

Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем

*До 100-річчя від дня народження
Степана Федоровича ФЕЩЕНКА*

ПРАЦІ Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Том 47

Головний редактор *А.М. Самойленко*

Редакційна рада:

*Ю.М. Березанський, О.М. Боголюбов, М.Л. Горбачук,
В.С. Королюк, В.М. Кошляков, І.О. Луковський,
В.Л. Макаров, Ю.О. Митропольський, А.Г. Нікітін,
Д.Я. Петрина, М.І. Портенко, А.В. Ройтер, А.В. Скороход,
О.І. Степанець, П.М. Тамразов, О.М. Шарковський*

Національна академія наук України
Інститут математики

Проблеми динаміки
та стійкості
багатовимірних систем

Праці Інституту математики НАН України. Т. 47: Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем / Відп. ред.: І.О. Луковський. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — 320 с.

Збірник присвячено 100-річчю від дня народження відомого математика і механіка, доктора фіз.-мат. наук, професора Степана Федоровича Феценка (1903 – 1981). Відкриває книгу невелика меморіальна частина з основними віхами його життєвого шляху, списком наукових праць і результатами підготовки наукових кадрів. Наукову частину збірника складають оригінальні статті, присвячені дослідженню динаміки обмеженого об'єму рідини, твердих та пружних тіл, математичній теорії стійкості руху детермінованих і стохастичних систем, керуванню роботами-маніпуляторами.

Розраховано на фахівців в галузі математичних проблем механіки, теорії динамічних систем та автоматичного керування.

Сборник посвящен 100-летию со дня рождения известного математика и механика, доктора физ.-мат. наук, профессора Степана Федоровича Феценко (1903 – 1981). Открывает книгу небольшая мемориальная часть, в которой описан его жизненный путь, список научных трудов и результаты подготовки научных кадров. Научную часть сборника составляют оригинальные статьи, посвященные исследованию динамики ограниченного объема жидкости, твердых и упругих тел, математической теории устойчивости движения детерминированных и стохастических систем, управлению роботами-манипуляторами.

Рассчитано на специалистов в области математических проблем механики, теории динамических систем и автоматического управления.

Видавнича група ювілейного збірника: академік НАН України І.О. Луковський (відп. ред.), доктор фіз.-мат. наук М.Я. Барняк, доктор фіз.-мат. наук Д.Г. Коренівський (відп. за вип.), доктор фіз.-мат. наук О.Г. Мазко, кандидат фіз.-мат. наук М.О. Пустоvoyтов, доктор фіз.-мат. наук В.А. Троценко.

Рецензент: доктор техн. наук Ю.А. Карпачов

*Затверджено до друку вченою радою
Інституту математики НАН України
Протокол № 12 від 18.11.2003*

ISBN 966–02–2571–7

ISBN 966–02–3122–9

© Інститут математики НАН України, 2003

УДК 534.1:629.764.7

Дослідження вимушених нелінійних коливань рідини у кругових циліндричних ємностях на основі семимодової моделі третього порядку *

І.О. Луковський, О.В. Солодун

Інститут математики НАН України, Київ

A nonlinear oscillation of an ideal incompressible fluid in partially filled vertical cylinder container are studied. An approximate periodical solution for seven-modes nonlinear differential system describes nonlinear oscillations in cylinder container in the plane of action of perturbation force are built. A numerical realization of the method and analysis of hydrodynamical interaction of the fluid and container is made in domain of main resonance.

1. Вступ. В даній роботі досліджуються нелінійні ефекти, що виникають при взаємодії рідини із жорстким циліндричним баком, що здійснює в часі гармонічні коливання. Найбільш цікавим з практичної точки зору є випадок коливання рідини в околі резонансу найнижчої частоти власних коливань вільної поверхні, де здебільшого проявляються істотно нелінійні ефекти руху рідини.

Лінійні постановки задач динаміки твердих тіл з рідиною [8, 10, 11, 14, 16, 17] тощо, як відомо, призводять до цілого ряду парадоксів, яких можна уникнути при дослідженні відповідних проблем тільки у нелінійній постановці. Це підтверджено низкою експериментальних досліджень [8, 9, 15, 16, 17, 27], а також багатьма теоретичними розробками [3, 10, 12, 13, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26] тощо.

Широкого розповсюдження останнім часом набув модальний підхід, що розвивається на засадах варіаційних принципів механіки

* Робота виконувалася при частковій підтримці НДР № 0102U000917 та DFG.

[1, 3, 4, 5, 23] тощо. Він полягає в тому, що початкова задача механіки, сформульована в рівняннях у частинних похідних, зводиться до систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно залежних від часу параметрів, що характеризують еволюцію вільної поверхні рідини. Цей підхід має цілий ряд істотних переваг перед аналогічними методами, побудованими на засадах теорії збурень [2, 4, 10, 12, 21] тощо. Сучасний стан математичних проблем нелінійної теорії коливань рідини в рухомих резервуарах обговорюється в роботі [7].

В даній роботі наводяться математична модель та результати теоретичних досліджень вимушених коливань рідини в прямому круговому циліндрі при семимодовій апроксимації вільної поверхні рідини за припущень теорії третього порядку малості. Метою даної роботи є вивчення впливу більш високих гармонік (за числом хвиль в круговому напрямку) на кінематичні та динамічні характеристики руху механічної системи як з кількісного, так і з якісного боку. Результати досліджень порівнюються з аналогічними результатами, одержаними раніше на основі п'ятимодової моделі [4, 13, 20] та експериментальними даними роботи [15].

2. Математична постановка задачі.

Будемо розглядати поступальний рух абсолютно жорсткого кругового циліндра, що містить в собі обмежений об'єм ідеальної нестисливої рідини густини ρ . Вважаємо далі, що стінки бака є абсолютно жорсткими. Цей рух розглядається у зв'язаній з баком циліндричній системі координат x, ξ, η , причому початок координат вибираємо на незбуреній вільній поверхні Σ_0 . Вісь Ox направимо по осі циліндра у напрямку, протилежному вектору прискорення сил земного тяжіння $\vec{g}$.

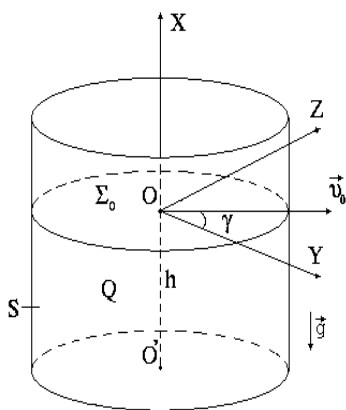


Рис.: 1. Ескіз моделі.

Обмежимося розглядом безвихоривих рухів рідини. При цьому розподіл її швидкостей можна представити у вигляді потенціальної функції $\Phi(x, \xi, \eta, t)$ як $\vec{v} = \nabla \Phi(x, \xi, \eta, t)$. Потенціал швидкостей пови-

нен бути розв'язком такої нелінійної крайової задачі з вільною границею, яка пов'язує $\Phi(x, \xi, \eta, t)$ і миттєве положення вільної поверхні, форму якої будемо задавати рівнянням $\zeta(x, \xi, \eta, t) = 0$:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \vec{r} \in Q(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{r} \in S(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\zeta_t}{\sqrt{(\nabla \zeta)^2}}, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + U = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \quad (4)$$

де $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області Q , зайнятою рідиною; S та Σ — тверда стінка та збурена вільна поверхня рідини відповідно; $\vec{r}$ — радіус-вектор точок об'єму рідини Q у зв'язаній системі координат; $\vec{v}_0$ — вектор поступального руху циліндра; U — потенціал сил земного тяжіння.

