а отображение $f(r, \varphi)$ топологически сопряжено само с собой с помощью гомеоморфизма сдвига $r \mapsto r + 1$. Как следствие, тогда $d(r + 1, \varphi) = d(r, \varphi)$. Легко проверить, что координатные прямые $\varphi = \text{const}$ этого цилиндра образуют для всех отображений такого вида инвариантное слоение. В частности, прямая $\varphi = 0$ отображается ими в себя.

В таком виде эти отображения являются накрытиями цилиндра степени 2. Группа автоморфизмов такого накрытия является циклической степени 2. Соответственно, группа автоморфизмов k -й степени такого накрытия является циклической степени 2^k , а описанная выше группа итерированной монодромии — группой двоично-рациональных вычетов по модулю 1.

Для гомеоморфизма группы итерированной монодромии накрытий цилиндра можно ввести обозначения вида h_φ , где h_0 — тождественное отображение, а h_ψ — автоморфизм некоторой степени накрытия, который переводит прямую $\varphi = 0$ в прямую $\varphi = \psi$. Из коммутативности следует, что $h_{\varphi_1} \circ h_{\varphi_2} = h_{\varphi_1 + \varphi_2}$.

5. ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРОВ

Построим примеры накрытий цилиндра, у которых есть \perp -неблуждающие точки, не являющиеся \perp -рекуррентными.

Пример 5.1. *Пример отображения, имеющего \perp -неблуждающие \perp -предельные, но не \perp -рекуррентные точки.*

Построение. Пусть внутреннее отображение цилиндра $f(r, \varphi) = (R(r, \varphi), \Phi(\varphi))$ задано с помощью пары функций $R(r, \varphi) = r + 1 + d(r, \varphi)$ и $\Phi(\varphi) = 2\varphi$, где

$$d(r, \varphi) = \frac{1}{4} \min(\{r\}, 1 - \{r\}) \min(\{\varphi\}, 1 - \{\varphi\}),$$

причем функция $d(r, \varphi)$ подобрана так, чтобы отображение $r + d(r, \varphi)$ при любом фиксированном значении φ являлось гомеоморфизмом отрезка $[0, 1]$ на себя.

Благодаря специальному виду функции $d(r, \varphi)$, отображение f^{-1} , обратное к отображению f , можно выписать явно. Именно, пусть $f((r', \varphi')) = (r, \varphi)$. Тогда

$$\begin{cases} r' + 1 + \frac{1}{4} \min(\{r'\}, 1 - \{r'\}) \min(\{\varphi\}, 1 - \{\varphi\}) = r \\ 2\varphi' \bmod 1 = \varphi. \end{cases}$$

Заметим, что обозначение точки прообраза через (r', φ') неоднозначно. Отображение f является накрытием степени 2, поэтому у точки (r, φ) ровно 2 прообраза. Обозначим их (r'_0, φ'_0) и (r'_1, φ'_1) .

Отображение f имеет треугольный вид¹, и φ' можно разрешить через φ независимо от r и r' . Для φ' имеется 2 значения: $\varphi'_0 = \frac{\varphi}{2}$ и $\varphi'_1 = (\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}) \bmod 1$. Обозначим

$$C_0 = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_0\}), \quad C_1 = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_1\}, 1 - \{\varphi'_1\}).$$

¹Отображение f от n переменных x_1, \dots, x_n имеет треугольный вид, если его координатная функция f_n зависит только от переменной x_n ; координатная функция f_{n-1} зависит только от x_{n-1} и x_n ; координатная функция f_{n-2} зависит только от x_{n-2}, \dots, x_n и т. д.

Тогда для r'_0 и r'_1 выполнены соотношения

$$\begin{aligned} r'_0 + 1 + C_0 \min(\{r'_0\}, 1 - \{r'_0\}) &= r, \\ r'_1 + 1 + C_1 \min(\{r'_1\}, 1 - \{r'_1\}) &= r. \end{aligned}$$

Запишем r'_i , $i \in \{0, 1\}$, как сумму целой $[r'_i]$ и дробной $\{r'_i\}$ частей:

$$[r'_i] + \{r'_i\} + 1 + C_i \min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\}) = [r] + \{r\}.$$

Функция $d(r, \varphi)$ подобрана так, чтобы отображение $r + d(r, \varphi)$ при любом значении φ являлось гомеоморфизмом отрезка $[0, 1]$ на себя, поэтому всегда $[r'_i] + 1 = [r]$. Отсюда следует, что

$$\{r'_i\} + C_i \min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\}) = \{r\}.$$

Тогда $\{r'_i\}$ разрешается через $\{r\}$ следующим образом:

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \frac{\{r\}}{1+C_i} & \{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\} \\ \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i} & \{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}. \end{cases}$$

Поскольку условия $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$ и $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$ выражены в терминах искомой величины $\{r'_i\}$, их удобнее переписать в терминах сравнения $\{r\}$ с некоторым пороговым значением. Если $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \leq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$. И наоборот, если $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \geq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$. Тогда, зная φ'_i , r'_i можно однозначно вычислить через r и φ'_i :

$$\begin{aligned} [r'_i] &= [r] - 1, \\ \{r'_i\} &= \begin{cases} \frac{\{r\}}{1+C_i} & \{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i \\ \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i} & \{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Заметим, что поскольку φ может принимать значения на отрезке $[0, 1)$, то выражения $C_i = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_i\}, 1 - \{\varphi'_i\})$ принимают значения на отрезке $[0, \frac{1}{8}]$. При этом, если $C_i = 0$, то график выражения (5.2) есть график тождественного отображения, а если $C_i > 0$, то график выражения (5.2) представляет собой

ломаную из двух звеньев, которая строго ниже графика тождественного отображения на внутренности отрезка $[0, 1]$ и пересекается с графиком тождественного отображения в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Как следствие, для любой точки цилиндра, у которой дробная часть ее r -координаты $\{r\} \neq 0$, если ее прообраз под действием f не лежит на прямой $\varphi = 0$, то у ее прообраза дробная часть ее r -координаты будет строго меньше, чем у исходной точки.

Нейтральные итерации прямой $\varphi = \text{const}$ всюду плотны в цилиндре. Кроме того, окружности $r = 0 \pmod{1}$ инвариантны, и на них отображение совпадает со стандартным растягивающим отображением 2φ . Следовательно, окружности $r = 0 \pmod{1}$ являются нейтральным предельным множеством для своих точек.

Легко проверить, что отображение f топологически сопряжено само с собой с помощью гомеоморфизма сдвига $r \mapsto r + 1$. Как следствие, на всех замкнутых кольцах U_k между окружностями $r = k$ и $r = k + 1$ динамика одинакова с точностью до сдвига $r \mapsto r + 1$. Поэтому достаточно рассмотреть только одно кольцо.

Рассмотрим замкнутое кольцо U_0 , ограниченное окружностями $r = 0$ и $r = 1$. По построению все точки цилиндра блуждающие, а кольца между окружностями $r = 0 \pmod{1}$ являются нейтрально инвариантными. Поэтому U_0 является фундаментальной окрестностью второго рода¹ и для любой точки $x \in U_0$, $O_f^\perp(x) \subset U_0$. Поскольку U_0 замкнуто, то и $\perp(x) \subset U_0$. Для точек $x \in \text{Int}(U_0)$ конкретный вид множеств $\perp(x)$ зависит от свойств отображения f .

Для любого отрезка I_{ϕ_0} , образованного пересечением координатной прямой $\varphi = \phi_0$ с замкнутым кольцом U_0 , множество $\bigcup_m f^{-m}(f^m(I_{\phi_0}))$ плотно в замкнутом кольце U_0 .

¹См. раздел 4.6 в [2].

Рассмотрим отрезок $I_0 = U_0 \cap \{\varphi = 0\}$. Этот отрезок удобен тем, что для любой его внутренней точки $x \in \text{Int}(I_0)$ образы этой точки под действием последовательности нейтральных отображений $f^{-n} \circ f^n$ накапливаются по направлению к окружности $r = 0$. Докажем этот факт.

Функция $d(r, \varphi)$ выбрана так, что когда $\varphi = 0$, то $d(r, \varphi) = 0$. Поэтому $f^n((r, 0)) = (r + n, 0)$ для любой точки вида $(r, 0)$ и $n \geq 0$. В частности, точки из I_0 также имеют вид $(r, 0)$.

Рассмотрим вышеприведенное выражение (5.2) для вычисления прообразов точки под действием f^{-1} . Применяя его к вычислению f^{-n} из точек $(r + n, 0)$ легко видеть, что для других точек нейтрального сечения точки $(r, 0)$ $\varphi \neq 0$, поэтому, как уже было отмечено выше, из выражения (5.2) следует, что дробная часть ее r -координаты будет строго меньше, чем у исходной точки.

Таким образом, точки из внутренности отрезка I_0 не являются \perp -рекуррентными, и для любой точки из внутренности отрезка I_0 ее нейтральные итерации все дальше сдвигаются по направлению к окружности $r = 0$. Возникает вопрос: как устроено нейтрально предельное множество этих точек? Стоит ли оно из окружности $r = 0$, или туда входят и другие точки?

Используя определение f и выражение (5.2), нейтральные итерации точек можно явно и точно вычислить. К примеру, рассмотрим нейтральное сечение точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$.

Нейтральное сечение состоит из точек $f^{-n}(f^n(A))$. Его можно представить как объединение непересекающихся “нейтральных итераций”, множеств $\Delta_k = f^{-k}(f^k(A)) \setminus f^{-(k-1)}(f^{k-1}(A))$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{A\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}, \\ \Delta_1 &= f^{-1}(f^1(A)) \setminus \{A\} = \left\{ \left(\frac{4}{9}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \Delta_2 &= \left\{ \left(\frac{64}{153}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{64}{153}, \frac{3}{4} \right) \right\}, \\ \Delta_3 &= \left\{ \left(\frac{2048}{5049}, \frac{1}{8} \right), \left(\frac{2048}{5355}, \frac{3}{8} \right), \left(\frac{2048}{5355}, \frac{5}{8} \right), \left(\frac{2048}{5049}, \frac{7}{8} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что отображение f симметрично по φ относительно инволюции $\varphi \mapsto 1 - \varphi$, поэтому нейтральное сечение и множества Δ_k также симметричны. Соответственно, достаточно указать только половину этих множеств. В частности,

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= \left\{ \left(\frac{131072}{328185}, \frac{1}{16} \right), \left(\frac{131072}{358785}, \frac{3}{16} \right), \left(\frac{131072}{369495}, \frac{5}{16} \right), \left(\frac{131072}{358479}, \frac{7}{16} \right), \dots \right\}, \\ \Delta_5 &= \left\{ \left(\frac{16777216}{42335865}, \frac{1}{32} \right), \left(\frac{16777216}{47000835}, \frac{3}{32} \right), \left(\frac{16777216}{49142835}, \frac{5}{32} \right), \left(\frac{16777216}{48394665}, \frac{7}{32} \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{16777216}{49111623}, \frac{9}{32} \right), \left(\frac{16777216}{51359805}, \frac{11}{32} \right), \left(\frac{16777216}{50588685}, \frac{13}{32} \right), \left(\frac{16777216}{46930455}, \frac{15}{32} \right), \dots \right\}.\end{aligned}$$

Как мы видим, с каждой новой “нейтральной итерацией” множеством Δ_k , максимальное значение r -координаты точек множества Δ_k уменьшается, что подтверждает рассуждения выше. Однако этот максимум не сходится к нулю. К примеру, среди точек нейтрального сечения точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$ есть подпоследовательности, которые сходятся к некоторой точке $B = (0.393208\dots, 0) \in I_0$.

Остановимся на этом факте подробнее. Поскольку точные значения в виде дробей точек из нейтрального сечения точки A достаточно громоздки, воспользуемся тем, что f имеет треугольный вид, и введем короткие обозначения для точек нейтральных сечений. Поскольку для любой точки цилиндра на каждой прямой $\varphi = \text{const}$ содержится не более одной точки ее нейтрального сечения, введем для точек нейтрального сечения обозначения вида A_φ , где A — точка, для которой рассматривается нейтральное сечение, φ — угловая координата обозначаемой точки нейтрального сечения точки A . К примеру, точку $(\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$ обозначим через $A_{\frac{1}{2}}$, а исходная точка $A = (\frac{1}{2}, 0)$ получит дополнительное обозначение A_0 .

В этих обозначениях сходящиеся к B подпоследовательности можно записать как $(A_{\frac{1}{2^m}})$ и $(A_{1-\frac{1}{2^m}})$. Эти две подпоследовательности симметричны и переходят друг в друга с помощью инволюции $\varphi \mapsto 1 - \varphi$.

Покажем, что эти подпоследовательности действительно сходятся к точке B . Из-за симметрии достаточно показать это только для подпоследовательности $(A_{\frac{1}{2^m}})$.

Отметим, что поскольку f самосопряжено с помощью сдвига $r \mapsto r + 1$, то для f существует эффективный алгоритм вычисления итераций нейтрального сечения, отличный от последовательного вычисления множеств $f^{-n}(f^n(x))$. Именно, пусть у нас вычислено множество $f^{-n}(f^n(x))$. Сдвинем его точки отображением $r \mapsto r + 1$. В силу самосопряженности, полученные точки принадлежат множеству $f^{-n}(f^{n+1}(x))$, и мы за один шаг можем получить множество $f^{-(n+1)}(f^{n+1}(x))$, просто применив выражение (5.2). При этом сдвиг $r \mapsto r + 1$ и шаг $[r'_i] = [r] - 1$ из выражения (5.2) взаимно компенсируют друг друга, поэтому там достаточно использовать только выражение для вычисления $\{r'_i\}$, добавляя целую часть, взятую из исходных точек. В частности, для точек замкнутого цилиндра U_0 целая часть равна нулю, поэтому для них выражение для вычисления $\{r'_i\}$ можно использовать напрямую. К примеру, точки $A_{\frac{1}{8}}$ и $A_{\frac{5}{8}}$ можно напрямую получить из точки $A_{\frac{1}{4}}$, используя (5.2). Этот способ вычислений существенно упрощает дальнейшие рассуждения.

Вернемся к вышеприведенным точным значениям точек A_φ первых 5 итераций нейтрального сечения точки A . Уже начиная с 4-й итерации, у этих точек, кроме точек $A_{\frac{1}{16}}$ и $A_{\frac{15}{16}}$, которые принадлежат последовательностям $(A_{\frac{1}{2^n}})$ и $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$, значение r -координаты меньше 0.38, что меньше, чем у точки B . Следовательно, вычисленные из них с помощью (5.2) последующие итерации точек нейтрального сечения точки A будут иметь еще меньшее значение r -координаты. Выше значения 0.38 могут быть только точки, вычисленные из $A_{\frac{1}{16}}$ и $A_{\frac{15}{16}}$.

$A_{\frac{15}{16}}$ и другие точки последовательности $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$ мы рассматривать не будем, так как они симметричны последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$ и для них справедливо все то же, что и для точек последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$.

Рассмотрим, что можно вычислить из $A_{\frac{1}{16}}$. Это точки $A_{\frac{1}{32}}$ и $A_{\frac{17}{32}}$. $A_{\frac{1}{32}}$ принадлежит последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$. Рассмотрим $A_{\frac{17}{32}}$. $A_{\frac{17}{32}}$ вычислена из $A_{\frac{1}{16}}$. Сравним ее с $A_{\frac{9}{16}}$, которая вычислена из $A_{\frac{1}{8}}$. Для этих точек выражение (5.2) имеет вид $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$. По сравнению с $A_{\frac{9}{16}}$, у $A_{\frac{17}{32}}$ значение исходной r -координаты меньше, так как взято у $A_{\frac{1}{16}}$, а не $A_{\frac{1}{8}}$, а выражение $1 + C_i$ больше, так как $\frac{17}{32}$ ближе к $\frac{1}{2}$, чем $\frac{9}{16}$. Поэтому r -координата точки $A_{\frac{17}{32}}$ меньше, чем у точки $A_{\frac{9}{16}}$, следовательно, также меньше 0.38. Рассуждая по индукции, это же справедливо и для всех точек последовательности $(A_{\frac{2^{n-1}+1}{2^n}})$, вычисляемых их точек последовательности $(A_{\frac{1}{2^{n-1}}})$.

Осталось проверить, действительно ли у точек последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$ r -координата не стремится к нулю. Вычислим явно эту последовательность. φ -координата точки $A_{\frac{1}{2^n}}$ — это $\frac{1}{2^n}$. В соотношении $\{r'_0\} = \frac{\{r\}}{1+C_0}$, $C_0 = \frac{1}{4} \min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_i\}) = \frac{1}{4}\varphi'_0$, так как $\varphi'_0 \leq \frac{1}{2}$. Поэтому $C_0 = \frac{1}{2^{n+2}}$ и $\frac{1}{1+C_0} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+2}+1}$. r -координата точки $A_{\frac{1}{2}}$ равна $\frac{4}{9}$, как следствие, из соотношения (5.2) r -координата точки $A_{\frac{1}{2^n}}$ имеет вид $\frac{4}{9} \prod_{k=2}^n \frac{2^{k+2}}{2^{k+2}+1}$. Это выражение не сходится к нулю, поэтому последовательность точек $(A_{\frac{1}{2^n}})$ нейтрального сечения точки A действительно сходится к некоторой точке, лежащей выше окружности $r = 0$, которую мы обозначим как

$$B = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{9} \prod_{k=2}^n \frac{2^{k+2}}{2^{k+2}+1}, 0 \right) = (0.393208 \dots, 0).$$

Поскольку у оставшихся точек нейтрального сечения точки A значение r -координаты меньше 0.38, то и у их предельных точек значение r -координаты также меньше 0.38.

Следовательно, B — изолированная точка нейтрального предельного множества $\perp(A)$.

Выше мы рассмотрели нейтральное сечение единственной точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$ из внутренности отрезка I_0 . Однако если r -координата точки отрезка I_0 меньше либо равна $\frac{1}{2}$, то выражение (5.2) для вычисления r -координат их нейтральных итераций имеет вид $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$, а, следовательно, линейно зависит от начальной точки, находящейся на отрезке I_0 . Соответственно, у точек отрезка I_0 с r -координатой в интервале $(0, \frac{1}{2}]$ их нейтральное предельное множество в точности подобно вышеописанному нейтральному предельному множеству $\perp(A)$, только сжато по r -координате пропорционально расположению этих точек между точкой $A = (\frac{1}{2}, 0)$ и окружностью $r = 0$.

Отсюда следует, что точки отрезка I_0 между точкой B и окружностью $r = 0$ принадлежат множеству нейтрально предельных точек $\text{Lim}^\perp(f)$.

На самом деле можно показать, что все точки отрезка I_0 принадлежат множеству нейтрально предельных точек $\text{Lim}^\perp(f)$. Для точек, расположенных выше точки $(\frac{1}{2}, 0)$, рассуждения несколько усложняются, так как полное выражение (5.2) для вычисления r -координат имеет два варианта, в зависимости от того, выше или ниже r -координата значения $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$. Однако, если взять достаточно высоко расположенную точку, например, точку $(\frac{3}{4}, 0)$, то точки ее нейтрального сечения с φ -координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, будут иметь r -координату, большую, чем $\frac{1}{2}$. Это можно доказать, полностью повторив для точки $(\frac{3}{4}, 0)$ рассуждения, которые использовались для $(\frac{1}{2}, 0)$, только заменив там выражение для вычисления r -координат нейтральных итераций с $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$ на $\{r'_i\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$. Как следствие, получим, что точки нейтрального сечения точки $(\frac{3}{4}, 0)$ с φ -координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, сходятся к некоторой точке, также принадлежащей внутренности отрезка I_0 . Из линейности отображения $\{r'_i\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$ этот же факт имеет место и для всех точек внутренности отрезка I_0 , расположенных выше точки

$(\frac{3}{4}, 0)$, а также для точек, расположенных ниже точки $(\frac{3}{4}, 0)$, но выше некоторого предела.

Рассмотрим точки внутренности отрезка I_0 , расположенные между точками $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(\frac{3}{4}, 0)$. Спускаясь от точки $(\frac{3}{4}, 0)$ к точке $(\frac{1}{2}, 0)$, сначала все точки нейтрального сечения точки $(x, 0)$ с φ -координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, будут иметь r -координату, большую, чем $\frac{1}{2}$ и доказательство сводится к случаю точки $(\frac{3}{4}, 0)$. Затем, начиная с некоторого значения r -координаты, только конечное число точек будет вычисляться с помощью выражения $\{r'_i\} = \frac{\{r\} - C_i}{1 - C_i}$, а бесконечное число точек — с помощью выражения $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1 + C_i}$. В этом случае сходимость точек нейтрального сечения точки $(x, 0)$ с φ -координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$ к некоторой точке, принадлежащей внутренности отрезка I_0 , доказывается аналогично случаю точки $(\frac{1}{2}, 0)$.

Получим, что произвольной точке с координатами $(x, 0)$ из внутренности отрезка I_0 можно единственным образом сопоставить наивысшую по r -координате точку ее нейтрально предельного множества, причем эта наивысшая точка нейтрально предельного множества также находится во внутренности отрезка I_0 и причем строго ниже исходной точки. Обозначим r -координату наивысшей точки через $\max^\perp(x)$. $\max^\perp(x)$ можно рассматривать как монотонное отображение отрезка $[0, 1]$ в себя.

Покажем, что $\max^\perp(x)$ непрерывно зависит от x . Зафиксируем точку $(x, 0)$ во внутренности отрезка I_0 . Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ обе точки $(x \pm \varepsilon, 0)$ также принадлежат внутренности отрезка I_0 . Образы отрезка I_0 под действием отображений $f^{-n} \circ f^n$ представляют собой конечные наборы отрезков I_φ , где φ — некоторый прообраз 0 относительно отображения $2^n \varphi$. Каждый из отрезков I_φ является гомеоморфным образом отрезка I_0 под действием некоторой ветви отображения $f^{-n} \circ f^n$. Поэтому на каждом из отрезков I_φ будет в точности по одной точке нейтрального сечения точек $(x, 0)$ и

$(x \pm \varepsilon, 0)$, причем в том же порядке, что и на I_φ . Как следствие, нейтральное сечение точки $(x, 0)$ и любые его подмножества мажорируются соответствующими подмножествами нейтральных сечений выше и ниже расположенных точек $(x \pm \varepsilon, 0)$.

В частности, поскольку подпоследовательности точек нейтрального сечения точки $(x, 0)$ и точек $(x \pm \varepsilon, 0)$ с φ -координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, сходятся, из этого следует непрерывность зависимости r -координаты $\max^\perp(x)$ наивысшей точки нейтрального предельного множества точки $(x, 0)$ от выбора исходной точки $(x, 0)$.

Отображение $\max^\perp(x)$ отрезка $[0, 1]$ в себя монотонно и непрерывно, следовательно, это гомеоморфизм. Отсюда следует, что все точки внутренности отрезка I_0 принадлежат множеству нейтрально предельных точек $\text{Lim}^\perp(f)$. А так как точки окружности $r = 0$ \perp -рекуррентные, то они по определению тоже принадлежат $\text{Lim}^\perp(f)$. Из сопряженности сдвигом $r \mapsto r + 1$ следует, что вся прямая $\varphi = 0$ принадлежит $\text{Lim}^\perp(f)$. Поскольку множество $\text{Lim}^\perp(f)$ замкнуто, а нейтральные образы прямой $\varphi = 0$ всюду плотны в цилиндре, отсюда следует, что множество нейтрально предельных точек $\text{Lim}^\perp(f)$ совпадает со всем цилиндром.

Заметим, что нейтральные итерации $f^{-n} \circ f^n$, $n \geq 1$, переводят нейтральные сечения в нейтральные сечения, а сходящиеся подпоследовательности точек нейтрального сечения в сходящиеся подпоследовательности. Поэтому нейтральные предельные множества естественным образом самоподобны и обладают фрактальной структурой. К примеру, у нейтрального сечения точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$ подпоследовательность $(A \frac{1}{2^n})$ сходятся к точке $B = (0.393208\dots, 0)$. Следовательно, для каждой точки нейтрального сечения точки B найдется подпоследовательность точек нейтрального сечения точки A , которая к ней сходится.

Далее, для точки B наивысшей точкой ее нейтрально предельного множества является точка $B' = (0.309225\dots, 0)$, к которой сходится подпоследовательность $(B'_{\frac{1}{2^n}})$ точек ее нейтрального сечения. Следовательно, B' и все точки ее нейтрального сечения также входят в множество $\perp(A)$ и т.д. Рисунок 5.1 дает некоторое представление, как устроено множество $\perp((\frac{3}{4}, 0))$.

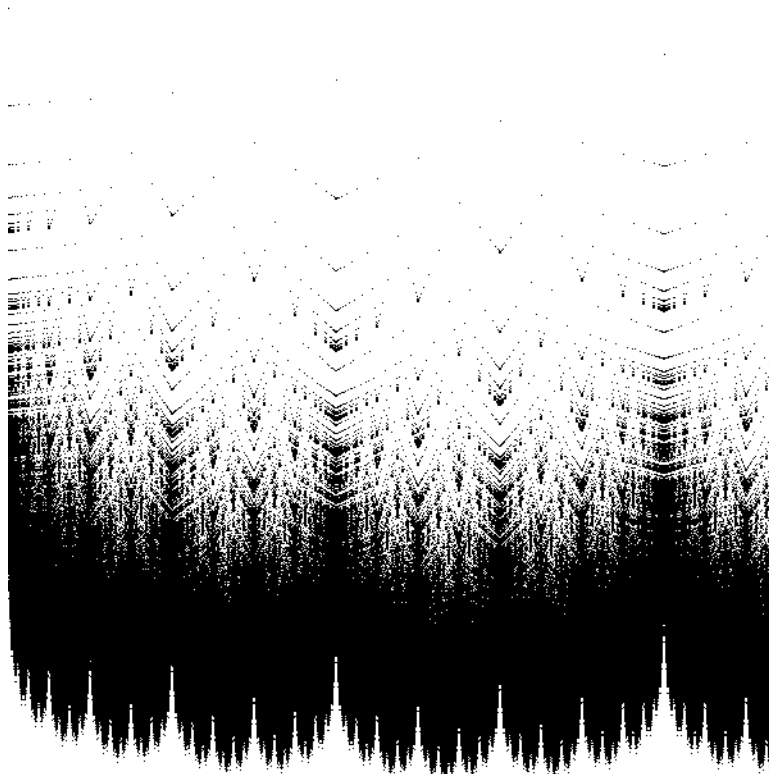


Рис. 5.1. Первые 20 итераций нейтрального сечения точки $(\frac{3}{4}, 0)$. Левый нижний угол U_0 .

Покажем теперь, что точки внутренности отрезка I_0 нейтрально неблуждающие. Для этого рассмотрим малую окрестность D_ε произвольной точки $(x, 0)$, являющуюся внутренностью квадрата, образованного точками $(x - \varepsilon, -\varepsilon)$, $(x + \varepsilon, -\varepsilon)$, $(x + \varepsilon, +\varepsilon)$, $(x - \varepsilon, +\varepsilon)$.

Как показано выше, для произвольной точки $C^2 = (x_2, 0)$ из внутренности отрезка I_0 найдутся $C^1 = (x_1, 0)$ и $C^0 = (x_0, 0)$, $x_0 > x_1 > x_2$, такие, что подпоследовательность $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$ нейтральных сечений точки C^1 стремится к $C^2 = (x_2, 0)$, а подпоследовательность $(C^0_{\frac{1}{2^n}})$ нейтральных сечений точки C^0 стремится к $C^1 = (x_1, 0)$.

Тогда в произвольно малой окрестности U точки C^2 содержится некоторая подпоследовательность последовательности точек $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$ нейтрального сечения точки C^1 , сходящаяся к C^2 , и некоторый набор подпоследовательностей нейтрального сечения точки C^0 , сходящиеся к точкам последовательности точек $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$, содержащимся в окрестности U . Обозначим множество угловых координат точек этих подпоследовательностей нейтрального сечения точки C^0 через $E(U)$.

Как следствие, для любой произвольно малой окрестности U точки C^2 можно выбрать два двоично-рациональных числа (обозначим их $\frac{d_1}{2^{m_1}}$ и $\frac{d_2}{2^{m_2}}$), которые принадлежат $E(U)$ и, следовательно, такие, что точки $C^0_{\frac{d_i}{2^{m_i}}} \in U$.

Рассмотрим ветвь нейтральной итерации, которая переводит точку C^2 в точку ее нейтрального сечения $C^2_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}$. Обозначим ее через $h_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}$. Это гомеоморфизм, элемент группы автоморфизмов накрытия для некоторой степени f . Эта же ветвь нейтральной итерации $h_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}$ переводит точку $C^0_{\frac{d_1}{2^{m_1}}}$ в $C^0_{\frac{d_2}{2^{m_2}}}$. Но $C^0_{\frac{d_i}{2^{m_i}}} \in U$. Следовательно, для произвольной окрестности U имеем, что

$$h_{\frac{d_2}{2^{m_2}} - \frac{d_1}{2^{m_1}}}(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Отсюда следует, что точка C^2 — нейтрально неблуждающая. Искомое утверждение следует из произвольности выбора точки C^2 .

Полученное отображение f является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть \perp -неблуждающая точка, являющаяся \perp -предельной, но не являющаяся \perp -рекуррентной. \square

В предыдущем примере \perp -неблуждающие точки, не являющиеся \perp -рекуррентными, были \perp -предельными.

Пример 5.2. *Пример отображения, имеющего \perp -неблуждающие, но не \perp -предельные (и, следовательно, не \perp -рекуррентные) точки.*

Построение. Заменяем в предыдущем примере 5.1 функцию $d(r, \varphi)$ на

$$d(r, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt[2]{\min(\{r\}, 1 - \{r\})} \sqrt[4]{\min(\{\varphi\}, 1 - \{\varphi\})}.$$

Как и в примере выше, благодаря специальному виду функции $d(r, \varphi)$, отображение f^{-1} , обратное к отображению f , можно выписать явно. Пусть $f((r', \varphi')) = (r, \varphi)$. Отображение f также имеет треугольный вид, и φ' можно разрешить через φ независимо от r и r' . Как и в примере 5.1, для φ' имеется 2 значения: $\varphi'_0 = \frac{\varphi}{2}$ и $\varphi'_1 = (\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}) \bmod 1$. Аналогично обозначим $C_0 = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_0\})}$ и $C_1 = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\min(\{\varphi'_1\}, 1 - \{\varphi'_1\})}$. Тогда для r'_0 и r'_1 выполнены соотношения

$$r'_i + 1 + C_i \sqrt[2]{\min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\})} = r$$

Запишем r'_i , $i \in \{0, 1\}$, как сумму целой $[r'_i]$ и дробной $\{r'_i\}$ частей:

$$[r'_i] + \{r'_i\} + 1 + C_i \sqrt[2]{\min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\})} = [r] + \{r\}.$$

Как и в примере выше, получим, что

$$\{r'_i\} + C_i \sqrt[2]{\min(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\})} = \{r\}.$$

Тогда $\{r'_i\}$ разрешается через $\{r\}$ следующим образом:

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \{r\} - C_i \left(\sqrt{\frac{C_i^2}{4} + \{r\} - \frac{C_i}{2}} \right) & \{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\} \\ \{r\} - C_i \left(\frac{C_i}{2} + \sqrt{\frac{C_i^2}{4} + 1 - \{r\}} \right) & \{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}. \end{cases}$$

Поскольку условия $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$ и $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$ выражены в терминах искомой величины $\{r'_i\}$, их удобнее переписать в терминах сравнения $\{r\}$ с некоторым пороговым значением. Если $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \leq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i$. И наоборот, если $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \geq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i$. Тогда, зная φ'_i, r'_i можно однозначно вычислить через r и φ'_i :

$$[r'_i] = [r] - 1 \quad (5.3)$$

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \{r\} - C_i \left(\sqrt{\frac{C_i^2}{4} + \{r\} - \frac{C_i}{2}} \right) & \{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i \\ \{r\} - C_i \left(\frac{C_i}{2} + \sqrt{\frac{C_i^2}{4} + 1 - \{r\}} \right) & \{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i. \end{cases}$$

Воспользуемся такими же обозначениями U_0, I_0 , что и в примере выше. Можно показать прямым вычислением, что для любой точки $A = (x, 0)$ внутренности отрезка I_0 подпоследовательность точек $(A_{\frac{1}{2^n}})$ нейтрального сечения точки $A = (x, 0)$ сходится к точке $(0, 0)$.

Как следствие, точки из внутренности множества U_0 не являются \perp -предельными точками.

Покажем, что все точки из внутренности множества U_0 \perp -неблуждающие. Так как нейтральные итерации отрезка I_0 всюду плотны в U_0 , достаточно рассмотреть точки из внутренности отрезка I_0 . Рассмотрим произвольную точку $A \in \text{Int } I_0$. Рассмотрим произвольную малую открытую окрестность U точки A . Пусть точка A имеет координаты $(x, 0)$. Рассмотрим окружность $r = x$, проходящую через точку A . Так как U — открытая

окружность, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что метрическая окрестность $B_\varepsilon(A)$ радиуса ε вокруг точки A полностью содержится в U .

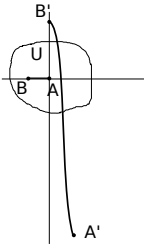


Рис. 5.2. К примеру 5.2.

Пусть $B \in B_\varepsilon(A) \cap \{r = x\} \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(f^n(I_0))$ — точка на окружности $r = x$, которая содержится в $B_\varepsilon(A)$ и в некоторой нейтральной итерации I_0 . Пусть точка B имеет координаты $(-\varphi', x)$. Поскольку B лежит на нейтральной итерации отрезка I_0 , найдется $h_{\varphi'}$ — гомеоморфизм группы итерированной монодромии, который сдвигает отрезок, на котором лежит точка B , в отрезок I_0 . Но тогда при этом отрезок I_0 перейдет в отрезок I'_φ . Поскольку точки отрезка I_0 выше всех своих нейтральных итераций, то точка A перейдет в точку A' , которая будет ниже точки A , а точка B перейдет в точку B' , которая будет выше точки A . Но тогда отрезок BA окружности $r = x$ перейдет в отрезок $B'A'$ замкнутой кривой $h_{\varphi'}(\{r = x\})$, который так же, как и отрезок BA , пересекает каждую координатную прямую $\varphi = \text{const}$ в единственной точке. Эта ситуация изображена на рисунке 5.2. Так как отрезок $B'A'$ так же, как и отрезок BA , пересекает каждую координатную прямую $\varphi = \text{const}$ в единственной точке, поскольку является его сдвигом под действием $h_{\varphi'}$, точка A' ниже точки A , а точка B' выше точки A , то отрезок $B'A'$ пересекает окружность $r = x$ в шаре

$B_\varepsilon(A)$. Но отрезок $B'A'$ по построению лежит в $h_{\varphi'}(U)$. Следовательно, $U \cap h_{\varphi'}(U) \neq \emptyset$ и U нельзя выделить из множества $\cup_{h_\varphi \in G_{f^\infty}} h_\varphi(U)$ компонентой связности.

Из произвольности выбора окрестности U следует, что точка A \perp -неблуждающая. Из произвольности выбора точки A следует, что все точки из внутренности I_0 \perp -неблуждающие.

Полученное отображение f является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть \perp -неблуждающая точка, не являющаяся \perp -предельной и \perp -рекуррентной. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Власенко И. Ю. Динамика внутренних отображений // *Нелінійні коливання*. — 2011. — 2. — С. 181–186.
- [2] Власенко И. Ю. Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. — Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Інститут математики НАН України, Київ, 2014. — 101. — С. 225.
- [3] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. — Москва–Ижевск: РХД, 2011. — С. 423.
- [4] Власенко И. Ю. Пример нейтрально неблуждающей, но не нейтрально рекуррентной точки // *Укр. мат. журн.* — 2015. — 67, 8. — С. 1030–1033.
- [5] Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983. — С. 304.

K. Eftekharinasab

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
kaveheft@gmail.com

Transversality and Lipschitz-Fredholm maps

We study transversality for Lipschitz-Fredholm maps in the context of bounded Fréchet manifolds. We show that the set of all Lipschitz-Fredholm maps of a fixed index between Fréchet spaces has the transverse stability property. We give a straightforward extension of the Smale transversality theorem by using the generalized Sard's theorem for this category of manifolds. We also provide an answer to the well known problem concerning the existence of a submanifold structure on the preimage of a transversal submanifold.

Вивчається поняття трансверсальності відображень Липшица-Фредгольма у контексті обмежених многовидів Фреше. Доведено, що множина всіх відображень Липшица-Фредгольма фіксованого індексу між просторами Фреше має властивість стійкості трансверсальних перетинів. Дано пряме узагальнення теореми Смейла про трансверсальність, для доведення якого використовується узагальнення теореми Сарда на цю категорію многовидів. Також отримано відповідь на відоме питання про існування структури підмноговиду на прообразі трансверсального підмноговиду.

1. INTRODUCTION

In [1] we proved a version of the classical Sard-Smale theorem for a category of generalized Fréchet manifolds, bounded (or MC^k) Fréchet manifolds, introduced in [2]. Our approach to the theorem's generalization is based on the assumption that Fredholm operators need to be globally Lipschitz. A reason for this interest is that there exists an appropriate topology on $\mathcal{L}(E, F)$, the space of all linear globally Lipschitz maps between Fréchet spaces E and

F , that leads to the openness of the set of linear isomorphisms in $\mathcal{L}(E, F)$, [1, Proposition 2.2]. This result in turn yields the openness of the collection of Fredholm operators in $\mathcal{L}(E, F)$, [1, Theorem 3.2]. The other reason is that Lipschitzness is consistent with the notion of differentiability, bounded (or MC^k -) differentiability, that we apply. If E, F are Fréchet spaces and if U is an open subset of E , a map $f: U \rightarrow F$ is called bounded (or MC^1 -) differentiable if it is Keller-differentiable, the directional derivative $df(p)$ belongs to $\mathcal{L}(E, F)$ for all $p \in U$, and the induced map $df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ is continuous. Thus, we can naturally define the index of a Fredholm map between manifolds.

We should point out that the mentioned results stems from the essential fact that under a certain condition we can endow the space $\mathcal{L}(E, F)$ with a topological group structure. Also, the group of automorphisms of a Fréchet space E , $\text{Aut}(E)$, is open in $\mathcal{L}(E, E)$ [3, Proposition 2.1]. But, in general, the group of automorphisms of a Fréchet space does not admit a non-trivial topological group structure. Thus, without some restrictions it would be impossible to establish openness of sets of linear isomorphisms and Fredholm operators. This is a major obstruction in developing the Fredholm theory for Fréchet spaces.

A crucial step in the proof of an infinite dimensional version of Sard's theorem is that, roughly speaking, for a Fredholm map $f: M \rightarrow N$ of manifolds, at each point $p \in M$, we may find local charts $(p \in U \subseteq M, \phi)$ and $(f(p) \in V \subseteq N, \psi)$ such that in the charts f has a representation of the form $f(u, v) = (u, \eta(u, v))$, where $\eta: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a smooth map. This is a consequence of an inverse function theorem. One of the main significance of the category of bounded Fréchet manifolds is the availability of an inverse function theorem in the sense of Nash and Moser [2, Theorem 4.7]. However, the bounded differentiability is strong and in some cases the class of bounded maps can be quite small, e.g. when the identity component of $\mathcal{L}(E, F)$ contains only the zero map [3, Remark 2.16].

We have argued that why we have utilized this particular category of Fréchet manifolds. A salient example of these manifolds is the space of all smooth sections of a fiber bundle over closed or non-compact manifolds ([2, Theorem 3.34]). On the other hand, it turns out that these generalized manifolds can surpass the geometry of Fréchet manifolds. On these manifold we are able to give a precise analytic meaning to some essential geometric objects (such as connection maps, vector fields and integral curves), [4]. Therefore, we would expect their applications to problems in global analysis.