Розподіл тиску в об'ємі рідини визначається за допомогою інтегралу Лагранжа–Коші, записаного у зв'язаній з рухомим циліндром системі координат $Ox\xi\eta$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + gx + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \quad (5)$$

де p_0 — тиск газу над вільною поверхнею рідини, при умові збереження об'єму рідини $\int_{Q(t)} dQ = 0$.

Припускаємо, що тиск p на Σ рівний $p_0 = \text{const}$. Умова збереження об'єму являє собою умову розв'язуваності крайової задачі Неймана (1)–(3).

Еволюційна задача з вільною границею (1)–(4) вимагає постановки початкових умов Коші, пов'язаних із заданням профілю вільної поверхні $\Sigma(t_0)$ та розподілу швидкостей на ньому в початковий момент часу $t = t_0$; $\zeta(x, \xi, \eta, t_0) = \zeta_0(x, \xi, \eta)$, $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, \xi, \eta)$, де $\zeta_0(x, \xi, \eta)$ та $\Phi_0(x, \xi, \eta)$ є відомі функції.

3. Модальна система. В роботах [4, 22, 23] показано, що узагальнені розв'язки крайової задачі (1)–(4) надають стаціонарного значен-

ня функціоналу $W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, тобто $\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$,

$$L = \int_{Q(t)} p dQ = -\rho \int_{t_1 Q(t)}^{t_2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + g x \right] dQ. \quad (6)$$

Використаємо прямий метод [3, 23] розв'язування сформульованої варіаційної задачі для визначення вільної поверхні та потенціалу швидкостей в даному об'ємі. Він полягає в тому, що форма вільної поверхні (за припущень розв'язуваності відносно однієї змінної) $x = f(\xi, \eta, t)$ та потенціал швидкостей $\Phi(x, \xi, \eta, t)$, представляється у вигляді таких розкладів в узагальнені ряди Фур'є:

$$f(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(\xi, \eta), \quad (7)$$

$$\Phi(x, \xi, \eta, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(t) \varphi_j(x, \xi, \eta), \quad (8)$$

де $f_i(\xi, \eta)$ — повна, ортогональна разом з константою на Σ_0 в гільбертовому просторі $L_2(\Sigma_0)$ система функцій; $\beta_i(t)$ — узагальнені коефіцієнти Фур'є, що залежать від часу як від параметру і мають зміст узагальнених координат задачі (вони характеризують відхилення вільної поверхні рідини від незбуреного положення); $R_j(t)$ — параметри, що характеризують зміну потенціалу швидкості в часі; $\varphi_j(x, \xi, \eta)$ — система гармонічних функцій в області $Q(t)$, що задовольняють крайову умову неперетікання на змочуваній поверхні $S(t)$. Зображення шуканих функцій $f(\xi, \eta, t)$ та $\varphi(x, \xi, \eta, t)$ ґрунтується на розв'язках гідродинамічної проблеми в лінійній постановці, які в задачі для кільцевого відсіку, утвореного двома концентричними циліндричними поверхнями, мають вигляд

$$f_{mp}(\xi, \eta) = Y_m(k_{mp} \xi), \quad (9)$$

$$Y_m(k_{mp} \xi) = \frac{J_m(k_{mp} \xi) N'_m(\zeta_{mp}) - N_m(k_{mp} \xi) J'_m(\zeta_{mp})}{J_m(\zeta_{mp}) N'_m(\zeta_{mp}) - N_m(\zeta_{mp}) J'_m(\zeta_{mp})}, \quad (10)$$

$$\varphi_{mp}(x, \xi, \eta) = \frac{ch k_{mp}(x+h)}{ch k_{mp} h} Y_m(k_{mp} \xi), \quad (11)$$

$J_m(k_{mp} \xi)$ і $N_m(k_{mp} \xi)$ — функції Беселя і Неймана m -го порядку;
 $\zeta_{mp} = k_{mp} R$ — корені рівняння

$$J'_m(\delta \zeta) N'_m(\zeta) - N'_m(\delta \zeta) J'_m(\zeta) = 0, \quad \delta = R_0/R; \quad (12)$$

h — глибина рідини; R_0 і R — радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндрів відповідно.

Підставимо розклад (8) для потенціалу швидкостей з врахуванням (7) у вираз (6). Інтегруючи по просторових змінних, “функцію Лагранжа” L за вищезгаданим варіаційним принципом представимо у вигляді функції змінних $\beta_i(t)$, $R_j(t)$, $\dot{R}_j(t)$. Для визначення параметрів $\beta_i(t)$ та $R_j(t)$ із $\delta W = 0$ отримаємо наступну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь загального вигляду:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_n} - \frac{\partial L}{\partial R_n} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Практично досяжні результати вдається отримати при врахуванні скінченної кількості параметрів $\beta_i(t)$ та $R_j(t)$, виділяючи серед них ті, які грають в цій проблемі домінуючу роль. Нашою метою є побудова більш повної математичної моделі та вивчення на її основі нелінійних процесів за рахунок утримання більшої кількості узагальнених координат $\beta_i(t)$ у порівнянні з роботами [4, 13, 20]. Аналітичний шлях реалізації наведеного тут методу припускає також введення обмежень на порядок малості цих параметрів. Із всієї множини $\beta_i(t)$, надалі ми обмежимося у (7) врахуванням тільки семи узагальнених координат, які для зручності запису перепозначимо таким чином:

$$\beta_0 = p_0, \quad \beta_1 = r_1, \quad \beta_2 = p_1, \quad \beta_3 = r_2, \quad \beta_4 = p_2, \quad \beta_5 = r_3, \quad \beta_6 = p_3.$$

З огляду на це представлення (7) та (8) набудуть вигляду

$$f(\xi, \eta, t) = p_0(t) Y_0(k_{01} \xi) + \sum_{i=1}^3 \left(p_i(t) \cos i \eta + r_i(t) \sin i \eta \right) Y_i(k_{i1} \xi), \quad (14)$$

$$\Phi(x, \xi, \eta, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + P_0(t) \psi_{01}(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^3 \left(P_j(t) \cos j \eta + R_j(t) \sin j \eta \right) \psi_{j1}(\xi, \eta). \quad (15)$$

За припущень, що $r_1 \approx p_1 \approx \epsilon$, $p_0 \approx r_2 \approx p_2 \approx \epsilon^2$, $r_3 \approx p_3 \approx \epsilon^3$, обмежимося тут розглядом математичної моделі з величинами параметрів до порядку ϵ^3 включно. Це припущення підтверджується в

процесі реалізації даного методу на етапі отримання нелінійної математичної моделі.

4. Вимушені коливання у відсіку під дією гармонічної збурюючої сили. Розглянемо задачу про вимушені коливання рідини в круговому циліндрі, що здійснює гармонічні в часі рухи в напрямку осі Oz за законом $u(t) = H \cos \omega t$. В залежності від конкретних значень амплітуди H і кругової частоти ω вільна поверхня рідини приймає найрізноманітніші конфігурації, серед яких є і дуже небезпечні з точки зору силової взаємодії рідини зі стінками баку. Найбільш цікавим у цьому відношенні є окіл основного резонансу, вивченню якого присвячено значну кількість публікацій. Найбільш повно питання про вимушені коливання рідини у прямому круговому циліндрі, включаючи і проблеми з'ясування стійкості ustalених рухів, розглянуті на основі п'ятимодової нелінійної моделі в роботах [4, 13, 20].

Наш подальший розгляд ґрунтується на більш складній семи-модовій нелінійній моделі. Для одержання цієї моделі використаємо варіаційний метод, включивши у розгляд у відповідності до (14) та (15) крім узагальнених координат $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_1(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$ з частотами власних коливань $\sigma_0^2 = \frac{g}{R} th k_{01} h$, $\sigma_1^2 = \frac{g}{R} th k_{11} h$, $\sigma_2^2 = \frac{g}{R} th k_{21} h$, ще і узагальнені координати $r_3(t)$ та $p_3(t)$ з власною частотою $\sigma_3^2 = \frac{g}{R} th k_{31} h$ (тут $k_{mn} = \frac{\zeta_{mn}}{R}$, а $\zeta_{01} = 3.83171$, $\zeta_{11} = 1.84118$, $\zeta_{21} = 3.05424$, $\zeta_{31} = 4.20119$).

Базуючись на методології робіт [4, 5, 6], одержимо математичну модель у вигляді такої системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 L_0 &= \ddot{p}_0 + \sigma_0^2 p_0 + d_8 (\dot{p}_1^2 + \dot{r}_1^2) + d_{14} (p_1 \ddot{p}_1 + r_1 \ddot{r}_1) = 0; \\
 L_1 &= \ddot{p}_1 + \sigma_1^2 p_1 + d_1 (p_1 \dot{p}_1^2 + p_1 \dot{r}_1^2 + p_1^2 \ddot{p}_1 + p_1 r_1 \ddot{r}_1) + \\
 &+ d_2 (r_1^2 \ddot{p}_1 - 2 p_1 \dot{r}_1^2 + 2 r_1 \dot{p}_1 \dot{r}_1 - p_1 r_1 \ddot{r}_1) + \\
 &+ d_3 (\dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dot{r}_1 \dot{r}_2 + p_2 \ddot{p}_1 + r_2 \ddot{r}_1) + d_4 (p_1 \ddot{p}_2 + r_1 \ddot{r}_2) + \\
 &+ d_5 (\dot{p}_0 \dot{p}_1 + p_0 \ddot{p}_1) + d_6 p_1 \ddot{p}_0 = 0; \\
 L_2 &= \ddot{r}_1 + \sigma_1^2 r_1 + d_1 (r_1 \dot{p}_1^2 + r_1 \dot{r}_1^2 + r_1^2 \ddot{r}_1 + p_1 r_1 \ddot{p}_1) + \\
 &+ d_2 (p_1^2 \ddot{r}_1 - 2 r_1 \dot{p}_1^2 + 2 p_1 \dot{p}_1 \dot{r}_1 - p_1 r_1 \ddot{p}_1) + \\
 &+ d_3 (\dot{p}_1 \dot{r}_2 - \dot{p}_2 \dot{r}_1 + r_2 \ddot{p}_1 - p_2 \ddot{r}_1) + d_4 (p_1 \ddot{r}_2 - r_1 \ddot{p}_2) + \\
 &+ d_5 (\dot{p}_0 \dot{r}_1 + p_0 \ddot{r}_1) + d_6 r_1 \ddot{p}_0 - P_1 \omega^2 \cos \omega t = 0;
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \ddot{p}_2 + \sigma_2^2 p_2 + d_7 (\dot{p}_1^2 - \dot{r}_1^2) + d_{15} (p_1 \ddot{p}_1 - r_1 \ddot{r}_1) = 0; \\
L_4 &= \ddot{r}_2 + \sigma_2^2 r_2 + 2 d_7 \dot{p}_1 \dot{r}_1 + d_{15} (r_1 \ddot{p}_1 + p_1 \ddot{r}_1) = 0; \\
L_5 &= \ddot{p}_3 + \sigma_3^2 p_3 + d_9 (p_1 \dot{p}_1^2 - 2 r_1 \dot{p}_1 \dot{r}_1 - p_1 \dot{r}_1^2) + \\
&+ d_{10} (p_1^2 \ddot{p}_1 - 2 p_1 r_1 \ddot{r}_1 - r_1^2 \ddot{p}_1) + d_{11} (\dot{p}_1 \ddot{p}_2 - \dot{r}_1 \ddot{r}_2) + \\
&+ d_{12} (p_2 \ddot{p}_1 - r_2 \ddot{r}_1) + d_{13} (p_1 \ddot{p}_2 - r_1 \ddot{r}_2) = 0; \\
L_6 &= \ddot{r}_3 + \sigma_3^2 r_3 + d_9 (r_1 \dot{p}_1^2 + 2 p_1 \dot{p}_1 \dot{r}_1 - r_1 \dot{r}_1^2) + \\
&+ d_{10} (p_1^2 \ddot{r}_1 + 2 p_1 r_1 \ddot{p}_1 - r_1^2 \ddot{r}_1) + d_{11} (\dot{p}_1 \ddot{r}_2 + \dot{p}_2 \ddot{r}_1) + \\
&+ d_{12} (p_2 \ddot{r}_1 + r_2 \ddot{p}_1) + d_{13} (p_1 \ddot{r}_2 + r_1 \ddot{p}_2) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{d_1^*}{\mu_1}, \quad d_2 = \frac{d_2^*}{\mu_1}, \quad d_3 = \frac{d_3^*}{\mu_1}, \quad d_4 = \frac{d_4^*}{\mu_1}, \quad d_5 = \frac{d_5^*}{\mu_1}, \\
d_6 &= \frac{d_6^*}{\mu_1}, \quad d_7 = \frac{d_7^*}{\mu_0}, \quad d_8 = \frac{d_8^*}{\mu_0}, \quad d_9 = \frac{d_9^*}{\mu_3}, \quad d_{10} = \frac{d_{10}^*}{\mu_3}, \\
d_{11} &= \frac{d_{11}^*}{\mu_3}, \quad d_{12} = \frac{d_{12}^*}{\mu_3}, \quad d_{13} = \frac{d_{13}^*}{\mu_3}, \quad d_{14} = \frac{d_6}{\mu_0}, \quad d_{15} = \frac{d_4}{\mu_2}, \\
P_1 &= \frac{H \lambda_2}{\mu_1}, \quad d_7^* = d_4^* - \frac{\mu_3}{2}, \quad d_8^* = d_6^* - \frac{d_5^*}{2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

В таблиці 1 наведені числові значення коефіцієнтів d_i^* , що визначаються деякими квадратурами від циліндричних функцій. Їх числові значення одержано для циліндра з параметрами $R_0 = 0$, $R = 1$ для різної глибини h заповнення рідини.

Аналіз усталених вимушених коливань рідини пов'язаний з відшукуванням періодичних розв'язків системи (16). Для цього координати $r_1(t)$, $p_1(t)$ представимо у вигляді відрізків ряду Фур'є з невизначеними коефіцієнтами [2, 4, 13]

$$\begin{aligned}
r_1(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^3 (A_{2k-1} \cos k \omega t + A_{2k} \sin k \omega t), \\
p_1(t) &= B_0 + \sum_{k=1}^3 (B_{2k-1} \cos k \omega t + B_{2k} \sin k \omega t).
\end{aligned} \tag{18}$$

При цьому з першого та чотирьох останніх рівнянь системи (16) можна знайти явні вирази для узагальнених координат $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$, $p_3(t)$.