The present work studies the differential topology of Lipschitz-Fredholm maps in the bounded Fréchet setting. We show that the set of Lipschitz-Fredholm operators of index l between Fréchet spaces E and F is open in the space of linear globally Lipschitz maps endowed with the fine topology (Proposition 3.5). We say that a set of maps has the transverse stability property for the fine topology if maps in a fine neighborhood of a given map have the same transversality property i.e. if $f: E \rightarrow F$ is a map transversal to a closed subspace \mathbb{F} of F , then any map in a fine neighborhood of f is transversal to \mathbb{F} . We then prove that the set of all Lipschitz-Fredholm maps of a fixed index between Fréchet spaces has the transverse stability property (Theorem 3.6). We also study transversality for Lipschitz-Fredholm maps between manifolds. We give a straightforward generalization of the Smale transversality theorem ([5, Theorem 3.1]) by using our generalized Sard's theorem (Theorem 3.9). Finally, we prove that if $f: M \rightarrow N$ is an MC^k Lipschitz-Fredholm map of manifolds which is transversal to a finite dimensional submanifold \mathcal{A} of N , then $f^{-1}(\mathcal{A})$ is a submanifold (Theorem 4.2).

We stress that these results can not be proved without strong restrictions. However, the basic concepts of infinite dimensional differential topology such as submanifold and transversality can be simply come over from the Banach setting.

Our motivation for the present work, in the light of [4], lay in the desire to develop transversality tools for the degree theory, including the Leray-Schauder degree, for Lipschitz-Fredholm maps, to derive applications to the study of solutions to systems of non-linear partial differential or integral equations on spaces of smooth sections which are not linear.

2. PRELIMINARIES

We shall recall the required definitions from the category of MC^k manifolds briefly but in a self-contained way for the convenience of the reader, which also give us the opportunity to establish our notations for the rest of the paper. For more studies we refer to [1, 2, 4].

Let (F, d) be a Fréchet space whose topology is defined by a complete translational-invariant metric d . A metric with absolutely convex balls will be called a standard metric. Every Fréchet space admits a standard metric which defines its topology. We shall always define the topology of Fréchet spaces with this type of metrics.

Let (E, g) and (F, d) be Fréchet spaces and let $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ be the set of all linear maps $L: E \rightarrow F$ such that

$$\text{Lip}(L)_{g,d} := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{d(L(x), 0)}{g(x, 0)} < \infty.$$

The transversal-invariant metric

$$D_{g,d}(L, H) = \text{Lip}(L - H)_{g,d} \quad (2.1)$$

on $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ turns it into an Abelian topological group ([1, Remark 2.1]). A map $\varphi \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ is called Lipschitz-Fredholm operator if its kernel has finite dimension and its image is closed and has finite co-dimension. The index of φ , $\text{Ind } \varphi$, is defined by $\text{Ind } \varphi = \dim \ker \varphi - \text{codim } \text{Im } \varphi$. We denote by $\mathcal{LF}(E, F)$ the set of all Lipschitz-Fredholm operators, and by $\mathcal{LF}_l(E, F)$ the subset of $\mathcal{LF}(E, F)$ consisting of those operators of index l .

Proposition 2.1. [1, Proposition 2.2] *The set of linear isomorphisms from E into F , $\text{Iso}(E, F)$, is open in $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ with respect to the topology induced by the Metric (2.1).*

Theorem 2.2. [1, Theorem 3.2] *$\mathcal{LF}(E, F)$ is open in $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ with respect to the topology defined by the metric (2.1). Furthermore, the function $T \rightarrow \text{Ind}T$ is continuous on $\mathcal{LF}(E, F)$, hence constant on connected components of $\mathcal{LF}(E, F)$.*

A subset G of a Fréchet space F is called topologically complemented (or it splits in F), if F is homeomorphic to the topological direct sum $G \oplus H$, where H is a subspace of F . We call H a topological complement of G in F .

Theorem 2.3. [2, Theorem 3.14] *Let E be a Fréchet space. Then*

- (1) *Every finite-dimensional subspace of E is closed.*
- (2) *Every closed subspace $G \subset E$ with*

$$\text{codim}(G) = \dim(E/G) < \infty$$

is topologically complemented in E .

- (3) *Every finite-dimensional subspace of E is topologically complemented.*
- (4) *A linear subspace G of E has a topological complement H if and only if there exists a continuous projection Pr of E onto H , see [6].*

Let E, F be Fréchet spaces, U an open subset of E , and

$$P: U \rightarrow F$$

a continuous map. Let $CL(E, F)$ be the space of all continuous linear maps from E to F topologized by the compact-open topology. We say P is differentiable at the point $p \in U$ if the directional derivative $dP(p)$ exists in all directions $h \in E$. If P is differentiable at all points $p \in U$, if $dP(p): U \rightarrow CL(E, F)$ is continuous for all $p \in U$ and if the induced map

$$P': U \times E \rightarrow F, \quad (u, h) \mapsto dP(u)h$$

is continuous in the product topology, then we say that P is Keller-differentiable. We define $P^{(k+1)}: U \times E^{k+1} \rightarrow F$ in the obvious inductive fashion.

If P is Keller-differentiable, $dP(p) \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ for all $p \in U$, and the induced map $dP(p): U \rightarrow \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ is continuous, then P is called bounded differentiable. We say P is MC^0 and write $P^0 = P$ if it is continuous. We say P is an MC^1 and write $P^{(1)} = P'$ if it is bounded differentiable. Let $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)_0$ be the connected component of $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ containing the zero map. If P is bounded differentiable and if $V \subseteq U$ is a connected open neighborhood of $x_0 \in U$, then $P'(V)$ is connected and hence contained in the connected component $P'(x_0) + \mathcal{L}_{g,d}(E, F)_0$ of $P'(x_0)$ in $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$. Thus, the map $Q_{x_0}: V \rightarrow \mathcal{L}_{g,d}(E, F)_0$ defined by

$$Q_{x_0}(y) = P'(y) - P'(x_0)$$

is again a map between subsets of Fréchet spaces. This enables a recursive definition: if P is MC^1 and V can be chosen for each $x_0 \in U$ such that $Q_{x_0}: V \rightarrow \mathcal{L}_{g,d}(E, F)_0$ is MC^{k-1} , then P is called an MC^k -map. We make a piecewise definition of $P^{(k)}$ by $P^{(k)}|_V := (Q_{x_0})^{(k-1)}$ for x_0 and V as before. The map P is MC^∞ (or smooth) if it is MC^k for all $k \in \mathbb{N}_0$. We shall denote the derivative of P at p by $DP(p)$. Note that MC^k -differentiability implies the usual C^k -differentiability for maps of finite dimensional manifolds.

Within this framework we can define MC^k Fréchet manifolds, MC^k -maps of manifolds and tangent bundle over MC^k manifolds in obvious fashion way. We assume that manifolds are connected and second countable.

Let $f: M \rightarrow N$ ($k \geq 1$) be an MC^k -map of manifolds. We denote by $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ the tangent map of f at $x \in M$ from the tangent space $T_x M$ to the tangent space $T_{f(x)} N$. We say that f is an immersion (resp. submersion) provided $T_x f$ is injective (resp. surjective) and the range $\text{Img}(T_x f)$ (resp. the kernel $\ker(T_x f)$) splits in $T_{f(x)} N$ (resp. $T_x M$) for any $x \in M$. An injective immersion $f: M \rightarrow N$ which gives an isomorphism

onto a submanifold of N is called an embedding. A point $x \in M$ is called a regular point if $Df(x): T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$ is surjective. The corresponding value $f(x)$ is a regular value. Points and values other than regular are called critical points and values, respectively.

Let M and N be MC^k manifolds, $k \geq 1$. A Lipschitz-Fredholm map is an MC^1 -map $f: M \rightarrow N$ such that for each $x \in M$ the derivative $Df(x): T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$ is a Lipschitz-Fredholm operator. The index of f , denoted by $\text{Ind } f$, is defined to be the index of $Df(x)$ for some x . Since f is MC^k and M is connected in the light of Theorem 2.2 the definition does not depend on the choice of x .

3. TRANSVERSALITY AND OPENNESS

Let F_1 be a linear closed subspace of a Fréchet space F that splits in F . Given MC^k manifold M modelled on F , a subset M_1 of M is a submanifold of M modelled on F_1 provided there is MC^k -atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ on M that induces an atlas on M_1 , i.e. for any $i \in I$ there are open subsets V_i, W_i of F, F_1 such that $\phi_i(U_i) = V_i \oplus W_i$ and $\phi_i(U_i \cap M_1) = V_i \oplus \{0\}$ is open in F_1 . We say that M_1 is a submanifold of Banach type if F_1 is a Banach space, and a submanifold of finite type if $F_1 = \mathbb{R}^n$ for some $n \in \mathbb{N}$.

Let $C(E, \mathbb{R}^+)$ be the set of all continuous functions from E into \mathbb{R}^+ , $h \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ and $\varepsilon \in C(E, \mathbb{R}^+)$. A map $f \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ is called a ε -approximation to h if $d(f(x), h(x)) < \varepsilon(x)$ for all $x \in E$, we write $d(f, h) < \varepsilon$ for short. If we take the ε -approximation to h to be a neighborhood of h in the set $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$, then we obtain a topology. This topology is called the fine topology and we denote the resulting space by $L_{fine}^0(E, F)$.

Let M and N be MC^k manifolds modelled on Fréchet spaces E and F , respectively. Let $MC^k(M, N)$, $1 \leq k \leq \infty$, be the set of MC^k -maps from M into N . Two maps $f, h \in MC^k(M, N)$ are said to be k -equivalent at $x \in M$ if $T_x^k f = T_x^k h$, where T^k is the k -th tangent map. We define the k -jet of f at x , $j_x^k f$, to be the equivalence class of f . Let d_k be a fiber metric on the tangent

space $T_x^k M$ that induces a Fréchet topology which is isomorphic to E . We describe the fine topology of order k on $MC^k(M, N)$ as follows. Let $\varphi \in MC^k(M, N)$ and $\Omega := \{V_i\}_{i \in I}$ be a locally finite cover of M . Let $\epsilon_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ be continuous for all $i \in I$. Then, the sets

$$\Theta(\varphi, V_i, \epsilon_i) := \{\phi \in MC^k(M, N) \mid d_k(j_x^k \phi, j_x^k \varphi) < \epsilon_i(x), x \in V_i\}$$

constitute a basis for fine open neighborhoods of φ . In this case we say that ϕ in a fine neighborhood of φ is an MC^k fine approximation to φ .

Lemma 3.1. *The fine topology is finer than the topology induced by the Metric (2.1).*

Proof. We must show that if $\mathcal{N}(f, \delta)$ is a δ -neighborhood of f , then we can find $\epsilon > 0$ such that if $D_{g,d}(f, h) < \epsilon$, then $h \in \mathcal{N}(f, \delta)$. Given a map $h \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$, let

$$\epsilon := \min \left\{ 1, \inf_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\delta(x)}{g(h(x), 0)} \right\}.$$

Now suppose $D_{g,d}(f, h) < \epsilon$, then we can easily see that $d(f, h) < \delta$ and hence $h \in \mathcal{N}(f, \delta)$. \square

Remark 3.2. *We know that (Proposition 2.1) $\text{Iso}(E, F)$ is open in $\mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ endowed with the topology induced by the metric (2.1). By the preceding lemma the fine topology is finer than the metric topology, thereby, $\text{Iso}(E, F)$ is open in $L_{fine}^0(E, F)$.*

Definition 3.3. *Let $f: E \rightarrow F$ be a Lipschitz-Fredholm operator of Fréchet spaces. We say that f is transversal to a closed subspace $F_0 \subseteq F$ and write $f \pitchfork F_0$ if*

- (1) $\text{Img}(f) + F_0 = F$, and
- (2) either F_0 splits in F or $f^{-1}(F_0)$ splits in E .

The following result characterizes the transversality of Lipschitz-Fredholm operators.

Proposition 3.4. *Let $\varphi \in \mathcal{LF}_l(E, F)$. Suppose $F_0 \subseteq F$ is a closed subspace such that $\text{Img}(\varphi) + F_0 = F$. Then $\varphi \pitchfork F_0$ if and only if there are closed subspace $F_1 \subseteq F$ and $E_0 \subseteq E$ with $F = F_0 \oplus F_1$ and $E = E_0 \oplus (E_1 := \varphi^{-1}(F_1))$ such that $\varphi_1 := \varphi|_{E_1} \in \text{Iso}(E_1, F_1)$.*

Proof. Assume that such a closed subspace F_0 is given and $\varphi \pitchfork F_0$. $(\text{Img}(\varphi) \cap F_0)$ splits in F_0 because

$$m = \dim(F_0/\text{Img}(\varphi)) \leq \dim(F/\text{Img}(\varphi)) < \infty$$

and hence by Theorem 2.3(2) there exists a subspace $\mathbb{F} \subseteq F_0$ of dimension m such that $F_0 = (\text{Img}(\varphi) \cap F_0) \oplus \mathbb{F}$. Since

$$\text{Img}(\varphi) \cap \mathbb{F} \subseteq \text{Img}(\varphi) \cap F_0,$$

it follows that $\text{Img}(\varphi) \cap \mathbb{F} = \{0\}$. Also,

$$\begin{aligned} \text{Img}(\varphi) + \mathbb{F} &= (\text{Img}(\varphi) + (\text{Img}(\varphi) \cap F_0)) + \mathbb{F} \\ &= \text{Img}(\varphi) + F_0 = F. \end{aligned}$$

Thus, $\text{Img}(\varphi) \oplus \mathbb{F} = F$, therefore,

$$\text{codim } \text{Img}(\varphi) = m, \quad \dim \ker(\varphi) = l + m.$$

Moreover, there exists a closed subspace $\mathbb{E} \subseteq E$ such that

$$E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{E}.$$

The operator $\Phi := \varphi|_{\mathbb{E}} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \text{Img}(\varphi))$ is injective onto $\text{Img}(\varphi)$, hence, by virtue of open mapping theorem is a homeomorphism and therefore $\Phi \in \text{Iso}(\mathbb{E}, \text{Img}(\varphi))$. Let

$$\mathbb{E}_0 := \Phi^{-1}(\text{Img}(\varphi) \cap F_0) \subseteq \mathbb{E},$$

then $E_0 = \varphi^{-1}(\text{Img}(\varphi) \cap F_0) = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{E}_0$.

As \mathbb{E}_0 is complemented in E_0 , there is a continuous projection Pr_1 of E_0 onto \mathbb{E}_0 (see Theorem 2.3(4)). If E_0 is complemented in E , then there exists a continuous projection Pr_2 of E onto E_0 . Thus, $\text{Pr}_1 \circ \text{Pr}_2$ is a continuous projection from E to \mathbb{E}_0 and its restriction to \mathbb{E} is a again continuous projection onto \mathbb{E}_0 , thereby, \mathbb{E}_0 is complemented in \mathbb{E} . This means there is a closed subspace $E_1 \subseteq \mathbb{E}$ (which is also closed in E) such that $\mathbb{E} = E_1 \oplus \mathbb{E}_0$.

By the same argument we have, if F_0 is complemented in F , then $(\text{Img}(\varphi) \cap F_0)$ is complemented in $\text{Img}(\varphi)$ because $(\text{Img}(\varphi) \cap F_0)$ is complemented in F_0 . This means there is a closed subspace $F_1 \subseteq \text{Img}(\varphi)$ (which is also closed in F) such that

$$\text{Img}(\varphi) = F_1 \oplus (\text{Img}(\varphi) \cap F_0).$$

Therefore, we have

$$E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{E}_0 \oplus E_1 = E_0 \oplus E_1,$$

$$F = (\text{Img}(\varphi) \cap F_0) \oplus \mathbb{F} \oplus F_1 = F_0 \oplus F_1$$

and $\varphi_1 = \Phi|_{E_1} \in \text{Iso}(E_1, F_1)$. Moreover, $E_1 = \varphi_1^{-1}(F_1)$. The converse is obvious. \square

Proposition 3.5. $\mathcal{LF}_l(E, F)$ is open in $\mathcal{L}_{fine}^0(E, F)$.

Proof. Let $\varphi \in \mathcal{LF}_l(E, F)$. We show that there exists $\varepsilon > 0$ such that any $\phi \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ which is ε -approximation to φ is a Lipschitz-Fredholm operator of index l .

First we prove for the case $l = 0$, then we show that the general case can be reduced to the case $l = 0$. Let $L: E \rightarrow F$ (called a corrector) be a linear globally Lipschitz map having finite dimensional range such that $K := L + \varphi$ is an isomorphism. Such a linear map always exists. Indeed, L can be any linear globally Lipschitz map from E into F such that

$$\ker(L) \oplus \ker(\varphi) = E, \quad \text{Img}(L) \oplus \text{Img}(\varphi) = F.$$

Choose $\varepsilon \in (0, 1/2\text{Lip}(K^{-1}))$ small enough and suppose that $\phi, \mathbb{L} \in \mathcal{L}(E, F)$ are ε -approximation to φ and the dimension of the image of \mathbb{L} is finite. Then $\mathbb{K} = \mathbb{L} + \phi$ satisfies

$$d(K(x), \mathbb{K}(x)) < 1/\text{Lip}(K^{-1}),$$

for all $x \in E$, thus \mathbb{K} is an isomorphism (see Remark 3.2) and hence $\phi \in \mathcal{LF}(E, F)$ and $\text{Ind}(\phi) = 0$.

Now suppose $l > 0$, define the linear globally Lipschitz operators $\varphi_l, \phi_l: E \rightarrow F \times \mathbb{R}^l$ by $\varphi_l(x) := (\varphi(x), 0)$ and $\phi_l(x) := (\phi(x), 0)$. Then φ_l is a Lipschitz-Fredholm operator of index 0. By the above

argument ϕ_l is a Lipschitz-Fredholm operator of index 0 and hence ϕ is a Lipschitz-Fredholm operator of index l . Likewise, the case $l < 0$ can be proved. \square

Theorem 3.6. *Let $\varphi \in \mathcal{LF}_l(E, F)$, and suppose that $F_0 \subseteq F$ is closed and $\varphi \pitchfork F_0$. Then any $\phi \in \mathcal{L}_{g,d}(E, F)$ in some fine neighborhood of φ is transversal to F_0 .*

Proof. By Proposition 3.4 there exist closed subsets

$$E_0 \subseteq E, \quad F_1 \subseteq F, \quad E_1 := \varphi^{-1}(F_1)$$

such that

$$F = F_0 \oplus F_1, \quad E = E_0 \oplus E_1, \quad \varphi_1 := \varphi|_{E_1} \in \text{Iso}(E_1, F_1).$$

There is a continuous function $\delta(x)$ such that every linear globally Lipschitz map $\psi: E_1 \rightarrow F_1$ which is δ -approximation to φ_1 is an isomorphism (see Remark 3.2). Let $\pi: F \rightarrow F_1$ be the projection given by $\pi(f_0 + f_1) = f_1$, and let $\kappa = \text{Id}_F - \pi$. It is immediate that π is linear and globally Lipschitz and $\text{Img}(\kappa) = F_0$. Choose $\varepsilon \in (0, \delta/\text{Lip}(\pi))$ small enough, in view of Proposition 3.5, we can assume that each $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ which is ε -approximation to φ belongs to $\mathcal{LF}_l(E, F)$.

Now we show that each such ϕ is transversal to F_0 . Let

$$\Phi := (\pi \circ \varphi)|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1, F_1).$$

Then $d(\Phi, \varphi_1) \leq \text{Lip}(\pi)\varepsilon < \delta$ and so $\Phi \in \text{Iso}(E_1, F_1)$ (see Remark 3.2). Thus, we only need to prove $F = \text{Img}(\phi) + F_0$. Let $f \in F = F_0 \oplus F_1$ so $f = f_0 + f_1$, where $f_i \in F_i (i = 0, 1)$. We have $\Phi^{-1}(f_1) = e_1 \in E_1 \subseteq E$, $x = \phi(e_1) \in \text{Img}(\phi)$, and $y = f_0 - \kappa(x) \in F_0$. Whence,

$$x + y = \pi(x) + \kappa(x) + f_0 - \kappa(x) = f_0 + \Phi(e_1) = f_0 + f_1 = f,$$

therefore $F = \text{Img}(\phi) + F_0$. \square

Now we prove the transversality theorem for MC^k -Lipschitz-Fredholm maps. It is indeed a consequence of the Sard's theorem for these maps, [1, Theorem 4.3]. A careful reading of the proof of

the theorem shows that the minor assumption of endowing manifolds with compatible metrics is superfluous and the theorem remains valid for manifolds without compatible metrics. Thus, the statement of the theorem is as follows:

Theorem 3.7 (Sard's Theorem). *Let M and N be MC^k manifolds, $k \geq 1$. If $f: M \rightarrow N$ is an MC^k -Lipschitz-Fredholm map with $k > \max\{\text{Ind } f, 0\}$. Then, the set of regular values of f is residual in N .*

Definition 3.8. *Let $f: M \rightarrow N$ be a Lipschitz-Fredholm map and let $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow N$ be an MC^1 embedding of a finite dimensional manifold \mathcal{A} . We say that f is transversal to ι and write $f \pitchfork \iota$ if $Df(x)(T_x M) + D\iota(y)(T_y \mathcal{A}) = T_{f(x)} N$, whenever $f(x) = \iota(y)$. It is also said that the submanifold $\mathbf{A} := \iota(\mathcal{A})$ is transversal to f .*

The following theorem is the analogous of the Smale transversality, [5, Theorem 3.1]. Its proof is just a slight modification of the argument of Smale.

Theorem 3.9. *Let M and N be MC^k manifolds modelled on spaces (F, d) and (E, g) , respectively. Let $f: M \rightarrow N$ be an MC^k -Lipschitz-Fredholm map and let $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow N$ be an MC^1 -embedding of a finite dimension manifold \mathcal{A} with $k > \max\{\text{Ind } f + \dim \mathcal{A}, 0\}$. Then there exists an MC^1 fine approximation \mathbf{g} of ι such that \mathbf{g} is embedding and $f \pitchfork \mathbf{g}$. Furthermore, Suppose S is a closed subset of \mathcal{A} and $f \pitchfork \iota(S)$, then \mathbf{g} can be chosen so that $\iota = \mathbf{g}$ on S .*

Proof. Since manifolds are second countable we only need to work in local coordinates. Assume that $y \in \mathcal{A}$ and $n = \dim \iota(\mathcal{A})$. Since $\iota(\mathcal{A})$ is an embedded submanifold of finite type of N , we may find an open neighborhood $U \subset \mathbb{R}^n$ about y , a chart about $\iota(y)$ and a splitting $E = \mathbb{R}^n \oplus E_1$ such that $\iota(y) = \iota(y, 0)$ in the neighborhoods. Let $\pi_2: E \rightarrow E_1$ be the projection onto E_1 . Let $\bar{V} \subset U$ be a neighborhood of y , and h a smooth real valued function which is 1 on \bar{V} and 0 outside of U . Since $\pi_1 \circ f$ is locally Fredholm-Lipschitz it follows by Sard's Theorem (Theorem 3.7) that there is a regular

value z for $\pi_1 \circ f$ which is close to 0. Now define

$$\mathbf{g}(y) = h(y)(z, y) + [1 - h(y)]\iota(y).$$

It is immediate that $f \pitchfork \mathbf{g}$ on V , and for z sufficiently close to 0, \mathbf{g} is MC^1 fine approximation to ι . The second statement follows by our definition of \mathbf{g} . \square

4. TRANSVERSAL SUBMANIFOLDS

We will need the following inverse function theorem.

Theorem 4.1. [2, Theorem 4.7], Inverse Function Theorem for MC^k -maps. *Let (E, g) be a Fréchet space with standard metric g . Let $U \subset E$ be open, $x_0 \in U$ and $f: U \subset E \rightarrow E$ an MC^k -map, $k \geq 1$. If $f'(x_0) \in \text{Aut}(E)$, then there exists an open neighborhood $V \subseteq U$ of x_0 such that $f(V)$ is open in E and $f|_V: V \rightarrow f(V)$ is an MC^k - diffeomorphism.*

To avoid some technical complications we consider only manifolds without boundary in the sequel.

Theorem 4.2. *Let M and N be MC^k manifolds modelled on spaces (F, d) and (E, g) , respectively. Suppose that $f: M \rightarrow N$ is an MC^k -Lipschitz-Fredholm map of index l . Let \mathcal{A} be a submanifold of N with dimension m and let $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow N$ be the inclusion. If f is transversal to \mathcal{A} , then $f^{-1}(\mathcal{A})$ is a submanifold of M of dimension $l + m$. For all $x \in f^{-1}(\mathcal{A})$ we have $T_x(f^{-1}(\mathcal{A})) = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)}\mathcal{A})$.*

Proof. If $f^{-1}(\mathcal{A}) = \emptyset$ the theorem is clearly valid so let us assume that $f^{-1}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Let (ψ, U) be a chart at $f(x_0) \in \mathcal{A}$ in N with the submanifold property for \mathcal{A} . Let U_1, U_2 be open subsets of E, \mathbb{R}^m such that $\psi(U) = U_1 \oplus U_2, \psi(U \cap \mathcal{A}) = U_1 \oplus \{0\}$, and $\psi(f(x_0)) = (0, 0)$. Let (V, φ) be a chart at x_0 in M such that $\varphi(x_0) = 0, \varphi: V \rightarrow \varphi(V) \subset F$ and $f(V) \subset U$. Let

$$\mathbf{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(V) \rightarrow \psi(U)$$

be the local representative of f . Then $\mathbf{f}(0) = (0, 0)$ and by hypothesis \mathbf{f} is a Lipschitz-Fredholm map, in particular, $D\mathbf{f}(0) \in \mathcal{LF}_l(F, E)$. The tangent map $T_{f(x_0)}\iota: T_{f(x_0)}\mathcal{A} \rightarrow T_{f(x_0)}N$ is injective with closed split image. Hence $T_{f(x_0)}\mathcal{A}$ can be identified with a closed split subspace of $T_{f(x_0)}N$. Thus $Df(x_0)$ is transversal to $T_{f(x_0)}\mathcal{A}$. Therefore, keeping in the mind the definition of the differential in terms of tangent maps, $D\mathbf{f}(0)$ is transversal to $T\psi(T_{f(x_0)}\mathcal{A}) = U_1 \oplus \{0\} =: E_1$. Then, by virtue of Proposition 3.4 there are closed subsets $F_1 \subset F$, $E_0 \subset E$ such that $F = F_1 \oplus (F_0 := D\mathbf{f}(0)(E_0))$, $E = E_1 \oplus E_0$, $\Delta := D\mathbf{f}(0)|_{F_0} \in \text{Iso}(F_0, E_0)$ and $\Delta_1 := D\mathbf{f}(0)|_{F_1} \in \text{Iso}(F_1, E_1)$. Moreover, $\dim F_0 = m + l$.

Consider the projection $\pi: F \rightarrow F_1$ given by

$$\pi(f_0 + f_1) = f_1.$$

Since F_1 and F_0 are closed and complementary it follows that obviously the map $\kappa = \text{Id}_F - \pi$ is the unique projection with $\text{Img}(\kappa) = F_0$ and $\ker(\kappa) = F_1$. Let $\pi_1: E \rightarrow E_0$ be the projection given by $\pi_1(e_0 + e_1) = e_0$. Then, $\Pi := \Delta^{-1} \circ \pi_1 \circ D\mathbf{f}(0)$ is a projection with $\text{Img}(\Pi) = F_0$ and $F_1 \subseteq \ker(\Pi)$. Since $F = F_0 \oplus F_1$, it follows that $F_1 = \ker(\Pi)$ and therefore $\Pi = \kappa$.

Now define the map $H: \varphi(V) \rightarrow F$ of class MC^k by

$$H(x) = \pi(x) + \Delta^{-1} \circ \pi_1 \circ \mathbf{f}(x).$$

We obtain that $H(0) = 0$ and

$$DH(0) = \pi + \Delta^{-1} \circ \pi_1 \circ D\mathbf{f}(0) = \pi + \kappa = \text{Id}_F.$$

If we choose V small enough, then by Theorem 4.1 H is an MC^k -diffeomorphism onto an open neighborhood $\mathcal{U} \subseteq \psi(U)$ of $\psi(f(x_0)) = (0, 0)$. Let $\Phi = H \circ \varphi^{-1}$, then (Φ, F_0) is a chart for x_0 on V with the submanifold property. Because we have

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \psi(f(x)) \in U_1 \oplus \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\varphi(x)) \in U_1 \oplus \{0\} \\ &\Leftrightarrow H(\varphi(x)) \in F_0. \end{aligned}$$

Let $p \in \mathcal{A}$, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ a smooth curve sending zero to p , and $j_p^1 \gamma$ the 1-jet of γ at p .

$$\begin{aligned}
 j_p^1 \gamma \in T_p \mathcal{A} &\Leftrightarrow j_{\varphi(p)}^1(\varphi \circ \gamma) = T\varphi(j_p^1 \gamma) \in \varphi(V) \times F, \varphi \circ \gamma \subset \varphi(V) \\
 &\Leftrightarrow T\mathbf{f}(j_{\varphi(p)}^1(\varphi \circ \gamma)) \in \psi(U) \times E \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{f}(\varphi \circ \gamma) = \psi(f \circ \gamma) \subset \psi(U) \\
 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \psi(f \circ \gamma) |_{t=0} = v = \frac{d}{dt} \psi([\psi^{-1}(\psi(f(x)) + tv)]), \\
 &\quad \psi(f \circ \gamma) \subset \psi(U) \\
 &\Leftrightarrow j_{f(p)}^1(f \circ \gamma) = j_p^1[\psi^{-1}(\psi(f(p)) + tv)] \in T_{f(p)} \mathcal{A} \\
 &\Leftrightarrow j_p^1 \gamma \in (T_p f)^{-1}(T_{f(p)} \mathcal{A})
 \end{aligned}$$

This proves the second assertion. \square

If manifolds have nonempty boundary we just need to modify the proof by extending the considered maps.

Corollary 4.3. *Let $f: M \rightarrow N$ be an MC^k -Lipschitz-Fredholm map of index l . If y is a regular value of f , then the level set $f^{-1}(y)$ is a submanifold of dimension l and its tangent space at x is $\ker T_x f$.*

Proof. The set $\{y\}$ is transversal to f so the result follows from the theorem. \square

Corollary 4.4. *Let $f: M \times N \rightarrow O$ be a smooth Lipschitz-Fredholm map of manifolds, we write $f_x := f(\cdot, x)$, and let \mathcal{A} be a closed finite dimension submanifold of O . Assume that $f \pitchfork \mathcal{A}$ and for all $(m, n) \in f_n^{-1}(\mathcal{A})$ the composition*

$$(T_m M \xrightarrow{Df_n(m)} T_{f_n(m)} O \xrightarrow{Q} T_{f_n(m)} O / T_n S)$$

is Lipschitz-Fredholm. Then there is a residual set of n in O for which the map $f_n: M \rightarrow O$ is transversal to \mathcal{A} .

Proof. By hypothesis the kernel of $Q \circ Df(x)$ is complemented for all $x \in f^{-1}(\mathcal{A})$. By the preceding theorem $B := f^{-1}(\mathcal{A})$ is a Fréchet submanifold. The map $f|_B$ is smooth Lipschitz-Fredholm,

therefore by Sard's theorem there is a residual set of regular values of it in O . If $n \in N$ is a regular value of $f|_B$, then f_n is transversal to \mathcal{A} . \square

REFERENCES

- [1] *Eftekharinasab K.* Sard's theorem for mappings between Fréchet manifolds // *Ukrainian Math. J.* — 2011. — **62**, 12. — P. 1896–1905.
- [2] *Müller O.* A metric approach to Fréchet geometry // *Journal of Geometry and Physics.* — 2008. — **58**, 11. — P. 1477–1500.
- [3] *Glöckner H.* Implicit functions from topological vector spaces in the presence of metric estimates // *arXiv:math/6612673.* — 2006.
- [4] *Eftekharinasab K.* Geometry of bounded manifolds // *Rocky Mountain J. Math.* — to appear.
- [5] *Smale S.* An infinite dimensional version of Sard's theorem // *Amer. J. Math.* — 1965. — **87**. — P. 861–866.
- [6] *Köthe Gottfried.* Topological vector spaces. I. Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159. — N. Y.: Springer-Verlag, 1969. — P. xv+456.

О. А. Кадубовський

*ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
м. Слов'янськ
kadubovs@ukr.net*

Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях

We consider two classes of smooth functions with three critical values on smooth closed surface of genus $g \geq 1$, that possess only one (degenerate) saddle critical point in addition to k local maxima and l local minima. Namely: $C_{k,l}(M_g)$ is the class of such functions on oriented surface M_g and $C_{k,l}(N_g)$ — on non-oriented surface N_g . In this paper we calculate the number of topologically non-equivalent (minimal) functions from the class $C_{1,1}(M_g)$ for all $g \geq 1$ and from the class $C_{1,1}(N_g)$ for $g = 5, 6$. Asymptotic estimate for number of topologically non-equivalent functions from the class $C_{1,1}(N_g)$ (as $g \rightarrow \infty$) are also established.

Мы рассматриваем два класса гладких функций с тремя критическими значениями на гладкой замкнутой поверхности рода $g \geq 1$, которые в дополнение к k локальным максимумам и l локальным минимумам имеют только одну (вырожденную) седловую критическую точку. Пусть $C_{k,l}(M_g)$ — класс таких функций на ориентированной поверхности M_g , соответственно $C_{k,l}(N_g)$ — на неориентированной поверхности N_g . В данной работе подсчитано число топологически неэквивалентных (минимальных) функций из класса $C_{1,1}(M_g)$ для всех $g \geq 1$, а из класса $C_{1,1}(N_g)$ — для $g = 5, 6$. Также приведены асимптотические оценки для числа топологически неэквивалентных функций из класса $C_{1,1}(N_g)$ при $g \rightarrow \infty$.

Вступ

Нехай $(F, \partial F)$ — гладка поверхня з межею ∂F (∂F може бути порожньою). Через $C^\infty(F)$ позначимо простір нескінченно диференційовних функцій на F з межею $\partial F = \partial_- F \cup \partial_+ F$, всі критичні точки яких ізольовані та лежать у внутрішності F , а на компоненті зв'язності межі $\partial_- F$ ($\partial_+ F$) функції набувають однакового значення a (відповідно b).

Функції f_1 та f_2 з простору $C^\infty(F)$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h: F \mapsto F$ і $h': \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ такі, що $f \cdot h = h' \cdot g$. Всюди в подальшому будемо вважати, що гомеоморфізм h' зберігає орієнтацію. Коли h зберігає орієнтацію, функції f_1 та f_2 будемо називати *O-топологічно еквівалентними*.

Нехай далі $x_i \in F$ — ізольована критична точка (що не є локальним екстремумом) функції $f \in C^\infty(F)$. В [1] О. О. Пришляком доведено, що якщо топологічний тип ліній рівня функції $f \in C^\infty(F)$ при переході через x_i змінюється (не змінюється), то в деякому околі U_i точки x_i неперервною заміною координат функція f зводиться до виду $f = \operatorname{Re} z^{n_i} + c$, $n_i \geq 2$, (або ж до виду $f = \operatorname{Re} z$ відповідно). А таку точку x_i називають *суттєво* (або ж, відповідно, *несуттєво*) критичною точкою.

Число n суттєво критичних точок x_i функції f разом із зазначеними вище значеннями n_i називають *топологічним сингулярним типом функції* $f \in C^\infty(F)$.

В роботі В. В. Шарка [2] вивчено питання гладкої і топологічної еквівалентності функцій з класу $C^\infty(F)$. Зокрема ним встановлено, що із фіксованим сингулярним типом існує лише скінченне число топологічно нееквівалентних функцій з $C^\infty(F)$. Однак питання про підрахунок числа топологічно нееквівалентних таких функцій виявилось дуже складною і в загальному випадку нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Якщо розглядати лише функції класу $C_1^\infty(F) \subset C^\infty(F)$, у яких *лише одна суттєво критична точка* (в подальшому —

вироджена критична точка типу сідла), то топологічний інваріант («2-кольоровий спін-граф», запропонований В. В. Шарком) та питання перевірки топологічної еквівалентності значно спрощуються, а задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних таких функцій стає більш досяжною.

Отже, обмежимося далі розглядом класу $C_{k,l}^\infty(F) \subset C_1^\infty(F)$ функцій, які (крім єдиної виродженої критичної точки типу сідла) мають точно k локальних максимумів та l локальних мінімумів. Як слідує з [3] і [4], для функцій із зазначеного класу повним топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова n -діаграма певного виду, яка має k чорних (або ж сірих) та l сірих (відповідно чорних) циклів. А саме: для функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ на орієнтованій поверхні роду g — 2-кольорова O -діаграма з $n = 2g - 1 + k + l$ хордами [3], а для функцій з класу $C_{k,l}(N_g)$ на неорієнтованій поверхні роду g — N -діаграма з $n = g - 1 + k + l$ хордами [4].

Задачі про підрахунок числа O -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_0)$ (на двовимірній сфері) для певних k і l було розглянуто в [5], але розв'язані повністю (для довільних $k, l \in \mathbb{N}$) лише у 2014 р. в [6].

В загальному ж випадку (для довільних натуральних k, l і g) зазначені задачі для класів $C_{k,l}(M_g)$ і $C_{k,l}(N_g)$ також виявилися досить важкими та нерозв'язаними до сьогодні проблемами.

Проте, як з'ясувалося і вже можна констатувати, розв'язання зазначених задач для випадку *мінімальних* функцій (тобто при $k = l = 1$) є цілком досяжними. Так, наприклад: для *орієнтованих поверхонь* роду $g = 0, 1, 2, 3$ відповідні числа O -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ вперше (за допомогою «слів» спеціального виду) було підраховано в 1999 р. у роботі [1]. У 2006 р. в [7] (за допомогою 2-кольорових діаграм) було встановлено формули для підрахунку точного числа O -топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ на випадок довільного $g \geq 0$. Задача ж про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій із зазначеного класу до сьогодні залишалась нерозв'язаною.

Для неорієнтованих поверхонь числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$ були відомими лише для початкових $g = 1, 2, 3$ і 4 та встановлені в роботах [1] і [4] відповідно. В загальному ж випадку (для натуральних $g \geq 1$) ця задача також залишається відкритим питанням.

Розв'язанню задач про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(M_g)$ та $C_{1,1}(N_g)$ й присвячено дану статтю, яку можна вважати логічним завершенням циклу авторських робіт [3], [7], [8] і [9] та суттєвим продовженням [4], [10].

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Під перестановкою π будемо розуміти бієктивне відображення множини $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ на себе.

Для перестановки $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}$ будемо використовувати скорочене позначення $\pi = \langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m \rangle = \langle \pi_i \rangle$, де $\pi_i = \pi(i)$. Зокрема $\iota = \langle 1, 2, \dots, m \rangle$ — тотожна перестановка.

Означення 1.1. Через S_m^+ позначимо множину всіх перестановок множини $[m]$, а через CS_m — множину циклічних перестановок з S_m^+ , тобто тих перестановок з S_m^+ , що є циклами довжини m (розкладаються у цикл максимальної довжини m). Останні будемо позначати $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, де $i, c_i \in [m]$, $c_i = c_j \Leftrightarrow i = j$. Зокрема $(1, 2, \dots, m-1, m) = \tau$.

Добре відомо, що S_m^+ (S_m) разом з функціональною операцією \circ («композиція», що діє за правилом «right to left») є симетричною групою перестановок множини $[m]$.

Означення 1.2. Оснащеною перестановкою («signed permutation») називають перестановку $\sigma = \langle \sigma_i \rangle$ множини $[m]$, в якій кожен елемент σ_i оснащено знаком «+» або ж «-». Через S_m^\pm позначимо множину всіх оснащених перестановок $\sigma = \langle \sigma_i \rangle$.