Після підстановки виразів (18) і знайдених для $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$,

Таблиця 1: Значення коефіцієнтів системи (16)

h	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	d_1^*	d_2^*	d_3^*	d_4^*
0.2	1.27155	1.70657	0.53930	0.26714	9.28680	4.99196	1.82085	-1.50166
0.4	0.90011	0.95928	0.34966	0.19641	1.54091	0.27694	0.88471	-0.25984
0.6	0.83658	0.74980	0.30921	0.18562	0.69184	-0.13359	0.71647	-0.03993
0.8	0.82347	0.66821	0.29824	0.18368	0.47126	-0.21712	0.66210	0.02919
1.0	0.82067	0.63253	0.29508	0.18332	0.39199	-0.24156	0.64029	0.05602
1.4	0.81993	0.60846	0.29388	0.18324	0.34431	-0.25384	0.62625	0.07265
1.8	0.81990	0.60307	0.29378	0.18324	0.33433	-0.25606	0.62319	0.07614
2.2	0.81989	0.60184	0.29377	0.18324	0.33210	-0.25654	0.62249	0.07692
2.6	0.81989	0.60156	0.29377	0.18324	0.33160	-0.25664	0.62233	0.07710
h	d_5^*	d_6^*	d_7^*	d_9^*	d_{10}^*	d_{11}^*	d_{12}^*	d_{13}^*
0.2	4.71381	-1.62479	-2.41209	7.59982	2.37893	-2.67365	-0.82884	-0.56775
0.4	1.79997	-0.37316	-0.70219	1.01412	0.28312	-0.89413	-0.11440	-0.06716
0.6	1.27631	-0.14689	-0.39816	0.34702	0.07803	-0.58775	0.01711	0.00776
0.8	1.10708	-0.07311	-0.30185	0.18809	0.03125	-0.49503	0.06103	0.02512
1.0	1.03921	-0.04327	-0.26412	0.13530	0.01639	-0.46017	0.07915	0.02968
1.4	0.99551	-0.02392	-0.24048	0.10591	0.00853	-0.43909	0.09106	0.03129
1.8	0.98597	-0.01967	-0.23545	0.10018	0.00708	-0.43473	0.09370	0.03142
2.2	0.98380	-0.01870	-0.23433	0.09894	0.00677	-0.43376	0.09430	0.03143
2.6	0.98331	-0.01848	-0.23407	0.09866	0.00670	-0.43354	0.09444	0.03144

$r_3(t)$, $p_3(t)$ розв'язків у рівняння Бубнова–Гальоркіна

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L_1 \cos k \omega t dt &= 0, & \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L_1 \sin k \omega t dt &= 0, \\
 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L_2 \cos k \omega t dt &= 0, & \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} L_2 \sin k \omega t dt &= 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

отримаємо систему 12 алгебраїчних рівнянь (тут k набуває значень 1, 2, 3), з якої визначаються коефіцієнти рядів Фур'є $A_i, B_i, (i = 1, \dots, 6)$ представлень основних узагальнених координат (18).

Із аналізу цієї системи при умові $P_1 \neq 0$ у загальному випадку просторових рухів рідини (коли збурюються всі узагальнені координати $p_0(t), r_1(t), p_1(t), r_2(t), p_2(t), r_3(t), p_3(t)$) знаходимо, що тільки $A_1 \neq 0$, $A_5 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $B_6 \neq 0$, а решта коефіцієнтів A_i, B_i обертаються в нуль.

Цьому випадку відповідає наступний наближений періодичний розв'язок нелінійної системи (16), що характеризує просторовий рух

рідини в області нестійкості “плоских” коливань вільної поверхні:

$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= A_1 \cos \omega t + A_5 \cos 3 \omega t, \\
 p_1(t) &= B_2 \sin \omega t + B_6 \sin 3 \omega t, \\
 p_0(t) &= a_0 + a_3 \cos 2 \omega t + a_7 \cos 4 \omega t + a_{11} \cos 6 \omega t, \\
 r_2(t) &= b_2 \sin 2 \omega t + b_4 \sin 4 \omega t + b_6 \sin 6 \omega t, \\
 p_2(t) &= c_0 + c_3 \cos 2 \omega t + c_7 \cos 4 \omega t + c_{11} \cos 6 \omega t, \\
 r_3(t) &= w_1 \cos \omega t + w_5 \cos 3 \omega t + w_9 \cos 5 \omega t + \\
 &\quad + w_{13} \cos 7 \omega t + w_{17} \cos 9 \omega t, \\
 p_3(t) &= v_2 \sin \omega t + v_6 \sin 3 \omega t + v_{10} \sin 5 \omega t + \\
 &\quad + v_{14} \sin 7 \omega t + v_{18} \sin 9 \omega t.
 \end{aligned} \tag{20}$$

На відміну від попередніх досліджень вимушених коливань рідини цим методом у наближеному розв’язку (20) для узагальнених координат $r_1(t)$ та $p_1(t)$ в даній роботі утримано гармоніки $\sin 3 \omega t$ та $\cos 3 \omega t$, що приводить до точних виразів для узагальнених координат $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$, $p_3(t)$, в яких, як видно, фігурують члени з більш високими гармоніками. Коефіцієнти розкладів узагальнених координат $p_0(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$, $p_3(t)$ пов’язані з коефіцієнтами A_1 , A_5 , B_2 , B_6 представлень основних узагальнених координат $r_1(t)$, $p_1(t)$ такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -(A_1^2 + B_2^2 + 4(A_3^2 + B_4^2) + 9(A_5^2 + B_6^2)) o_0, \\
 a_1 &= -(A_1 A_3 + B_2 B_4) o_1 - (A_3 A_5 + B_4 B_6) o_2, \\
 a_3 &= (A_1^2 - B_2^2) o_{31} - (A_1 A_5 + B_2 B_6) o_{32}, \\
 a_5 &= (A_1 A_3 - B_2 B_4) o_5, \\
 a_7 &= (A_3^2 - B_4^2) o_{71} + (A_1 A_5 - B_2 B_6) o_{72}, \\
 a_9 &= (A_3 A_5 - B_4 B_6) o_9, \quad a_{11} = (A_5^2 - B_6^2) o_{11},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= (A_3 B_2 - A_1 B_4) s_1 + (A_5 B_4 - A_3 B_6) s_2, \\
 b_4 &= 2 A_1 B_2 s_{31} + (A_5 B_2 - A_1 B_6) s_{32}, \\
 b_6 &= (A_3 B_2 + A_1 B_4) s_5, \\
 b_8 &= 2 A_3 B_4 s_{71} + (A_5 B_2 + A_1 B_6) s_{72}, \\
 b_{10} &= (A_5 B_4 + A_3 B_6) s_9, \quad b_{12} = 2 A_5 B_6 s_{11},
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 c_0 &= ((A_1^2 - B_2^2) + 4(A_3^2 - 4 B_4^2) + 9(A_5^2 - 9 B_6^2)) s_0, \\
 c_1 &= (A_1 A_3 - B_2 B_4) s_1 + (A_3 A_5 - B_4 B_6) s_2, \\
 c_3 &= -(A_1^2 + B_2^2) s_{31} + (A_1 A_5 - B_2 B_6) s_{32}, \\
 c_5 &= -(A_1 A_3 + B_2 B_4) s_5, \\
 c_7 &= -(A_3^2 + B_4^2) s_{71} - (A_1 A_5 + B_2 B_6) s_{72}, \\
 c_9 &= -(A_3 A_5 + B_4 B_6) s_9, \quad c_{11} = -(A_5^2 + B_6^2) s_{11},
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= (A_1^3 - A_1 B_2^2) u_{11} + (A_1 A_5^2 - A_1 B_6^2) u_{15} + \\
&\quad + (A_1^2 A_5 + A_5 B_2^2 - 2 A_1 B_2 B_6) u_{12}, \\
w_5 &= (-A_1^3 - 3 A_1 B_2^2) u_{51} + (A_1^2 A_5 - A_5 B_2^2) u_{54} + \\
&\quad + (A_5^3 - A_5 B_6^2) u_{55}, \\
w_9 &= -(A_1 A_5^2 - 2 A_5 B_2 B_6 + A_1 B_6^2) u_{91} - \\
&\quad - (A_1^2 A_5 + A_5 B_2^2 + 2 A_1 B_2 B_6) u_{93}, \\
w_{13} &= -(A_1 A_5^2 + 2 A_5 B_2 B_6 + A_1 B_6^2) u_{13}, \\
w_{17} &= -(A_5^3 + 3 A_5 B_6^2) u_{17},
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= (A_1^2 B_2 - B_2^3) u_{11} + (A_5^2 B_2 - B_2 B_6^2) u_{15} + \\
&\quad + (-2 A_1 A_5 B_2 + A_1^2 B_6 + B_2^2 B_6) u_{12}, \\
v_6 &= -(3 A_1^2 B_2 + B_2^3) u_{51} + (A_1^2 B_6 - B_2^2 B_6) u_{54} + \\
&\quad + (A_5^3 B_6 - B_6^3) u_{55}, \\
v_{10} &= (A_5^2 B_2 - 2 A_1 A_5 B_6 + B_2 B_6^2) u_{91} + \\
&\quad - (2 A_1 A_5 B_2 + A_1^2 B_6 + B_2^2 B_6) u_{93}, \\
v_{14} &= -(A_5^2 B_2 + 2 A_1 A_5 B_6 + B_2 B_6^2) u_{13}, \\
v_{18} &= -(3 A_5^2 B_6 + B_6^3) u_{17},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
u_{11} &= 1/4 (d_9 - 3 d_{10} + 4 d_{12} s_0 + 2 (2 d_{11} - d_{12} - \\
&\quad - 4 d_{13}) s_{31}) h_1, \\
u_{12} &= 1/4 (5 d_9 - 11 d_{10} + 2 ((6 d_{11} - 9 d_{12} - 4 d_{13}) s_{31} + \\
&\quad + (-2 d_{11} + d_{12} + 4 d_{13}) s_{32})) h_1, \\
u_{15} &= 1/2 (9 d_9 - 19 d_{10} + 18 d_{12} s_0 + (-6 d_{11} + 9 d_{12} + \\
&\quad + 4 d_{13}) s_{32} + (12 d_{11} - 9 d_{12} - 16 d_{13}) s_{72}) h_1, \\
u_{51} &= 1/4 (d_9 + d_{10} + 2 (2 d_{11} + d_{12} + 4 d_{13}) s_{31}) h_5, \\
u_{54} &= 1/2 (d_9 - 11 d_{10} + 18 d_{12} s_0 + (2 d_{11} + d_{12} \\
&\quad + 4 d_{13}) s_{32} + (4 d_{11} - d_{12} - 16 d_{13}) s_{72}) h_5, \\
u_{55} &= 9/4 (d_9 - 3 d_{10} + 36 d_{12} s_0 + 2 (2 d_{11} - d_{12} - \\
&\quad - 4 d_{13}) s_{11}) h_5,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
u_{91} &= 1/4 (3 d_9 + 19 d_{10} - 2 ((6 d_{11} - d_{12} - 36 d_{13}) s_{11} + \\
&\quad + (6 d_{11} + 9 d_{12} + 4 d_{13}) s_{32})) h_9, \\
u_{93} &= 1/4 (7 d_9 + 11 d_{10} + 2 ((6 d_{11} + 9 d_{12} + 4 d_{13}) s_{31} + \\
&\quad + (4 d_{11} + d_{12} + 16 d_{13}) s_{72})) h_9, \\
u_{13} &= 1/4 (15 d_9 + 19 d_{10} + 2 ((6 d_{11} + d_{12} + 36 d_{13}) s_{11} + \\
&\quad + (12 d_{11} + 9 d_{12} + 16 d_{13}) s_{72})) h_{13}, \\
u_{17} &= 9/4 (d_9 + d_{10} + 2 (2 d_{11} + d_{12} + 4 d_{13}) s_{11}) h_{17}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Тут і вище

$$\begin{aligned}
 o_0 &= (d_8 - d_{14}) f_0, \quad o_1 = 1/2 (4 d_8 - 5 d_{14}) f_1, \\
 o_2 &= 1/2 (12 d_8 - 13 d_{14}) f_1, \quad o_{31} = 1/2 (d_8 + d_{14}) f_3, \\
 o_{32} &= (3 d_8 - 5 d_{14}) f_3, \quad o_5 = 1/2 (4 d_8 + 5 d_{14}) f_5, \\
 o_{71} &= 2 (d_8 + d_{14}) f_7; \quad o_{72} = (3 d_8 + 5 d_{14}) f_7, \\
 o_9 &= 1/2 (12 d_8 + 13 d_{14}) f_9, \quad o_{11} = 9/2 (d_8 + d_{14}) f_{11},
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 s_0 &= (d_7 - d_{15}) g_0, \quad s_1 = 1/2 (4 d_7 - 5 d_{15}) g_1, \\
 s_2 &= 1/2 (12 d_7 - 13 d_{15}) g_1, \quad s_{31} = 1/2 (d_7 + d_{15}) g_3, \\
 s_{32} &= (3 d_7 - 5 d_{15}) g_3, \quad s_5 = 1/2 (4 d_7 + 5 d_{15}) g_5, \\
 s_{71} &= 2 (d_7 + d_{15}) g_7, \quad s_{72} = (3 d_7 + 5 d_{15}) g_7, \\
 s_9 &= 1/2 (12 d_7 + 13 d_{15}) g_9, \quad s_{11} = 9/2 (d_7 + d_{15}) g_{11},
 \end{aligned} \tag{29}$$