Зауваження 1.3. Оснащену перестановку $\sigma \in S_m^\pm$ можна розглядати як бієкцію множини $[\pm m] = \{1, 2, \dots, m, -1, \dots, -m\}$, де $\sigma(i) = \sigma_i$ та $\sigma(-i) = -\sigma_i$ для $i \in [m]$.

Крім того, очевидно, що $S_m^+ \subset S_m^\pm$.

В подальшому нам знадобляться й перестановки з множини $S_m^- = S_m^\pm \setminus S_m^+$. Для введених множин очевидними є рівності:

$$|S_m^+| = m!, \quad |S_m^\pm| = 2^m \cdot m!, \quad |S_m^-| = m!(2^m - 1). \quad (1.1)$$

Зауваження 1.4. Всюди нижче такі поняття як *граф*, *k-регулярний граф*, *гамільтоніан*, *k-цикл графу*, *досконале паросполучення* («*perfect matching*») будуть вживатися в сенсі класичних відповідних визначень з роботи [11].

В подальшому під хордовою n -діаграмою будемо розуміти хордову діаграму з n хордами (див., напр., [12], [13], [14]).

Означення 1.5. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин (числами від 0 до $2n - 1$) за годинниковою стрілкою, будемо називати **2-кольоровим $2n$ -шаблоном**, рис. 1.1 а).

2-кольоровою хордовою n -діаграмою будемо називати n -діаграму, побудовану на основі 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Означення 1.6. 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають **O -діаграмою** (**N -діаграмою**) – рис. 1.1 б), с).

Означення 1.7. 2-кольорові n -діаграми будемо називати **ізоморфними**, якщо їх можна сумістити в результаті повороту на певний кут, та **еквівалентними**, якщо їх можна сумістити в результаті повороту, або дзеркального відбиття, або ж їх композицій.

Означення 1.8. Чорним (сірим) циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які, чередуючись, утворюють гомеоморфний образ орієнтованого кола – рис. 1.1 б), с).

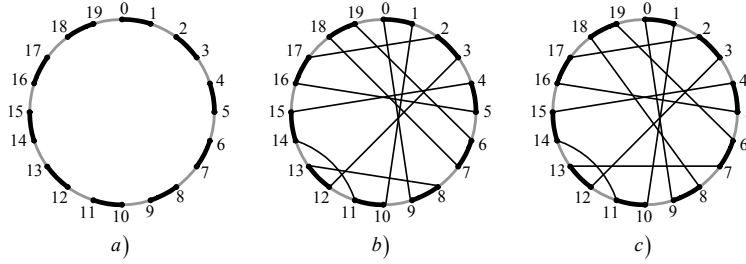


Рис. 1.1

a) 2-кольоровий 20-шаблон; b) O -діаграма з 1 сірим та 2 чорними циклами; c) N -діаграма з 1 сірим та 1 чорним циклами.

Приклад 1.9. Якщо через $(i, i + 1)$ позначити орієнтовану дугу $2n$ -шаблону, а через $[i, j]$ — хорду, яка сполучає вершини з номерами i, j , то чорні bc_k та сірі gc_l цикли 2-кольорової діаграми, зображеної на рис. 1.1b), можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 bc_1 &= (18, 19)[19, 6](6, 7)[7, 18], \\
 bc_2 &= (0, 1)[1, 10](10, 11)[11, 14](14, 15)[15, 4](4, 5)[5, 16](16, 17) \\
 &\quad [17, 2](2, 3)[3, 12](12, 13)[13, 8](8, 9)[9, 0], \\
 gc_1 &= (19, 0)[0, 9](9, 10)[10, 1](1, 2)[2, 17](17, 18)[18, 7](7, 8)[8, 13] \\
 &\quad (13, 14)[14, 11](11, 12)[12, 3](3, 4)[4, 15](15, 16)[16, 5](5, 6)[6, 19].
 \end{aligned}$$

А єдиний чорний та єдиний сірий цикли діаграми, зображеної на рис. 1.1c), — у вигляді:

$$\begin{aligned}
 bc_1 &= (0, 1)[1, 10](10, 11)[11, 14](14, 15)[15, 4](4, 5)[5, 16](16, 17) \\
 &\quad [17, 2](2, 3)[3, 12](12, 13)[13, 7](7, 6)[6, 19](19, 18)[18, 8](8, 9)[9, 0], \\
 gc_1 &= (19, 0)[0, 9](9, 10)[10, 1](1, 2)[2, 17](17, 18)[18, 8](8, 7)[7, 13] \\
 &\quad (13, 14)[14, 11](11, 12)[12, 3](3, 4)[4, 15](15, 16)[16, 5](5, 6)[6, 19].
 \end{aligned}$$

Підсумовуючи, зазначимо, що «обхід» (вичленування) певного (заради визначеності) чорного циклу діаграми можна здійснювати, починаючи з «парного» кінця довільної чорної дуги («непарного» для сірої). Назвемо її «стартовою». Рухаючись у (додатному) напрямку за годинниковою стрілкою, ми досягнемо її кінця. Далі слід рухатися вздовж хорди, яка сполучає цей кінець з іншим її кінцем на колі шаблону. З цього моменту (і в подальшому) рух по колу здійснюється виключно вздовж чорних дуг, інші кінці яких однозначно визначають наступні хорди циклу. І так до того моменту, поки не буде досягнуто «стартової» дуги чорного циклу.

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (сірий) цикл 2-кольорової O -діаграми збігається з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді, наслідуючи [12],

Означення 1.10. *Родом 2-кольорової O -діаграми будемо називати ціле число g , що визначається рівністю*

$$g = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \quad (1.2)$$

де λ — сумарне число чорних і сірих циклів діаграми.

Означення 1.11. *Родом 2-кольорової N -діаграми будемо називати ціле число g , яке визначається рівністю*

$$g = n + 1 - \lambda. \quad (1.3)$$

Означення 1.12. *Множину O -діаграм (N -діаграм) з n хордами будемо позначати \mathfrak{S}_n^O (та \mathfrak{S}_n^N відповідно).*

Множину O -діаграм (N -діаграм) з n хордами, які мають точно l сірих та k чорних циклів будемо позначати $\mathfrak{S}_{l,k;n}^O$ (та $\mathfrak{S}_{l,k;n}^N$ відповідно), а множину $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O \cup \mathfrak{S}_{1,k;n}^N$ — як $\mathfrak{S}_{1,k;n}$.

Множину O -діаграм (N -діаграм) з n хордами, які мають лише 1 сірий (або ж лише 1 чорний) цикл будемо позначати $\mathfrak{S}_{1;n}^O$ ($\mathfrak{S}_{1;n}^N$), а множину $\mathfrak{S}_{1;n}^O \cup \mathfrak{S}_{1;n}^N$ позначимо як $\mathfrak{S}_{1;n}$.

Слід відзначити, що питаннями переліку хордових n -діаграм відносно дії циклічної (порядку $2n$) та дієдральної (порядку

4n) груп займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [12], [13], [15], [14], [16].

Підрахунку числа неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) та нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку $2n$) 2-кольорових n -діаграм присвячено роботи [16], [7], [17]–[6]. Зокрема, формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм для класів \mathfrak{S}_n^O , \mathfrak{S}_n^N , $\mathfrak{S}_{1;n}^O$, $\mathfrak{S}_{1;n}^N$, $\mathfrak{S}_{l,k;l+k-1}^O$ встановлено в роботах [17]; [18]; [10] та [6] відповідно. Для числа неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ – в [7], а для числа нееквівалентних таких діаграм – анонсовано в [9].

Як слідує із робіт [7] і [10], має місце

Твердження 1.13 (*характеристична властивість* діаграм з класів $\mathfrak{S}_{1;n}^O$ та $\mathfrak{S}_{1;n}^N$). *Кожну діаграму D з класу $\mathfrak{S}_{1;n}$ можна ототожнити із оснащеним циклом $w(D)$ довжини n . А по суті – з оснащеною перестановкою $\pi(D) \in S_{n-1}^\pm$, причому: кожну $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$ – з $\pi(D) \in S_{n-1}^+$, а діаграму $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^N$ – з $\pi(D) \in S_{n-1}^-$.*

Нагадаємо основну ідею зазначених бієкцій. Кожну чорну дугу $(2i, 2i+1)$ 2-кольорового $2n$ -шаблону помітимо номером i , $0 \leq i \leq (n-1)$; сіру дугу $(2n-1, 0)$ – міткою $\widehat{0}$, а кожну сіру дугу $(2j-1, 2j)$ – номером \widehat{j} , $0 \leq j \leq (n-1)$.

Нехай далі $D \in \mathfrak{S}_{1;n}$ та має єдиний сірий (чорний) цикл. Обхід цього циклу обов'язково починаємо з обходу дуги $\widehat{0}$ (відповідно $\underline{0}$) у (додатному) напрямку за годинниковою стрілкою та послідовно виписуємо номери-позначки сірих (чорних) дуг, які зустрічаються при обході єдиного сірого (чорного) циклу. Причому оснащення знаком «мінус» відбувається лише для тих номерів-позначок \widehat{j} , напрямок обходу дуг яких збігався з рухом проти годинникової стрілки.

Якщо $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$, то обхід кожної із сірих дуг (при обході у зазначений спосіб єдиного сірого циклу) відбувається виключно

за годинниковою стрілкою, і тому серед елементів відповідного циклу $w(D) = (\widehat{0}, \widehat{w_1}, \dots, \widehat{w_{n-1}})$ немає від'ємних. Звідки й випливає, що $\pi(D) = \pi(w(D)) = \langle w_1, \dots, w_n \rangle \in S_{n-1}^+$.

Якщо ж $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^N$, то діаграма містить щонайменше дві хорди, які сполучають вершини з номерами однакової парності. Нехай $[2i, 2j]$, $(i < j)$ — одна з них. Якщо при обході сірого циклу прохід вздовж хорди $[2i, 2j]$ відбувався від $2i$ до $2j$, то напрямком обходу дуги \widehat{i} додатній, а дуги \widehat{j} — від'ємний; якщо ж від $2j$ до $2i$, то напрямком обходу дуги \widehat{j} додатній, а дуги \widehat{i} — від'ємний. Таким чином, серед елементів відповідного циклу $w(D)$ є від'ємні і тому $\pi(D) \in S_{n-1}^-$.

Приклад 1.14. Діаграму D_1 , зображену на рис. 1.1b), можна ототожнити із циклом $w(D_1) = (0, 5, 1, 9, 4, 7, 6, 2, 8, 3)$ та перестановкою $\pi_1 = \langle 5, 1, 9, 4, 7, 6, 2, 8, 3 \rangle$, а діаграму D_2 , зображену на рис. 1.1c), — із циклом $w(D_2) = (0, 5, 1, 9, -4, 7, 6, 2, 8, 3)$ та перестановкою $\pi_2 = \langle 5, 1, 9, -4, 7, 6, 2, 8, 3 \rangle$.

Зауваження 1.15. З урахуванням введених позначень та, як слідує з роботи [7], число чорних циклів діаграми $D \in \mathfrak{S}_{1;n}^O$ збігається з числом циклів композиції $w^{-1} \circ \tau_0$, де $w = w(D)$ і $\tau_0 = (0, 1, 2, \dots, n-1)$. Відмітимо також, що цикли декомпозиції $b = w^{-1} \circ \tau_0$ — суть чорні цикли діаграми.

Означення 1.16. [19], [11] Нехай $\pi = \langle \pi_i \rangle$ — перестановка з S_m^\pm . Перетворимо її у (неоснащену) перестановку $\pi' = \langle \pi'_i \rangle$ з S_{2m}^+ за допомогою відображення α , при якому для кожного $1 \leq i \leq m$ елемент π_i відображається у впорядковану пару

$$\alpha(\pi_i) = \{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\} = \begin{cases} \{2\pi_i - 1, 2\pi_i\}, & \pi_i > 0, \\ \{2|\pi_i|, 2|\pi_i| - 1\}, & \pi_i < 0. \end{cases}$$

«Breakpoint»-графом перестановки π (надалі — BG-граф π , або ж коротко $BG(\pi)$) називатимемо (неорієнтований) двокольоровий граф $BG(\pi)$ із впорядкованою множиною вершин $\pi'_0 = 0, \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{2m}, \pi'_{2m+1} = 2m + 1$, множина ребер якого є об'єднанням двох «досконалих паросполучень» (perfect matchings) на вершинах $\{0, 1, \dots, 2m + 1\}$, а саме:

- чорні ребра (надалі – дуги)

$$\delta_B(\pi) = \{\{\pi'_{2i}, \pi'_{2i+1}\} | 0 \leq i \leq m\};$$

- сірі ребра (надалі – хорди)

$$\delta_G = \{\{2i, 2i + 1\} | 0 \leq i \leq m\}.$$

Іншими словами, $BG(\pi) = \delta_B(\pi) \cup \delta_G$ – рис. 1.2 b) і c).

На рис. 1.2b) зображено BG -граф для перестановки

$$\pi = \langle 7, 4, 6, 1, 8, 3, 5, 2 \rangle,$$

який розкладається у 3 цикли: два 2-цикли та один 5-цикл; на рис. 1.2 c) – $BG(\pi)$ для $\pi = \langle 6, 5, -7, -1, -8, -2, 4, 3 \rangle$, який розкладається у єдиний 9-цикл.

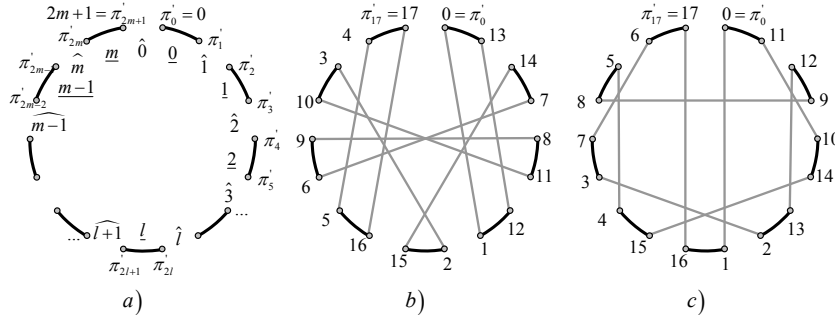


Рис. 1.2

- a) BG_m -шаблон; b) $BG(\pi)$, $\pi = \langle 7, 4, 6, 1, 8, 3, 5, 2 \rangle \in S_8^+$;
 c) $BG(\pi)$, $\pi = \langle 6, 5, -7, -1, -8, -2, 4, 3 \rangle \in S_8^-$

Зауваження 1.17. З урахуванням означення 1.16 (заради зручності та без втрати загальності) в подальшому будемо вважати, що для кожної $\pi \in S_m^\pm$ ії BG -граф будується на основі BG_m -шаблону – рис. 1.2a). Під BG_m -шаблоном будемо розуміти 1-регулярний граф, який складається з:

- $2m+2$ точок, що є вершинами правильного $(2m+2)$ -кутника і занумеровані за годинниковою стрілкою за допомогою міток $\pi'_0 = 0, \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{2m}, \pi'_{2m+1} = 2m+1$, та
- $m+1$ ребра – чорних дуг $\delta_B(\pi) = \{\{\pi'_{2i}, \pi'_{2i+1}\} | 0 \leq i \leq m\}$, описаного навколо зазначеного $(2m+2)$ -кутника кола.

Крім того, кожну чорну дугу $\{\pi'_{2i}, \pi'_{2i+1}\}$ помітимо номером \hat{i} , дугу $\{2m+1, 0\} - \hat{0}$, а кожну дугу $\{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\}$ – номером \hat{i} .

Нагадаємо, що *паросполученням* у графі називають множини попарно несуміжних ребер. *Досконалим* паросполученням (або ж *1-фактором*) називають паросполучення, в якому зустрічаються усі вершини графа. Через \mathcal{F}_n позначають множини 1-факторів на вершинах $\{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$, зокрема через $\varepsilon = \{\{i, n+i\} | 0 \leq i \leq n-1\}$ – «тотожний» 1-фактор.

Означення 1.18 ([11]). *Конфігурацією називають об'єднання двох досконалих паросполучень δ_B і δ_G в $\{0, 1, \dots, 2m+1\}$, де $\delta_G = \{\{2i, 2i+1\} | 0 \leq i \leq m\}$.*

Доповненням конфігурації $C = \delta_B \cup \delta_G$ називають конфігурацію $\bar{C} = \delta_B \cup \hat{\delta}_G$, де $\hat{\delta}_G = \{\{2i-1, 2i\} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{2m+1, 0\}$.

Має місце характеристична властивість «breakpoint»-графів.

Твердження 1.19. [11, Лемма 5.1.] *Конфігурація $C = \delta_B \cup \delta_G$ є «breakpoint»-графом певної оснащеної перестановки π тоді і лише тоді, коли її доповнення $\bar{C} = \delta_B \cup \hat{\delta}_G$ є гамільтоніаном.*

Означення 1.20. *Введемо наступні позначення:*

- $S_{m,k}^+$ – множина тих перестановок з S_m^+ , чий BG -граф розкладається у k циклів, $BG_{m,k}^+$ – множина відповідних BG -графів, $S_H^+(m, k) = |S_{m,k}^+| = |BG_{m,k}^+|$ – «Hultman number»;
- $S_{m,k}^\pm$ – множина тих перестановок з S_m^\pm , чий BG -граф розкладається у k циклів, $BG_{m,k}^\pm$ – множина відповідних BG -графів, $S_H^\pm(m, k) = |S_{m,k}^\pm| = |BG_{m,k}^\pm|$;
- $S_{m,k}^- = S_{m,k}^\pm \setminus S_{m,k}^+$, $BG_{m,k}^-$ – множина відповідних BG -графів, $S_H^-(m, k) = |S_{m,k}^-| = |S_{m,k}^\pm| - |S_{m,k}^+|$.

Слід зазначити, що проблемам підрахунку величин $S_H^+(m, k)$ і $S_H^\pm(m, k)$ та суміжним питанням присвячена ціла низка робіт (напр., [20], [21], [22], [23], [11]). Однак нижче ми наведемо відомі результати виключно для випадку $k = 1$.

Так, наприклад, у 1980 р. в роботі [20] та пізніше в [23] було встановлено справедливість формули

$$S_H^+(m, 1) = \begin{cases} \frac{2 \cdot m!}{m+2}, & m = 2l \\ 0, & m \neq 2l, \end{cases} \quad (1.4)$$

а в 1992 р. у роботі [21] та пізніше в [11] – справедливість формул

$$S_H^\pm(g; 1) = \frac{2^{3g+1} \cdot (g+1)! \cdot (g!)^2}{(2g+2)!} + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{\min(i, g+1-i)} c(i; j) \cdot \left[\frac{2^{i-j-1} (2j)! (i-1)! (g+2-i-j)!}{(2j-1)! j!} \right]^2, \quad (1.5)$$

де

$$c(i; j) = \frac{(-1)^{g+2+i-j} \cdot 2^{i-j+1} \cdot (g+1) \cdot (2i-2j+1) \cdot (i-1)!}{(g+2+i-j)(g+1+i-j)(g+1-i+j)(g-i+j)} \times \frac{1}{(g+1-i-j)!(2i-1)!(j-1)!}. \quad (1.6)$$

Зауважимо, що задача про підрахунок

- величини $S_H^+(m, k)$ є рівносильною до задачі про підрахунок числа представлень фіксованого $(m+1)$ -циклу у вигляді композиції $\rho \circ \omega$, де ρ – $(m+1)$ -цикл, $\omega \in S_{m+1}^+$ з $c(\omega) = k$ (яка розкладається у k циклів) [20], [23], [11], а
- величини $S_H^\pm(m, k)$ – задачі про підрахунок тих $\tau \in \mathcal{F}_{m+1}$, при яких $c(\delta_G \cup \tau) = k$ і $c(\tau \cup \widehat{\delta}_G) = 1$ ($c(\cdot)$ – число циклів) [21], [11].

2. «BREAKPOINT»-ГРАФИ ТА 2-КОЛЬОРОВІ ДІАГРАМИ З
ОДНИМ (СІРИМ) ЦИКЛОМ ПЕВНОГО КОЛЬОРУ

Означення 2.1. Нехай $\pi \in S_m^\pm$. $\widehat{BG}(\pi)$ -графом будемо називати $BG(\pi)$ -граф, який доповнено (до 3-регулярного графу) сірими дугами $\{2m + 1, 0\}$ і $\{2i - 1, 2i\}$ ($1 \leq i \leq m$) BG_{2m} -шаблону. Іншими словами (з урахуванням означень 1.16, 1.18), $\widehat{BG}(\pi) = \delta_B(\pi) \cup \delta_G \cup \widehat{\delta}_G$.

Позначимо далі через \widehat{BG}_m^\pm , $\widehat{BG}_{m,k}^\pm$, $\widehat{BG}_{m,k}^+$ і $\widehat{BG}_{m,k}^-$ множини \widehat{BG} -графів для перестановок з S_m^\pm , $S_{m,k}^\pm$, $S_{m,k}^+$ та $S_{m,k}^-$ відповідно. Тоді очевидно, що елементи множин \widehat{BG}_m^\pm , $\widehat{BG}_{m,k}^\pm$, $\widehat{BG}_{m,k}^+$ і $\widehat{BG}_{m,k}^-$ (перебуваючи у взаємно однозначній відповідності з елементами множин BG_m^\pm , $BG_{m,k}^\pm$, $BG_{m,k}^+$ і $BG_{m,k}^-$ відповідно) перебувають у взаємно однозначній відповідності з елементами множин S_m^\pm , $S_{m,k}^\pm$, $S_{m,k}^+$ та $S_{m,k}^-$ відповідно.

Зауваження 2.2. Без втрати загальності, можна вважати, що кожен 2-кольорову діаграму $D \in \mathfrak{S}_{1,k;n}$ побудовано на \widehat{BG}_m -шаблоні ($m = n - 1$) — рис. 2.3 а), б).

Тоді кожній діаграмі $D \in \mathfrak{S}_{1,n}$ однозначно можна поставити у відповідність перестановку $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^\pm$, \widehat{BG} -граф якої збігається з D . Пояснимо, як задається ця відповідність.

1) Оскільки D має один сірий цикл, то при його обході, починаючи з $\widehat{0}$ -ої сірої дуги $\{2n - 1, 0\}$ за годинниковою стрілкою, ми рухаємося вздовж хорди, одним із кінців якої є вершина 0 , до другого її кінця на \widehat{BG}_{n-1} -шаблоні — вершини 1 . Подальший напрямок руху по колу визначається сірою дугою, що інцидентна вершині 1 , другий її кінець позначимо 2 . Далі за алгоритмом: від вершини $2i$ рухаємося вздовж відповідної хорди та позначаємо другий її кінець номером $(2i + 1)$, другий кінець інцидентної сірої хорди — номером $(2i + 2)$, і так до тих пір, поки не повернемося до $(2n - 1)$ -вершини $\widehat{0}$ -ої сірої дуги — рис. 2.3с).

2) В результаті кінці кожної сірої дуги (крім поміченої $\hat{0}$ -ої) буде занумеровано парою $\{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\}$ послідовних натуральних чисел з $\{1, 2, \dots, 2n - 2\}$.

3) Пропускаючи вершину 0 і рухаючись за годинниковою стрілкою, випишемо привласнені номери вершинам \widehat{BG}_{n-1} -шаблону. В результаті одержимо перестановку

$$\pi' = \pi'(D) = \langle \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}, \dots, \pi'_{2n-3}, \pi'_{2n-2} \rangle \in S_{2n-2}^+$$

4) З урахуванням 2) та за допомогою відображення α^{-1} (α — з означення 1.16) перестановці $\pi' = \pi'(D)$ однозначно ставиться у відповідність перестановка $\pi = \pi(\pi'(D)) = \langle \pi_i \rangle \in S_{n-1}^\pm$, а саме: для кожного $1 \leq i \leq (n - 1)$

$$\alpha^{-1}(\{\pi'_{2i-1}, \pi'_{2i}\}) = \pi_i = \begin{cases} +\frac{\pi'_{2i}}{2}, & \pi'_{2i-1} - \text{непарне,} \\ -\frac{\pi'_{2i-1}}{2}, & \pi'_{2i-1} - \text{парне.} \end{cases}$$

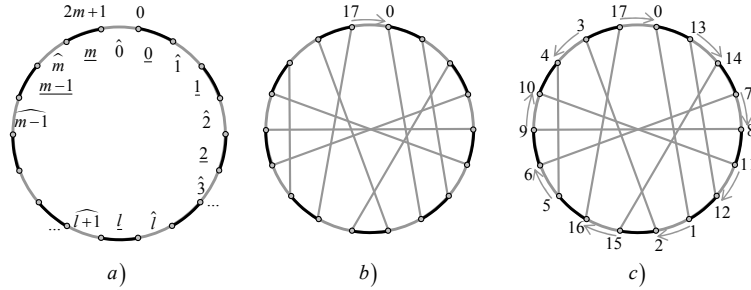


Рис. 2.3

a) \widehat{BG}_m -шаблон; b) $D \in \mathfrak{S}_{1,2;8}^N$;
 c) $\pi' = \pi'(D) = \langle 13, 14, 7, 8, 11, 12, 1, 2, 15, 16, 5, 6, 9, 10, 4, 3 \rangle$ $\pi = \pi(\pi'(D)) = \pi(D) = \langle 7, 4, 6, 1, 8, 3, 5, -2 \rangle \in S_{8,2}^-$, $\widehat{BG}(\pi) \equiv D$

Таким чином, кожній діаграмі $D \in \mathfrak{S}_{1,n}$ однозначно поставлено у відповідність перестановку $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^\pm$, \widehat{BG} -граф якої збігається з D .

Зокрема, кожній діаграмі D з класу $\mathfrak{S}_{1,n}^O$ однозначно ставиться у відповідність перестановка $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^+$, а кожній діаграмі D з класу $\mathfrak{S}_{1,n}^N$ — перестановка $\pi = \pi(D) \in S_{n-1}^-$ (\widehat{BG} -граф якої збігається з D).

І навпаки: кожній перестановці π з S_{n-1}^+ (з S_{n-1}^-) однозначно ставиться у відповідність $BG(\pi)$, а тому й $\widehat{BG}(\pi)$ — діаграма $D = D(\pi)$ саме з класу $\mathfrak{S}_{1,n}^O$ (з класу $\mathfrak{S}_{1,n}^N$ відповідно).

З урахуванням зазначеного, означення 2.1 та зауваження 2.2 діаграми $D \in \mathfrak{S}_{1,n}$ та $\widehat{BG}(\pi(D)) \in \widehat{BG}_{n-1}^\pm$ можна ототожнювати. Так само можна ототожнювати $\widehat{BG}(\pi) \in \widehat{BG}_{n-1}^\pm$ та діаграми $D(\pi) \in \mathfrak{S}_{1,n}$. Отже елементи множин $\mathfrak{S}_{1,n}^O$ і S_{n-1}^+ та $\mathfrak{S}_{1,n}^N$ і S_{n-1}^- перебувають у взаємно однозначній відповідності.

Більше того, оскільки число k чорних циклів 2-кольорової діаграми $D(\pi) \equiv \widehat{BG}(\pi) \in \mathfrak{S}_{1,k,n}$ збігається із числом циклів $BG(\pi)$, то $\pi \in S_{n-1,k}^\pm$. І навпаки, якщо $\pi \in S_{n-1,k}^\pm$, то $BG(\pi) \in BG_{n-1,k}^\pm$, а тому $\widehat{BG}(\pi) \in BG_{n-1,k}^\pm \equiv \mathfrak{S}_{1,k,n}$.

Таким чином, встановлено биекцію між елементами множин $\mathfrak{S}_{1,k;n}$ та $S_{n-1,k}^\pm$. Більш того, мають місце такі твердження.

Твердження 2.3. *Елементи множин $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O$ і $S_{n-1,k}^+$ перебувають у взаємно однозначній відповідності.*

Твердження 2.4. *Елементи множин $\mathfrak{S}_{1,k;n}^N$ і $S_{n-1,k}^-$ перебувають у взаємно однозначній відповідності.*

Наслідок 2.5.

$$|\mathfrak{S}_{1,k;n}| = |S_{n-1,k}^\pm| = S_H^\pm(n-1, k). \quad (2.7)$$

$$|\mathfrak{S}_{1,k;n}^O| = |S_{n-1,k}^+| = S_H^+(n-1, k). \quad (2.8)$$

Означення 2.6. *Нехай $\sigma = \langle \sigma_i \rangle \in S_{2m}^+$. Якщо для кожного $1 \leq i \leq t$ виконується рівність $\sigma_i + \sigma_{2m+1-i} = 2m+1$, то таку перестановку σ будемо називати симетричною, множину*

всіх таких перестановок позначати \tilde{S}_{2m}^+ , а множину відповідних діаграм $D(\sigma) \equiv \widehat{BG}(\sigma) \in \mathfrak{S}_{1,2m+1}^O$ — як $\tilde{\mathfrak{S}}_{1,2m+1}^O$.

Твердження 2.7. Діаграма $D \equiv \widehat{BG}(\sigma)$ є симетричною відносно осі симетрії \widehat{BG}_{2m} -шаблону, яка проходить через середини $\hat{0}$ -ої сірої та \underline{m} -ої чорної дуг, тоді і лише тоді, коли $\sigma \in \tilde{S}_{2m}^+$.

3. ПЕРЕРАХУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ГЛАДКИХ МІНІМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАМКНЕНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ РОДУ $g \geq 0$

3.1. Класифікаційна теорема та ілюстративні приклади до початкових значень. В [3] встановлено, що для довільної функції f з класу $C_{k,l}(M_g)$ (повним) топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова O -діаграма $D(f)$ з $n = 2g - 1 + k + l$ хордами, яка має точно k чорних (сірих) та l сірих (чорних) циклів. Тобто діаграма з класу $\mathfrak{S}_{k,l;n}^O$ ($n = 2g - 1 + k + l$). Зокрема має місце таке твердження:

Теорема 3.2. [3] Дві функції f_1 і f_2 з класу $C_{1,1}(M_g)$ будуть O -топологічно еквівалентними (топологічно еквівалентними) тоді і лише тоді, коли відповідні їм діаграми $D(f_1)$ і $D(f_2)$ з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ ($n = 2g + 1$) є еквівалентними відносно дії циклічної (відповідно дієдральної) групи. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ дорівнює числу нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ ($n = 2g + 1$).

Приклад 3.3. При $g = 0$ існує **єдина** діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;1}^O$, рис. 3.4a), при $g = 1$ — також **єдина** діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;3}^O$, рис. 3.4b), для $g = 2$ маємо рівно **4** нееквівалентні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;5}^O$, рис. 3.4c), а для $g = 3$ існує **25** нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^O$, рис. 3.5. Таким чином, для початкових $g = 0, 1, 2, 3$ число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ становить 1, 1, 4 і 25 відповідно.

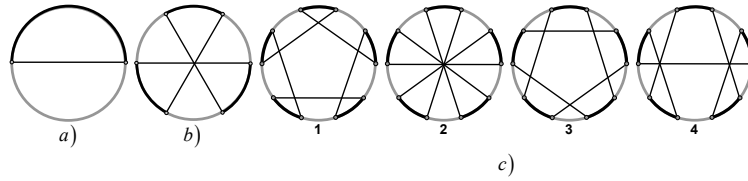


Рис. 3.4. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(M_0)$, $C_{1,1}(M_1)$ і $C_{1,1}(M_2)$ відповідно.

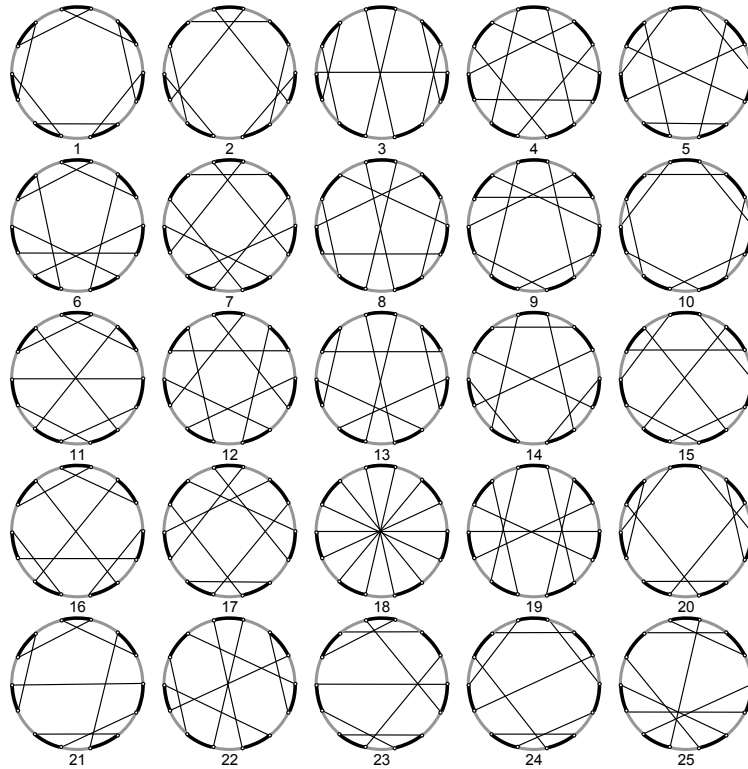


Рис. 3.5. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_3)$.

Формалізуємо зазначену задачу для довільного $g \geq 0$.

За лемою Бернсайда та з урахуванням результатів робіт [3] і [7] число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку $2n$) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ ($n = 2g + 1$) може бути визначено за допомогою співвідношення

$$d_O^{**}(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(d_O^*(n) + S_O(n) \right), \quad (3.9)$$

де $d_O^*(n)$ — число неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$; $S_O(n)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії** 2-кольорового $2n$ -шаблону (надалі, коротко, — *симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$*).

Таким чином, вирішення зазначеної проблеми зводиться до задачі про підрахунок числа тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;2g+1}^O$, які є симетричними відносно фіксованої осі симетрії 2-кольорового $(4g + 2)$ -шаблону.

Розв'язанню цієї задачі й присвячено наступний підпункт.

3.4. Перерахування симетричних діаграм класу $\mathfrak{S}_{1,1;2g+1}^O$. Очевидно, що безпосереднім наслідком означення 2.6, твердження 2.7 та відповідної формули з (1.1) є справедливості наступних рівностей

$$\left| \widehat{\mathfrak{S}}_{1,2g+1}^O \right| = \left| \widetilde{\mathfrak{S}}_{2g}^+ \right| = |S_g^\pm| = g! \cdot 2^g. \quad (3.10)$$

Позначимо далі через $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;2g+1}^O$ множину тих (симетричних) діаграм з $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,2g+1}^O$, які мають 1 сірий та 1 чорний цикл (тобто, множину тих діаграм з $\mathfrak{S}_{1,1;2g+1}^O$, що є симетричними відносно осі симетрії \widehat{BG}_{2g} -шаблону, яка проходить через середини $\widehat{0}$ -ої сірої та \underline{g} -ої чорної дуг).

З урахуванням прикладу 3, для початкових $g = 0, 1, 2, 3$ значення величини $S_O(2g + 1)$ становлять 1, 1, 4 і 20 (на рис. 3.5 це діаграми 1–20) відповідно. У роботі [8] в явному вигляді наведено всі 148 симетричних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;9}^O$ ($g = 4$).

Більш того, з урахуванням результатів [8], при $1 \leq g \leq 9$ відповідні значення величин $S_O(2g+1)$ і $S_H^\pm(g;1)$ збігаються. Тому є всі підстави для висунення *гіпотези* щодо збіг величин при довільному $g \geq 1$.

Нехай $\pi \in S_m^\pm$. Трансформуємо перестановку $\pi = \langle \pi_i \rangle$ у неоснащену перестановку $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{2m} \rangle \in \tilde{S}_{2m}^+$ за допомогою відображення $\kappa: S_m^\pm \mapsto \tilde{S}_{2m}^+$, при якому $\forall i \in [m]$

$$\kappa: \pi_i \mapsto \{\sigma_i, \sigma_{2m+1-i}\} = \begin{cases} \{\pi_i, 2m+1-\pi_i\}, & \pi_i > 0 \\ \{2m+1-|\pi_i|, |\pi_i|\}, & \pi_i < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що κ є бієктивним та для всіх $i \in [m]$

$$\kappa^{-1}: \{\sigma_i, \sigma_{2m+1-i}\} \mapsto \pi_i = \begin{cases} +\sigma_i, & \sigma_i \leq m \\ -\sigma_{2m+1-i}, & \sigma_i > m. \end{cases}$$

Нехай далі $\tilde{S}_{2m,1}^+$ — множина тих $\sigma \in \tilde{S}_{2m}^+$, чий BG -графі розкладаються в 1 цикл. Іншими словами, множина тих $\sigma \in \tilde{S}_{2m}^+$, при яких $BG(\sigma) \in BG_{2m,1}^+$ (або ж $\widehat{BG}(\sigma) \in \widehat{BG}_{2m,1}^+$).

Зауваження 3.5. З урахуванням твердження 2.7, кожну діаграму $D \in \widehat{\mathfrak{S}}_{1,2g+1}^O$ можна ототожнити із перестановкою $\sigma \in \tilde{S}_{2g}^+$ ($\widehat{BG}(\sigma) \equiv D$). А за допомогою відображення κ — із перестановкою $\pi = \kappa^{-1}(\sigma) \in S_g^\pm$. Більше того, в ілюстративних прикладах 3.6 і 3.7 показано, що кожну діаграму D з класу $\tilde{\mathfrak{S}}_{1,1;2g+1}^O$ можна ототожнити з (оснащеною) перестановкою $\pi = \pi(D)$ саме із класу $S_{g,1}^\pm$. І навпаки.

Приклад 3.6. При $g = 2$ існує лише **чотири** діаграми з класу $\tilde{\mathfrak{S}}_{1,1;5}^O$, рис. 3.4с). Кожну з них (рис. 3.6) можна ототожнити із відповідними перестановками $\pi_i \in S_{2,1}^\pm$:

$$\begin{aligned} 1) \sigma'_1 = \sigma'_1(D_1) &= \langle 7, 8; 5, 6; 3, 4; 1, 2 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\ &\mapsto \sigma_1 = \langle 4, 3 \mid 2, 1 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_1 = \langle -1, -2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \sigma'_2 = \sigma'_2(D_2) &= \langle 3, 4; 7, 8; 1, 2; 5, 6 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\
&\longmapsto \sigma_2 = \langle 2, 4 \mid 1, 3 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_2 = \langle +2, -1 \rangle, \\
3) \sigma'_3 = \sigma'_3(D_3) &= \langle 5, 6; 1, 2; 7, 8; 3, 4 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\
&\longmapsto \sigma_3 = \langle 3, 1 \mid 4, 2 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_3 = \langle -2, +1 \rangle, \\
3) \sigma'_4 = \sigma'_4(D_4) &= \langle 3, 4; 1, 2; 7, 8; 5, 6 \rangle \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\
&\longmapsto \sigma_4 = \langle 2, 1 \mid 4, 3 \rangle \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_4 = \langle +2, +1 \rangle.
\end{aligned}$$

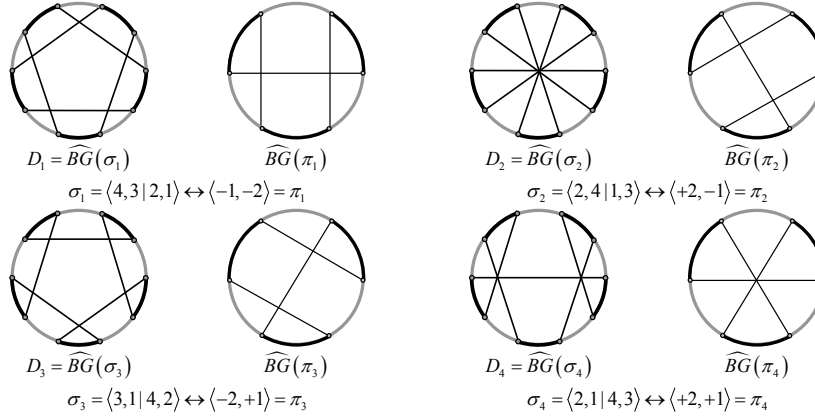


Рис. 3.6

Таким чином, $|\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;5}^O| = S_H^\pm(2, 1)$.

Приклад 3.7. На рис. 3.7 наведено всі 20 перестановок $\pi \in S_{3,1}^\pm$, відповідні $\widehat{BG}(\pi)$ -графи з $\widehat{BG}_{3,1}^\pm$ та відповідно всі симетричні $\widehat{BG}(\sigma) = \widehat{BG}(\kappa(\pi))$ -діаграми з $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;7}^O$. Отже,

$$|\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1;7}^O| = S_H^\pm(3, 1).$$

Як з'ясувалося, мають місце наступні твердження:

Лема 3.8. *Якщо $\sigma \in \tilde{S}_{2m,1}^+$, то $\pi = \kappa^{-1}(\sigma) \in S_{m,1}^\pm$. І навпаки: якщо $\pi \in S_{m,1}^\pm$, то $\sigma = \kappa(\pi) \in \tilde{S}_{2m,1}^+$.*

Таким чином, справедливим є твердження

Лема 3.9. [9] *Для довільного натурального g справеджується рівність*

$$S_O(n) = |\tilde{\mathfrak{S}}_{1,1;2g+1}^O| = |\tilde{S}_{2g,1}^+| = |S_{g,1}^\pm| = S_H^\pm(g, 1). \quad (3.11)$$

Початкові значення числа $d_O(n)$ всіх діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ та числа $S_O(n)$ симетричних діаграм з цього класу подано у таблиці 3.1. З урахуванням леми 3.9, має місце основний результат

Теорема 3.10. *Число нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ ($n = 2g + 1$) можна обчислити за допомогою співвідношення*

$$d_O^{**}(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(d_O^*(n) + S_H^\pm\left(\frac{n-1}{2}; 1\right) \right), \quad (3.12)$$

де величина $d_O^*(n)$ (з урахуванням результатів роботи [7]) може бути визначена за такими формулами:

$$d_O^*(n) = \frac{1}{n} \left(d_O(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \rho(n, i) \right), \quad (3.13)$$

$$\rho(n, i) = d(i) \cdot \phi^*\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1}. \quad (3.14)$$

В цих формулах $\rho(n, i)$ – число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$, які «самосуміщуються» при повороті на кут $\omega_i = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i$ навколо центру 2-кольорового $2n$ -шаблону (за годинниковою стрілкою),

$$d_O(n) = |\mathfrak{S}_{1,1;n}^O| = \frac{2(n-1)!}{n+1} = \frac{(2g)!}{g+1} = S_H(2g; 1),$$

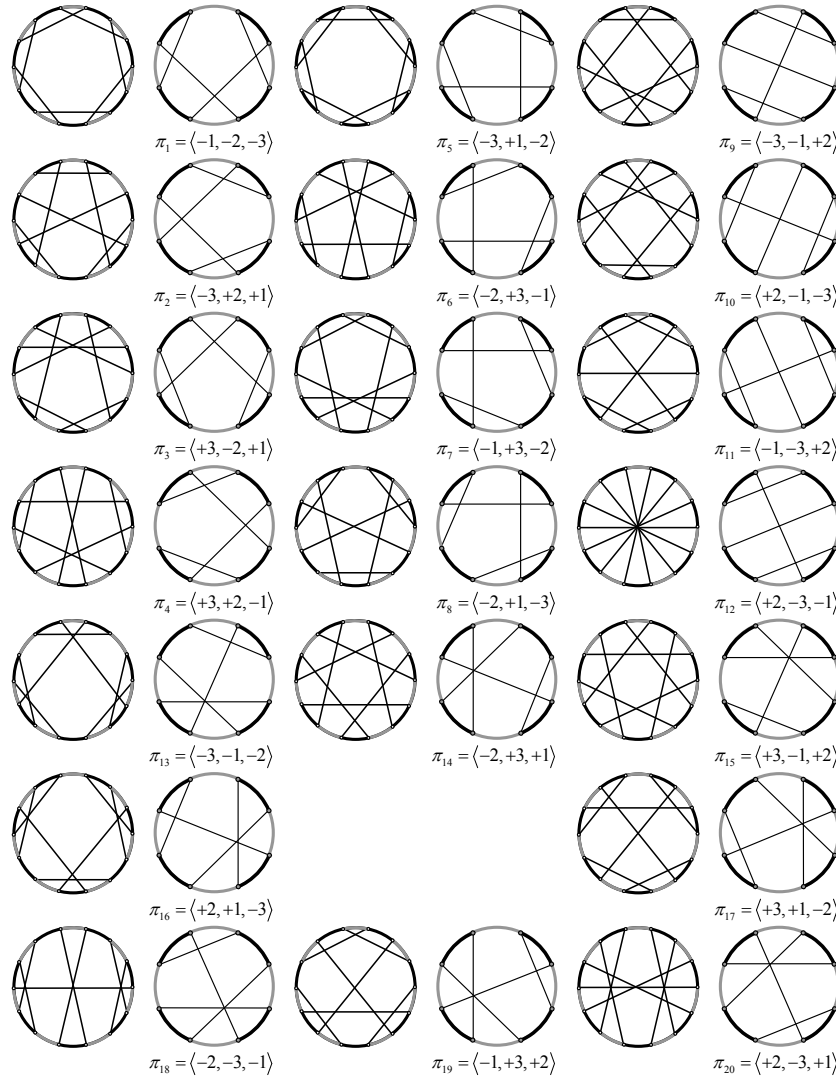


Рис. 3.7. $\widehat{BG}(\sigma_i), \widehat{BG}(\pi_i), \pi_i \in S_{3,1}^\pm, 1 \leq i \leq 20$

$d(i) = \frac{2(i-1)!}{i+1}$, $\phi(q) = |\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1\}|$ – функція Ейлера,

$$\phi^*(q) = |\{1 \leq h < q \mid \gcd(h, q) = 1 = \gcd(h+1, q)\}|,$$

$\gcd(a, b)$ – найбільший спільний дільник натуральних a і b , а величина $S_H^\pm(\frac{n-1}{2}; 1) = S_H^\pm(g; 1)$ визначається за формулами (1.5)–(1.6).

Наслідок 3.11. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ можна знайти за формулами (3.12)–(3.14), (1.5)–(1.6).

Початкові значення числа неізоморфних $d_O^*(n)$ та числа нееквівалентних $d_O^{**}(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^O$ ($n = 2g + 1$) подано у таблиці 3.2.

4. ПЕРЕРАХУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ГЛАДКИХ МІНІМАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ НА ЗАМКНЕНИХ НЕОРІЄНТОВНИХ ПОВЕРХНЯХ РОДУ $g \geq 1$

4.1. Класифікаційна теорема та початкові результати.

В роботах [3], [4] встановлено, що для довільної функції f з класу $C_{k,l}(N_g)$ (повним) топологічним інваріантом є 2-кольорова хордова N -діаграма $D(f)$ з $n = g - 1 + k + l$ хордами, яка має точно k чорних (або ж сірих) та l сірих (відповідно чорних) циклів. Тобто діаграма з класу $\mathfrak{S}_{k,l;n}^N$ ($n = g - 1 + k + l$). Зокрема має місце твердження

Теорема 4.2 ([4]). Дві функції f_1 і f_2 з класу $C_{1,1}(N_g)$ є топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли відповідні їм діаграми $D(f_1)$ і $D(f_2)$ з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ ($n = g + 1$) є еквівалентними відносно дії дієдральної групи. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$ дорівнює числу нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку $2n$) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ ($n = g + 1$).

Приклад 4.3. При $g = 1$ існує **єдина** діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;2}^N$, рис. 4.8а), при $g = 2$ існує також **єдина** діаграма з класу $\mathfrak{S}_{1,1;3}^N$,

g	n	$d_O(n) = \frac{(2g)!}{g+1} = S_H(2g, 1)$, послідовність A060593 в [24]	$S_O(n) = S_H^\pm(g, 1)$, послід. A001171 в [24]
0	1	1	1
1	3	1	1
2	5	8	4
3	7	180	20
4	9	8 064	148
5	11	604 800	1 348
6	13	68 428 800	15 104
7	15	10 897 286 400	198 144
8	17	2 324 754 432 000	2 998 656
9	19	640 237 370 572 800	51 290 496
10	21	221 172 909 834 240 000	979 732 224
11	23	93 666 727 314 800 640 000	20 661 458 688

ТАБЛ. 3.1. Початкові значення величин $d_O(n)$
та $S_O(n)$, $n = 2g + 1$

g	n	$d_O^*(n)$	$d_O^{**}(n) = \frac{d_O^*(n) + S_O(n)}{2}$
0	1	1	1
1	3	1	1
2	5	4	4
3	7	30	25
4	9	900	524
5	11	54 990	28 169
6	13	5 263 764	2 639 434
7	15	726 485 868	363 342 006
8	17	136 750 260 720	68 376 629 688
9	19	33 696 703 714 374	16 848 377 502 435
10	21	10 532 043 325 452 570	5 266 022 152 592 360
11	23	4 072 466 404 991 332 194	2 036 233 212 826 395 441

ТАБЛ. 3.2. Початкові значення величин $d_O^*(n)$
та $d_O^{**}(n)$, $n = 2g + 1$

рис. 4.8b), для $g = 3$ маємо рівно **4** нееквівалентні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;4}^N$, рис. 4.8c), а при $g = 4$ існує **20** нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;5}^N$, рис. 4.9. Таким чином, для початкових $g = 1, 2, 3, 4$ число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$ становить 1, 1, 4 і 20 відповідно.

В загальному ж випадку (для натуральних $g \geq 1$) ця задача і до сьогодні залишається нерозв'язаною.

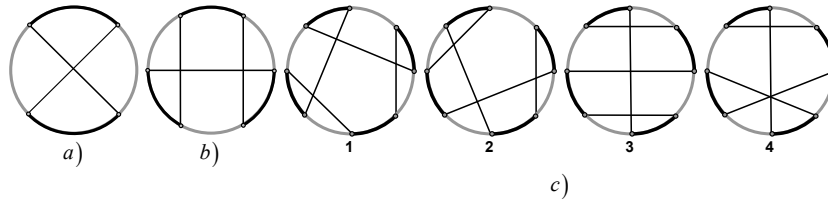


Рис. 4.8. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(N_1)$, $C_{1,1}(N_2)$ і $C_{1,1}(N_3)$ відповідно.

Проте, як з'ясувалося, існує безпосередній зв'язок між шуканою та наведеними вище величинами $S_H^\pm(g, 1)$ та $S_H(g, 1)$. А вирішення зазначеної проблеми зводиться до розв'язання задач про підрахунок тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ ($n = g + 1$), які мають симетрії (відносно повороту та/або відбиття).

Твердження 4.4. Для натуральних $n = g + 1 > 1$ число $d_N(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ можна обчислити за формулами

$$d_N(n) = S_H^\pm(n - 1, 1) - S_H(n - 1, 1) = \boxed{S_H^\pm(g, 1) - S_H(g, 1)} = \begin{cases} S_H^\pm(g, 1) - \frac{2 \cdot g!}{g+2}, & g = 2m \\ S_H^\pm(g, 1), & g \neq 2m. \end{cases} \quad (4.15)$$

Доведення. З урахуванням пункту 2, при $n = g + 1$ і $1 \leq k \leq n$ число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,k;n}$ збігається із числом $S_H^\pm(g, k)$ перестановок з $S_{g,k}^\pm$. Проте серед них точно $S_H^+(g, k)$ перестановок,

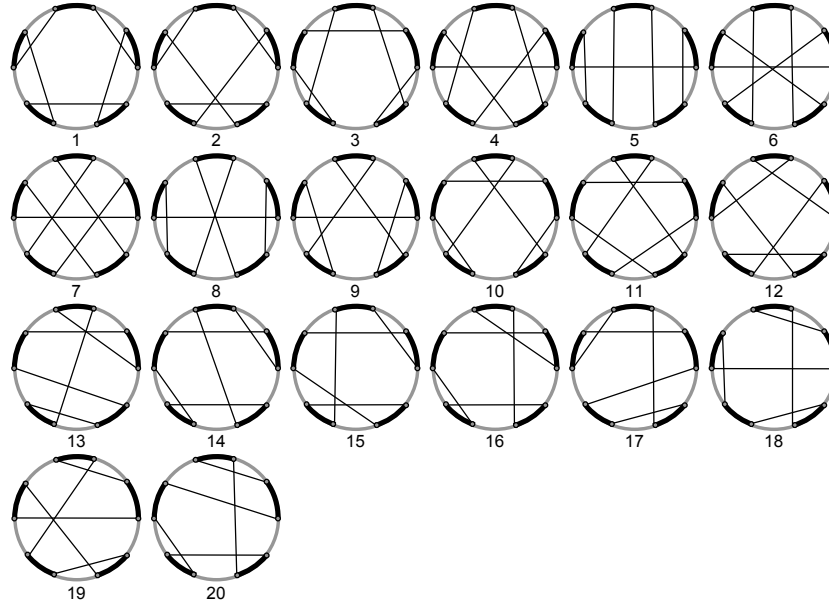


Рис. 4.9. (Топологічні) інваріанти для топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_4)$.

які визначають підклас $\mathfrak{S}_{1,k;n}^O$ саме O -діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,k;n}$. Тому число $d_N(n, k)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,k;n}^N$ можна обчислити за допомогою співвідношення

$$d_N(g+1, k) = S_H^\pm(g, k) - S_H^+(g, k).$$

З урахуванням співвідношення (1.4), при $k = 1$ для натуральних $g = n - 1$ маємо справедливість формули (4.15). \square

Лема 4.5. Для довільного простого $n = g + 1 > 2$ число $d_N^*(n)$ неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ можна обчислити за такою формулою:

$$d_N^*(n) = \frac{d_N(n)}{n} = \frac{1}{g+1} \left(S_H^\pm(g, 1) - S_H(g, 1) \right). \quad (4.16)$$

g	$n =$ $g + 1$	$S_H^\pm(g, 1),$ A001171 в [24]	$S_H(g, 1),$ A060593 в [24]	$d_N(n) =$ $S_H^\pm(g, 1) - S_H(g, 1)$
1	2	1	0	1
2	3	4	1	3
3	4	20	0	20
4	5	148	8	140
5	6	1 348	0	1 348
6	7	15 104	180	14 924
7	8	198 144	0	198 144
8	9	2 998 656	8 064	2 990 592
9	10	51 290 496	0	51 290 496
10	11	979 732 224	604 800	979 127 424
11	12	20 661 458 688	0	20 661 458 688
12	13	476 936 766 720	68 428 800	476 868 337 920

ТАБЛ. 4.3. Початкові значення величин $d_N(n)$

Доведення. За лемою Бернсайда (та з урахуванням, наприклад, результатів робіт [7] та [10]) число $d_N^*(n)$ неізоморфних (відносно дії циклічно групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ можна обчислити за допомогою співвідношення

$$d_N^*(n) = \frac{1}{n} \left(d_N(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot \nu(n, i) \right), \quad (4.17)$$

де $\nu(n, i)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$, які «самосуміщуються» при повороті на кут $\omega_{n,i} = \frac{2\pi \cdot i}{n}$ навколо центру 2-кольорового $2n$ -шаблону (за годинниковою стрілкою), а $\phi(q)$ — функція Ейлера.

Оскільки $n \in$ простим, то знаходження (4.17) зводиться до обчислення величини $\nu(n, 1)$. В [10, лема 2.2] було встановлено, що для непарних n число $\rho(n, i)$ тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n;1}^N$, які самосуміщуються при повороті на кут $\omega_{n,i} (i|n)$ навколо центру 2-кольорового $2n$ -шаблону (за годинниковою стрілкою), можна

обчислити за формулою

$$\rho(n, i) = \phi\left(\frac{n}{i}\right) \cdot (i-1)! \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^{i-1} \cdot (2^{i-1} - 1). \quad (4.18)$$

Звідки (для непарних n та класу $\mathfrak{S}_{n;1}^N$) $\rho(n, 1) \equiv 0$. А з того, що $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N \subset \mathfrak{S}_{n;1}^N$ випливає, що $\nu(n, 1) = 0$. \square

Зауваження 4.6. З урахуванням леми 4.5 для числа неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ в якості асимптотичної оцінки (при $n \rightarrow \infty$) можна прийняти величину

$$\delta^*(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \cdot d_N(n) \right\rfloor.$$

4.7. Підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класів $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ та $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ (числа топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(N_5)$ та $C_{1,1}(N_6)$).

Лема 4.8. Число нееквівалентних (відносно дії групи діедр) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$ становить 125, тобто

$$d_N^{**}(6) = 125. \quad (4.19)$$

Доведення. За лемою Бернсайда та з урахуванням, наприклад, результатів робіт [7] та [10], має місце рівність

$$d_N^{**}(6) = \frac{1}{2} \left(d_N^*(6) + \frac{1}{2} (s_1(6) + s_2(6)) \right), \quad (4.20)$$

$$d_N^*(6) = \frac{1}{6} \left(d_N(6) + \phi(1)\nu(6, 1) + \phi(3)\nu(6, 2) + \nu(6, 3) \right), \quad (4.21)$$

де $s_1(6)$ ($s_2(6)$) — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії I-го (II-го) типу, яка проходить через середини діаметрально протилежних чорних (відповідно сірих) дуг 2-кольорового 12-шаблону, $\phi(q)$ — функція Ейлера (кількість натуральних менших за q чисел, взаємно простих із ним), а $\nu(6, i)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$, які самосуміщуються при повороті (навколо центра 2-кольорового 12-шаблону) на кут $\omega_{6,i} = \frac{2\pi}{6} \cdot i = \frac{\pi}{3} \cdot i$ (у напрямку за годинниковою стрілкою).

Як випливає з [10], $\nu(n, 1) \equiv 0$ для парних $n > 2$.

Всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$, які самосуміщуються при повороті на кут $\omega_{6,2} = \frac{2\pi}{3}$, наведено на рис. 4.10. Тому $\nu(6, 2) = 4$.

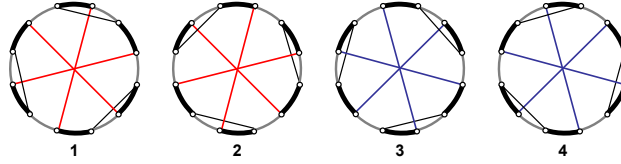


Рис. 4.10

Всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$, які самосуміщуються при повороті на кут $\omega_{6,3} = \pi$, наведено на рис. 4.11.

Зауважимо, що кожна з них характеризується наявністю рівно двох «діаметральних» хорд (що сполучають діаметрально протилежні вершини шаблону), інваріантних відносно повороту на зазначений кут.

Отже, $\nu(6, 3) = 48$. А з урахуванням співвідношення (4.21), маємо

$$d_N^*(6) = \frac{1}{6} \left(1348 + 2 \cdot 4 + 48 \right) = \frac{1404}{6} = 234. \quad (4.22)$$

Неважко перевірити, що існує точно:

- 16 діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$, які є симетричними відносно фіксованої осі симетрії I-го типу, рис. 4.12;
- 16 діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;6}^N$, які є симетричними відносно фіксованої осі симетрії II-го типу, рис. 4.13.

Таким чином, $s_1(6) = s_2(6) = 16$.

З урахуванням співвідношення (4.20), остаточно маємо

$$d_N^{**}(6) = \frac{1}{2} \left(234 + \frac{1}{2} (16 + 16) \right) = 125.$$

Лему доведено. □

Зауваження 4.9. Рівність $s_1(6) = s_2(6)$, одержана під час доведення, не є випадковою, тому що для парних n зазначеною

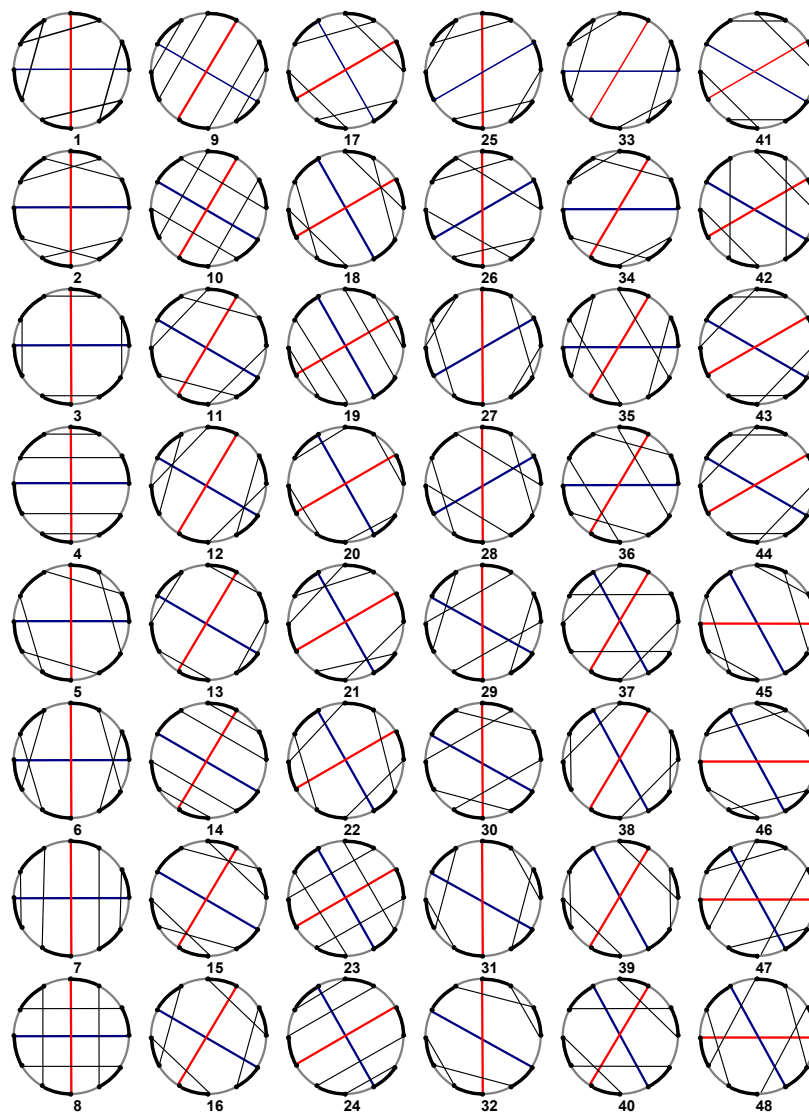


Рис. 4.11

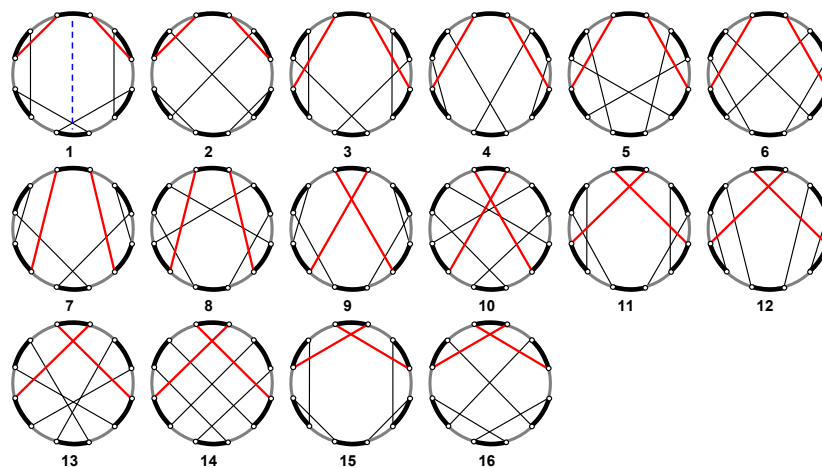


Рис. 4.12

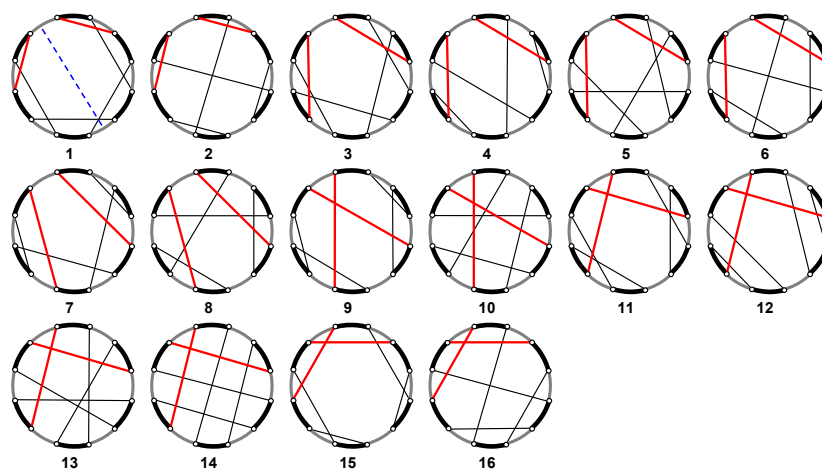


Рис. 4.13

властивістю володіє кожен клас двокольорових n -діаграм, які

мають однакову кількість чорних та сірих циклів. А тому співвідношення для підрахунку числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;2m}^N$ набуває очевидного спрощення

$$d_N^{**}(2m) = \frac{1}{2} \left(d_N^*(2m) + \bar{s}(2m) \right), \quad (4.23)$$

де $\bar{s}(2m)$ — число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;2m}^N$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії I-го (або II-го) типу, яка проходить через середини діаметрально протилежних чорних (відповідно сірих) дуг 2-кольорового $2m$ -шаблону.

Наслідок 4.10. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_5)$ становить 125.

Лема 4.11. Число нееквівалентних (відносно дії групи діедра) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ становить 1136, тобто

$$d_N^{**}(7) = 1136. \quad (4.24)$$

Доведення. За лемою Бернсайда та з урахуванням леми 4.5 має місце рівність

$$d_N^{**}(7) = \frac{1}{2} (d_N^*(7) + s_0(7)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d_N(7)}{7} + s_0(7) \right), \quad (4.25)$$

де $s_0(7)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії (яка проходить через середини діаметрально протилежних сірої та чорної дуг) 2-кольорового 14-шаблону.

Очевидно, що існує лише 12 типів симетричних (відносно фіксованої осі симетрії 2-кольорового 14-шаблону) 2-кольорових N -діаграм з 7 хордами, рис. 4.14.

Всі симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ наведено за типами на рисунках 4.15–4.18 нижче.

Таким чином $s_0(7) = 140$. А з урахуванням співвідношення (4.25), остаточно маємо $d_N^{**}(7) = \frac{1}{2} (2132 + 140) = 1136$. \square

Наслідок 4.12. Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_6)$ становить 1136.

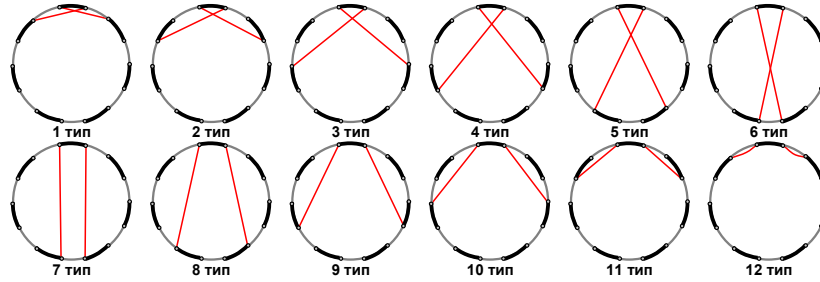


Рис. 4.14

g	1	2	3	4	5	6	10	12
n	2	3	4	5	6	7	11	13
$d_N^*(n)$	1	1	6	28	234	2 132	89 011 584	36 682 179 840
$d_N^{**}(n)$	1	1	4	20	125	1 136	?	?

ТАБЛ. 4.4. Початкові значення величин $d_N^*(n)$ та $d_N^{**}(n)$

4.13. Асимптотична оцінка для $d_N^{**}(n)$. Використовуючи результати робіт [15], [14] та [10], не важко встановити, що для певного класу L_n 2-кольорових n -діаграм в якості асимптотичної оцінки (при $n \rightarrow \infty$) для числа нееквівалентних (відносно дії групи дієдра порядку $2n$) діаграм із зазначеного класу можна прийняти величину $\bar{\delta}_n = \left\lfloor \frac{|L_n|}{2n} \right\rfloor$.

Тому (з урахуванням зауваження 4.6) для числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1,1;n}^N$ в якості асимптотичної оцінки при $n \rightarrow \infty$ (в «першому наближенні») можна прийняти величину $\delta^{**}(n) = \left\lfloor \frac{d_N(n)}{2n} \right\rfloor$.

Для першого і другого доданків суми (1.5) уведемо наступні позначення

$$SHN_1(g) = \frac{2^{3g+1} \cdot (g+1)! \cdot (g!)^2}{(2g+2)!},$$

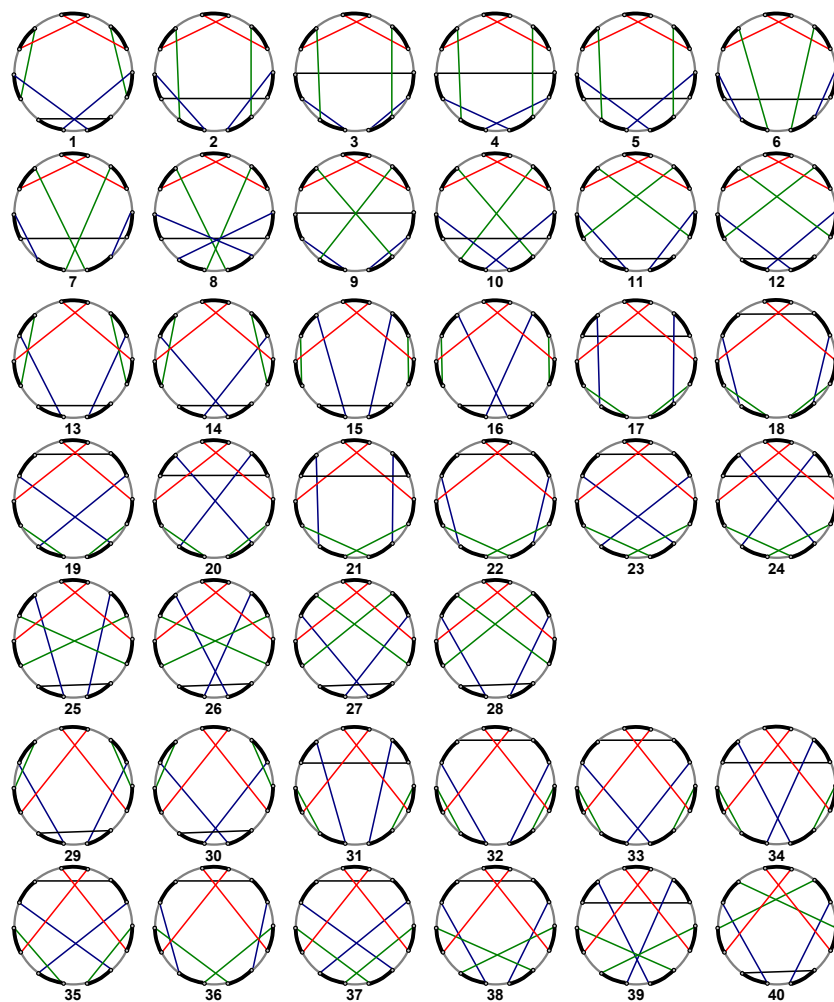


Рис. 4.15. Всі симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ 2, 3 і 4 типів.

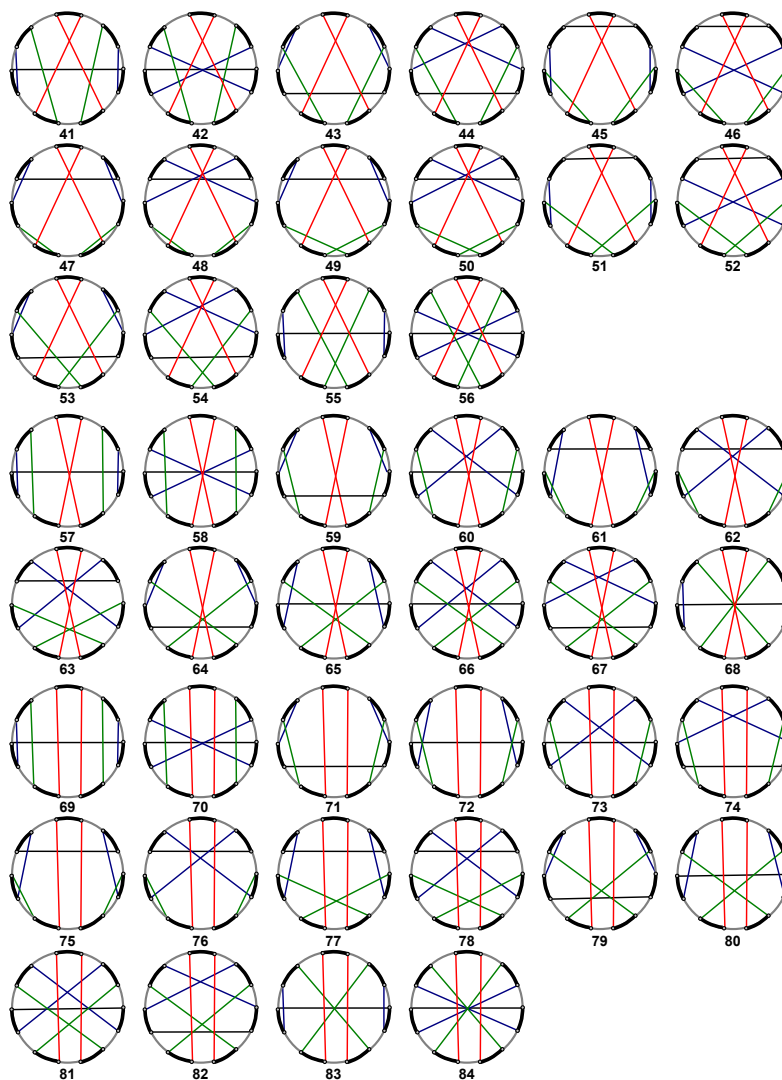


Рис. 4.16. Всі симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ 5, 6 і 7 типів.

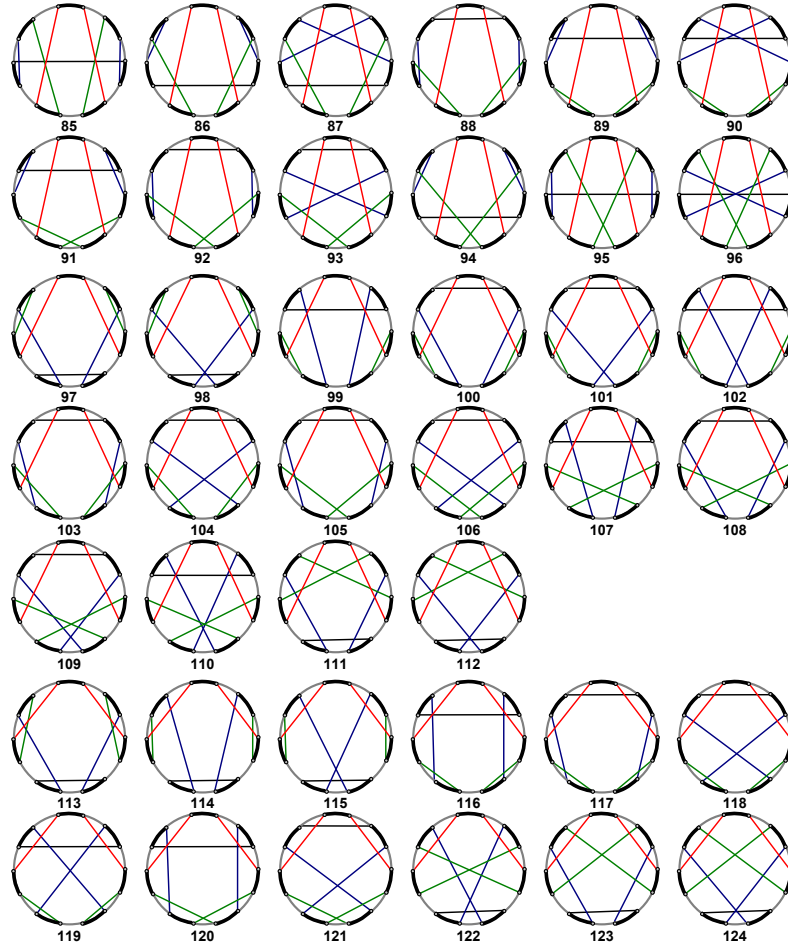


Рис. 4.17. Всі симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ 8, 9 і 10 типів.

$$SHN_2(g) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{\min(i, g+1-i)} c(i, j) \cdot \left[\frac{2^{i-j-1} (2j)! (i-1)! (g+2-i-j)!}{(2j-1)j!} \right]^2,$$

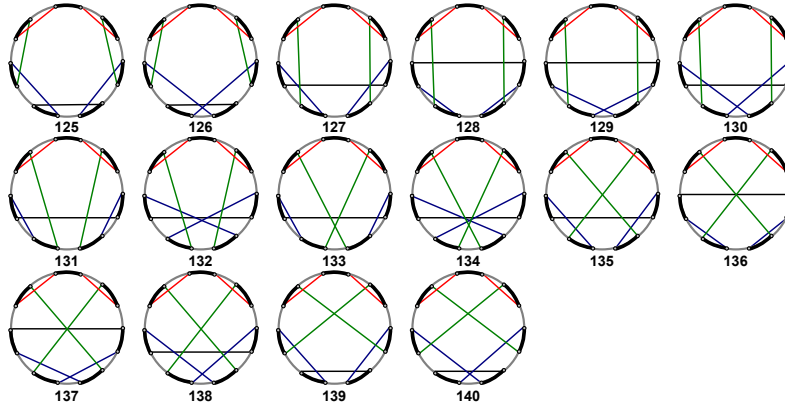


Рис. 4.18. Всі симетричні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1,1;7}^N$ **11** типу.

де $c(i; j)$ визначається за формулою (1.6).

Тоді мають місце наступні властивості:

- 1⁰) для довільного натурального g величина $SGN_2(g) < 0$;
- 2⁰) $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{SGN_1(g)}{\lfloor 4g \rfloor \cdot |SGN_2(g)|} = 1$.

З іншого боку, з урахуванням формули (4.15), при $g \rightarrow \infty$ в якості величини $d_N(n) = d_N(g + 1)$ природно обрати величину $S_H^\pm(g; 1) = SHN_1(g) + SHN_2(g)$.

Тоді, застосовуючи властивість 2⁰), не важко показати, що при $g \rightarrow \infty$ відношення

$$\frac{S_H^\pm(g; 1)}{2(g + 1)} \quad \text{та} \quad \frac{2^{3g} \cdot (g!)^3}{(2g + 2)!}$$

є еквівалентними нескінченно великими величинами.

Таким чином, одержано асимптотичну оцінку для $d_N^{**}(n)$. А саме:

Твердження 4.14. При $n \rightarrow \infty$

$$d_N^{**}(n) \sim \bar{\delta}(n) = \frac{2^{3(n-1)} \cdot ((n-1)!)^3}{(2n)!}. \quad (4.26)$$

ВИСНОВКИ ТА ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

Таким чином, в представленій роботі:

1) повністю розв'язано задачу про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ (на замкнених орієнтовних поверхнях роду $g \geq 0$);

2) вперше встановлено точне значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(N_5)$ та $C_{1,1}(N_6)$ (на замкнених неорієнтовних поверхнях роду 5 і 6);

3) досліджено асимптотичну поведінку числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$, коли $g \rightarrow \infty$.