разом з

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{1}{2 \bar{\sigma}_0^2}, \quad f_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2 - 1}, \quad f_3 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2 - 4}, \quad f_5 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2 - 9}, \\
 f_7 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2 - 16}, \quad f_9 = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2 - 25}, \quad f_{11} = \frac{1}{\bar{\sigma}_0^2 - 36}, \\
 g_0 &= \frac{1}{2 \bar{\sigma}_2^2}, \quad g_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2 - 1}, \quad g_3 = \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2 - 4}, \quad g_5 = \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2 - 9}, \\
 g_7 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2 - 16}, \quad g_9 = \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2 - 25}, \quad g_{11} = \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2 - 36}, \\
 h_1 &= \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2 - 1}, \quad h_5 = \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2 - 9}, \quad h_9 = \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2 - 25}, \quad h_{13} = \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2 - 49}, \\
 h_{17} &= \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2 - 81}, \quad \bar{\sigma}_i^2 = \frac{\omega^2}{\sigma_i^2}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Значення амплітуд A_1, A_5, B_2, B_6 знаходяться із системи кубічних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 &A_1^3 n_1 + A_1 B_2^2 n_2 + A_1^2 A_5 n_4 + A_1 A_5^2 n_5 - A_5 B_2^2 n_7 + \\
 &+ A_1 B_6^2 n_8 + A_1 B_2 B_6 n_{11} + A_5 B_2 B_6 n_{14} + A_1 (\bar{\sigma}_1^2 - 1) = P_1, \\
 &B_2^3 n_1 + A_1^2 B_2 n_2 - B_2^2 B_6 n_4 + B_2 B_6^2 n_5 + A_1^2 B_6 n_7 + \\
 &+ A_5^2 B_2 n_8 - A_1 A_5 B_2 n_{11} + A_1 A_5 B_6 n_{14} + B_2 (\bar{\sigma}_1^2 - 1) = 0, \\
 &A_1^2 A_5 n_5 + A_5 B_2^2 n_8 + A_1 B_2 B_6 n_{14} + A_1^3 n_{24} - A_1 B_2^2 n_{24} + \\
 &\quad + A_5^3 n_{28} + A_5 B_6^2 n_{29} + A_5 (\bar{\sigma}_1^2 - 9) = 0, \\
 &B_2^2 B_6 n_5 + A_1^2 B_6 n_8 + A_1 A_5 B_2 n_{14} + A_1^2 B_2 n_{24} - B_2^3 n_{24} + \\
 &\quad + B_6^3 n_{28} + A_5^2 B_6 n_{29} + B_6 (\bar{\sigma}_1^2 - 9) = 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Тут величини n_i мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= -d_1/2 + d_5 o_0 + (d_5/2 - 2d_6) o_{31} + d_3 s_0 + \\
 &\quad + (d_3/2 - 2d_4) s_{31}, \\
 n_2 &= d_1/2 - 2d_2 + d_5 o_0 - (d_5/2 - 2d_6) o_{31} - d_3 s_0 + \\
 &\quad + (3d_3/2 - 6d_4) s_{31}, \\
 n_4 &= -3d_1/2 - (3d_5/2 + 2d_6) o_{31} - (d_5/2 - 2d_6) o_{32} - \\
 &\quad - (3d_3/2 + 2d_4) s_{31} - (d_3/2 - 2d_4) s_{32}, \\
 n_5 &= -5d_1 + 9d_5 o_0 + (3d_5/2 + 2d_6) o_{32} + \\
 &\quad + (3d_5/2 - 8d_6) o_{72} + 9d_3 s_0 + (3d_3/2 + 2d_4) s_{32} + \\
 &\quad + (3d_3/2 - 8d_4) s_{72}, \\
 n_7 &= -d_1/2 - (3d_5/2 + 2d_6) o_{31} + (3d_3/2 + 2d_4) s_{31} - \\
 &\quad - (d_3/2 - 2d_4) s_{32}, \\
 n_8 &= -5d_2 + 9d_5 o_0 - 9d_3 s_0 + (3d_3/2 + 2d_4) s_{32} + \\
 &\quad + (3d_3/2 - 8d_4) s_{72}, \\
 n_{11} &= -d_1 - (d_5/2 - 2d_6) o_{32} - (3d_3 + 4d_4) s_{31}; \\
 n_{14} &= 3d_1 - 9d_2 + (3d_5/2 + 2d_6) o_{32} - (3d_5/2 - 8d_6) o_{72} - \\
 &\quad - (3d_3 + 4d_4) s_{32} + (3d_3 - 16d_4) s_{72}, \\
 n_{24} &= -d_1/2 - (3d_5/2 + 2d_6) o_{31} - (3d_3/2 + 2d_4) s_{31}, \\
 n_{28} &= -9d_1/2 + 81d_5 o_0 + (9d_5/2 - 18d_6) o_{11} + \\
 &\quad + 81d_3 s_0 + (9d_3/2 - 18d_4) s_{11}, \\
 n_{29} &= 9d_1/2 - 18d_2 + 81d_5 o_0 - (9d_5/2 - 18d_6) o_{11} - \\
 &\quad - 81d_3 s_0 + (27d_3/2 - 54d_4) s_{11}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Для режиму руху рідини в площині дії збурюючої сили можливий такий наближений уточнений періодичний розв'язок нелінійної системи (16), що характеризує плоский рух рідини:

$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= A_1 \cos \omega t + A_5 \cos 3\omega t, \\
 p_1(t) &= 0, \quad r_2(t) = 0, \quad p_3(t) = 0, \\
 p_0(t) &= a_0 + a_3 \cos 2\omega t + a_7 \cos 4\omega t + a_{11} \cos 6\omega t, \\
 p_2(t) &= c_0 + c_3 \cos 2\omega t + c_7 \cos 4\omega t + c_{11} \cos 6\omega t, \\
 r_3(t) &= w_1 \cos \omega t + w_5 \cos 3\omega t + w_9 \cos 5\omega t + \\
 &\quad + w_{13} \cos 7\omega t + w_{17} \cos 9\omega t,
 \end{aligned} \tag{33}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_0 &= (-A_1^2 - 9 A_5^2) o_0, \quad a_3 = A_1^2 o_{31} - A_1 A_5 o_{32}, \\
 a_7 &= A_1 A_5 o_{72}, \quad a_{11} = A_5^2 o_{11}, \quad a_i, c_i = 0, (i = 1, 5, 9), \\
 b_j &= 0, (j = 2, 4, 6), \quad v_k = 0, (k = 2, 6, 10, 14, 18), \\
 c_0 &= (A_1^2 + 9 A_5^2) s_0, \quad c_3 = -A_1^2 s_{31} + A_1 A_5 s_{32}, \\
 c_7 &= -A_1 A_5 s_{72}, \quad c_{11} = -A_5^2 s_{11}, \\
 w_1 &= A_1^3 u_{11} + A_1^2 A_5 u_{12} + A_1 A_5^2 u_{15}, \\
 w_5 &= -A_1^3 u_{51} + A_1^2 A_5 u_{54} + A_5^3 u_{55}, \quad w_{13} = -A_1 A_5^2 u_{13}, \\
 w_9 &= -A_1 A_5^2 u_{91} - A_1^2 A_5 u_{93}, \quad w_{17} = -A_5^3 u_{17}.
 \end{aligned} \tag{34}$$

При цьому значення амплітуд A_1, A_5 знаходяться із системи кубічних рівнянь

$$\begin{aligned}
 A_1^3 n_1 + A_1^2 A_5 n_4 + A_1 A_5^2 n_5 + A_1 (\bar{\sigma}_1^2 - 1) &= P_1, \\
 A_1^2 A_5 n_5 + A_1^3 n_{24} + A_5^3 n_{28} + A_5 (\bar{\sigma}_1^2 - 9) &= 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Аналогічні рівняння для амплітудно-частотних характеристик рідини можна також отримати і іншими методами нелінійної механіки, зокрема, методом Крилова–Боголюбова–Митропольського, або методом гармонічного балансу.

В таблиці 2 наведено деякі чисельні значення модуля амплітуд вимушених плоских коливань рідини (33) поблизу основного резонансу по параметрах $p_1(t)$ та $r_1(t)$ при заданій силі P_1 , а в таблиці 3 наведено деякі чисельні значення модуля амплітуд вимушених просторових коливань рідини (20) поблизу основного резонансу при заданій силі P_1 .