Крім того, як з'ясувалось, існує тісний зв'язок між задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$, відомою «Задачею комівояжера» («Travelling salesman problem») [22] та задачами про перестановки геному [19].

Подальша робота може бути пов'язана із:

- 1) узагальненням одержаних результатів на випадок зняття обмеження про збереження орієнтації гомеоморфізму $h': \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ у означенні топологічно еквівалентних функцій;
- 2) встановленням формул для підрахунку точного значення числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(N_g)$.

Аналізуючи результати робіт [23] і [11], цілком досяжним здається розв'язання задач про підрахунок числа O -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,n-2}(M_1)$ (на двовимірному торі T^2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topology Appl.* — 2002. — **119**, 3. — P. 257–267.
- [2] *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 1998. — **55**, 5. — С. 687–700.
- [3] *Кадубовський О. А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях // *Укр. мат. журн.* — 2006. — **58**, 3. — С. 343–351.
- [4] *Кадубовський А. А.* Топологическая классификация гладких функций с одной критической точкой типа седло на неориентируемых поверхностях // *Труды международного геометрического центра.* — 2008. — **1**, 1–2. — С. 13–22.
- [5] *Кадубовський О. А.* Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері // *Проблеми топології та суміжні питання.* — 2010. — **3**, 3. — С. 87–107.
- [6] *Кадубовський А. А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II // *Труды международного геометрического центра.* — 2015. — **8**, 1. — С. 46–61.
- [7] *Кадубовський О. А.* Про один клас хордових діаграм максимального роду // *Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* — 2006. — **1**. — С. 17–27.
- [8] *Кадубовський О. А., Воцана Л. В.* Про число нееквівалентних двокольорових хордових O -діаграм максимального роду // *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ.* — 2015. — **5**. — С. 51–64.
- [9] *Kadubovskiy O. A., Voschana L. V.* Enumeration of 2-color chord diagrams of maximal genus under rotation and reflection // *Sixteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk*

- Conference, May 14–15, 2015, Kyiv: Conference materials. Vol. 2. Algebra. Geometry. Analysis.* — 2015. — **2**. — P. 20–21.
- [10] Кадубовський А. А. Двухцветные хордовые N -диаграммы с одним черным циклом // *Труды института прикладной математики и механики НАН Украины.* — 2012. — 24. — С. 134–146.
- [11] Grusea Simona, Labarre Anthony. The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations // *Discrete Appl. Math.* — 2013. — **161**, 10–11. — P. 1448–1466.
- [12] Cori Robert, Marcus Michel. Counting non-isomorphic chord diagrams // *Theoret. Comput. Sci.* — 1998. — **204**, 1–2. — P. 55–73.
- [13] Stoimenow A. Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants // *J. Knot Theory Ramifications.* — 1998. — **7**, 1. — P. 93–114.
- [14] Мантуров В. О. Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // *Топологические методы в теории гамильтоновых систем: сборник статей под ред. А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко, А.И. Шафаревича.* — 1998. — С. 203–212.
- [15] Khruzin A. Enumeration of chord diagrams // *arXiv:math.CO/0008209.* — 1998.
- [16] Callan D. Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection // *arXiv:math.CO/0510447.* — 2000.
- [17] Кадубовський О. А., Сторожилова О. В., Сторожилова Н. В. Двокольорові O і N -діаграми // *Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки.* — 2010. — **10**, 1. — С. 41–50.
- [18] Кадубовський О. А., Саприкіна Ю. С., Мазур С. Ю. Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом // *Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки.* — 2010. — **10**, 1. — С. 51–60.

- [19] *Bafna Vineet, Pevzner Pavel A.* Genome rearrangements and sorting by reversals // *SIAM J. Comput.* — 1996. — **25**, 2. — P. 272–289.
- [20] *Boccaro G.* Nombre de représentations d'une permutation comme produit de deux cycles de longueurs données // *Discrete Math.* — 1980. — **29**, 2. — P. 105–134.
- [21] *Hanlon Philip J., Stanley Richard P., Stembridge John R.* Some combinatorial aspects of the spectra of normally distributed random matrices // *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications* (Tampa, FL, 1991). — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. — **138** of *Contemp. Math.* — P. 151–174.
- [22] *Helsgaun Keld.* General k -opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic // *Math. Program. Comput.* — 2009. — **1**, 2-3. — P. 119–163.
- [23] *Doignon Jean-Paul, Labarre Anthony.* On Hultman numbers // *J. Integer Seq.* — 2007. — **10**, 6. — P. Article 07.6.2, 13.
- [24] «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences» // *published electronically at <http://oeis.org>.*

С. І. Максименко, О. В. Марункевич

Институт математики НАН України, Київ
maks@imath.kiev.ua, ohanamarunkevsh@rambler.ru

Топологічна стійкість функцій відносно усереднень за мірами з кусково постійними щільностями

We present sufficient conditions for a topological stability of averages of piece-wise differentiable functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with finitely many local extremes with respect to probability measures with piecewise constant densities.

В роботі отримані достатні умови для топологічної стійкості усереднень кусково диференційовних функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ зі скінченим числом екстремумів відносно мір з кусково постійними щільностями.

1. ВСТУП

Нехай μ — ймовірнісна міра на відрізку $[-1, 1]$, тобто невід'ємна σ -адитивна міра, визначена на борелівській алгебрі множин відрізка $[-1, 1]$, і така, що $\mu[-1, 1] = 1$. Тоді для кожної неперервної функції $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ та числа $\alpha > 0$ такого, що $2\alpha < b - a$ можна визначити нову вимірну функцію

$$f_\alpha: (a + \alpha, b - \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$$

за формулою:

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^1 f(x + t\alpha) d\mu. \quad (1.1)$$

Називатимемо її α -усередненням функції f відносно міри μ . Фактично усереднення є згорткою f із щільністю міри μ , якщо вона існує, див. зауваження 1.5 нижче.

© С. І. Максименко, О. В. Марункевич, 2015

Такі усереднення функцій відіграють важливу роль як в теоретичних дослідженнях, так і практичних задачах обробки сигналів, і називаються лінійними фільтрами, [1], [2], [3], [4].

Дана робота продовжує дослідження проблеми топологічної стійкості усереднень неперервних функцій розпочате авторами в [5], див. означення 1.1, 1.2 та 1.3 нижче.

Означення 1.1. див. напр. [6], [7] *Нагадаємо, що дві неперервні функції $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ та $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ називаються **топологічно еквівалентними**, якщо існують зберігаючі орієнтацію гомеоморфізми $h: (a, b) \rightarrow (c, d)$ та $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $\phi \circ f = g \circ h$, тобто зображена нижче діаграма є комутативною.*

$$\begin{array}{ccc} (a, b) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow \phi \\ (c, d) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

Грубо кажучи, це означає, що графіки f_α та f «мають однакову форму».

Означення 1.2. *Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція і μ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$. Скажемо, що f є **топологічно стійкою** відносно усереднень по мірі μ , якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що для всіх $\alpha \in (0, \varepsilon)$ функції f та f_α є топологічно еквівалентними.*

Проблема топологічної стійкості відносно усереднень має застосування до обчислення ентропії цифрових сигналів, [8], [9], [10].

Нехай $\mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ — група всіх гомеоморфізмів прямої \mathbb{R} , які зберігають орієнтацію. Ця група складається зі строго зростаючих неперервних функцій $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняють умову $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$. Тоді група $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ діє на просторі $C^0(\mathbb{R})$ всіх неперервних функцій $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за таким правилом: якщо $(h, \phi) \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ і $f \in C^0(\mathbb{R})$, то результат дії

пари (h, ϕ) на f є функція

$$\phi \circ f \circ h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Така дія часто називається *право-лівою*, [11], [12].

Очевидно, що $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ є топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли вони належать одній орбіті відносно дії групи $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$.

Розглянемо шлях

$$\gamma_f: [0, \infty) \rightarrow C^0(\mathbb{R}), \quad \gamma_f(\alpha) = f_\alpha,$$

що починається в точці f .

Очевидно, що $f \in C^0(\mathbb{R})$ є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ тоді і лише тоді, коли деякий “початок” $\gamma_f[0, \varepsilon]$ шляху γ_f міститься в орбіті функції f для деякого $\varepsilon > 0$.

Таким чином усереднення є лінійною операцією на просторі $C^0(\mathbb{R})$ всіх неперервних функцій $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, в той час, як топологічна еквівалентність зводиться до нелінійної дії груп гомеоморфізмів $\mathcal{H}(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

В [5] отримано достатні умови топологічної стійкості неперервних функцій зі скінченним числом локальних екстремумів відносно усереднень. Показано, що ця проблема може бути зведена до перевірки локальної топологічної стійкості лише паростків f в околах цих локальних екстремумів. В даній роботі ми покажемо, що ті достатні умови є також необхідними (див. означення 1.3 та теорему 1.4 нижче), а отже задача глобальної топологічної стійкості повністю зводиться до дослідження локальної стійкості паростків локальних екстремумів.

Нехай $f: (\mathbb{R}, a) \rightarrow \mathbb{R}$ — паросток неперервної функції в точці $a \in \mathbb{R}$, тобто f є неперервною функцією, визначеною на малому інтервалі $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ для деякого ε . Тоді, якщо $\alpha < \varepsilon$, то f_α визначена на інтервалі $(a - \varepsilon + \alpha, a + \varepsilon - \alpha)$, а її паросток в точці a , очевидно, залежить лише від паростка f в цій точці.

Зауважимо, що паростки f та f_α в точці a , взагалі кажучи, не є топологічно еквівалентними: при усередненнях локальні

екстремуми можуть зміщуватись. Тому природним є таке означення.

Означення 1.3. Назвемо паросток $f: (\mathbb{R}, a) \rightarrow \mathbb{R}$ є **топологічно стійким** відносно усереднень по мірі μ , якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожного $\alpha \in (0, \varepsilon)$ знайдуться числа $c_1, c_2, d_1, d_2 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ такі, що $c_1 < a < c_2$, $d_1 < d_2$, а обмеження

$$f|_{(c_1, c_2)}: (c_1, c_2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha|_{(d_1, d_2)}: (d_1, d_2) \rightarrow \mathbb{R}$$

є топологічно еквівалентними.

Теорема 1.4. (див. [5]) Нехай μ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$ і $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна функція, що має лише скінченну кількість локальних екстремумів x_1, \dots, x_n . Припустимо, що значення $f(x_i)$, ($i = 1, \dots, n$), попарно різні і відрізняються від $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Тоді наступні умови еквівалентні:

- (а) функція f є топологічно стійкою відносно усереднень по мірі μ ;
- (б) для кожного $i = 1, \dots, n$ паросток $f: (\mathbb{R}, x_i) \rightarrow \mathbb{R}$ в точці x_i є топологічно стійким відносно усереднень по мірі μ .

В [5] доведена імплікація (б) \Rightarrow (а). Ми покажемо, що (а) \Rightarrow (б). Таким чином, для функцій загального положення задача повністю зводиться до дослідження локальної стійкості паростків локальних екстремумів.

В статті [5] також отримано достатні умови для топологічної стійкості паростків функцій відносно дискретних мір зі скінченими носіями. В даній роботі ми наводимо достатні умови для топологічної стійкості паростків функцій відносно мір з кусково неперервними (і, зокрема, з локально постійними) щільностями, див теореми 3.5 та 4.1.

Зауваження 1.5. Нехай μ має щільність $p: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, тобто таку вимірну функцію, що $\mu(A) = \int_A p(t)dt$ для кожної борелівської підмножини $A \subset [-1, 1]$. Для кожного $\alpha > 0$ визначимо

функцію $p_\alpha: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ і міру μ_α на $[-\alpha, \alpha]$ за формулами:

$$p_\alpha(s) = \frac{p(s/\alpha)}{\alpha}, \quad \mu(A) = \int_A p_\alpha(s) ds.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mu_\alpha[-1, 1] &= \int_{-\alpha}^{\alpha} p_\alpha(s) ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(s/\alpha)}{\alpha} ds \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} p(s/\alpha) d(s/\alpha) = \int_{-1}^1 p(t) dt = 1, \end{aligned}$$

а отже μ_α є також ймовірнісною мірою. Більш того,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \int_{-1}^1 f(x + t\alpha) p(t) dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x + s) p(s/\alpha) d(s/\alpha) \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x + s) p_\alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Останній інтеграл називається *згорткою* f та p_α і позначається через $f * p_\alpha$.

Зазвичай, в формулі для згортки вираз стоїть $f(x - s)$, а не $f(x + s)$. Але це не принципово і грає роль лише для встановлення деяких її зручних алгебраїчних властивостей. Нам буде зручніше використовувати знак «+».

2. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1.4

В [5] доведена імплікація (b) \Rightarrow (a). Ми покажемо, що (a) \Rightarrow (b).

Припустимо, що функція f є топологічно стійкою відносно усереднень по мірі μ . Це означає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного $\alpha \in (0, \varepsilon)$ існують два гомеоморфізми $h_\alpha, \phi_\alpha \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ такі, що $\phi_\alpha \circ f_\alpha = f \circ h_\alpha$. Зокрема, f_α також має рівно n локальних екстремумів $h_\alpha(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ і приймає в них значення $\phi_\alpha(f(x_i))$. Потрібно довести, що паросток f в точці x_i є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ .

Зменшивши ε , можна вважати, що

$$x_{i+1} - x_i > 4\varepsilon \quad (2.2)$$

для всіх $i = 1, \dots, n-1$. Нехай $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Так як f є строго монотонною на інтервалах

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, +\infty),$$

то f_α є строго монотонною на

$$(-\infty, x_1 - \alpha), (x_1 + \alpha, x_2 - \alpha), \dots, (x_n + \alpha, +\infty).$$

Звідси випливає, що $h_\alpha(x_i) \in [x_i - \alpha, x_i + \alpha]$. Більш того, з умови (2.2) також слідує, що $h_\alpha(x_i)$ є єдиною точкою локального екстремуму f_α на інтервалі $(x_i - 2\alpha, x_i + 2\alpha)$. Нехай

$$(c_1, c_2) = (x_i - \alpha, x_i + \alpha) \cap h_\alpha^{-1}(x_i - 2\alpha, x_i + 2\alpha).$$

$$(d_1, d_2) = h_\alpha(c_1, c_2).$$

Тоді обмеження $f|_{(c_1, c_2)}$ та $f_\alpha|_{(d_1, d_2)}$ є топологічно еквівалентними, а саме: має місце тотожність $\phi_\alpha \circ f_\alpha = f \circ h_\alpha$.

3. КУСКОВО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ

У цьому розділі ми наводимо достатні умови для топологічної стійкості локальних екстремумів відносно усереднень за мірами з кусково неперервними щільностями (теорема 3.5).

Означення 3.1. Функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається **кусково неперервною**, або **кусково 0-диференційовною**, якщо f неперервна скрізь, за виключенням скінченного числа точок $t_1, \dots, t_n \in (a, b)$, причому в кожній такій точці t_i існують скінчені ліва та права границі $\lim_{t \rightarrow t_i - 0} f(t)$ та $\lim_{t \rightarrow t_i + 0} f(t)$. В цьому випадку писатимемо, що $f \in C^0([a, b], t_1, \dots, t_n)$.

Скажемо, що неперервна функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ є **кусково k -диференційовною**, $k \geq 1$, якщо знайдеться скінчена множина точок $t_1, \dots, t_n \in (a, b)$ таких, що f має неперервні похідні до порядку k включно на $[a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ і для кожного

$i = 1, \dots, n$ та $s = 1, \dots, k$ існують скінчені ліва та права границі

$$f_l(t) = \lim_{t \rightarrow t_i - 0} f^{(s)}(t), \quad f_r(t) = \lim_{t \rightarrow t_i + 0} f^{(s)}(t).$$

В цьому випадку також писатимемо, що

$$f \in C^k([a, b], t_1, \dots, t_n).$$

Очевидно, що сума та добуток кусково неперервних (k -диференційовних) функцій є також кусково неперервною (k -диференційовною) функцією, а для $k \geq 1$ похідна кусково ($k+1$ -диференційовної функції може бути (довільним чином) довизначена в точках розриву до кусково k -диференційовної функції.

Наступна лема добре відома для випадку неперервно диференційовних функцій.

Лема 3.2. *Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція. Припустимо, що виконується одна з таких умов:*

- (1) $f \in C^1([a, b], t_1, \dots, t_n)$ і $f'(x) < f'(y)$ для всіх пар точок $x < y \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$;
- (2) $f \in C^2([a, b], t_1, \dots, t_n)$, причому $f''(x) > 0$ для всіх точок $x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ та $\lim_{t \rightarrow t_i - 0} f'(t) \leq \lim_{t \rightarrow t_i + 0} f'(t)$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Тоді f є строго випуклою.

Доведення. Введемо позначення для лівої та правої границь похідної f' :

$$f'_l(x) = \lim_{t \rightarrow x - 0} f'(t), \quad f'_r(x) = \lim_{t \rightarrow x + 0} f'(t).$$

(2) \Rightarrow (1). Припущення $f''(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$, означає, що f' строго зростає на кожному з відрізків

$$[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n], [t_n, b].$$

Крім того, $f'_l(t_i) \leq f'_r(t_i)$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Звідси слідує, що $f'(x) < f'(y)$ для всіх $x < y \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$, тобто виконана умова (1).

(1) З того, що f' є кусково неперервною і строго зростає на $[a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ випливає, що $f'_l(t) \leq f'_r(t)$ для всіх $t \in (a, b)$ і що обидві функції f'_l та f'_r є строго зростаючими.

Нехай $x < y \in [a, b]$ і $t \in (0, 1)$. Тоді

$$\begin{aligned} f(x) + (y-x)f'_r(x) &< f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t)dt < \\ &< f(x) + (y-x)f'_l(y). \end{aligned}$$

Зокрема, якщо $s \in (0, 1)$ і $z = (1-s)x + sy \in (x, y)$, то

$$\begin{aligned} f(z) &< f(x) + (z-x)f'_l(z) = f(x) + s(y-x)f'_l(z), \\ f(z) &< f(y) - (y-z)f'_r(z) = f(y) - (1-s)(y-x)f'_r(z). \end{aligned}$$

Помноживши першу нерівність на $1-s$, а другу — на s , додавши їх і врахувавши, що $f'_l(z) - f'_r(z) \leq 0$, отримаємо такі нерівності:

$$\begin{aligned} f(z) &< (1-s)f(x) + sf(y) + s(1-s)(y-x)(f'_l(z) - f'_r(z)) \\ &\leq (1-s)f(x) + sf(y). \end{aligned}$$

Це доводить строгу випуклість f . □

Надалі вважатимемо, що $p: [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ — кусково неперервна функція така, що $\int_{-1}^1 p(t)dt = 1$ і μ — відповідна ймовірнісна міра на борелівській алгебрі $\mathcal{B}[-1, 1]$, визначена за формулою

$$\mu(A) = \int_A p(t)dt, \quad A \in \mathcal{B}[-1, 1]. \quad (3.3)$$

Лема 3.3. *Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція і*

$$f_\alpha: [a + \alpha, b - \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$$

— її усереднення за мірою μ . Тоді f_α належить класу C^1 .

Якщо f є також кусково k -диференційовною (належить класу C^k) для $k \geq 1$, то f_α кусково $(k+1)$ -диференційовною (належить класу C^{k+1}).

Доведення. Відмітимо, що

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^1 f(x+t\alpha)p(t)dt = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x+t\alpha)p(t)dt.$$

Так як f — неперервна, то f' визначається за такою формулою:

$$f'_\alpha(x) = \sum_{i=0}^n \left(f_l(x+t_{i+1}\alpha)p_l(t_{i+1}) - f_r(x+t_i\alpha)p_r(t_i) \right), \quad (3.4)$$

а отже є неперервною функцією. Звідси випливає, що f'_α є також кусково k -диференційовною так само, як і f , а отже f_α — кусково $(k+1)$ -диференційовна. Більш того,

$$f_\alpha^{(s)}(x) = \sum_{i=0}^n \left(f_l^{(s-1)}(x+t_{i+1}\alpha)p_l(t_{i+1}) - f_r^{(s-1)}(x+t_i\alpha)p_r(t_i) \right) \quad (3.5)$$

для всіх x , в яких права частина неперервна.

Якщо ж f належить класу C^k , то, зокрема, $f = f_l = f_r$, а тому з формули (3.4) випливає, що f_α належить класу C^{k+1} . \square

Лема 3.4. Нехай $f: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, для якої виконані такі умови:

- (a) f строго спадає на $[-\varepsilon, 0]$ і строго зростає на $[0, +\varepsilon]$;
- (b) f'_α строго зростає.

Тоді паросток f в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ .

Доведення. Так як f є неперервною, то згідно з лемою 3.3 усереднення f_α є неперервно диференційовною функцією. За припущенням (b) f'_α строго зростає, а тому з твердження (1) леми 3.2 слідує, що f_α є строго випуклою функцією. Так як f_α спадає в околі точки $-\varepsilon + \alpha$ і зростає в околі точки $\varepsilon - \alpha$, то f_α

має єдину точку мінімуму x_α на відрізку $[-\varepsilon + \alpha, \varepsilon - \alpha]$, а значить, паросток f в точці 0 топологічно еквівалентний паростку f_α в точці x_α . \square

Теорема 3.5. *Нехай $f, g: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ — дві кусково 1-диференційовні функції і $h = f - g$. Припустимо, що виконані такі умови:*

- (a) *f та g строго спадають на $[-\varepsilon, 0]$ і строго зростають на $[0, +\varepsilon]$;*
- (b) *існує таке $C > 0$, що для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$ виконана нерівність*

$$f''_\alpha(x) \geq C\alpha;$$

- (c) *похідна $h' = g' - f'$ — неперервна в точці 0 і $h'(0) = 0$.*

Тоді паросток g в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ .

Доведення. Відмітимо, що умова (b) гарантує, що f'_α строго зростає, а тому з (a) та леми 3.4 випливає, що f є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ . Нам потрібно довести, що за виконання умови (c) функція $g = f + h$ («збурення» f за допомогою h) також буде топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ .

Так як g є неперервною і кусково 1-диференційовною, то, згідно з лемою 3.3, g'_α — неперервна, а g''_α — кусково неперервна. Більш того, з умови (a) слідує, що для $\alpha < \varepsilon$ функція g_α строго спадає на $[-\varepsilon + \alpha, -\alpha]$ і строго зростає на $[\alpha, \varepsilon - \alpha]$. Зокрема,

$$g'_\alpha(-\alpha) < 0, \quad g'_\alpha(\alpha) > 0.$$

Тому достатньо показати, що $\liminf_{y \rightarrow x} g''_\alpha(x) > 0$ для $x \in [-\alpha, \alpha]$

при всіх достатньо малих α . Звідси впливатиме, що g'_α строго зростає на $[-\alpha, \alpha]$, а тому g_α матиме там єдину точку мінімуму.

Так як h' — неперервна в точці 0, і $h(0) = 0$, то $h(x) = xk(x)$, де

$$k(x) = \int_0^1 h'(tx) dt.$$

Зокрема, k — неперервна і $k(0) = h'(0) = 0$. Нехай

$$P = \sup_{t \in [-1, 1]} p(t)$$

і n — число точок розриву щільності p міри μ , див. формулу (3.3). Тоді знайдеться таке $\delta > 0$, що $|k(x)| < \frac{C}{8Pn}$ для всіх $x \in [-\delta, \delta]$.

Нехай $\alpha < \delta/2$. Тоді для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$ та $i = 0, \dots, n+1$ виконана нерівність:

$$|x - t_i \alpha| < |x| + |t_i| \alpha \leq \alpha + \alpha = 2\alpha < \delta,$$

а тому

$$|h'(x - t_i \alpha)| = |x - t_i \alpha| \cdot |k(x - t_i \alpha)| \leq 2\alpha \cdot \frac{C}{8Pn} = \frac{C\alpha}{4Pn}.$$

Тепер з леми 3.3 отримуємо, що в кожній точці $x \in [-\alpha, \alpha]$, в якій h''_α є неперервною, має місце рівність:

$$\begin{aligned} |h''_\alpha(x)| &\leq \sum_{i=0}^n \left| h'_r(x - t_{i+1}\alpha) p_r(t_{i+1}) - h'_l(x - t_i\alpha) p_l(t_i) \right| \leq \\ &\leq \frac{C\alpha}{4Pn} \cdot 2Pn = \frac{C\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тому

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} |h''_\alpha(y)| \leq \frac{C\alpha}{2},$$

а значить,

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{y \rightarrow x} g''_\alpha(y) &= \underline{\lim}_{y \rightarrow x} (f''_\alpha(x) + h''_\alpha(x)) \geq \\ &\geq \underline{\lim}_{y \rightarrow x} f''_\alpha(x) - \overline{\lim}_{y \rightarrow x} |h''_\alpha(y)| \geq C\alpha - \frac{C\alpha}{2} = \frac{C\alpha}{2} > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, g'_α строго зростає, що і треба було довести. \square

4. КУСКОВО ПОСТІЙНІ ЩІЛЬНОСТІ

Нехай

$$-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$$

— зростаюча послідовність чисел, $p_0, \dots, p_n \in [0, +\infty)$ — деякі невід'ємні числа такі, що $p_i \neq p_{i+1}$ для $i = 0, \dots, n-1$. Визначимо кусково постійну функцію $p: [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ за формулою:

$$\begin{aligned} p[t_i, t_{i+1}) &= p_i, & i = 0, \dots, n-1 \\ p[t_n, t_{n+1}] &= p_n, \end{aligned}$$

див рис. 4.1.

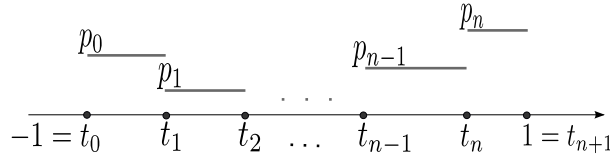


Рис. 4.1

Також вважатимемо, що

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) p_i = 1. \quad (4.6)$$

Тоді p визначає ймовірнісну міру μ на борелівській алгебрі множин відрізка $[-1, 1]$ за формулою:

$$\mu(A) = \int_A p(t) dt, \quad A \in \mathcal{B}[-1, 1].$$

Відповідно, для кожної неперервної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ її α -усереднення $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за мірою μ задається формулою:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \int_{-1}^1 f(x + \alpha t) d\mu = \int_{-1}^1 f(x + \alpha t) p(t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^n p_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x + \alpha t) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Відмітимо, що тоді

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \sum_{i=0}^n p_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(x + \alpha t) dt = \\ &= \sum_{i=0}^n (f(x + \alpha t_{i+1}) - f(x + \alpha t_i)) p_i, \end{aligned} \quad (4.8)$$

що є частинним випадком формули (3.4).

Теорема 4.1. *Нехай $g: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусково 1-диференційовна функція, що задовольняє такі умови:*

- (a) *g строго спадає на $[-\varepsilon, 0]$ і строго зростає на $[0, +\varepsilon]$;*
- (b) *існують скінченні границі*

$$L = \lim_{x \rightarrow 0-0} g'_x, \quad R = \lim_{x \rightarrow 0+0} g'_x.$$

Для $i = 0, \dots, n+1$ визначимо числа

$$\begin{aligned} X_i &:= L\mu[t_0, t_i] + R\mu[t_i, t_{n+1}] \\ &= L \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) p_j + R \sum_{j=i-1}^n (t_{j+1} - t_j) p_j, \end{aligned}$$

які, очевидно, задовольняють нерівностям:

$$L = X_{n+1} \leq X_n \leq \dots \leq X_1 \leq X_0 = R.$$

Припустимо, що для кожного $i \in \{0, \dots, n\}$ хоча б одне з чисел X_i або X_{i+1} відмінне від нуля. Тоді паросток g в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ .

Доведення теореми 4.1 базується на такій лемі:

Лема 4.2. *Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, визначена за формулою*

$$f(x) = \begin{cases} Lx, & x \leq 0 \\ Rx, & x > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{1}{\alpha} \cdot f'_\alpha(x) = \begin{cases} X_{n+1} = L, & x < -\alpha t_{n+1} = -\alpha, \\ X_{i+1} + \frac{x + \alpha t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} (X_i - X_{i+1}), & -\alpha t_{i+1} < x < -\alpha t_i, \\ & 1 \leq i \leq n, \\ X_0 = R, & -t_0 \alpha = \alpha < x, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$f''_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < -\alpha t_{n+1} = -\alpha, \\ \frac{X_i - X_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \alpha, & -\alpha t_{i+1} < x < -\alpha t_i \\ 0, & -t_0 \alpha = \alpha < x. \end{cases} \quad (4.10)$$

Доведення теореми 4.1. Досить перевірити, що для f з леми 4.2 та g виконані умови (а)-(с) теореми 3.5. Умова (а) очевидно виконується.

Нехай

$$C = \min_{i=0, \dots, n} \frac{X_i - X_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}.$$

Тоді з формули (4.10) і припущення, що жодні два сусідні числа X_{i+1} та X_i одночасно не дорівнюють нулю, випливає, що $C > 0$ і $f''_\alpha(x) > C\alpha$ для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$, тобто виконується умова (б).

Нарешті покладемо $h = f - g$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f'(x) - \lim_{x \rightarrow 0-0} g'(x) = L - L = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x) - \lim_{x \rightarrow 0+0} g'(x) = R - R = 0,$$

а тому h' неперервна в точці 0 і $h'(0) = 0$. Отже умова (с) теж виконана, а значить, за теоремою 3.5 паросток g в точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ . \square

Доведення леми 4.2. Для $n - 1 \geq i \geq 0$ покладемо

$$\Delta_i(x) = (f(x + \alpha t_{i+1}) - f(x + \alpha t_i)) p_i.$$

Тоді, згідно з формулою (4.8), $f'_\alpha(x) = \sum_{i=0}^n \Delta_i(x)$. Розглянемо три випадки.

а) Якщо $x + \alpha t_i < x + \alpha t_{i+1} < 0$ для деякого $i = 0, \dots, n$, то

$$\begin{aligned} \Delta_i(x) &= (L(x + \alpha t_{i+1}) - L(x + \alpha t_i)) p_i \\ &= \alpha L(t_{i+1} - t_i) p_i = \alpha L\mu[t_i, t_{i+1}]. \end{aligned}$$

б) Припустимо, що $x + \alpha t_i \leq 0 \leq x + \alpha t_{i+1}$ для деякого $i = 0, \dots, n-1$. Ця умова рівносильна тому, що $x \in [-\alpha t_{i+1}, -\alpha t_i]$. Покладемо, $d_i = t_{i+1} - t_i$, $s = \frac{x + \alpha t_{i+1}}{\alpha d_i}$, див. рис. 4.2. Тоді

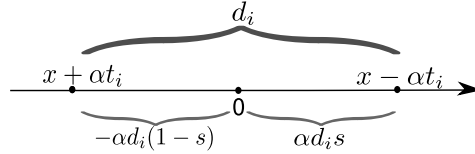


Рис. 4.2

$$1 - s = -\frac{x + \alpha t_i}{\alpha d_i}, \quad x = -\alpha t_{i+1}(1 - s) - \alpha t_i s,$$

а тому

$$\Delta_i(x) = (R(x + \alpha t_{i+1}) - L(x + \alpha t_i)) p_i = ((1 - s)L + sR) \alpha p_i d_i.$$

с) Якщо ж $0 < x + \alpha t_i < x + \alpha t_{i+1}$ для деякого $i = n-1, \dots, 0$, то аналогічно до випадку а) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \Delta_i(x) &= (R(x + \alpha t_{i+1}) - R(x + \alpha t_i)) p_i \\ &= \alpha R(t_i - t_{i+1}) p_i = \alpha R\mu[t_{i+1}, t_i]. \end{aligned}$$

Тепер можемо довести формулу (4.9) для f'_α . Припустимо, що $x \leq \alpha = \alpha t_0$. Тоді $x + \alpha t_i < x + \alpha t_{n+1} \leq 0$ для всіх i , а тому

$$f'_\alpha(x) = \sum_{j=0}^n \Delta_j(x) = \sum_{j=0}^n \alpha L\mu[t_j, t_{j+1}]$$

$$= \alpha L \sum_{j=0}^n \mu[t_j, t_{j+1}] = \alpha L \mu[-1, 1] = \alpha L.$$

Якщо, як у випадку б),

$$x = -\alpha t_{i+1}(1-s) - \alpha t_i s \in [-\alpha t_{i+1}, -\alpha t_i]$$

для деякого $i = 0, \dots, n$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} f'_\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{i-1} L\mu[t_j, t_{j+1}] + ((1-s)L + sR) \alpha \mu[t_i, t_{i+1}] + \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n R\mu[t_j, t_{j+1}] \\ &= L\mu[t_0, t_i] + ((1-s)L + sR) \alpha \mu[t_i, t_{i+1}] + R\mu[t_{i+1}, t_{n+1}] \\ &= (1-s)(L\mu[t_0, t_{i+1}] + R\mu[t_{i+1}, t_{n+1}]) + \\ &\quad + s(L\mu[t_0, t_i] + R\mu[t_i, t_{n+1}]) \\ &= (1-s)X_{i+1} + sX_i = X_{i+1} + s(X_i - X_{i+1}) \\ &= X_{i+1} + \frac{x + \alpha t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} (X_i - X_{i+1}). \end{aligned}$$

Нарешті, коли $\alpha = t_{n+1}\alpha \leq x$, то $0 \leq x + \alpha t_0 < x + \alpha t_i$ для всіх i , то

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \sum_{j=0}^n \Delta_j(x) = \sum_{j=0}^n \alpha R\mu[t_j, t_{j+1}] \\ &= \alpha R \sum_{j=0}^n \mu[t_j, t_{j+1}] = \alpha R \mu[-1, 1] = \alpha R. \end{aligned}$$

Лемі доведено. \square

Приклад 4.3. Покажемо, що якщо в теоремі 1.4 $X_{i+1} = X_i = 0$ для деякого i , то функція g може не бути топологічно стійкою відносно міри μ . Визначимо функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і щільність

$p: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ за формулами:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases} \quad p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, -0.5], \\ 0, & x \in (-0.5, 0), \\ 0.25, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

див. рис. 4.3.

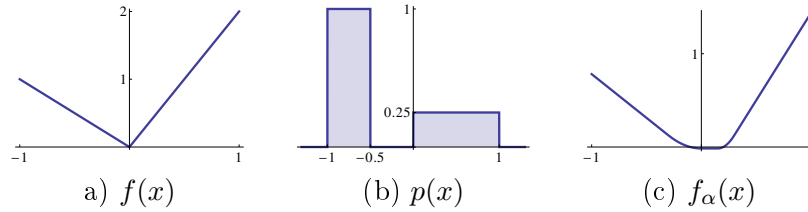


Рис. 4.3

Таким чином, $L = -1$, $R = 2$, $n = 2$, $t_0 = -1$, $t_1 = -0.5$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0.25$. Тоді

$$X_2 = L\mu[-1, t_2] + R\mu[t_2, 1] = -1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 0,$$

$$X_1 = L\mu[-1, t_1] + R\mu[t_1, 1] = -1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 0.$$

Отже $X_2 = X_1 = 0$ і умови теореми 4.1 не виконуються. З іншого боку, згідно з формулою (4.9), для

$$x \in [-\alpha t_2, -\alpha t_1] = [0, 0.5\alpha]$$

маємо, що $\frac{1}{\alpha} f'_\alpha(x) = X_2 + \frac{x + \alpha t_2}{t_3 - t_2} (X_1 - X_2) = 0$. Це означає, що f_α є постійною на інтервалі $[0, 0.5\alpha]$, а тому вона не може бути топологічно еквівалентною до f , див. рис. 4.3(c). Таким чином, умови теореми 4.1 є суттєвими.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1977. — С. 290.

- [2] *Huang T. S.* Two-Dimensional Digital Signal Processing I. Linear Filters. — N.Y.: Springer-Verlag, 1981. — **42**. — P. xi+210.
- [3] *Crounse Kenneth R.* Methods for Image Processing and Pattern Formation in Cellular Neural Networks: A Tutorial // *IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Application*. — 1995. — **42**, 10. — P. 583–601.
- [4] *Milanfar Peyman.* A tour of modern image filtering: new insights and methods, both practical and theoretical // *IEEE Signal Processing Magazine*. — 2013. — **30**, 1. — P. 106–128.
- [5] *Максименко С. І., Марункевич О. В.* Топологічна стабільність функцій відносно усереднень // *Укр. мат. журн.* — 2016. — прийнято до друку.
- [6] *Арнольд В. І.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // *УМН*. — 1992. — **47**, 1(283). — С. 3–45.
- [7] *Thom René.* L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome // *Topology*. — 1965. — **3**, suppl. 2. — P. 297–307.
- [8] *Bandt C., Pompe B.* Permutation entropy: A natural complexity measure for time series // *Physical Review Letters*. — 2002. — **88**. — P. 174102.
- [9] *Antoniouk Alexandra, Keller Karsten, Maksymenko Sergiy.* Kolmogorov-Sinai entropy via separation properties of order-generated σ -algebras // *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2014. — **34**, 5. — P. 1793–1809.
- [10] *Keller Karsten, Maksymenko Sergiy, Stolz Inga.* Entropy determination based on the ordinal structure of a dynamical system // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. — 2015. — **20**, 10. — P. 3507–3524.
- [11] *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Наука, 1981. — С. 640.
- [12] *Арнольд В. І., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений, I. — М.: Наука, 1982. — С. 304.

О. О. Пришляк, Д. М. Скочко

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
prishlyak@yahoo.com, geroyasf@gmail.com*

Топологія потоків Морса з нерухомими точками на межі повного кренделя

We studied topological properties of polar Morse flows on 3-dimensional handlebody, all fixed points of which lie on the boundary and have no separatrices connecting the saddle. We built an analog of Heegaard decomposition and m-diagram, which is complete topological invariant of flow. Equivalence of m-diagrams and flow we check using the distinguishing graphs. We found all possible distinguishing graphs with no more than 5 vertex.

1. ВСТУП

Теорія Морса є потужним інструментом для дослідження властивостей многовидів з межею, а тому вона широко використовувалась і розвивалась в багатьох роботах, таких, як [1], [2], [3], [4], [5] та інших.

При дослідженнях топологічних властивостей функцій Морса на многовидах часто використовуються їх поля градієнтів, що в загальному випадку породжують потоки Морса-Смейла.

Якщо на такому полі зафіксувати значення функції в особливих точках, то по них (полю і цих значеннях) функція відновлюється однозначно з точністю до топологічної еквівалентності.

На кожному компактному многовиді функція Морса з мінімальним числом критичних точок має єдиний локальний мінімум та єдиний локальний максимум [6]. Відповідне поле градієнта має єдиний витік і єдиний стік. Такі поля називаються *полярними*. Якщо поле градієнта на двовимірній поверхні є полем Морса-Смейла, тоді у нього немає спільних сепаратрис сідлових точок.

Часто замість полів градієнта розглядають градієнтноподібні поля. Це поля, які в регулярних точках трансверсальні поверхням рівня, а особливі точки яких є критичними точками функції. З роботи С. Смейла [7] випливає, що такі поля для функцій Морса топологічно еквівалентні полям градієнта в деякій рімановій метриці. Для функцій Морса, що мають критичні точки на межі многовиду, можна розглядати аналогічні конструкції, і мають місце аналогічні результати.

На замкненому многовиді векторне поле завжди породжує потік [8]. У випадку компактного многовиду з межею векторне поле буде породжувати потік тоді і тільки тоді, коли воно дотикається до межі в кожній її точці [9]. Саме такі поля градієнта і породжені ними потоки ми будемо розглядати. При цьому вважатимемо, що всі особливі точки лежать на межі тривимірного многовиду. Крім того, ми будемо розглядати поля, що не мають траєкторій, які починаються і закінчуються в сідлових точках. Якщо на поверхні (межі тривимірного многовиду) ця умова виконується в загальному положенні, то на тривимірному многовиді вона накладає певні обмеження на многовид, так само, як і умова про єдиність витоку та стоку (витік на поверхні може не бути витоком на тривимірному многовиді — в нього може входити траєкторія). Зокрема з цих умов випливає, що тривимірний многовид з межею буде повним кренделем.

Зауважимо, що поля, які ми розглядаємо, є структурно стійкими.

Нехай W компактний многовид з межею ∂W . Позначимо через $\mathfrak{X}(W, \partial W)$ простір векторних C^r полів на W дотичних

до ∂W оснащений звичайною C^r топологією. В цьому просторі можна визначити структурну стійкість наступним чином: скажемо, що векторне поле $X \in \mathfrak{X}(W, \partial W)$ є C^r структурно стійким, якщо воно має C^r окіл \mathfrak{U} , такий, що кожен $Y \in \mathfrak{U}$ є топологічно еквівалентним до X , тобто існує гомеоморфізм h , що переводить орбіти X в орбіти Y та зберігає їх орієнтацію.

Для векторного поля $X \in \mathfrak{X}^\infty(W, \partial W)$ позначимо через $\Omega(X)$ множину неблукаючих точок поля X .

Означення 1.1. Нехай $\widetilde{W} \in C^\infty$ замкнений многовид і C^r множина векторних полів з C^r топологією, $r \geq 1$, тоді векторне поле $X \in X^r(W)$ називається **полем Морса-Смейла**, якщо виконуються такі умови:

- (1) $\omega(X)$ є простою, тобто вона має скінченну кількість орбіт, усі з яких гіперболічні;
- (2) якщо $\sigma_i, \sigma_j \in \omega(X)$, то нестійкий многовид $W^U(\sigma_i)$ трансверсальний до стійкого многовиду $W^S(\sigma_j)$.

Дослідженню полів Морса-Смейла присвячено багато робіт, зокрема [10], [11], [12].

Множина векторних полів Морса-Смейла є відкритою непорожньою множиною в $\mathfrak{X}^r(\widetilde{W})$, $r \geq 1$ і кожен її елемент структурно стійкий [13], [7].

Означення 1.2. **Полем Морса** на многовиді з межею називається векторне поле $X \in X^r(W)$, що задовольняє такі умови:

- (1) $\omega(X)$ є скінченною, тобто має скінченне число точок, усі з яких є гіперболічними особливими точками;
- (2) якщо $\sigma_i, \sigma_j \in \omega(X)$ і в точці $x \in W^U(\sigma_i) \cap W^S(\sigma_j)$ стійкий та нестійкий многовиди перетинаються нетрансверсально, то $x \in \partial W$;
- (3) поле дотичне до межі і його обмеження на межу є полем Морса-Смейла.

Потік, породжений полем Морса, називається *поток*ом Морса.

Означення 1.3. *Полярним потоком називається потік, який має єдиний стік та витік, та обмеження якого на межу має також єдиний стік та витік.*

Означення 1.4. *Потік Морса називається простим, якщо у нього не існує траєкторій, що починаються і закінчуються в сідлових точках (сепаратрис, що з'єднують сідла).*

Для полярного потоку Морса, з точністю до топологічної еквівалентності, можливі чотири типи невироджених особливих точок на межі:

- (1) *витік*, координати якого (x_1, x_2, x_3) в локальних координатах x_1, x_2, x_3 на многовиді;
- (2) *стік* $(-x_1, -x_2, -x_3)$;
- (3) *A-сідло* $(x_1, -x_2, -x_3)$;
- (4) *B-сідло* $(-x_1, x_2, x_3)$.

Тут межа многовиду задається рівнянням $x_3 = 0$, при цьому випадки точок $(-x_1, -x_2, x_3)$ та $(x_1, x_2, -x_3)$ нами не розглядаються, оскільки ці точки є точками стоку на межі, що не є стоком на многовиді, або витоку на межі, що не є витоком на многовиді, що неможливо для полярного потоку Морса.

Надалі ми будемо розглядати потоки, у яких всі особливі точки лежать на межі і обмеження потоку на межу має єдиний стік та витік (полярні потоки).

Мета даної роботи: дослідити топологічні властивості простих полярних потоків Морса на повному кренделі, всі нерухомі точки яких лежать на межі; побудувати для них повний топологічний інваріант (діаграму, а також розрізняючий граф, який зручно використовувати для підрахунку топологічно нееквівалентних потоків).

2. m -ДІАГРАМА ПОТОКУ МОРСА

Надалі будемо розглядати ріманову метрику, яка має для кожного A -сідла таку властивість: для двох різних траєкторій, що виходять із A -сідла, їх довжини рівні та менші за довжини

траєкторій, що входять в ці сідла, і аналогічно для кожного B -сідла: дві траєкторії, що входять в нього, мають рівні довжини, менші за довжини всіх інших траєкторій, що виходять з нього. Таку ріманову метрику легко побудувати з довільної ріманової метрики, стискаючи до необхідного околиці дуг на зазначених вище траєкторіях.

Для кожної траєкторії потоку Морса на повному кренделі, крім особливих точок, та тих, що лежать на не стійких многовидах A -сідел та стійких многовидах B -сідел, знайдемо її середину, і розглянемо множину $F \subset W$ всіх таких середин траєкторій. При цьому довжина кожної траєкторії обчислюється від витoku до стoku, тобто для траєкторій, що лежать на стійких многовидах A -сідел знаходиться середина їх об'єднання з одною з двох траєкторій, які виходять з цього сідла (вони за побудовою мають рівні довжини, що менші довжин траєкторій стійкого многовиду), і аналогічно для нестійких многовидів B -сідел.

Зауваження 2.1. За побудовою, множина F є двовимірним многовидом з межею $\partial F \in \partial W$.

Локальна евклідовість F доводиться за допомогою гомеоморфізмів околиць точок на межу ε -околиці витoku або стoku для достатньо малого ε в канонічній системі координат, де кожній точці з F ставиться у відповідність точка на цій же самій траєкторії на межі околиці. Аналогічно доводиться, що коли F_1 та F_2 — дві поверхні, побудовані за рімановими метриками ρ_1 та ρ_2 , відповідно, то існує гомеоморфізм $h: W \rightarrow W$ такий, що

- (a) $h(\omega) = \omega$ для кожної траєкторії ω потоку, причому h зберігає орієнтацію ω якщо $\dim \omega = 1$;
- (b) $h(F_1) = F_2$.

Таким чином, побудова поверхні F з точністю до гомеоморфізму, що задовольняє умову (a), не залежить від вибору ріманової метрики.

Зауваження 2.2. Нехай Σ — множина всіх особливих точок потоку, а S — множина всіх пар «коротких» сепаратрис, тобто сепаратрис, що виходять з A -сідел та сепаратрис, що входять в B -сідла. Тоді поверхня F перетинає кожен орбіту з множини $W \setminus (\Sigma \cup S)$ в єдиній точці, а тому F можна ототожнити з простором траєкторій $W \setminus (\Sigma \cup S)$.

Відмітимо, що множина F розбиває многовид W на дві компоненти зв'язності, а тому можна розглядати многовид W як склейку з деяких двох многовидів M та N за деяким гомеоморфізмом частин їх меж. Многовиди M та N вибираються так, що кожна траєкторія в точках поверхні F направлена з многовиду N в многовид M . Тоді, за побудовою, всі A -сідла лежать в многовиді M , а B -сідла лежать в многовиді N .

Таке розбиття многовиду W є аналогом розбиття Хегора для замкнених многовидів, а поверхня F є аналогом поверхні Хегора.

Означення 2.3. *t -діаграма простого полярного потоку Морса — це трійка, що складається з:*

- (1) *поверхні F з межею;*
- (2) *набору простих дуг I типу — перетин стійких многовидів A -сідел з поверхнею F ;*
- (3) *набору простих дуг II типу — перетин нестійких многовидів B -сідел з поверхнею F .*

Лема 2.4. *У випадку розрізання F вздовж дуг першого (другого) типу, буде отримана однозв'язна область.*

Доведення. Розглянемо на многовиді F диски, що лежать на нестійких двовимірних многовидах та обмежені цими кривими та двома траєкторіями на межі. Розріжемо F за цими дисками. В утвореному многовиді F' послідовно стягнемо кожний з отриманих при розрізанні дисків в точку. Після стягнення отримаємо многовид, гомеоморфний F' , та векторне поле на

ньому з однією особливою точкою - витоком. Отже, цей многовид гомеоморфний півдиску D_+^3 , а поверхня F , після розрізання за кривими першого типу, гомеоморфна диску D^2 . \square

Далі під m -діаграмою будемо розуміти довільну поверхню з межею, на якій виділено два типи простих кривих, кінці яких з'єднують різні компоненти межі і такі, що, розрізавши поверхню за дугами одного типу, виходить однозв'язна поверхня.

Отже, за кожним простим полярним потоком Морса на повному кренделі побудовано m -діаграму (поверхня F та дуги I та II типу — це перетин стійких та нестійких двовимірних многовидів з поверхнею F).

3. Задання потоку Морса з допомогою m -діаграми

Покажемо, як за m -діаграмою можна відновити тривимірний многовид і потік на ньому. Повний крендель можна склеїти з двох многовидів за допомогою такої послідовності дій: до межі $\partial(D^2) = S^1$ приклеюються k смуг, що є 1-ручками $h_i^k = D^1 \times D^1$ за відображенням $\partial(D^1 \times D^1) \rightarrow S^1$. Позначимо

$$L_k = D^2 \cup h_1^1 \dots \cup h_k^1.$$

Слід зауважити, що приклеєні ручки не перехрещуються. Далі вклеєні смуги разом з диском потовщуються. Отриманий 3-многовид позначатимемо через $L_k^I = L \times I$.

Надалі будемо казати, що 3-многовид має L_k^I тип з основою L_k , якщо його можна побудувати вищезазначеним способом. Нехай M та N мають L_k^I тип. Визначимо деякий гомеоморфізм $h: M \rightarrow N$, що склеює їхні основи M_{L_k} та N_{L_k} , розглянуті як бордизми, а всі інші точки лишає на місці, див. рис. 3.1. Варто зазначити, що під дією цього гомеоморфізму компоненти межі M_{L_k} довільним чином вклеюються в компоненти межі N_{L_k} .

Таким чином після склеювання M та N буде отримано многовид W , $W \supset F = h(M_{L_k}) = N_{L_k}$. Тобто W розбивається на многовиди M та N .

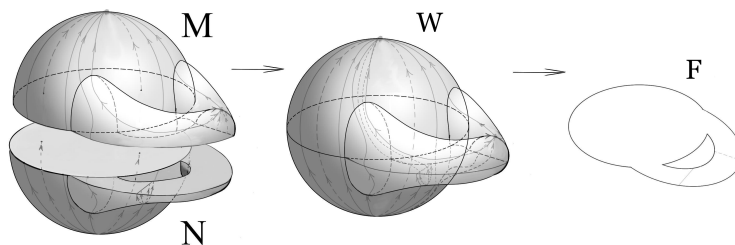


Рис. 3.1. Склейка многовидів M та N , що мають L_1^I тип.

Розглянемо поверхню F , що є результатом склеювання основи многовиду M з основою N за відображенням h та дуги першого типу на ній. Кожна така дуга є простим шляхом, що має кінці на різних компонентах межі поверхні F .

Для зручності будемо вважати, що дуги першого типу належать основі многовиду M , яку будемо позначати M_{L_k} , а дуги другого типу — основі многовиду N , яку позначатимемо як N_{L_k} . Приклад m -діаграми потоку див. на рис. 3.2.

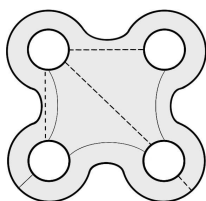


Рис. 3.2. Приклад m -діаграми потоку.

Означення 3.1. Дві m -діаграми називаються **гомеоморфними**, якщо існує гомеоморфізм їх поверхонь, що відображає криві першого типу на криві першого типу, а другого — на другого.

Означення 3.2. Векторні поля (потоки) називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм многовиду, який відображає траєкторії одного векторного поля (потoku) на траєкторії іншого, зберігаючи напрямки руху за траєкторіями, [9].

Теорема 3.3. Прості полярні потоки Морса топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх m -діаграми гомеоморфні.

Доведення. Припустимо, що існує топологічна еквівалентність $h: W_1 \rightarrow W_2$ полярних потоків Морса X_1 та X_2 на многовидах W_1 та W_2 відповідно. Нехай Σ_i — множина нерухомих точок X_i , а S_i — множина його сепаратрис, що виходять з A -сідел, та сепаратрис, що входять в B -сідла. Тоді $h(\Sigma_1) = \Sigma_2$ і $h(S_1) = S_2$, а тому

$$h(W_1 \setminus (\Sigma_1 \cup S_1)) = W_2 \setminus (\Sigma_2 \cup S_2).$$

Зокрема, h індукує гомеоморфізм між відповідними просторами шарів, тобто m -діаграмами.

Навпаки, припустимо, що m -діаграми гомеоморфні. Тоді цей гомеоморфізм задає бієкцію між траєкторіями векторних полів, і для кожної точки з поверхні F можемо продовжити її відображення на всю траєкторію, що проходить через цю точку за гомеоморфізмом, який зберігає пропорцію довжин дуг в заданій метриці. Таким чином отримаємо гомеоморфізм повних кренделів, що є топологічною еквівалентністю векторних полів. \square

Означення 3.4. *Родом g потоку Морса називається рід поверхні F його діаграми. Складністю c полярного потоку Морса називається число A -сідел.*

Якщо поверхню F розглядати як диск з приклеєними стрічками (1-ручками Смейла), то складність дорівнює числу стрічок. Звідси видно, що число B -сідел дорівнює числу A -сідел для полярного потоку Морса.

Зауваження 3.5. Для орієнтованої поверхні число компонент межі $k = 1 + c - 2g$, звідки складність $c = k + 2g - 1$.

4. Розрізняючий граф потоку Морса

Дослідимо, скількома різними способами можна склеїти многовиди M та N , що мають тип L_k^I . Для цього ототожнимо компоненти межі M_{L_k} з вершинами деякого графа G_M , а криві, що їх з'єднують, з його ребрами. Аналогічно N_{L_k} з G_N .

Твердження 4.1. *Для полярного потоку Морса роду нуль графи G_M та G_N є деревами.*

Доведення. При побудові графів G_M та G_N , коли компоненти границі стягуються в точки, поверхня роду нуль переходить у сферу. Отже, ці графи, є графами вкладеними у сферу. Якщо один з цих графів, нехай для визначеності граф G_M , не є деревом, то він містить цикл, який розбиває сферу на дві області. За побудовою, кожній області, на які граф G_M розбиває сферу, відповідає область, на яку криві першого типу розбивають поверхню F , а такій області відповідає витік. Тоді потік не є полярним. Отримане протиріччя доводить твердження. \square

Надалі будемо розглядати лише полярні потоки роду нуль.

Склеїмо граф G_M з графом G_N так, щоб вершини G_M були попарно ототожені з вершинами G_N і ребра G_M не перетинали ребер G_N . Отриманий об'єкт будемо називати *розрізняючим графом* потоку Морса і позначати G .

Лема 4.2. *Два розрізняючі графи ізоморфні, якщо існує ізоморфізм ребер та вершин одного в ребра та вершини іншого зі збереженням типу ребра та кількості і довжин циклів.*

З побудови розрізняючого графа випливає така теорема.

Теорема 4.3. *Дві діаграми гомеоморфні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм графи ізоморфні.*

Зауваження 4.4. Для потоків роду 0 кожна дуга з'єднує різні компоненти. Якби вона починалась і закінчувалась в одній компоненті межі, то розрізання вздовж цієї дуги зробило б поверхню незв'язною, або зменшило б її рід, що не можливо.

Далі знайдемо всі розрізняючі графи для потоків роду 0 складності менше 4. Для випадку склеювання двох многовидів M та N , що мають L_1^I тип отримаємо графи G_M та G_N , які будуть деревами на двох вершинах, а тому існує лише один варіант для того, щоб їх склеїти (рис. 4.3).

На рис. 4.3 і всіх подальших рисунках ребра графа G_M будуть зображатись прямими відрізками, а графа G_N — дугами.



Рис. 4.3. Склейки дерев на двох вершинах.

Для випадку склеювання двох многовидів M та N , що мають L_2^I тип, отримаємо графи G_M та G_N , які будуть деревами на трьох вершинах, всього існує два варіанти їх склейки (рис. 4.4).



Рис. 4.4. Склейки дерев на трьох вершинах.

Якщо склеюються два многовиди M та N , що мають L_3^I тип, то графи G_M та G_N будуть деревами на чотирьох вершинах, а тому всього існує 12 варіантів склейок і відповідних їм розрізняючих графів (Рис. 4.5).

Кожному із отриманих розрізняючих графів відповідає свій полярний потік Морса-Смейла.

Нехай S_n — кількість полярних потоків Морса-Смейла для склейок многовидів L_n^I типу. Тоді $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 12$. Для розгляду випадків $n \geq 4$ потрібно розробити певний алгоритм та скористатись обчислювальною технікою.

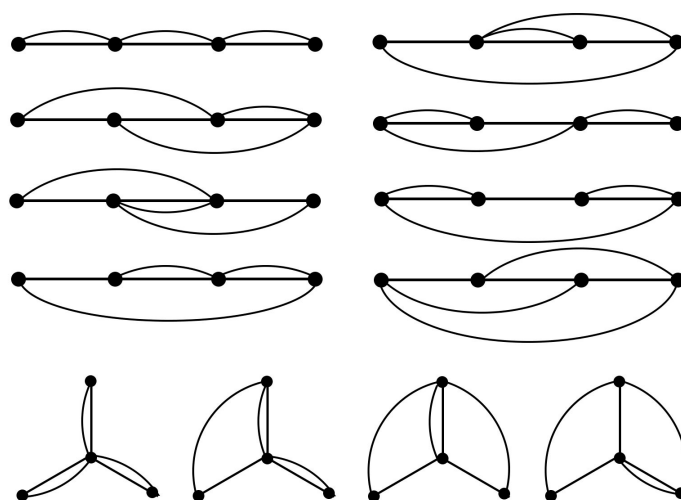


Рис. 4.5. Склейки дерев на чотирьох вершинах.

5. Розрізняючі графи для потоків Морса роду 0 складності 4

Нехай многовиди M та N мають тип L_4^I , і, як результат, графи G_M та G_N матимуть по 5 вершин. На 5 вершинах можна побудувати три неізоморфні дерева (рис. 5.6).

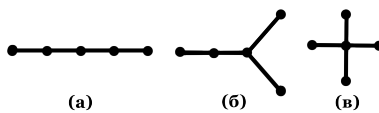


Рис. 5.6. Древа на п'яти вершинах.

Таким чином кожному з многовидів M та N може відповідати один з трьох графів, а тому існує 6 різних типів склейок двох дерев на п'яти вершинах (рис. 5.7).

Розглянемо граф з точки зору властивостей кожної вершини, таких, як її степінь і віддаленість від кінців (вісячих вершин), враховуючи всі можливі симетрії. Для дерева рис. 5.6(а) маємо три типи вершин: крайня, середня та вершина між крайньою і середньою, аналогічно для дерева рис. 5.6(б) матимемо 4 типи вершин, для рис. 5.6(в) — 2.

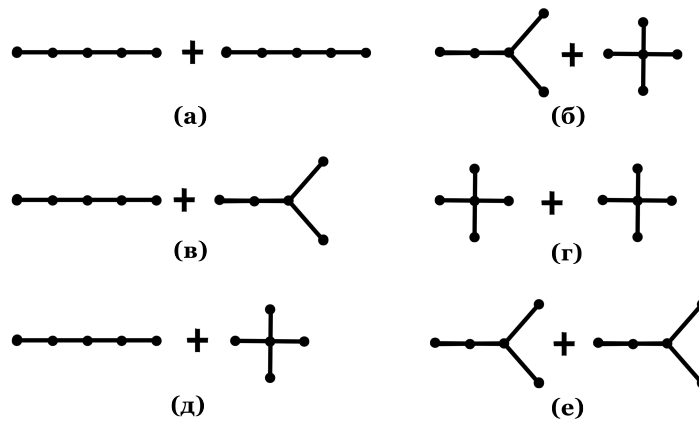


Рис. 5.7. Всі можливі склейки двох дерев на п'яти вершинах.

Опишемо процес вклеювання графа G_M в G_N на прикладі варіанту з рис. 5.7(в). Для цього фіксується одна з точок графа G_M і розглядаються всі можливі варіанти приклеювання до неї різних типів точок графа G_N . Нехай лівий граф з рис. 5.7(в) буде графом G_M , а правий G_N . Зафіксуємо крайню ліву точку в G_M і визначимо, скільки різних типів точок в G_N . Отримаємо чотири варіанти. Далі для кожного із цих 4 варіантів зафіксуємо наступну точку з G_M і визначимо кількість варіантів точок з G_N , із тих, що лишилися — їх по три варіанти. Таким перебором знаходимо всі варіанти m -діаграм.

Зауваження 5.1. В отриманій множині графи будуть повторюватись. Даний факт є наслідком випадків склейок однакових типів графів, оскільки при переборі не враховуються порядок перебору першого графа з порядком перебору іншого.

Цю ситуацію легко виправити, якщо дублювати отриману множину графів і поміняти місцями в новому наборі кожен перший з кожним другим графом, а потім порівняти ці множини.

Таким чином можна сформулювати алгоритм для пошуку склейок графів:

- (1) Виберемо з множини неізоморфних дерев пару графів G_M та G_N , що відповідатиме парі многовидів;
- (2) Фіксуємо довільну вершину G_M і знаходимо кількість вершин графа G_N , які до неї можна приклеїти;
- (3) Фіксуємо наступну точку G_M і повторюємо попередній перебір серед точок G_N , що ще не були вибрані;
- (4) Повторюємо кроки 1-3, поки не будуть перебрані всі точки графа G_M ;
- (5) Дублюємо множину графів та міняємо в копії місцями усі G_M з усіма G_N ;
- (6) Порівнюємо вхідну множину пар графів з модифікованою, відкидаємо ті, що повторюються.

На основі даного алгоритму створено відповідну програму, за результатами, якої було визначено кількість розрізняючих графів, ребра яких не перетинаються:

Розглянувши випадок рис. 5.7(а) склейки двох дерев з двома листками, було отримано 23 розрізняючі графи рис. 5.8.

Випадок рис. 5.7(б) ілюструє вклеювання дерева з трьома листками в дерево з чотирма. Склейок цього типу існує 8, їм відповідає 8 полярних потоків Морса-Смейла рис. 5.9.

Для випадку рис. 5.7(в) вклеювання дерева з двома листками у дерево з трьома листками отримано найбільшу кількість склейок — 30. Це спричинено тим, що один з графів має 3 типи

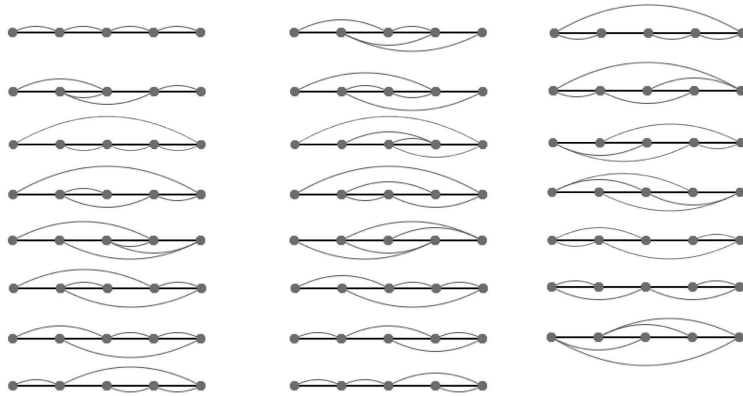


Рис. 5.8. Склейки ізоморфних дерев з двома листком.

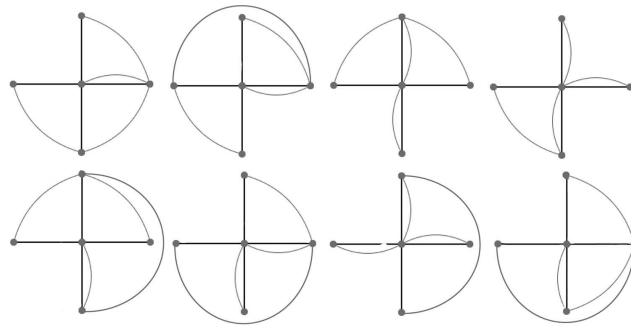


Рис. 5.9. Склейки дерев з трьома та чотирма листками.

вершин, а інший 4. Таким чином для цього типу склейки існує 30 полярних потоків Морса-Смейла рис. 5.10.

У випадку рис. 5.7(г), коли склеюються дві зірки — графи з чотирма листками, було отримано лише 2 графи, які відповідають двом полярним потокам Морса-Смейла рис. 5.11. Це

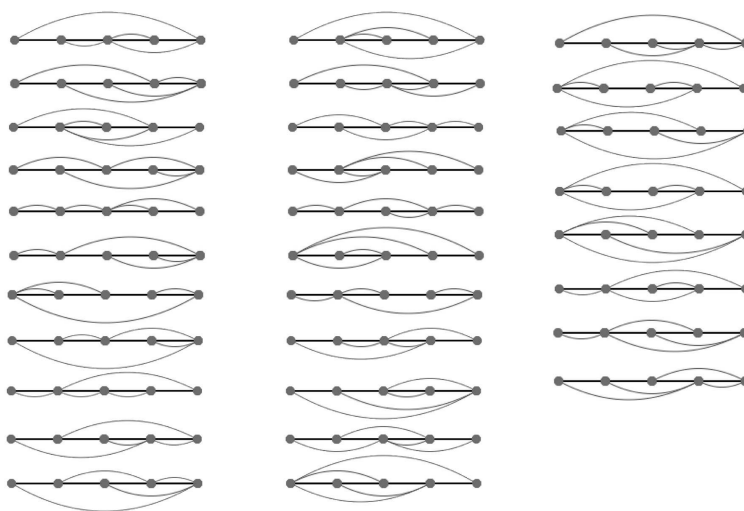


Рис. 5.10. Склейки дерев з двома та трьома листками.

найменша кількість серед 6 типів склеювань, що зумовлено тим, що графи мають лише два типи вершин та симетрії.

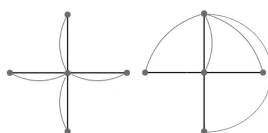


Рис. 5.11. Склейки ізоморфних дерев з чотирма листками.

Для вклеювання дерева з двома листками в дерево з чотирма листками рис. 5.7(д) існує 5 варіантів, а тому існує 5 варіантів полярних потоків Морса-Смейла рис. 5.12. У випадку двох ізоморфних дерев з трьома листками рис. 5.7(е) існує 24 m -діаграми Хегора, рис. 5.13.

З вищесказаного випливає така теорема:

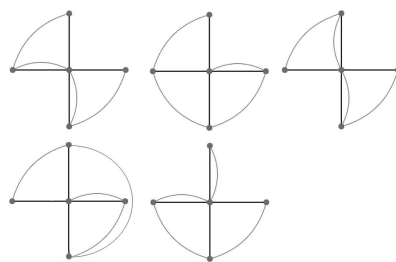


Рис. 5.12. Склейки дерев з двома та чотирма листками.

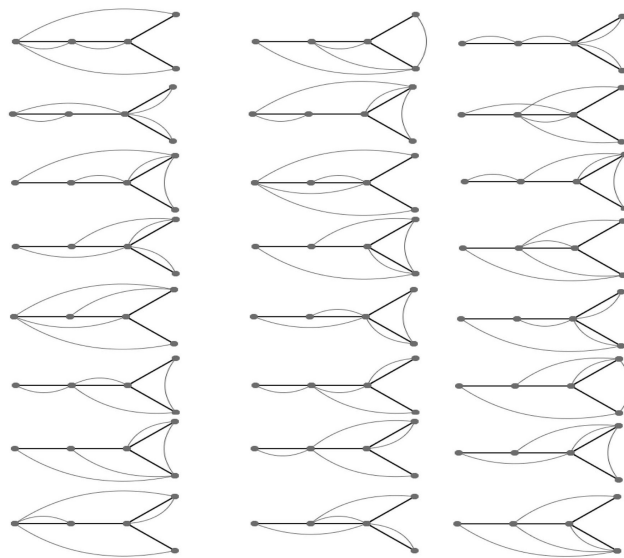


Рис. 5.13. Склейки ізоморфних дерев з трьома листками.

Теорема 5.2. *Існує 92 топологічно не еквівалентні потоки Морса роду 0 складності 4.*

6. Висновки

У даній роботі були досліджені топологічні властивості полярних потоків Морса на повному кренделі, всі нерухомі точки яких лежать на межі і не мають сепаратрис, що з'єднують сідла. Для них побудовано аналог розбиття Хегора, а також m -діаграму, що є їх повним топологічним інваріантом потоку. Еквівалентність m -діаграм, а також потоків, перевіряється за допомогою побудованих у роботі розрізняючих графів. Знайдені всі можливі розрізняючі графи з не більш ніж 5 вершинами. Кожному з графів відповідає свій полярний потік Морса і в результаті відкидання ізоморфних діаграм було отримано 92 неізоморфні розрізняючі графи, які були поділені на шість типів, три з яких утворені склеюванням ізоморфних дерев і три — не ізоморфних. Всі діаграми подаються у вигляді ілюстрацій і наведені у роботі.

Ця тема має перспективи для досліджень, оскільки многовиди можуть мати складнішу побудову, наприклад, вони можуть бути склеєні з двох многовидів, що мають тип L_k^I , $k \geq 5$, а тому, в подальшому, наведені вище дослідження будуть стосуватись розгляду таких випадків.

Крім цього, цікаво дослідити випадок, коли ребра графів G_M та G_N перетинаються. В такому випадку кількість многовидів, які можна утворити склеюванням двох многовидів M та N , значно збільшиться, а тому і кількість потоків Морса також значно збільшиться.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Braess Dietrich. Morse-Theorie für berandete Mannigfaltigkeiten // *Math. Ann.* — 1974. — **208**. — P. 133–148.
- [2] Jankowski A., Rubinsztein R. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary // *Comment. Math. Prace Mat.* — 1972. — **16**. — P. 99–112.
- [3] Hajduk B. Minimal m -functions // *Fund. Math.* — 1981. — **111**, 3. — P. 179–200.

- [4] *Bloom Jonathan M.* The combinatorics of Morse theory with boundary // Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2012. — Int. Press, Somerville, MA, 2013. — P. 43–88.
- [5] *Laudenbach François.* A Morse complex on manifolds with boundary // *Geom. Dedicata.* — 2011. — **153**. — P. 47–57.
- [6] *Matsumoto Yukio.* An introduction to Morse theory. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. — **208** of *Translations of Mathematical Monographs.* — P. xiv+219. — ISBN: 0-8218-1022-7. — Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [7] *Palis J., Smale S.* Structural stability theorems // Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968). — Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970. — P. 223–231.
- [8] *Borodzik M., Nemethi A., Ranicki A.* Morse theory for manifolds with boundary // *arXiv:1207/3066*.
- [9] *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // *Bol. Soc. Brasil. Mat.* — 1975. — **6**, 2. — P. 155–183.
- [10] *Giryk O. A.* Classification of polar Morse-Smale vector fields on two-dimensional manifolds // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 1996. — **2**, 1. — P. 23–37.
- [11] *Кадубовський О.* Класифікація векторних полів Морса–Смейла на двовимірних многовидах // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика, механіка.* Київ. — 2005. — **14**. — С. 85–88.
- [12] *Poltavec D.* Equivalent polar Morse-Smale system on two dimensional manifolds of genus 3 // *Abstract of International Conference on Topology and its Applications, Kiev.* — 1995. — P. 29.
- [13] *Palis J.* On Morse-Smale dynamical systems // *Topology.* — 1968. — **8**. — P. 385–404.

Н. А. Хмельницкий

*Киевский национальный университет имени Тараса
Шевченко*
khmelnit@meta.ua

О цепной эквивалентности проективных скрещенных цепных комплексов

We obtain a necessary and sufficient condition for n -dimensional finitely generated projective crossed chain complexes to be stabilized by free groups and free modules to the chain equivalence.

Отримано необхідну та достатню умову того, коли n -вимірні скінченно породжені проективні скрещені ланцюгові комплекси можна стабілізувати вільними групами та вільними модулями до ланцюгової еквівалентності.

Получено необходимое и достаточное условие того, когда n -мерные конечно порожденные проективные скрещенные цепные комплексы можно стабилизировать свободными группами и свободными модулями до цепной эквивалентности.

Светлой памяти
Владимира Васильевича Шарко
посвящается

1. ВВЕДЕНИЕ

Кокрофт и Свон [1] доказали, что гомотопически эквивалентные проективные (свободные) комплексы можно стабилизировать проективными (свободными) модулями до цепной эквивалентности, и применили этот результат к изучению гомотопических типов неодносвязных двумерных CW-комплексов. В монографии [2] Шарко доказал аналог теоремы Кокрофта-Свона для свободных скрещенных цепных комплексов. Автор в

работе [3] получил необходимые и достаточные условия, когда n -мерные цепные комплексы, составленные из конечно порожденных проективных модулей, можно стабилизировать свободными модулями до цепной эквивалентности, а в работе [4] доказал аналог теоремы Кокрофта-Свона для проективных скрещенных цепных комплексов. В 2011 году вышла монография Брауна, Хиггинса и Сиверы [5], в которой с энциклопедической полнотой описываются современные достижения в неабелевой алгебраической топологии, в частности рассматриваются основные понятия, используемые в данной статье. Цель данной работы получить необходимое и достаточное условие того, когда n -мерные конечно порожденные проективные скрещенные цепные комплексы можно стабилизировать свободными группами и свободными модулями до цепной эквивалентности.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть \mathcal{C} — произвольная категория, а $f: A_0 \rightarrow B_0$ и $\tilde{f}: A_1 \rightarrow B_1$ — морфизмы в ней. Будем говорить, что морфизм \tilde{f} *сохраняет морфизм* f , если существуют мономорфизм $\iota: A_0 \rightarrow A_1$ и эпиморфизм $\pi: B_1 \rightarrow B_0$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\iota} & A_1 \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ B_0 & \xleftarrow{\pi} & B_1 \end{array}$$

коммутативна, то есть $f = \pi \tilde{f} \iota$. Легко видеть, что отношение «сохранять морфизм» является транзитивным, то есть если морфизм h сохраняет морфизм g , а морфизм g сохраняет морфизм f , то h сохраняет f .

Далее, пусть \mathcal{C} — категория с конечным копроизведением \oplus и нулевым объектом 0 . *Утолщением* морфизма $f: A \rightarrow B$ с помощью объекта C называется морфизм $\widehat{f}_C: A \oplus C \rightarrow B$ такой, что $\widehat{f}_C = f \oplus 0$. *Стабилизацией* морфизма $f: A \rightarrow B$ с помощью объекта C называется морфизм $f_C^{st}: A \oplus C \rightarrow B \oplus C$ такой, что

$f_C^{st} = f \oplus \text{id}_C$. Очевидно, что утолщение \widehat{f}_C и стабилизация f_C^{st} сохраняют морфизм f . Отметим, что в категории групп копроизведение обозначается через $*$.

Пусть A — некоторая фиксированная группа. Обозначим через \mathcal{F}_A категорию, объектами которой являются свободные произведения $A * F$ группы A на свободные конечнопорожденные группы F , а морфизмами — все гомоморфизмы

$$\varphi: A * F_1 \rightarrow A * F_2,$$

действующие тождественно на A . Объекты категории \mathcal{F}_A будем называть конечносвободными A -группами, а морфизмы — стабильными A -гомоморфизмами.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, а M — левый R -модуль. Семейство элементов $\{m_i \in M | i \in I\}$, порождающее модуль M , называется *системой образующих* модуля M . Если же прямая сумма включений $Rm_i \rightarrow M$, $i \in I$, задает изоморфизм

$$f: \bigoplus_{i \in I} Rm_i \rightarrow M,$$

то семейство $\{m_i \in M | i \in I\}$ называется *базисом* модуля M , а мощность множества I — *базисным числом* модуля M . Базисное число, вообще говоря, зависит от выбора базиса, и поэтому не может служить инвариантом свободного модуля $F = R^n$, $n \in \mathbb{N}$. Кольцо R такое, что базисное число любого свободного модуля определено однозначно, называется *IBN кольцом* или *кольцом с инвариантным базисным числом*. Известно [6, стр. 168], что *IBN* кольцами являются все нетеровые кольца, коммутативные кольца и кольца, имеющие нетривиальный гомоморфизм в *IBN*-кольцо. В частности, все целочисленные групповые кольца $\mathbb{Z}[H]$ будут *IBN* кольцами, поскольку аугментация является нетривиальным гомоморфизмом в *IBN* кольцо \mathbb{Z} .

3. СКРЕЩЕННЫЕ МОДУЛИ

Скращенным модулем (или *G -скращенным модулем C*) называется тройка (C, G, d) , где C — аддитивная (не обязательно абелева), а G — мультипликативная группы, $d: C \rightarrow G$ — гомоморфизм, G действует на C слева автоморфизмами (то есть зафиксирован гомоморфизм $G \rightarrow \text{Aut } C$), при этом гомоморфизм d удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $c' + c - c' = d(c')$ c ,
- 2) $d(gc) = g d(c) g^{-1}$, где $c, c' \in C$, $g \in G$.

Все скращенные модули образуют категорию $\times \mathcal{M}$ (напр. [5]). Морфизмом скращенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') в категории $\times \mathcal{M}$ является пара (φ, ψ) гомоморфизмов $\varphi: C \rightarrow C'$ и $\psi: G \rightarrow G'$ такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{d} & G \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ C' & \xrightarrow{d'} & G' \end{array}$$

коммутативна и $\varphi(gc) = \psi(g) \varphi(c)$. При этом G -морфизмом G -скращенных модулей называется гомоморфизм $\varphi: C \rightarrow C'$ такой, что (φ, id_G) — морфизм скращенных модулей. Все G -скращенные модули и G -морфизмы образуют подкатеорию $\times \mathcal{M}_G$ категории $\times \mathcal{M}$.

Пусть (C, G, d) — скращенный модуль, $\{c_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество фиксированных элементов из C . Тогда (C, G, d) называется *свободным скращенным модулем* с базисом $\{c_i \mid i \in I\}$, если для каждого скращенного модуля (C', G', d') и произвольных множества элементов $\{c'_i \mid i \in I\}$ из C' и гомоморфизма $\psi: G \rightarrow G'$ такого, что $\psi d(c_i) = d'(c'_i)$, существует единственный гомоморфизм $\varphi: C \rightarrow C'$, для которого $\varphi(c_i) = c'_i$ и (φ, ψ) — гомоморфизм скращенных модулей. Уайтхед [7] доказал существование свободных скращенных модулей (C, G, d) для произвольной группы G , в частности, если G конечно свободная A -группа.

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и M — $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, где $H = G/dC$. На модуль M можно смотреть как на $\mathbb{Z}[G]$ -модуль с тривиальным действием dC . Группа $C \oplus M$ является, очевидно, G -скрещенным модулем с диагональным действием группы G и граничным гомоморфизмом $d \oplus 0: C \oplus M \rightarrow G$, заданным соотношением $d \oplus 0(c, m) = dc$ и называется M -*утолщением* скрещенного модуля (C, G, d) .

Напомним (см. например [8]), что две группы G и H с одной и той же областью операторов Σ называются *операторно изоморфными*, если существует такой изоморфизм $f: G \rightarrow H$, что $f(\sigma g) = \sigma f(g)$ для произвольных $g \in G$ и $\sigma \in \Sigma$. При этом говорят, что (аддитивная) группа G *операторно раскладывается* в прямую сумму своих подгрупп A и B , если $G = A \oplus B$ и $\sigma A \subset A$ и $\sigma B \subset B$ для произвольного $\sigma \in \Sigma$.