Таблиця 2: Модулі амплітуд плоских коливань (33)

ω	A_1^V	A_1^{VII}	ω	A_1^V	A_1^{VII}
3.736944	0.053079803	0.053079121	4.373923	0.184498741	0.184899377
3.779409	0.059039749	0.059038530	4.416388	0.160920445	0.161116819
3.821875	0.066277523	0.066275205	4.458854	0.141364389	0.141461492
3.864340	0.075288439	0.075283667	4.501319	0.125372324	0.125421805
3.906805	0.086900480	0.086889538	4.543784	0.112337689	0.112363991
3.949270	0.102673253	0.102643789	4.586249	0.101669178	0.101683830
3.991736	0.126251022	0.126144914	4.628715	0.092864139	0.092872689
4.034201	0.172736043	0.171791308	4.671180	0.085522613	0.085527826

Таблиця 3: Модулі амплітуд просторових коливань (20)

ω	A_1^V	A_1^{VII}	B_2^V	B_2^{VII}	A_5^{VII}	B_6^{VII}
4.20406	0.1681162	0.1666599	0.2770995	0.2787168	0.0009356	0.0014742
4.24652	0.2301096	0.2289682	0.2966470	0.2976075	0.0009182	0.0011415
4.28899	0.2924265	0.2912575	0.3358417	0.3364157	0.0009178	0.0009916
4.33145	0.3503322	0.3494595	0.3811242	0.3818522	0.0009174	0.0009714
4.37392	0.4035309	0.4027108	0.4268312	0.4275379	0.0009242	0.0009538
4.41638	0.4528059	0.4520186	0.4712718	0.4719676	0.0009334	0.0009494
4.45885	0.4989884	0.4982232	0.5141174	0.5148063	0.0009441	0.0009518
4.50131	0.5427680	0.5420184	0.5554702	0.5561545	0.0009560	0.0009582

Індексом при A_i та B_j зверху відмічені числові значення, одержані на основі розгляду відповідно п'ятимодової та семимодової моделі.

Із наведених таблиць випливає, що значення амплітуд основних мод коливань рідини, знайдених на основі п'ятимодової та семимодової моделі близькі між собою (розходження спостерігається в третій-четвертій значущій цифрі). Порівняльний аналіз наведених результатів підтверджує також, що в розглядуваних періодичних коливаннях вирішальний внесок дає основна гармонічна складова (згідно з представленнями (20) та (33) для координат $p_1(t)$, $r_1(t)$), яка має період зовнішнього збурення, а більш високими гармоніками, в рамках припущення теорії третього порядку малості, можна знехтувати.

5. Аналіз амплітудно-частотних характеристик нелінійних коливань вільної поверхні рідини. Амплітудно-частотні характеристики нелінійних коливань вільної поверхні рідини визначаються виразами (31) та (35). Для усталених режимів руху можна також в кожному конкретному випадку прослідкувати за еволюцією вільної поверхні рідини, скориставшись її представленням у вигляді

$$\begin{aligned}
 x = & p_0(t)Y_0(k_0 \xi) + r_1(t)Y_1(k_1 \xi) \sin \eta + \\
 & + p_1(t)Y_1(k_2 \xi) \cos \eta + r_2(t)Y_2(k_2 \xi) \sin 2 \eta + \\
 & + p_2(t)Y_2(k_2 \xi) \cos 2 \eta + r_3(t)Y_3(k_3 \xi) \sin 3 \eta + p_3(t)Y_3(k_3 \xi) \cos 3 \eta.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Для циліндра з параметрами $R_0 = 0$, $R = 1$, $d = 2R$, $h = 2$, $H = 0.01094$, $\omega = 4.246527$ на рис. 2 наведено кілька профілів (проекцій на вісь симетрії) просторової хвилі (31) в напрямку лінії дії збурюючої сили ($\eta = 0$).

Із аналізу еволюції вільної поверхні рідини для вертикального циліндра із вказаними вище параметрами випливає, що всі нелінійні

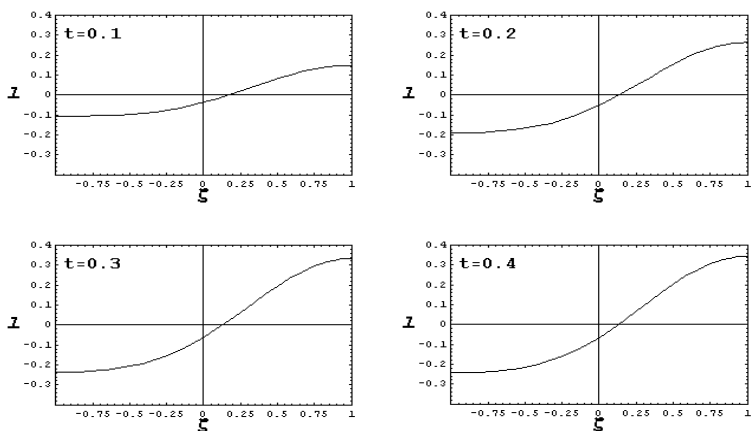


Рис. 1: Профілі просторових хвиль

ефекти в поведінці збуреної вільної поверхні, включаючи її несиметричність та рухомість вузлової лінії, при семимодовій апроксимації зберігаються. Амплітудно-частотні характеристики якісно повністю співпадають з аналогічними характеристиками, одержаними на основі п'ятимодової моделі [4, 20]. В кількісному відношенні ці результати співпадають з точністю до третьої значущої цифри. В такій же мірі це відноситься і до граничних значень амплітуд плоских і просторових рухів вільної поверхні рідини, а також критичної глибини рідини, при якій відбувається зміна характеристики нелінійної системи з м'якого типу на характеристики жорсткого типу.

6. Силова взаємодія рідини та ємності. Розглянемо важливе для практики питання про силову взаємодію рідини з частково заповненим баком. Як відомо, головний вектор сил, які діють з боку рідини на резервуар визначається як

$$\vec{P} = \iint_S p \vec{n} dS, \quad (37)$$

де $\vec{n}$ — орт зовнішньої нормалі до змоченої поверхні S , p — тиск рідини, який визначається із інтегралу Лагранжа–Коші (4).

Безпосереднє використання формули (37) на практиці дуже уск-

ладнене. Для отримання виразу гідродинамічної сили скористаємося результатами §13 роботи [4], що приводить до

$$\vec{P} = -m(\ddot{\vec{u}} - \vec{g}) - \frac{d\vec{K}}{dt}, \quad (38)$$

де m — маса рідини, $\vec{g} = (-g, 0, 0)$ — вектор прискорення сил тяжіння, вектор $\vec{u} = (0, 0, H \cos \omega t)$ визначає закон руху резервуару, $\vec{K}$ — вектор кількості руху маси рідини, який виражається формулою

$$\vec{K} = \rho \iiint_Q (\nabla \Phi) dQ. \quad (39)$$

В загальному випадку, коли рівняння збуреної вільної поверхні Σ має вигляд (7), для проєкцій вектора кількості руху $\vec{K}$ на осі декартової системи координат отримуємо такі вирази:

$$K_x = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_{i1} \beta_i \dot{\beta}_i, \quad K_y = \sum_i \lambda_{i2} \dot{\beta}_i, \quad K_z = \sum_i \lambda_{i3} \dot{\beta}_i, \quad (40)$$

$$\lambda_{i1} = \rho \int_{\Sigma_0} f_i^2 dS, \quad \lambda_{i2} = \rho \int_{\Sigma_0} y f_i dS, \quad \lambda_{i3} = \rho \int_{\Sigma_0} z f_i dS. \quad (41)$$