Лемма 3.1. Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и M — $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, где $H = G/dC$. Скрещенный модуль (D, G, ∂) является M -утолщением G -скрещенного модуля C тогда и только тогда, когда

- 1) группа D операторно раскладывается в прямую сумму своих подгрупп C' и M' , операторно изоморфных C и M соответственно;
- 2) если $f: C \rightarrow C'$ — операторный изоморфизм, то $\partial(fc) = dc$ для произвольного $c \in C$;
- 3) $M' \subset \ker \partial$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $g: M \rightarrow M'$ — операторный изоморфизм. Тогда отображение $\varphi: C \oplus M \rightarrow D = C' \oplus M'$, задаваемое формулой $\varphi(c, m) = (fc, gm)$, является G -изоморфизмом G -скрещенных модулей D и $C \oplus M$. \square

Заметим, что если $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G -скрещенного модуля C , а $\{m_j \mid j \in J\}$ — система образующих модуля M , то $\{(c_i, 0) \mid i \in I\} \cup \{(0, m_j) \mid j \in J\}$ — система образующих скрещенного модуля $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$, в частности, G -

скрещенный модуль $C \oplus M$ конечнопорожден тогда и только тогда, когда конечнопорожденными являются скрещенный модуль (C, G, d) и $\mathbb{Z}[H]$ -модуль M .

Лемма 3.2. Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $H = G/dC$, а M — $\mathbb{Z}[H]$ -модуль. Если (C, G, d) — свободный скрещенный модуль, M — свободный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, то M -утолщение

$$(C \oplus M, G, d \oplus 0)$$

скрещенного модуля (C, G, d) будет свободным скрещенным модулем.

Доказательство. Каждый свободный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль является, очевидно, и свободным G -скрещенным модулем. Поскольку

$$(c, m) = (c, 0) + (0, m)$$

для произвольного $(c, m) \in C \oplus M$, то, как легко видеть, G -скрещенный модуль $C \oplus M$ является свободным по определению. \square

В дальнейшем понадобится следующее утверждение про свободные конечнопорожденные скрещенные модули [4, лемма 5]. Напомним, что абелианизацией группы M называется группа $M^{ab} = M/[M, M]$, где $[M, M]$ — коммутант группы M .

Предложение 3.3. Пусть (D, G, ∂) и (D', G, ∂') — свободные конечнопорожденные скрещенные модули,

$$H = G/\partial D = G/\partial' D',$$

и пусть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & G & \xleftarrow{\partial} & D & \xleftarrow{d} & C & \longleftarrow & \ker d & \longleftarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & f \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi^* \downarrow & & \\ 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & G & \xleftarrow{\partial'} & D' & \xleftarrow{d'} & C' & \longleftarrow & \ker d' & \longleftarrow & 0, \end{array}$$

в которой C и C' — свободные конечнопорожденные $\mathbb{Z}[H]$ -модули. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & G & \xleftarrow{\partial \oplus 0} & D \oplus D' \text{ ab} & \xleftarrow{d \oplus \text{id}} & C \oplus D' \text{ ab} & \longleftarrow & \ker(d \oplus \text{id}) & \longleftarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \tilde{f} \downarrow & & \tilde{\varphi} \downarrow & & \tilde{\varphi}^* \downarrow & & \\
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & G & \xleftarrow{\partial' \oplus 0} & D' \oplus D \text{ ab} & \xleftarrow{d' \oplus \text{id}} & C' \oplus D \text{ ab} & \longleftarrow & \ker(d' \oplus \text{id}) & \longleftarrow & 0,
 \end{array}$$

в которой \tilde{f} — G -изоморфизм, сохраняющий отображение f , $\tilde{\varphi}$ сохраняет φ , $\ker(d \oplus \text{id}) = \ker d$ и $\ker(d' \oplus \text{id}) = \ker d'$.

Зафиксируем группу G . Рассмотрим еще один важный класс скрещенных модулей — G -проективные скрещенные модули, которые были введены в обиход Рэтклайфом [9]. Скрещенный модуль (C, G, d) называется G -проективным, если он проективный в категории $\times \mathcal{M}_G$. Рэтклайф [9] доказал следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Скрещенный модуль (C, G, d) является G -проективным тогда и только тогда, когда существуют проективный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль P , где $H = G/dC$, и свободный G -скрещенный модуль B такие, что $C \oplus P$ и B являются изоморфными в категории $\times \mathcal{M}_G$.*

Далее без явных ссылок будем использовать следующее утверждение.

Следствие 3.5. *Предположим, что (C, G, d) конечнопорожденный G -проективный скрещенный модуль. Тогда существует конечнопорожденный проективный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль P такой, что G -скрещенный модуль B , изоморфный $C \oplus P$, свободен и конечнопорожден.*

Доказательство. Действительно, если $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G -скрещенного модуля C , то G -скрещенный модуль B , описанный в предложении 3.4, строится как свободный скрещенный модуль (B, G, ∂) с базисом $\{b_i \mid i \in I\}$ таким, что $\partial b_i = dc_i$. Так как G -скрещенный модуль B свободен, то существует G -морфизм $\eta: B \rightarrow C$ такой, что $\eta b_i = c_i$ для каждого

$i \in I$. Поскольку $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G -скрещенного модуля C , то η является эпиморфизмом. Ядро эпиморфизма η и является описанным в предложении 3.4 проективным $\mathbb{Z}[H]$ -модуль P таким, что $B \simeq C \oplus P$. Но тогда, если G -скрещенный модуль C конечнопорожден, то свободный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль $B^{\text{ab}} \simeq C^{\text{ab}} \oplus P$ также является конечнопорожденным, а следовательно, конечнопорожденным будет и проективный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль P . \square

Лемма 3.6. Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $H = G/dC$, а M — $\mathbb{Z}[H]$ -модуль. M -утолщение $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$ скрещенного модуля (C, G, d) будет G -проективным скрещенным модулем тогда и только тогда, когда (C, G, d) будет G -проективным скрещенным модулем, а M — проективным $\mathbb{Z}[H]$ -модулем.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$ — G -проективный скрещенный модуль. Тогда существует проективный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль P такой, что $C \oplus M \oplus P$ — свободный G -скрещенный модуль. Абелианизация

$$(C \oplus M \oplus P)^{\text{ab}} = C^{\text{ab}} \oplus M \oplus P$$

является свободным $\mathbb{Z}[H]$ -модулем, откуда следует проективность $\mathbb{Z}[H]$ -модуля M . Из проективности $\mathbb{Z}[H]$ -модуля $M \oplus P$ следует G -проективность скрещенного модуля (C, G, d) .

Достаточность. Предположим теперь, что (C, G, d) — G -проективный скрещенный модуль, M — проективный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, а P и Q — проективные $\mathbb{Z}[H]$ -модули, дополняющие (C, G, d) и M до свободного G -скрещенного модуля и свободного $\mathbb{Z}[H]$ -модуля соответственно. Тогда по лемме 3.2 G -скрещенный модуль

$$(C \oplus M) \oplus (P \oplus Q) \simeq (C \oplus P) \oplus (M \oplus Q)$$

является свободным, а следовательно, $(C \oplus M, G, d \oplus 0)$ — G -проективный скрещенный модуль. \square

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и $\rho: E \rightarrow G$ — гомоморфизм групп. Рассмотрим диаграмму коамальгаммы гомоморфизмов d и ρ

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\partial} & E \\ \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ C & \xrightarrow{d} & G, \end{array}$$

где $D = \{(c, e) \in C \times E \mid d(c) = \rho(e)\}$. Определив действие E на D соотношением $e_1(c, e) = (\rho(e_1) c, e_1 e e_1^{-1})$, и граничный гомоморфизм $\partial: D \rightarrow E$ соотношением $\partial(c, e) = e$, получим, что (D, E, ∂) — скрещенный модуль, а $(\tilde{\rho}, \rho)$, где $\tilde{\rho}: D \rightarrow C$ задается соотношением $\tilde{\rho}(c, e) = c$, — морфизм скрещенных модулей.

Пусть F — свободная группа и $\rho: G * F \rightarrow G$ — утолщение тождественного гомоморфизма id_G с помощью группы F . *Стабилизацией* скрещенного модуля (C, G, d) с помощью свободной группы F (или F -стабилизацией) называется скрещенный модуль $(D, G * F, \partial)$, обозначаемый также $(\tilde{C}, G * F, \tilde{d})$, который является коамальгамой гомоморфизмов d и ρ . Будем считать, что коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{d}} & G * F \\ \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ C & \xrightarrow{d} & G \end{array} \quad (3.1)$$

задает F -стабилизацию $(\tilde{C}, G * F, \tilde{d})$ скрещенного модуля (C, G, d) . Имеет место следующее утверждение [4, лемма 2].

Предложение 3.7. Пусть задана коммутативная диаграмма (3.1). Тогда

- 1) существует морфизм $(\tilde{\iota}, \iota)$ скрещенных модулей (C, G, d) и $(\tilde{C}, G * F, \tilde{d})$ такой, что $(\tilde{\rho}, \rho)(\tilde{\iota}, \iota) = (\text{id}_C, \text{id}_G)$;
- 2) $\rho(\tilde{d}\tilde{C}) = dC$ и отображение ρ индуцирует изоморфизм $\rho_*: G * F / \tilde{d}\tilde{C} \simeq G / dC$;

3) отображения $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\iota}$ индуцируют взаимно обратные изоморфизмы $\tilde{\rho}^*: \ker \tilde{d} \simeq \ker d$ и $\tilde{\iota}^*: \ker d \simeq \ker \tilde{d}$.

Следующее утверждение доказано в [10, лемма 1.2].

Предложение 3.8. Пусть $(\tilde{C}, G * F, \tilde{d})$ — F -стабилизация свободного (G -проективного) скрещенного модуля (C, G, d) . Тогда $(\tilde{C}, G * F, \tilde{d})$ является свободным ($G * F$ -проективным) скрещенным модулем и $\tilde{C}^{\text{ab}} \simeq C^{\text{ab}} \oplus R^n$, где $R = \mathbb{Z}[H]$, а n — ранг свободной группы F . Более того, если $\{c_i \mid i \in I\}$ — базис свободного скрещенного модуля (C, G, d) , а $\{x_j \mid j \in J\}$ — базис группы F , то $\{(c_i, id c_i) \mid i \in I\} \cup \{(0, x_j) \mid j \in J\}$ — базис F -стабилизации скрещенного модуля (C, G, d) , где $\iota: G \rightarrow G * F$ — естественное вложение.

Лемма 3.9. Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $H = G/dC$, M — $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, а F — свободная группа. Тогда M -утолщение $(\tilde{C} \oplus M, G * F, \tilde{d} \oplus 0)$ F -стабилизации скрещенного модуля (C, G, d) изоморфно его F -стабилизации M -утолщения $(\widetilde{C \oplus M}, G * F, \widetilde{d \oplus 0})$.

Доказательство. Обозначим через $g * f$ и $g' * f'$ произвольные элементы группы $G * F$, а через g и g' — их образы при гомоморфизме $\rho: G * F \rightarrow G$, являющемся утолщением тождественного гомоморфизма id_G с помощью группы F . Тогда $G * F$ -скрещенные модули $\tilde{C} \oplus M$ и $\widetilde{C \oplus M}$ можно задать как множества

$$\tilde{C} \oplus M = \{(c, g * f, m) \mid c \in C, g * f \in G * F, m \in M, dc = \rho(g * f) = g\},$$

$$\widetilde{C \oplus M} = \{(c, m, g * f) \mid c \in C, m \in M, g * f \in G * F, d \oplus 0(c, m) = dc = \rho(g * f) = g\}$$

с граничными гомоморфизмами

$$\tilde{d} \oplus 0(c, g * f, m) = \tilde{d}(c, g * f) = g * f, \quad \widetilde{d \oplus 0}(c, m, g * f) = g * f$$

и действиями группы $G * F$

$$(g' * f')(c, g * f, m) = (g'c, (g' * f')(g * f)(g' * f')^{-1}, (g' * f')m)$$

$$\begin{aligned} (g' * f')(c, m, g * f) &= (g'c, g'm, (g' * f')(g * f)(g' * f')^{-1}) \\ &= (g'c, (g' * f')m, (g' * f')(g * f)(g' * f')^{-1}) \end{aligned}$$

соответственно. Последнее равенство в последней формуле и вообще возможность построения множеств $\widetilde{C} \oplus M$ и $\widetilde{C} \oplus M$ следует из пункта 2) предложения 3.7.

В множестве $\widetilde{C} \oplus M$ рассмотрим подмножества

$$C' = \{(c, 0, g * f)\}, \quad M' = \{(0, m, 1)\}.$$

Очевидно, что условия 1)–3) леммы 3.1 выполнены, следовательно, $G * F$ -скрещенные модули $\widetilde{C} \oplus M$ и $\widetilde{C} \oplus M$ изоморфны. \square

В дальнейшем понадобится также следующее утверждение [4, лемма 3].

Предложение 3.10. Пусть $G = A * F$ и $G' = A * F'$ — конечно свободные A -группы, $\varphi: G \rightarrow G'$ — их стабильный A -гомоморфизм, и пусть задана коммутативная диаграмма групп

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{\pi} & G & \xleftarrow{d} & C & \longleftarrow & \ker d & \longleftarrow & 0 \\ & & \varphi_* \downarrow & & \varphi \downarrow & & f \downarrow & & f^* \downarrow & & \\ 1 & \longleftarrow & H' & \xleftarrow{\pi'} & G' & \xleftarrow{d'} & C' & \longleftarrow & \ker d' & \longleftarrow & 0, \end{array}$$

где (f, φ) — морфизм конечнопорожденных свободных скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') , а φ_* — изоморфизм. Тогда если $(\widetilde{C}, G * F, \widetilde{d})$ и $(\widetilde{C}', G' * F, \widetilde{d}')$ — F' - и F -стабилизации свободных скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') соответственно, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{\pi * 0} & G * F & \xleftarrow{\widetilde{d}} & \widetilde{C} & \longleftarrow & \ker \widetilde{d} & \longleftarrow & 0 \\ & & \varphi_* \downarrow & & \widetilde{\varphi} \downarrow & & \widetilde{f} \downarrow & & \widetilde{f}^* \downarrow & & \\ 1 & \longleftarrow & H' & \xleftarrow{\pi' * 0} & G' * F & \xleftarrow{\widetilde{d}'} & \widetilde{C}' & \longleftarrow & \ker \widetilde{d}' & \longleftarrow & 0, \end{array}$$

в которой $(\tilde{f}, \tilde{\varphi})$ — морфизм скрещенных модулей $(\tilde{C}, G * F', \tilde{d})$ и $(\tilde{C}', G' * F, \tilde{d}')$, отображения $\tilde{\varphi}$ и \tilde{f} сохраняют отображения φ и f соответственно, причем $\tilde{\varphi}$ — изоморфизм.

4. СТАБИЛЬНО ИЗОМОРФНЫЕ СКРЕЩЕННЫЕ МОДУЛИ

Пусть $G = A * F$ и $G' = A * F'$ — конечно свободные A -группы, (C, G, d) и (C', G', d') — конечно порожденные G - и G' -проективные скрещенные модули соответственно, причем

$$H = G/dC = G'/d'C'.$$

Будем говорить, что скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') *стабильно изоморфны*, если стабильно изоморфными будут проективные $\mathbb{Z}[H]$ -модули C^{ab} и C'^{ab} . Напомним, что два R -модуля P и P' называются *стабильно изоморфными*, если существуют два натуральных числа m и n такие, что $P \oplus R^m \simeq P' \oplus R^n$. Очевидно, что отношение «быть стабильно изоморфными» является отношением эквивалентности. Для удобства ссылок на необходимые результаты сформулируем следующее утверждение, первая часть которого очевидна, а вторая доказана в [3, лемма 1].

Предложение 4.1. 1) Если R -модуль A стабильно изоморфен R -модулю A' , а R -модуль B стабильно изоморфен R -модулю B' , то R -модуль $A \oplus B$ стабильно изоморфен R -модулю $A' \oplus B'$.

2) Если P_1 и P_2 — два стабильно изоморфных проективных R -модуля, а Q_1 и Q_2 — их дополнения до свободных модулей, то Q_1 и Q_2 стабильно изоморфны.

Лемма 4.2. Пусть $G, G' \in \mathcal{F}_A$, (C, G, d) и (C', G', d') — конечно порожденные G - и G' -проективные скрещенные модули соответственно, причем $H = G/dC = G'/d'C'$, а P и P' — произвольные стабильно изоморфные проективные $\mathbb{Z}[H]$ -модули. Скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') будут стабильно изоморфными тогда и только тогда, когда соответствующие P - и P' -утолщения $(C \oplus P, G, d \oplus 0)$ и $(C' \oplus P', G', d' \oplus 0)$ будут стабильно изоморфными.

Доказательство. *Необходимость* следует из определения стабильной изоморфности проективных скрещенных модулей и первой части предложения 4.1.

Достаточность. Пусть проективные R -модули P и P' , где $R = \mathbb{Z}[H]$, и P - и P' -утолщения $(C \oplus P, G, d \oplus 0)$ и $(C' \oplus P', G', d' \oplus 0)$ скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') — стабильно изоморфны. По второй части предложения 4.1 стабильно изоморфными будут и R -модули Q и Q' , дополняющие P и P' до свободных модулей. Из необходимости следует, что скрещенные модули $(C \oplus P \oplus Q, G, d \oplus 0 \oplus 0)$ и $(C' \oplus P' \oplus Q', G', d' \oplus 0 \oplus 0)$ будут стабильно изоморфными. Так как $P \oplus Q$ и $P' \oplus Q'$ — свободные модули, то скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') также будут стабильно изоморфными, что и требовалось доказать. \square

Лемма 4.3. Пусть $G, G' \in \mathcal{F}_A$, (C, G, d) и (C', G', d') — конечнопорожденные G - и G' -проективные скрещенные модули соответственно, причем $H = G/dC = G'/d'C'$, а F и F' — произвольные конечнопорожденные свободные группы. Скрещенные модули (C, G, d) и (C', G', d') будут стабильно изоморфными тогда и только тогда, когда соответствующие F - и F' -стабилизации $(\tilde{C}, G * F, \tilde{d})$ и $(\tilde{C}', G' * F', \tilde{d}')$ будут стабильно изоморфными.

Доказательство. Утверждение леммы следует из транзитивности отношения «быть стабильно изоморфными» и предложения 3.8. \square

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Традиционно (см. например, [5], [7]), скрещенным цепным комплексом (C_i, G, d_i) называется последовательность групп и гомоморфизмов

$$1 \longleftarrow H \xleftarrow{d_1} G \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} C_3 \xleftarrow{d_4} \dots \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} \dots$$

со следующими свойствами:

- 1) (C_2, G, d_2) — свободный скрещенный модуль и $H = \text{oker } d_2$;
- 2) для $i \geq 3$ C_i — свободный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, d_i — гомоморфизм $\mathbb{Z}[H]$ -модулей, $d_3(C_3)$ — $\mathbb{Z}[H]$ -модуль;
- 3) $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

Морфизмом $f: (C_i, G, d_i) \rightarrow (C'_i, G', d'_i)$ скрещенных цепных комплексов (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i) называется такая совокупность гомоморфизмов $f_1: G \rightarrow G'$, $f_i: C_i \rightarrow C'_i$, $i \geq 2$, которая сохраняет структуры на G и C_i , $i \geq 2$, и возникающие диаграммы гомоморфизмов будут коммутативными. Если при этом каждый из гомоморфизмов f_i является изоморфизмом, то гомотопические системы (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i) называются *изоморфными*, а морфизм $f = \{f_i\}$ — *изоморфизмом*.

Скрещенный цепной комплекс (C_i, G, d_i) назовем *проективным*, если

- 1) (C_2, G, d_2) — G -проективный скрещенный модуль;
- 2) для $i \geq 3$ C_i — проективный $\mathbb{Z}[H]$ -модуль, где $H = \text{oker } d_2$.

Скрещенный цепной комплекс (C_i, G, d_i) назовем *конечнопорожденным*, если (C_2, G, d_2) — конечнопорожденный скрещенный модуль и $\mathbb{Z}[H]$ -модули C_i конечно порождены для всех $i \geq 3$.

Доказательство основного результата данной статьи опирается на следующую теорему автора [3].

Предложение 5.1. Пусть $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ — цепное отображение n -мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, индуцирующее изоморфизм модулей гомологий. Для того, чтобы существовали ациклические свободные цепные комплексы \mathcal{F} и \mathcal{F}' такие, что цепные комплексы $\mathcal{P} \oplus \mathcal{F}$ и $\mathcal{P}' \oplus \mathcal{F}'$ цепно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = 0, \bar{n}$ модули P_i и P'_i были стабильно изоморфными.

Теорема 5.2. Пусть $G, G' \in \mathcal{F}_A$, $f: (C_i, G, d_i) \rightarrow (C'_i, G', d'_i)$ — морфизм n -мерных конечнопорожденных проективных скрещенных цепных комплексов (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i) , индуцирующий изоморфизм групп и модулей гомологий, и такой, что

$f_1: G \rightarrow G'$ — является стабильным A -гомоморфизмом. Тогда для того, чтобы существовали стабилизации граничных гомоморфизмов d_i и d'_i с помощью свободных групп и свободных модулей такие, что полученные скрещенные цепные комплексы будут изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы скрещенные модули (C_2, G, d_2) и (C'_2, G', d'_2) , а также $\mathbb{Z}[H]$ -модули C_i и C'_i для каждого $i \geq 3$ были стабильно изоморфными.

Доказательство. Необходимость. Пусть существуют стабилизации граничных гомоморфизмов d_i и d'_i с помощью свободных групп и свободных модулей такие, что полученные скрещенные цепные комплексы будут изоморфными. Тогда по леммам 4.2 и 4.3 скрещенные модули (C_2, G, d_2) и (C'_2, G', d'_2) будут стабильно изоморфными, а по определению стабильно изоморфными будут и модули C_i и C'_i для каждого $i = \overline{3, n}$.

Достаточность. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d_1} & G & \xleftarrow{d_2} & C_2 & \xleftarrow{d_3} & C_3 & \xleftarrow{d_4} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n & & (5.2) \\
 & & \parallel & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & & & \downarrow f_n & & \\
 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d'_1} & G' & \xleftarrow{d'_2} & C'_2 & \xleftarrow{d'_3} & C'_3 & \xleftarrow{d'_4} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n & &
 \end{array}$$

— диаграмма морфизма $f: (C_i, G, d_i) \rightarrow (C'_i, G', d'_i)$ n -мерных конечнопорожденных проективных скрещенных цепных комплексов (C_i, G, d_i) и (C'_i, G', d'_i) , индуцирующего изоморфизм групп и модулей гомологий. Предположим также, что скрещенные модули (C_2, G, d_2) и (C'_2, G', d'_2) , а также $\mathbb{Z}[H]$ -модули C_i и C'_i для каждого $i \geq 3$ являются стабильно изоморфными. По предложению 3.4 существуют конечнопорожденные $\mathbb{Z}[H]$ -модули P и P' такие, что $(C_2 \oplus P, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C'_2 \oplus P', G', d'_2 \oplus 0)$ — свободные скрещенные модули. Так как $(C_2 \oplus P)^{\text{ab}}$ и $(C'_2 \oplus P')^{\text{ab}}$ — свободные $\mathbb{Z}[H]$ -модули, а C_2^{ab} и $C'_2{}^{\text{ab}}$ — стабильно изоморфные $\mathbb{Z}[H]$ -модули, то по второй части предложения 4.1 стабильно изоморфными будут и $\mathbb{Z}[H]$ -модули P и P' . Пусть $Q = P \oplus R^m \simeq P' \oplus R^n$, где $R = \mathbb{Z}[H]$. По лемме 3.2 скрещенные

модули $(C_2 \oplus Q, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C'_2 \oplus Q, G', d'_2 \oplus 0)$ являются свободными. Утоляя морфизмы d_2 и d'_2 и стабилизируя морфизмы f_2, f_3, d_3 и d'_3 с помощью модуля Q получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d_1} & G & \xleftarrow{d_2 \oplus 0} & C_2 \oplus Q & \xleftarrow{d_3 \oplus \text{id}} & C_3 \oplus Q & \xleftarrow{d_4} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\ & & \parallel & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \oplus \text{id} & & \downarrow f_3 \oplus \text{id} & & & & \downarrow f_n \\ 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d'_1} & G' & \xleftarrow{d'_2 \oplus 0} & C'_2 \oplus Q & \xleftarrow{d'_3 \oplus \text{id}} & C'_3 \oplus Q & \xleftarrow{d'_4} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n, \end{array}$$

начальный отрезок которой

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d_1} & G & \xleftarrow{d_2 \oplus 0} & C_2 \oplus Q & \longleftarrow & \ker(d_2 \oplus 0) & \longleftarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \oplus \text{id} & & \downarrow (f_2 \oplus \text{id})^* & & \\ 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d'_1} & G' & \xleftarrow{d'_2 \oplus 0} & C'_2 \oplus Q & \longleftarrow & \ker(d'_2 \oplus 0) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

удовлетворяет условиям предложения 3.10. Так как $G, G' \in \mathcal{F}_A$, то $G = A * F$ и $G' = A * F'$, где F и F' — свободные конечнопорожденные группы. Пусть $(\widetilde{C_2 \oplus Q}, \widetilde{G * F'}, \widetilde{d_2 \oplus 0})$ и $(\widetilde{C'_2 \oplus Q}, \widetilde{G' * F'}, \widetilde{d'_2 \oplus 0})$ — F' - и F -стабилизации свободных скрещенных модулей $(C_2 \oplus Q, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C'_2 \oplus Q, G', d'_2 \oplus 0)$ соответственно. Тогда по предложению 3.10 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d_1 * 0} & G * F' & \xleftarrow{\widetilde{d_2 \oplus 0}} & \widetilde{C_2 \oplus Q} & \longleftarrow & \ker \widetilde{d_2 \oplus 0} & \longleftarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \widetilde{f_1} & & \downarrow \widetilde{f_2 \oplus \text{id}} & & \downarrow \widetilde{f_2 \oplus \text{id}}^* & & \\ 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d'_1 * 0} & G' * F & \xleftarrow{\widetilde{d'_2 \oplus 0}} & \widetilde{C'_2 \oplus Q} & \longleftarrow & \ker \widetilde{d'_2 \oplus 0} & \longleftarrow & 0, \end{array}$$

в которой $(\widetilde{f_2 \oplus \text{id}}, \widetilde{f_1})$ — морфизм скрещенных модулей

$$(\widetilde{C_2 \oplus Q}, \widetilde{G * F'}, \widetilde{d_2 \oplus 0}) \quad \text{и} \quad (\widetilde{C'_2 \oplus Q}, \widetilde{G' * F'}, \widetilde{d'_2 \oplus 0}),$$

сохраняющий отображения f_2 и f_1 , причем \widetilde{f}_1 — изоморфизм, и $\ker \widetilde{d_2 \oplus 0} = \ker(d_2 \oplus 0)$ и $\ker \widetilde{d'_2 \oplus 0} = \ker(d'_2 \oplus 0)$. Таким образом, диаграмму (5.2) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d_1 * 0} & G * F' & \xleftarrow{\widetilde{d_2 \oplus 0}} & \widetilde{C_2 \oplus Q} & \xleftarrow{d_3 \oplus \text{id}} & C_3 \oplus Q & \xleftarrow{d_4} & C_4 & \xleftarrow{d_5} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & & \parallel & & \downarrow \widetilde{f}_1 & & \downarrow \widetilde{f_2 \oplus \text{id}} & & \downarrow f_3 \oplus \text{id} & & \downarrow f_4 & & & & \downarrow f_n \\
 1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{d'_1 * 0} & G' * F & \xleftarrow{\widetilde{d'_2 \oplus 0}} & \widetilde{C'_2 \oplus Q} & \xleftarrow{d'_3 \oplus \text{id}} & C'_3 \oplus Q & \xleftarrow{d'_4} & C'_4 & \xleftarrow{d'_5} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array}$$

В силу изоморфности \widetilde{f}_1 отождествим группы

$$G * F' = G' * F = \overline{G}.$$

Пусть S и S' — проективные модули, дополняющие проективные модули $C_3 \oplus Q$ и $C'_3 \oplus Q$ до свободных модулей C и C' соответственно. Тогда, утолщая морфизмы $f_3 \oplus \text{id}$ и f_4 с помощью модуля S и стабилизируя морфизмы d_4 и d'_4 с помощью модулей S и S' соответственно, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\partial} & D & \xleftarrow{d} & C & \xleftarrow{\widehat{d}_4} & C_4 \oplus S & \xleftarrow{d_5} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \widehat{f}_2 & & \downarrow \widehat{f}_3 & & \downarrow \widehat{f}_4 & & & & \downarrow f_n \\
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\partial'} & D' & \xleftarrow{d'} & C' & \xleftarrow{\widehat{d}'_4} & C'_4 \oplus S' & \xleftarrow{d'_5} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array}$$

где

$$\begin{aligned}
 D &= \widetilde{C_2 \oplus Q}, & D' &= \widetilde{C'_2 \oplus Q}, \\
 C &= C_3 \oplus Q \oplus S, & C' &= C'_3 \oplus Q \oplus S', \\
 \partial &= \widetilde{d_2 \oplus 0}, & \partial' &= \widetilde{d'_2 \oplus 0}, \\
 d &= d_3 \oplus \text{id} \oplus 0, & d' &= d'_3 \oplus \text{id} \oplus 0, \\
 \widehat{d}_4 &= d_4 \oplus \text{id}, & \widehat{d}'_4 &= d'_4 \oplus \text{id}, \\
 \widehat{f}_2 &= \widetilde{f_2 \oplus \text{id}}, & \widehat{f}_3 &= f_3 \oplus \text{id} \oplus 0, & \widehat{f}_4 &= f_4 \oplus 0.
 \end{aligned}$$

Начальный отрезок этой диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\partial} & D & \xleftarrow{d} & C & \longleftarrow & \ker d & \longleftarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \hat{f}_2 \downarrow & & \hat{f}_3 \downarrow & & \hat{f}_3^* \downarrow & & \\
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\partial'} & D' & \xleftarrow{d'} & C' & \longleftarrow & \ker d' & \longleftarrow & 0
 \end{array}$$

удовлетворяет условиям предложения 3.3, а поэтому диаграмму (5.2) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\partial \oplus 0} & D \oplus D'^{\text{ab}} & \xleftarrow{d \oplus \text{id}} & C \oplus D'^{\text{ab}} & \xleftarrow{\widehat{d}_4} & C_4 \oplus S & \xleftarrow{d_5} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & & \parallel & & \parallel & & \tilde{f}_2 \downarrow & & \tilde{f}_3 \downarrow & & \hat{f}_4 \downarrow & & & & \downarrow f_n \\
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\partial' \oplus 0} & D' \oplus D^{\text{ab}} & \xleftarrow{d' \oplus \text{id}} & C' \oplus D^{\text{ab}} & \xleftarrow{\widehat{d}'_4} & C'_4 \oplus S' & \xleftarrow{d'_5} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array}$$

где \tilde{f}_2 и \tilde{f}_3 сохраняют отображения f_2 и f_3 соответственно, причем \tilde{f}_2 — изоморфизм. Утолщая морфизмы $\partial \oplus 0$ и $\partial' \oplus 0$ и стабилизируя морфизмы \tilde{f}_2 , \tilde{f}_3 , $d \oplus \text{id}$ и $d' \oplus \text{id}$ с помощью модуля C_2^{ab} , получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\bar{\partial}} & \overline{D} & \xleftarrow{\hat{d}} & \widehat{C} & \xleftarrow{\widehat{d}_4} & C_4 \oplus S & \xleftarrow{d_5} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & & \parallel & & \parallel & & \bar{f}_2 \downarrow & & \tilde{f}'_3 \downarrow & & \hat{f}_4 \downarrow & & & & \downarrow f_n \\
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\bar{\partial}'} & \overline{D}' & \xleftarrow{\hat{d}'} & \widehat{C}' & \xleftarrow{\widehat{d}'_4} & C'_4 \oplus S' & \xleftarrow{d'_5} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array}$$

в которой

$$\begin{aligned}
 \overline{D} &= D \oplus D'^{\text{ab}} \oplus C_2^{\text{ab}}, & \overline{D}' &= D' \oplus D^{\text{ab}} \oplus C_2^{\text{ab}}, \\
 \widehat{C} &= C \oplus D'^{\text{ab}} \oplus C_2^{\text{ab}}, & \widehat{C}' &= C' \oplus D^{\text{ab}} \oplus C_2^{\text{ab}}, \\
 \bar{\partial} &= \partial \oplus 0 \oplus 0, & \bar{\partial}' &= \partial' \oplus 0 \oplus 0, \\
 \hat{d} &= d \oplus \text{id} \oplus \text{id}, & \hat{d}' &= d' \oplus \text{id} \oplus \text{id},
 \end{aligned}$$

отображения $\bar{f}_2 = \tilde{f}_2 \oplus \text{id}$ и $\tilde{f}'_3 = \tilde{f}_3 \oplus \text{id}$ сохраняют отображения f_2 и f_3 соответственно, причем \bar{f}_2 — изоморфизм. Утолщая морфизмы \hat{d} , \tilde{f}'_3 и \hat{f}_4 с помощью модуля $Q \oplus C_3$, а морфизм \hat{d}' — с помощью модуля $Q \oplus C'_3$, и стабилизируя морфизмы \widehat{d}_4 и \widehat{d}'_4

с помощью модулей $Q \oplus C_3$ и $Q \oplus C'_3$ соответственно, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\overline{\partial}} & \overline{D} & \xleftarrow{\overline{d}} & \overline{C} & \xleftarrow{\overline{d}_4} & \overline{C}_4 & \xleftarrow{d_5} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \overline{f}_2 & & \downarrow \overline{f}_3 & & \downarrow \overline{f}_4 & & & & \downarrow f_n \\
 1 & \longleftarrow & H & \longleftarrow & \overline{G} & \xleftarrow{\overline{\partial}'} & \overline{D}' & \xleftarrow{\overline{d}'} & \overline{C}' & \xleftarrow{\overline{d}'_4} & \overline{C}'_4 & \xleftarrow{d'_5} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array}$$

где

$$\begin{aligned}
 \overline{C} &= \widehat{C} \oplus (Q \oplus C_3), & \overline{C}' &= \widehat{C}' \oplus (Q \oplus C'_3), \\
 \overline{C}_4 &= (C_4 \oplus S) \oplus (Q \oplus C_3), & \overline{C}'_4 &= (C'_4 \oplus S') \oplus (Q \oplus C'_3), \\
 \overline{d} &= \widehat{d} \oplus 0, & \overline{d}' &= \widehat{d}' \oplus 0, \\
 \overline{d}_4 &= \widehat{d}_4 \oplus \text{id}, & \overline{d}'_4 &= \widehat{d}'_4 \oplus \text{id},
 \end{aligned}$$

отображения $\overline{f}_3 = \widetilde{f}_3' \oplus 0$ и $\overline{f}_4 = \widehat{f}_4 \oplus 0$ сохраняют отображения f_3 и f_4 соответственно. Учитывая лемму 3.9, можно записать, что

$$\overline{D} \simeq \widetilde{C}_2 \oplus K_2, \quad \overline{D}' \simeq \widetilde{C}'_2 \oplus K'_2,$$

где

$$K_2 \simeq (\widetilde{C}'_2 \oplus Q)^{\text{ab}} \oplus (C_2^{\text{ab}} \oplus Q), \quad K'_2 \simeq (\widetilde{C}_2 \oplus Q)^{\text{ab}} \oplus (C_2^{\text{ab}} \oplus Q)$$

— свободные $\mathbb{Z}[H]$ -модули. Кроме того, очевидно, что

$$\begin{aligned}
 \overline{C} &= C_3 \oplus K_3, & \overline{C}' &= C'_3 \oplus K'_3, \\
 \overline{C}_4 &= C_4 \oplus K_4, & \overline{C}'_4 &= C'_4 \oplus K'_4,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 K_3 &\simeq (C_3 \oplus Q \oplus S) \oplus D'^{\text{ab}} \oplus (C_2^{\text{ab}} \oplus Q), \\
 K'_3 &\simeq (C'_3 \oplus Q \oplus S') \oplus D^{\text{ab}} \oplus (C_2^{\text{ab}} \oplus Q), \\
 K_4 &\simeq C_3 \oplus Q \oplus S, & K'_4 &\simeq C'_3 \oplus Q \oplus S'
 \end{aligned}$$

— свободные модули.

Таким образом, стабилизировав отображения $d_2, d'_2, d_3, d'_3, d_4, d'_4$ с помощью свободных групп и свободных модулей, диаграмму (5.2) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 \longleftarrow & H & \xleftarrow{d_1 * 0} & G * F' & \xleftarrow{\bar{d}} & \widetilde{C}_2 \oplus K_2 & \xleftarrow{\bar{d}} & C_3 \oplus K_3 & \xleftarrow{\bar{d}_4} & C_4 \oplus K_4 & \xleftarrow{d_5} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & \parallel & & \downarrow \tilde{f}_1 & & \downarrow \bar{f}_2 & & \downarrow \bar{f}_3 & & \downarrow \bar{f}_4 & & & & \downarrow f_n \\
 1 \longleftarrow & H & \xleftarrow{d'_1 * 0} & G' * F & \xleftarrow{\bar{d}'} & \widetilde{C}'_2 \oplus K'_2 & \xleftarrow{\bar{d}''} & C'_3 \oplus K'_3 & \xleftarrow{\bar{d}'_4} & C'_4 \oplus K'_4 & \xleftarrow{d'_5} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array}$$

в которой \tilde{f}_1 и \bar{f}_2 — изоморфизмы.

Так как ядра граничных гомоморфизмов скрещенных модулей являются модулями (см., например, [5]) и отображение \bar{f}_3 индуцирует изоморфизм $\bar{f}_{3*}: H_3 \rightarrow H'_3$ модулей гомологий, то можно построить диаграмму

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 \longleftarrow & H_3 & \xleftarrow{\bar{d}} & C_3 \oplus K_3 & \xleftarrow{\bar{d}_4} & C_4 \oplus K_4 & \xleftarrow{d_5} & C_5 & \xleftarrow{d_6} & \dots & \xleftarrow{d_n} & C_n \\
 & \downarrow \bar{f}_{3*} & & \downarrow \bar{f}_3 & & \downarrow \bar{f}_4 & & \downarrow f_5 & & & & \downarrow f_n \\
 0 \longleftarrow & H'_3 & \xleftarrow{\bar{d}'} & C'_3 \oplus K'_3 & \xleftarrow{\bar{d}'_4} & C'_4 \oplus K'_4 & \xleftarrow{d'_5} & C'_5 & \xleftarrow{d'_6} & \dots & \xleftarrow{d'_n} & C'_n
 \end{array} \tag{5.3}$$

гомоморфизма $(n-2)$ -мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, который индуцирует изоморфизм модулей гомологий. Поскольку проективные модули C_i и C'_i для $i = \overline{3, n}$ являются стабильно изоморфными, то для диаграммы (5.3) справедливо предложение 5.1, из которого и следует справедливость достаточности данной теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Cockcroft W. H., Swan R. G.* On the homotopy type of certain two-dimensional complexes // *Proc. London Math. Soc.* (3). — 1961. — 11. — P. 194–202.
- [2] *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — К.: Наукова думка, 1990. — С. 196.