У розглядуваному випадку роль узагальнених координат $\beta_i(t)$ грають величини $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_1(t)$, $r_2(t)$, $p_2(t)$, $r_3(t)$, $p_3(t)$. Проекції гідродинамічної сили на осі зв'язаної системи координат з точністю до членів третього порядку малості мають такий вигляд:

$$P_x = -m g - \lambda_1(r_1 \ddot{r}_1 + \dot{r}_1^2 + p_1 \ddot{p}_1 + \dot{p}_1^2), \quad P_y = -\lambda_2 \ddot{p}_1, \quad P_z = -m \ddot{u} - \lambda_2 \ddot{r}_1, \quad (42)$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi \rho}{2} \int_{R_0}^R \xi Y_1^2(k_{11} \xi) d\xi, \quad \lambda_2 = \pi \rho \int_{R_0}^R \xi^2 Y_1(k_{11} \xi) d\xi. \quad (43)$$

Найбільш важливою з практичної точки зору, в даному випадку, є складова сумарної гідродинамічної сили P_z у напрямку осі Oz , вздовж якої сектор здійснює вимушені коливання і яка після підстановки у третє рівняння системи (42) набуває вигляду:

$$P_z = \pi \omega^2 \rho [(H R^2 h + A_1 \lambda_2^*) \cos \omega t + 9 A_5 \lambda_2^* \cos 3 \omega t], \quad (44)$$

де $\lambda_2^* = \lambda_2 / (\pi \rho)$.

Як видно із наведеного вище, включення до розгляду гармонік $r_3(t)$ та $p_3(t)$ не впливає на силову взаємодію баку з рідиною внаслідок того, що ці узагальнені координати не входять у рівняння для визначення $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_1(t)$, $r_2(t)$ та $p_2(t)$.

Наявність у виразах для $r_1(t)$ та $p_1(t)$ згідно з (33) та (20) вищих за часом гармонік істотно не позначилося на амплітуді сили P_z , (42). Чисельні значення амплітуди уточнюються лише в третій-четвертій значущій цифрі, що призводить до графічних залежностей, які в околі головного резонансу візуально співпадають з аналогічними залежностями, наведеними в [4].

6. Висновки. В роботі розглянуто нелінійні коливання ідеальної нестисливої рідини в баках циліндричної форми на основі семимодової апроксимації вільної поверхні рідини. Методом Бубнова–Гальоркіна побудовано періодичні розв’язки семимодової системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описує нелінійні вимушені коливання рідини у круговому циліндричному баку при дії збурюючої сили в одній з площин симетрії. Підтверджено, що в околі основного резонансу системи амплітуди вимушених коливань рідини та амплітуди сили обмежені, положення вузлової лінії вільної поверхні рідини змінюється з часом, висота “горба” деформованої поверхні перевищує глибину “впадини”. Встановлено, що для досить повного опису нелінійних коливань ідеальної нестисливої рідини в циліндричному баку, включаючи і просторові рухи рідини, достатньо у розкладах головних узагальнених координат обмежитися лише основними гармоніками. Аналіз чисельних результатів показує, що семимодова апроксимація вільної поверхні рідини та потенціалу швидкостей не призводить до істотних уточнень амплітуд коливань вільної поверхні та амплітуд сил взаємодії у порівнянні з п’ятимодовою апроксимацією. Результати розрахунків добре узгоджуються з даними експериментів [15] та можуть бути використані при проектуванні транспортних засобів, які містять великі маси рідини.

Література

- [1] Лимарченко О.С. Вариационная формулировка задачи о движении резервуара с жидкостью // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 10. — С. 904–908.

- [2] Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. — Киев: Наук. думка, 1975. — 136 с.
- [3] Луковский И.А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объёма жидкости со свободной поверхностью. В кн.: “Колебания упругих конструкций с жидкостью”. — М.: Волна, 1976. — С. 260–264.
- [4] Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью. — Киев: Наук. думка. 1990. — 296 с.
- [5] Луковський І.О., Солодун О.В. Нелінійна модель руху рідини в циліндричних ємностях, розділених на відсіки. — Київ: Доповіді НАНУ. — 2001. — № 5. — С. 50–55.
- [6] Луковський І.О., Солодун О.В. Варіаційний метод в задачах про нелінійні коливання в циліндричних баках, розділених на відсіки. — Київ: Вісник Київського університету. — 2001. — № 5. — С. 325–330.
- [7] Луковский И.А., Тимоха А.Н. Нелинейная теория плесканий в подвижных полостях: классические и неклассические задачи// В кн.: “Вопросы аналитической механики и её применений”. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. 1999. — С. 169–200.
- [8] Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: “Машиностроение”, 1968. — 532 с.
- [9] Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: “Машиностроение”, 1978. — 248 с.
- [10] Моисеев Н.Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объёма жидкости// Прикладная математика и механика. — 1958. — **22**. — С. 612–621.
- [11] Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 440 с.
- [12] Нариманов Г.С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учёт немалости движения последней// Прикл. математика и механика. — 1957. — **21**, № 4, — С. 513–524.
- [13] Пилькевич А.М. Анализ вынужденных колебаний жидкости в цилиндрических соосных резервуарах// Прикладные методы исследования физико-механических процессов. — Киев, 1979. — С. 49–63.
- [14] Феценко С.Ф., Луковський І.А., Рабинович Б.И. и др. Методы определения присоединённых масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.

- [15] Abramson H.N., Chu W.H., Kana D.D. Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers// Journ. Appl. Mech. — 1966. — **33**, № 4. — P. 66–74.
- [16] Abramson H.N., Garza L.R. Some measurement of liquid frequencies and damping in compartment cylindrical tanks// AIAA Journal of Spacecraft and Rockets. — 1965. — **2**, № 3. — P. 453–455.
- [17] Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N. Liquid surface oscillation in longitudinally excited rigid cylindrical containers// AIAA Journal. — 1965. — **3**, № 4. — P. 685–695.
- [18] Faltinsen O.M. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks// J. Ship. Res. — 1974. — **18**, № 4. — P. 224–241.
- [19] Faltinsen O.M., Rongebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tanks with finite water depth// J. Fluid Mech. — 2000. — **407**. — P. 201–234.
- [20] Gavriluk I.P., Lukovsky I.A., Timokha A.N. A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank// Jour. Hybrid Methods in engineering. — 2000. — **2**. — P. 463–483.
- [21] Hatton R.E. An investigating of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical containers// Tech. Note. Washington (NASA; D-1870). — 1963. — P. 145–153.
- [22] Luce J.C. A variational principle for a fluid with a free surface// J. Fluid Mech. — 1976. — **27**. — P. 395–397.
- [23] Miles J.W. Nonlinear surface waves in closed basins// *J. Fluid Mechanics*. — 1976. — **75**. — P. 419–448.
- [24] Miles J.W. Internally resonant surface waves in a circular cylinder// *J. Fluid Mechanics*. — 1984. — **149**. — P. 1–14.
- [25] Miles J.W. Resonantly forced surface waves in a circular cylinder// *J. Fluid Mechanics*. — 1984. — **149**. — P. 15–31.
- [26] Welt F., Modi V.I. Vibration damping through liquid sloshing. Part 1 - A nonlinear analysis. ASME, Transaction, Journals of Vibration and Acoustic. — 1992. — **114**. — P. 10–16.
- [27] Welt F., Modi V.I. Vibration damping through liquid sloshing. Part 2 - Experimental results. ASME, Transaction, Journals of Vibration and Acoustic. — 1992. — **114**. — P. 17–23.