- [3] Хмельницкий Н. А. О цепной эквивалентности проективных цепных комплексов // *Укр. мат. журн.* — 2012. — **11**, 6. — С. 826–835.
- [4] Хмельницкий Н. А. Теорема Кокрофта-Свона для проективных скрещенных цепных комплексов // *Укр. мат. журн.* — 2014. — **66**, 12. — С. 1694–1704.
- [5] *Brown R., Higgins P. J., Sivera R.* Nonabelian algebraic topology. — Zürich: European Mathematical Society, 2011. — P. 668.
- [6] *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули, категории: В 2-х т. 1. — М.: Мир, 1977. — С. 668.
- [7] *C. Whitehead J. H.* Combinatorial homotopy // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1949. — **11**, N 4. — P. 453–496.
- [8] *Куров А. Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967. — С. 648.
- [9] *Ratcliffe John G.* Free and projective crossed modules // *J. London Math. Soc. (2)*. — 1980. — **22**, 1. — P. 66–74.
- [10] *Ratcliffe John G.* On complexes dominated by a two-complex // *Combinatorial group theory and topology* (Alta, Utah, 1984). — Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987. — **111** of *Ann. of Math. Stud.* — P. 221–254.

Б. Г. Фещенко

Институт математики НАН України, Київ
fb@imath.kiev.ua

Деформації гладких функцій на 2-торі, у яких граф Кронрода-Ріба є деревом

Нехай $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функція Морса на 2-торі T^2 , X — замкнена (можливо порожня) підмножина в T^2 і $\mathcal{S}(f, X)$, $\mathcal{O}(f, X)$ — відповідно стабілізатор і орбіта функції f відносно правої дії групи дифеоморфізмів $\mathcal{D}(T^2, X)$ нерухомих на X . Нехай $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, X)$ — зв'язна компонента $\mathcal{D}(T^2, X)$, що містить id і $\mathcal{O}_f(f, X)$ — зв'язна компонента $\mathcal{O}(f, X)$, що містить f . Покладемо $\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2, X)$. Припустимо що функція f є такою, що її граф Кронрода-Ріба є деревом. Тоді існує множина 2-дисків $\{D_i\}_{i=0}^r \subset T^2$ та сталі $n, m \in \mathbb{N}$ такі, що має місце ізоморфізм $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=0}^r \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}} \mathbb{Z}^2$, де $A \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}} \mathbb{Z}^2$ — вільний добуток A і \mathbb{Z}^2 над $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$. Цей результат має місце для більшого класу гладких функцій $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ які мають таку властивість: для кожної критичної точки z функції f паросток f в z є гладко еквівалентним однорідному многочлену $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без кратних коренів.

1. Вступ

Нехай M — гладка компактна поверхня, X — замкнена (можливо порожня) підмножина в M , $\mathcal{D}(M, X)$ — група дифеоморфізмів M , нерухомих на X . Тоді група $\mathcal{D}(M, X)$ діє на просторі гладких функцій $C^\infty(M, \mathbb{R})$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M, X) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad \gamma(f, h) = f \circ h. \quad (1.1)$$

Нехай $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ — гладка функція на M . Множини

$$\mathcal{S}(f, X) = \{f \in \mathcal{D}(M, X) \mid f \circ h = f\},$$

$$\mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}$$

називаються відповідно *стабілізатором* і *орбітою* функції f відносно дії (1.1).

Якщо X є порожньою множиною, то покладемо

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M, \emptyset), \quad \mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f, \emptyset), \quad \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f, \emptyset),$$

і так далі. Наділимо простори $\mathcal{D}(M, X)$, $C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\mathcal{S}(f, X)$, і $\mathcal{O}(f, X)$ відповідними сильними C^∞ -топологіями Уїтні.

Позначимо через $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ і $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ відповідно тотожні компоненти $\mathcal{S}(f, X)$ і $\mathcal{D}(M, X)$, а через $\mathcal{O}_f(f, X)$ — компоненту $\mathcal{O}(f, X)$, що містить f . Нехай також

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X).$$

Нехай далі $\mathcal{F}(M) \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ — множина гладких функцій, що задовольняють такі дві умови:

- (В) функція f приймає постійне значення на кожній зв'язній компоненті ∂M , і всі критичні точки f належать до внутрішності M ;
- (Р) для кожної критичної точки z функції f паросток f в z є гладко еквівалентним до деякого *однорідного поліному* $f_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без кратних коренів.

Нехай $\text{Morse}(M)$ — множина функцій Морса на M , тобто функцій, що мають лише невинуджені критичні точки. Множина $\text{Morse}(M)$ є відкритою і всюди щільною підмножиною в $C^\infty(M, \mathbb{R})$. На підставі леми Морса кожна невинуджена особливість є гладко еквівалентною однорідному многочлену $\pm x^2 \pm y^2$ без кратних коренів. Отже, $\text{Morse}(M) \subset \mathcal{F}(M)$.

Теорема 1.1. [1–3] *Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ — функція і X — скінченне (можливо порожнє) об'єднання регулярних компонент множин рівня функції f . Тоді справедливі наступні твердження.*

(1) *Відображення*

$$p : \mathcal{D}(M, X) \rightarrow \mathcal{O}(M, X), \quad p(h) = f \circ h$$

є розшаруванням Серра з шаром $\mathcal{S}(f, X)$, тобто вона має властивість підняття гомотопії для CW -комплексів.

(2) Обмеження розшарування p на $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$

$$p|_{\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)} : \mathcal{D}_{\text{id}}(M, X) \rightarrow \mathcal{O}_f(f, X)$$

також є розшаруванням Серра.

(3) Припустимо, що $X = \emptyset$ і, або f має критичну точку, що не є невідродженим локальним екстремумом, або M є неорієнтованою поверхнею. Тоді $\mathcal{S}_{\text{id}}(f)$ є стягуваним,

$$\pi_n \mathcal{O}_f(f) = \pi_n M, \quad n \geq 3, \quad \pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0,$$

і для $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ ми маємо таку точну послідовність

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(M) \xrightarrow{p} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1. \quad (1.2)$$

(4) Припустимо, що $\chi(M) < 0$ або $X \neq \emptyset$. Тоді $\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X)$ і $\mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)$ є стягуваними, $\pi_n \mathcal{O}_f(f, X) = 0$ для $n \geq 2$, а відображення

$$\partial : \pi_1 \mathcal{O}_f(f, X) \rightarrow \pi_0 \mathcal{S}'(f, X) \quad (1.3)$$

є ізоморфізмом.

Нехай також $\omega : (I^k, \partial I^k, 0) \rightarrow (\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X), \mathcal{S}_{\text{id}}(M, X), \text{id}_M)$ — неперервне відображення трійок, $k \geq 0$. Тоді з (2) теореми 1.1 випливає, що для будь-якого $k \geq 0$ існує ізоморфізм

$$\lambda_k : \pi_k(\mathcal{D}_{\text{id}}(M, X), \mathcal{S}_{\text{id}}(f, X)) \rightarrow \pi_k \mathcal{O}_f(f, X), \quad \lambda_k[\omega] = [f \circ \omega],$$

див., наприклад, [4, § 4.1, теорема 4.1]. В подальшому тексті роботи ми будемо отожднювати $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ з $\pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f))$.

В серії робіт [1–3, 5–8] Максименко описав гомотопічні типи стабілізаторів дії (1.1). Автори у роботах [9, 10] описали фундаментальну групу орбіт $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ функцій f з $\mathcal{F}(T^2)$ у випадку, коли КР-граф функції f містить цикл. У випадку, коли КР-граф f є деревом, автори [11] знайшли умови, за яких послідовність (1.2) розщеплюється. Метою даної роботи є опис групи $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$ функцій з $\mathcal{F}(T^2)$, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, див. теорему 2.5.

2. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

2.1. **Вінцеві добутки** $G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$. Нехай G — група з одиницею 1 і $n, m \geq 1$. Через $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ ми позначимо групу всіх відображень з $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ в G з поточковим множенням, тобто якщо $\alpha, \beta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \rightarrow G$ — два відображення з $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$, то $(\alpha \cdot \beta)(i, j) = \alpha(i, j) \cdot \beta(i, j)$, де $(i, j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

Група \mathbb{Z}^2 діє справа на $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ за таким правилом: якщо $\alpha \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ і $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, тоді результат цієї дії $\alpha^{k,l}$ задається формулою:

$$\alpha^{k,l}(i, j) = \alpha(i + k \bmod n, j + l \bmod m), \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Напівпрямий добуток $\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$, що відповідає цій дії, позначимо через

$$G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2 := \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$$

і будемо називати *вінцевим добутком* G і \mathbb{Z}^2 над $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

Таким чином, $G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$ — це прямий добуток множин

$$\text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$$

з такою операцією

$$(\alpha, (k_1, k_2))(\beta, (l_1, l_2)) = (\alpha\beta^{k_1, k_2}, (k_1 + l_1, k_2 + l_2))$$

для всіх $(\alpha, (k_1, k_2)), (\beta, (l_1, l_2)) \in \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$. Крім того, ми маємо таку коротку точну послідовність:

$$1 \longrightarrow \text{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \xrightarrow{\sigma} G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1,$$

де $\sigma(\alpha) = (\alpha, (0, 0))$ — вкладення і $p(\alpha, (a_1, a_2)) = (a_1, a_2)$ — проєкція.

2.2. **Граф Кронрода-Ріба функції** f . Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладка функція і $c \in \mathbb{R}$ — дійсне число. Зв'язна компонента C множини рівня $f^{-1}(c)$ називається *критичною*, якщо C містить щонайменше одну критичну точку f . В протилежному випадку C називається *регулярною*.

Нехай Δ — розбиття M на зв'язні компоненти множин рівня функції f . Добре відомо, що фактор-простір M/Δ є 1-вимірним СВ комплексом і M/Δ називається *графом Кронрода-Ріба* або, простіше, *KR-графом* функції f . Ми будемо позначати його через Γ_f . Вершинами графу Γ_f є критичні компоненти множин рівня функції f . Нехай $p_f : M \rightarrow \Gamma_f$ — проекція M на фактор-простір $\Gamma_f = M/\Delta$.

2.3. Дія $\mathcal{S}'(f)$ на Γ_f . Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладка функція. Зазначимо, що функція f може бути представлена як композиція таких відображень

$$f = \phi \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $h \in \mathcal{S}'(f)$. Тоді $f \circ h = f$ і ми отримуємо, що $h(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$. Отже, h переставляє зв'язні компоненти множин рівня f , а тому h індукує гомоморфізм $\rho(h)$ KR-графу Γ_f такий, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma(f) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \\ \downarrow h & & \downarrow \rho(h) \quad \parallel \\ M & \xrightarrow{p_f} & \Gamma(f) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \end{array} \quad (2.4)$$

є комутативною. Іншими словами, ми отримуємо гомоморфізм

$$\rho : \mathcal{S}'(f) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_f)$$

в групу автоморфізмів Γ_f . Нехай $G = \rho(\mathcal{S}'(f))$ — образ $\mathcal{S}'(f)$ в $\text{Aut}(\Gamma_f)$ відносно відображення ρ .

Нехай v — вершина Γ_f і

$$G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$$

— стабілізатор v відносно дії G . Довільний замкнений зв'язний G_v -інваріантний окіл v в Γ_f , що не містить інших вершин Γ_f і будемо називати *зіркою* вершини v і позначатимемо її через $\text{st}(v)$.

Множина

$$G_v^{loc} = \{g|_{st(v)} \mid g \in G_v\}$$

є підгрупою в $\text{Aut}(st(v))$, що складається з обмежень елементів з G_v на $st(v)$. Ми будемо називати G_v^{loc} *локальним стабілізатором* вершини v відносно дії групи G . Зауважимо, що група G_v^{loc} не залежить від вибору зірки $st(v)$. Зокрема, має місце така комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc} S'(f) & \xrightarrow{\rho} & G & \hookrightarrow & \text{Aut}(\Gamma_f) \\ pr \downarrow & \nearrow \rho_0 & \downarrow r & & \\ \pi_0 S'(f) & \xrightarrow{\widehat{\rho}_0} & G_v^{loc} & \hookrightarrow & \text{Aut}(st(v)), \end{array} \quad (2.5)$$

де p — проекція, r — відображення обмеження на $st(v)$, ρ_0 є таким, що $\rho = \rho_0 \circ pr$ і $\widehat{\rho} = r \circ \rho$.

Для функцій $f \in \mathcal{F}(T^2)$ на 2-торі T^2 має місце така лема.

Лема 2.4 (Утверждение 1, [11]). *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ — гладка функція така, що її КР-граф $\Gamma(f)$ є деревом. Тоді існує єдина вершина v графу $\Gamma(f)$ така, що кожна компонента доповнення $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є відкритим 2-диском.*

Вершина v з лема 2.4 і критична компонента зв'язності $V = p_f^{-1}(v)$ рівня $f^{-1}(\phi(v))$, що відповідає v , будемо називати *спеціальними*.

Головним результатом роботи є така теорема.

Теорема 2.5. *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ — гладка функція така, що Γ_f є деревом, і v — спеціальна вершина Γ_f . Тоді*

- (1) $G_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $m, n \in \mathbb{N}$;
- (2) існують замкнені 2-диски $D_1, D_2, \dots, D_r \subset T^2$ такі, що $f|_{D_i} \in \mathcal{F}(D_i)$, $i = 1, \dots, r$, і має місце ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=0}^r \pi_0 S'(f|_{D_i}, \partial D_i) \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}} \mathbb{Z}^2.$$

Зокрема, у випадку коли $G_v^{loc} = 1$, ми маємо ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2,$$

що дає теорему 2 [11].

3. ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕННЯ (1) ТЕОРЕМИ 2.5

Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ — гладка функція така, що її КР-граф є деревом, v — спеціальна вершина графу Γ_f і $V = p_f^{-1}(v)$ — відповідна спеціальна критична компонента. Потрібно довести, що $G_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $m, n \in \mathbb{N}$.

Відмітимо, що з леми 2.4 випливає, що V задає кліткове розбиття T^2 : 0- та 1-клітини цього розбиття — це відповідно вершини (тобто критичні точки f) та ребра V , а 2-клітини — це компоненти доповнення $T^2 \setminus V$.

З [1, теорема 7.1] випливає, що для кожного $h \in \ker(r \circ \rho)$ виконані такі умови:

- (1) $h(e) = e$ для будь-якої клітини e ,
- (2) відображення $h : e \mapsto h(e)$ зберігає орієнтацію клітин e розмірності $\dim e \geq 1$.

Нехай $h \in \mathcal{S}'(f)$ — дифеоморфізм. Згідно [2, твердження 5.4], або всі клітини є h -інваріантними, або число інваріантних клітин автоморфізму h дорівнює числу Лефшеця $L(h)$. Оскільки h — ізотопний тотожному відображенню дифеоморфізм тора T^2 , то $L(h) = \chi(T^2) = 0$. Таким чином, «комбінаторна дія» h на множині клітин визначається його дією на якій-небудь фіксованій 2-клітині, тобто дією $\rho(h)$ на ребрі $\text{st}(v)$.

Тому з результатів роботи [12] слідує, що існує переріз

$$s : G_v^{loc} \rightarrow \mathcal{S}'(f) \tag{3.6}$$

відображення $r \circ \rho$ такий, що $s(G_v^{loc})$ діє на T^2 вільно. Зокрема фактор-відображення $q : T^2 \rightarrow T^2/G_v^{loc}$ є накриттям, а отже T^2/G_v^{loc} є або тором, або пляшкою Клейна. Але так як G_v^{loc} -дія на T^2 є дією групи дифеоморфізмів, що зберігають орієнтацію,

то фактор-простір T^2/G_v^{loc} є тором. Зокрема, ми маємо таку коротку точну послідовність:

$$1 \longrightarrow \pi_1 T^2 \xrightarrow{q} \pi_1 T^2/G_v^{loc} \longrightarrow G_v^{loc} \longrightarrow 1.$$

Так як q — мономорфізм, то твердження (1) теореми 2.5 випливає з такої леми:

Лема 3.1. напр. [13, Розділ Е, с. 31] *Нехай A та B — вільні абелеві групи рангу 2, і $q : A \rightarrow B$ — вкладення. Тоді існують $L, M \in A$ та $X, Y \in B$ такі, що $A = \langle L, M \rangle$, $B = \langle X, Y \rangle$ і*

$$q(L) = nX, \quad q(M) = mY$$

для деяких $n, m \in \mathbb{N}$, зокрема $B/A \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$.

4. ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕННЯ (2) ТЕОРЕМИ 2.5

Крок 1. Вибір спеціальних твірних в $\pi_1 T^2$ та $\pi_1 T^2/G_v^{loc}$. Зафіксуємо точку $y \in T^2$ і нехай $z = q(y) \in T^2/G_v^{loc}$. Тоді ми маємо таку комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(T^2, y) & \xrightarrow{q} & \pi_1(T^2/G_v^{loc}, z) & \xrightarrow{\partial} & G_v^{loc} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow 1 \end{array}$$

де $q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ та $\partial : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ визначаються за формулами

$$q(\lambda, \mu) = (n\lambda, mn\mu), \quad \partial(x, y) = (x \bmod n, y \bmod mn).$$

Нехай $\hat{X}, \hat{Y} : T^2/G_v^{loc} \times [0, 1] \rightarrow T^2/G_v^{loc}$ — ізоtopії, такі, що

$$\hat{X}_0 = \hat{X}_1 = \hat{Y}_0 = \hat{Y}_1 = \text{id}_{T^2/G_v^{loc}},$$

$$\hat{X}_s \circ \hat{Y}_t = \hat{Y}_t \circ \hat{X}_s,$$

для всіх $s, t \in [0, 1]$, причому петлі $\hat{X}_z, \hat{Y}_z : I \rightarrow T^2/G_v^{loc}$, визначені за формулами $\hat{X}_z(t) = \hat{X}(z, t)$ та $\hat{Y}_z(t) = \hat{Y}(z, t)$, представляють елементи

$$[\hat{X}_z] = (1, 0), \quad [\hat{Y}_z] = (0, 1) \in \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2/G_v^{loc}, z).$$

Розширимо \hat{X} та \hat{Y} до відображень

$$X, Y : T^2/G_v^{loc} \times \mathbb{R} \rightarrow T^2/G_v^{loc}$$

за формулами:

$$X(x, t) = \hat{X}(x, t \bmod 1), \quad Y(x, t) = \hat{Y}(x, t \bmod 1).$$

Нехай $L, M : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ — єдині підняття відповідно X та Y відносно q такі, що L та M комутують і $L_0 = M_0 = \text{id}_{T^2}$. Тобто

$$X_t \circ q = q \circ L_t, \quad Y_t \circ q = q \circ M_t.$$

Нехай $s : G_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow S'(f)$ — переріз $r \circ \rho$, див. (3.6). Тоді $L_t \circ M_{t'} = M_{t'} \circ L_t$ для всіх $t, t' \in \mathbb{R}$ і

$$L_k = s(k \bmod n, 0), \quad M_k = s(0, k \bmod mn),$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Зокрема,

$$L_{kn} = M_{kmn} = \text{id}_{T^2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а петлі

$$L_z : [0, n] \rightarrow T^2, \quad M_z : [0, mn] \rightarrow T^2$$

представляють елементи

$$[L_z] = (1, 0), \quad [M_z] = (0, 1) \in \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2, y).$$

З того, що G_v^{loc} діє вільно на T^2 впливає, що компоненти зв'язності $T^2 \setminus \bar{N}$ можна занумерувати трьома індексами D_{ijk} такими, що $i = 1, \dots, r$, $j = 0, \dots, n-1$, $k = 0, \dots, nm-1$. Причому, якщо $\gamma = (a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = G_v^{loc}$, то

$$\gamma(D_{ijk}) = D_{i \ j+a \ k+b},$$

де другий індекс береться $\bmod n$, а третій — $\bmod nm$.

Покладемо $\mathcal{S}_{ijk} = \pi_0 S'(f|_{D_{ijk}}, \partial D_{ijk})$ і

$$\mathcal{S} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{nm-1} \mathcal{S}_{ijk}.$$

Визначимо гомоморфізм

$$\tau : \mathcal{S} \rightarrow \text{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00})$$

за такою формулою: якщо $\alpha = (h_{ijk}) \in \mathcal{S}$, то

$$\tau(\alpha) : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}$$

задається формулою:

$$\tau(\alpha)(a, b) = \left(M_k^{-1} \circ L_j^{-1} \circ h_{ijk} \circ L_j \circ M_k, \quad i = 1, \dots, r \right), \quad (4.7)$$

для $(a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \equiv G_v^{loc}$. Легко бачити, що τ є ізоморфізмом.

Крок 2. Епіморфізм $\psi : \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \rightarrow \pi_1 T^2 / G_v^{loc}$. Нехай

$$h : I \rightarrow \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$$

— петля в $\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$ така, що $h(0) = h(1) = \text{id}_{T^2}$, тобто h є ізотопією $h : T^2 \times I \rightarrow T^2$ тора T^2 . Нехай $x \in T^2$ — точка. Тоді $h_x : \{x\} \times I \rightarrow T^2$ — петля в T^2 з початком в x . Визначимо відображення $\ell : \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \rightarrow \pi_1 T^2$ за формулою:

$$\ell([h]) = [h_x] \in \pi_1 T^2.$$

Відомо, що відображення ℓ є ізоморфізмом, див. [14–16].

Лема 4.1. *Існує епіморфізм $\psi : \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \rightarrow \pi_1 T^2 / G_v^{loc}$ такий, що наступна діаграма є комутативною*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) & \longrightarrow & \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1 \\ & & \ell \downarrow \cong & & \downarrow \psi & & \downarrow \widehat{\rho}_0 \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1 T^2 & \xrightarrow{q} & \pi_1 T^2 / G_v^{loc} & \longrightarrow & G_v^{loc} \longrightarrow 1 \end{array} \quad (4.8)$$

а її рядки — точними.

Доведення. Зафіксуємо довільну вершину $z \in V$ і визначимо відображення:

$$\psi_0 : \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) \rightarrow T^2/G_v^{\text{loc}}, \quad \psi_0(h) = q(h(z)),$$

для $h \in \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2)$, де $q : T^2 \rightarrow T^2/G_v^{\text{loc}}$ — накриваюче відображення індуковане вільною дією G_v^{loc} на T^2 . Очевидно, що ψ_0 є неперервним. Оскільки G_v^{loc} -дія та $\mathcal{S}'(f)$ -дія збігаються на вершинах V , то $\psi_0(h)$ належить до G_v^{loc} -орбіти точки z для $h \in \mathcal{S}'(f)$. Тоді відображення ψ_0 індукує відображення трійок

$$\psi_0 : (\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \text{id}) \rightarrow (T^2/G_v^{\text{loc}}, z', z'), \quad \psi(\widehat{h}) = q(\widehat{h}(z)).$$

Зокрема, ψ_0 індукує гомоморфізм

$$\psi : \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \text{id}) \rightarrow \pi_1(T^2/G_v^{\text{loc}}, z', z').$$

Оскільки рядки діаграми (4.8) є точними послідовностями, відображення ℓ є ізоморфізмом, відображення $\widehat{\rho}_0$ є епіморфізмом, то, на підставі 5-леми, відображення ψ — епіморфізм. \square

Крок 3. Ядро ψ . Нехай $f(V) = c$, $\epsilon > 0$ і N — зв'язна компонента $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$, яка містить V . Назвемо N — *f -регулярним околom V* . Нагадаємо, що

$$\mathcal{S}'(f, N) := \{h \in \mathcal{S}'(f) \mid h = \text{id}_N\}.$$

Наступна лема описує ядро відображення ψ .

Лема 4.2. *Існують ізоморфізми між такими п'ятьма групами:*

$$\ker \psi \xrightarrow{\zeta} \ker \widehat{\rho}_0 \xleftarrow{\iota} \pi_0 \mathcal{S}'(f, N) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S} \xrightarrow{\tau} \text{Map}(G_v^{\text{loc}}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}).$$

Доведення. 1) Побудуємо ізоморфізм $\zeta : \ker \psi \rightarrow \ker \widehat{\rho}_0$. Розглянемо діаграму, у якій рядки і стовпчики є точними:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & 1 \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow \\
 & & & \pi_1 \mathcal{D}_{\text{id}}(T^2) & \xrightarrow[\cong]{\ell} & \pi_1 T^2 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \longrightarrow & \ker \psi & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1 T^2 / G_v^{\text{loc}} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \zeta \cong & & \downarrow \partial \circ \lambda_1^{-1} & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \ker \widehat{\rho}_0 & \longrightarrow & \pi_0 \mathcal{S}'(f) & \xrightarrow{\widehat{\rho}_0} & G_v^{\text{loc}} \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}
 \tag{4.9}$$

Оскільки відображення ℓ — ізоморфізм, то, на підставі 3×3 -леми, [17, Chapter II, Lemma 5.1], гомоморфізм $\zeta = \partial \circ \lambda_1^{-1}|_{\ker \psi}$ є ізоморфізмом.

2) Відмітимо, що має місце ізоморфізм

$$\sigma : \mathcal{S}'(f, N) \cong \prod_{i,j,k} \mathcal{S}'(f|_{D_{ijk}}, \partial D_{ijk}), \quad \sigma(h) = (h|_{D_{ijk}})_{i,j,k},$$

який індукує ізоморфізм

$$\sigma : \pi_0 \mathcal{S}'(f, N) \cong \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{nm-1} \mathcal{S}_{ijk} = \mathcal{S}.$$

3) Досить показати, що вкладення $\iota : \mathcal{S}'(f, N) \rightarrow \ker(r \circ \rho)$ є гомотопічною еквівалентністю. Тоді воно індукуватиме ізоморфізм

$$\iota : \pi_0 \mathcal{S}'(f, N) \rightarrow \pi_0 \ker(r \circ \rho) = \ker \widehat{\rho}_0.$$

Покажемо, що існує ізотопія $H : \ker r \circ \rho \times I \rightarrow \ker(r \circ \rho)$ така, що виконуються наступні умови:

- (i) $H_0 = \text{id}$,
- (ii) $H_t(\mathcal{S}'(f, N)) \subset \mathcal{S}'(f, N)$ для всіх $t \in I$,
- (iii) $H_1(\ker(r \circ \rho)) \subset \mathcal{S}'(f, N)$.

Нехай F — гамільтонове векторне поле функції $f \in \mathcal{F}(T^2)$, $\mathbf{F} : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ — потік поля F , і N, N' — f -регулярні околи V такі, що $\bar{N} \subset \text{Int}N'$. Для кожної функції $\gamma : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ визначимо відображення $\mathbf{F}_\gamma : T^2 \rightarrow T^2$ за такою формулою:

$$\mathbf{F}_\gamma(x) = \mathbf{F}(x, \gamma(x)).$$

З [2, Claim 1], випливає, що для кожного $h \in \ker(r \circ \rho)$ існує єдина гладка функція $\beta_h \in C^\infty(N', \mathbb{R})$ така, що $h = \mathbf{F}_{\beta_h}$ на N' , тобто

$$h(x) = \mathbf{F}(x, \beta_h(x)), \quad x \in N',$$

причому відображення

$$\hat{s} : \ker(r \circ \rho) \rightarrow C^\infty(N', \mathbb{R}), \quad \hat{s}(h) = \beta_h.$$

є неперервним відносно відповідних C^∞ -топологій. Більш того, якщо h — нерухомий на N , то $\beta_h = 0$ на N .

Продовжимо функцію β_h до гладкої функції $\alpha_h \in C^\infty(T^2, \mathbb{R})$ такої, що $\alpha_h|_N = \beta_h$ і $\alpha_h = 0$ на $T^2 \setminus N'$ наступним чином. Нехай $\varepsilon : T^2 \rightarrow [0, 1]$ — гладка функція на T^2 така, що

- (1) ε є постійною на орбітах \mathbf{F} ;
- (2) $\varepsilon = 1$ на N ;
- (3) $\varepsilon = 0$ на $T^2 \setminus N'$.

Покладемо: $\alpha_h = \varepsilon\beta_h$ на N' і $\alpha_h = 0$ на $T^2 \setminus N'$. Очевидно, що тоді відповідність $h \mapsto \alpha_h$ є неперервним відображенням $\alpha : \ker(r \circ \rho) \rightarrow C^\infty(T^2, \mathbb{R})$. Більш того, з умови (1) на ε випливає, що відображення $\mathbf{F}_{t\alpha_h} : T^2 \rightarrow T^2$, визначене за формулою $\mathbf{F}_{t\alpha_h}(x) = \mathbf{F}(x, t\alpha_h)$, є дифеоморфізмом для всіх $t \in I$, див. [1, Claim 4.14.1]. А з умов (2) та (3) слідує, що

$$\mathbf{F}(x, \alpha_h(x)) = \begin{cases} h(x), & x \in N, \\ x, & x \in T^2 \setminus N'. \end{cases}$$

Визначимо ізоморфізмію $H : \ker(r \circ \rho) \times I \rightarrow \ker(r \circ \rho)$ за формулою:

$$H(h, t) = h \circ \mathbf{F}_{t\alpha_h}^{-1}$$

і покажемо, що H задовольняє умовам (i)-(iii).

(i) $H_0(h) = h \circ \mathbf{F}_0^{-1} = h$, тобто $H_0 = \text{id}(\ker(r \circ \rho))$.

(ii) Припустимо, що $h \in \mathcal{S}'(f, N)$. Тоді $\beta_h = t\alpha_h = 0$ на N , а отже $\mathbf{F}_{t\alpha_h}|_N = \text{id}_N$ для всіх $t \in I$. Зокрема,

$$H_t(h)|_N = h|_N = \text{id}_N.$$

(iii) $H_1(h)|_N = h \circ \mathbf{F}_{\alpha_h}^{-1}|_N = h \circ h^{-1}|_N = \text{id}_N$.

Лемі 4.2 доведено. \square

Крок 4. Визначимо відображення

$$\xi : \text{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) \times \pi_1(T^2/G_v^{loc}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \text{id}_{T^2}).$$

за такою формулою. Нехай $\alpha : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \cong G_v^{loc} \rightarrow \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}$ — довільне відображення. Для кожної трійки (i, j, k) виберемо $h_{ijk} \in \mathcal{S}'(f|_{D_{i00}}, \partial D_{i00})$ такий, щоб

$$\alpha(i, j) = ([h_{1jk}], [h_{2jk}], \dots, [h_{rjk}])$$

і нехай $h_{ijk}^t : D_{i00} \rightarrow D_{i00}$, $t \in [0, 1]$, — довільна ізоморфізмія між $h_{ijk}^0 = \text{id}_{D_{i00}}$ та $h_{ijk}^1 = h_{ijk}$. Визначимо відображення

$$h : (I, 0, 1) \rightarrow (\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \text{id}_{T^2})$$

за формулою:

$$h(t)(x) = \begin{cases} M_{k+at} \circ L_{j+bt} \circ h_{ijk}^t \circ L_j^{-1} \circ M_k^{-1}(x), & x \in D_{ijk}, \\ M_{at} L_{bt}(x), & x \in N. \end{cases}$$

Легко бачити, що h визначено коректно. Покладемо

$$\xi(\alpha, (a, b)) = [h] \in \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \text{id}_{T^2}).$$

Також не важко перевірити, що ξ є гомоморфізмом. Більш того, з леми 4.2 та формули (4.7) для τ випливає, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc}
 1 & & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) & \xrightarrow[\cong]{(\tau \circ \sigma \circ \iota^{-1} \circ \zeta)^{-1}} & \ker \psi \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{i00}) \times \pi_1(T^2/G_v^{loc}) & \xrightarrow{\xi} & \pi_1(\mathcal{D}_{\text{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \\
 \downarrow pr & & \downarrow \psi \\
 \pi_1(T^2/G_v^{loc}) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \pi_1(T^2/G_v^{loc}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 & & 1
 \end{array}$$

Тому за 5-лемою ξ є ізоморфізмом. Теорему 2.5 доведено.

Автор щиро вдячний С. І. Максименку за увагу та обговорення складних питань, що виникали під час роботи.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Maksymenko Sergiy*. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2006. — **29**, 3. — P. 241–285.
- [2] *Maksymenko Sergiy*. Functions with isolated singularities on surfaces // *Geometry and topology of functions on manifolds. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2010. — **7**, 4. — P. 7–66.
- [3] *Максименко С. И.* Гомотопические свойства правых стабилизаторов и орбит гладких функций на поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 2012. — **64**, 9. — С. 1186–1203.
- [4] *Hatcher Allen*. Algebraic topology. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

- [5] *Maksymenko Sergiy*. Functions on surfaces and incompressible subsurfaces // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2010. — **16**, 2. — P. 167–182.
- [6] *Maksymenko Sergiy*. Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms // *arXiv:1311.3347*.
- [7] *Maksymenko Sergiy*. Finiteness of homotopy types of right orbits of Morse functions on surfaces // *arXiv:1409.4319*.
- [8] *Maksymenko Sergiy*. Structure of fundamental groups of orbits of smooth functions on surfaces // *arXiv:1408.2612*.
- [9] *Maksymenko Sergiy, Feshchenko Bogdan*. Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types // *Matematychni Studii*. — 2015. — **44**, 1. — P. 67–84.
- [10] *Maksymenko Sergiy, Feshchenko Bohdan*. Smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2015. — **21**, 1. — P. 22–40.
- [11] *Максименко С. И., Фещенко Б. Г.* Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе // *Укр. мат. журн.* — 2014. — **66**, 9. — С. 1205–1212.
- [12] *Feshchenko Bohdan*. Free actions of finite groups and smooth function on surfaces // *to appear*.
- [13] *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1973. — P. 519.
- [14] *Earle C. J., Eells J.* A fibre bundle description of Teichmüller theory // *J. Differential Geometry*. — 1969. — **3**. — P. 19–43.
- [15] *Earle C. J., Schatz A.* Teichmüller theory for surfaces with boundary // *J. Differential Geometry*. — 1970. — **4**. — P. 169–185.
- [16] *Gramain André*. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. — 1973. — **6**. — P. 53–66.
- [17] *Mac Lane Saunders*. Homology. Classics in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, 1995. — P. x+422. — ISBN: 3-540-58662-8. — Reprint of the 1975 edition.

*О. М. Клименко, І. О. Блажко,
Д. О. Кублицький, Д. О. Скидан, С. М. Ящук*

*Національний технічний університет України «КПІ», Київ
e.n.klimenko@gmail.com, iob.veritas@gmail.com,
deniskublitskiy@gmail.com, skidan13@gmail.com,
serg.yaschuk@gmail.com*

Програма для зведення матриці до нормальної форми Арнольда відносно гладких перетворень подібності

V. I. Arnold (1971) constructed a miniversal deformation of each Jordan matrix J ; that is, a simple normal form to which all matrices A close to J can be reduced by similarity transformations that smoothly depend on the entries of A . We describe a software for reducing a matrix in an neighborhood of J to Arnold's normal form by smooth similarity transformations and calculating the transforming matrix.

Нехай $J = J_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_t}$ — жорданова матриця, в якій

$$J_{\lambda_i} := J_{m_{i1}}(\lambda_i) \oplus \dots \oplus J_{m_{ir_i}}(\lambda_i), \quad m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{ir_i}, \quad (1)$$

$J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ — клітка Жордана розміру $m_{ij} \times m_{ij}$ з власним числом λ_i та одиницями над діагоналлю, $\lambda_i \neq \lambda_j$ якщо $i \neq j$.

В. І. Арнольд [1] довів, що всі матриці $J + X$, що є достатньо близькими до J , можуть бути одночасно зведені деякими перетвореннями

$$J + X \mapsto \mathcal{S}(X)^{-1}(J + X)\mathcal{S}(X), \quad \begin{array}{l} \mathcal{S}(X) \text{ аналітична} \\ \text{в } 0 \text{ та } \mathcal{S}(0) = I, \end{array} \quad (2)$$

© О. М. Клименко, І. О. Блажко,
Д. О. Кублицький, Д. О. Скидан, С. М. Ящук, 2015

до форми $J + \mathcal{D} :=$

$$\bigoplus_{i=1}^t \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) + 0^\downarrow & 0^\downarrow & \dots & 0^\downarrow \\ 0^\leftarrow & J_{m_{i2}}(\lambda_i) + 0^\downarrow & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0^\downarrow \\ 0^\leftarrow & \dots & 0^\leftarrow & J_{m_{ir_i}}(\lambda_i) + 0^\downarrow \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$0^\leftarrow := \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad 0^\downarrow := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{bmatrix},$$

де зірочки замінюються комплексними числами, що залежать аналітично від елементів X . Кількість зірочок — мінімальна, яка може бути отримана перетвореннями форми (2), вона дорівнює корозмірності класу подібності матриці J .

Матриця (3) з незалежними параметрами замість зірочок називається *мініверсальною деформацією* матриці J .

О. М. Клименко та В. В. Сергейчук [2] побудували алгоритм, який зводить сім'ю матриць до нормальної форми Арнольда відносно подібності і будує перетворюючу матрицю $\mathcal{S}(X)$. Нами було реалізовано цей алгоритм за допомогою мови програмування C++.

Наша комп'ютерна програма складається з двох підпрограм. В першій підпрограмі ми зводимо задачу до випадку матриці J з єдиним власним числом і в другій підпрограмі розглядаємо цей випадок. Ми опишемо тільки першу підпрограму, бо вона реалізує алгоритм, який відрізняється від алгоритму з [2].

1) Вхідними даними підпрограми є:

- n — натуральне число;
- $J = J_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_t}$ ($t \geq 2$, див. (1)) і X — матриці розміру $n \times n$;

- ε — мале дійсне число для контролю значень матриці X , елементи якої не можуть перевищувати ε ;
 - μ — мале дійсне число, що задає точність обчислень.
- 2) Перевіряємо, чи дійсно елементи матриці X не перевищують ε .
- 3) Зображуємо матрицю $J + X$ у вигляді

$$J + X = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ C_2 & A_2 \end{bmatrix},$$

де $A_1 := J_{\lambda_1} + X_1$ (див. (1)).

- 4) Розв'язуємо рівняння Сильвестра $A_1 Z + Z A_2 = C_1$ за допомогою MatLab. Нехай його рішенням буде Z_1 . Будуємо матрицю

$$S_1 = I_n + \begin{bmatrix} 0 & Z_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 5) Знаходимо матрицю

$$J + X_1 := S_1^{-1}(J + X)S_1 = \begin{bmatrix} A'_1 & C'_1 \\ C_2 & A'_2 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо, чи будуть елементи матриці C'_1 меншими за задане μ . Якщо ні, то проводимо ці ітерації до тих пір, поки не досягнемо заданої точності μ . В результаті отримаємо

$$J + X' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

- 6) Розв'язуємо рівняння Сильвестра $B_2 Z + Z B_1 = C_2$. Нехай його рішенням буде Z_2 . Будуємо матрицю

$$S_2 = I_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 7) Знаходимо матрицю

$$J + X'_1 := S_2^{-1}(J + X')S_2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ C'_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Перевіряємо, чи будуть елементи матриці C'_2 меншими за задане μ . Якщо ні, то проводимо ці ітерації до тих пір поки не досягнемо заданої точності μ . В результаті отримаємо

$$J + X'' = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

8) Якщо $t \geq 3$, то таким же чином приводимо B_2 і так далі, поки не отримаємо блочно-діагональну матрицю

$$J + Y = (J_{\lambda_1} + Y_1) \oplus \cdots \oplus (J_{\lambda_t} + Y_t).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // *Успехи матем. наук.* — 1971. — **26**, 2 (158). — С. 101–114.
- [2] Klímenko L., Sergeichuk V. V. An informal introduction to perturbations of matrices determined up to similarity or congruence // *São Paulo J. Math. Sci.* — 2014. — **8**. — P. 1–22.

Наукове видання

Збірник праць

Інституту математики НАН України

Т. 12 №6

**Топологія відображень
маловимірних многовидів**

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
С. І. Максименко, Є. О. Полулях, Б. Г. Феценко

Редактор Н. М. Пазяк

Підп. до друку 15.12.2015. Формат 60 × 84/16. Папір офс.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 14.0. Ум. друк. арк. 13.0. Зам. №82.
Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3