ISSN 1025-6415

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

ГОЛОВНИЙ
РЕДАКТОР ЖУРНАЛУ
академік НАН УКРАЇНИ
П.Г. КОСТЮК

5 2001

9.07.2001.

УДК 534.1:629.764.7

© 2001

Академік НАН України **І. О. Луковський, О. В. Солодун**

Нелінійна модель руху маси рідини в циліндричних ємностях, розділених на відсіки

The problem on fluid sloshing in a cylindrical tank is examined in the nonlinear statement. The tank contains a set of internal radial ribs submerged in fluid. By using the variational method, a finite-dimensional approximate mathematical model of sloshing is derived. It implies the system of nonlinear ordinary differential equations of the eighth order, allowing one to study the physical processes of the fluid-structure interaction due to translational tank movements.

В сучасних крупногабаритних динамічних системах, які мають в своєму складі значні маси рідини з вільною поверхнею, для уникнення сильної взаємодії між рухом маси рідини і корпусом конструкції часто використовують той або інший спосіб розбиття ємностей на відсіки. Для проектування і експлуатації таких об'єктів як ракети на рідкому паливі, танкери, резервуари для зберігання нафтопродуктів та інших рідинних речовин в сейсмічно небезпечних районах необхідне глибоке розуміння коливних процесів рідини в рухомих ємностях.

Хоча ця проблема добре відома і знаходиться в полі зору дослідників вже багато років, переважна більшість результатів була одержана у випадку лінійних постановок задач. Однак якраз у критичних ситуаціях втрати стійкості або міцності об'єктів на передній план виступають нелінійні фізичні явища, які частково або повністю випадають з розгляду через лінеаризацію проблеми. Кількість опублікованих робіт, присвячених вивченню руху рідини в циліндричних секторіальних баках в нелінійній постановці, незначна. Це, переважно, експериментальні дослідження [1–3] та окремі теоретичні результати [2, 4], одержані методами теорії збурень, як правило, за припущень відсутності взаємозв'язків між коливаннями за різними формами.

В даній роботі одержано нелінійну модель руху рідини в круговому циліндричному баці, розділеному на дві частини діаметральною перегородкою. Ця модель одержана варіаційним методом [5], який приводить у випадках циліндричних баків без перегородок [5] і баків у формі паралелепіпеда [6] до добре узгоджених з результатом експериментів. При цьому тут ми обмежимося випадком поступального руху секторіального відсіку.

Абсолютний рух ідеальної нестисливої рідини будемо вивчати у зв'язаній з баком циліндричній системі координат x, ξ, η, причому початок виберемо на незбуреній вільній поверхні Σ_0. Вісь Ox направимо по осі циліндра в напрямі, протилежному вектору сил земного тяжіння $\vec{g}$. Двогранний кут між перегородками позначимо через 2α.

Обмежившись розглядом безвихорових рухів рідини, розподіл її швидкостей представимо у вигляді градієнта потенціальної функції $\Phi(x,\xi,\eta,t)$

$$\vec{v} = \nabla\Phi, \tag{1}$$

причому потенціал швидкостей повинен бути розв'язком такої нелінійної крайової задачі:

$$\nabla^2\Phi = 0, \qquad \vec{r} \in Q, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu}, \qquad \vec{r} \in S, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\zeta_t}{\sqrt{(\nabla\zeta, \nabla\zeta)}}, \qquad \vec{r} \in \Sigma, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi, \nabla\Phi) - \nabla\Phi \cdot \vec{v}_0 + U = 0, \qquad \vec{r} \in \Sigma_0, \tag{5}$$

де $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області Q, зайнятої рідиною; S та Σ — тверда стінка та збурена вільна поверхня рідини відповідно; $\vec{r}$ — радіус-вектор точок об'єму рідини Q у зв'язаній системі координат; $\vec{v}_0$ — вектор поступального руху об'єму рідини Q; U — потенціал сил земного тяжіння; $\zeta(x, \xi, \eta, t) = 0$ — рівняння збуреної поверхні рідини, яке надалі зображується у вигляді

$$x = f(\xi, \eta, t). \tag{6}$$

Розподіл тиску в об'ємі рідини визначається за допомогою інтегралу Лагранжа – Коші, записаного у зв'язаній системі координат $Ox\xi\eta$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi, \nabla\Phi) - \vec{v}_0\ \nabla\Phi + gx + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \tag{7}$$

де ρ — густина рідини; p_0 — тиск газу над вільною поверхнею рідини.

Легко бачити, що потенціал швидкостей може бути представлений у вигляді суми

$$\Phi(x, \xi, \eta, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \varphi(x, \xi, \eta, t), \tag{8}$$

якщо гармонічна функція φ є розв'язком крайової задачі, що описує рух рідини в нерухомому контейнері:

$$\begin{gathered} \nabla^2\varphi = 0 \quad \text{в} \quad Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad S, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + gx = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \end{gathered} \tag{9}$$

при умові збереження об'єму рідини $\int\limits_{Q(t)} dQ = 0.$

Для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (9) застосовуємо варіаційний метод [5]. Відповідне формулювання варіаційної проблеми пов'язане з функціоналом

$$W = \int\limits_{Q(t)} (p - p_0) dQ = -\rho \int\limits_{Q(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + gx\right] dQ, \tag{10}$$

стаціонарні значення якого досягаються на розв'язках крайової задачі (9).

Прямий метод розв'язування варіаційної задачі полягає у конструктивному представленні для заданої області Q форми вільної поверхні $f(\xi, \eta, t)$ і потенціалу швидкостей $\varphi(x, \xi, \eta, t)$ у вигляді

$$x = f(\xi, \eta, t) = \sum_m \sum_p \beta_{mp}(t) f_{mp}(\xi, \eta), \tag{11}$$

$$\varphi(x,\xi,\eta,t) = \sum_m \sum_p R_{mp}(t)\varphi_{mp}(x,\xi,\eta), \tag{12}$$

де

$$f_{mp}(\xi,\eta) = Y_m(k_{mp}\xi)\cos m(\eta+\alpha), \tag{13}$$

$$Y_m(k_{mp}\xi) = \frac{J_m(k_{mp}\xi)N'_m(\zeta_{mp}) - N_m(k_{mp}\xi)J'_m(\zeta_{mp})}{J_m(\zeta_{mp})N'_m(\zeta_{mp}) - N_m(\zeta_{mp})J'_m(\zeta_{mp})}, \tag{14}$$

$$\varphi_{mp}(x,\xi,\eta) = \frac{ch k_{mp}(x+h)}{ch k_{mp}h} Y_m(k_{mp}\xi)\cos m(\eta+\alpha); \tag{15}$$

$J_m(k_{mp}\xi)$ і $N_m(k_{mp}\xi)$ — функції Бесселя і Неймана m-го порядку; $\zeta_{mp} = k_{mp}R_1$ — корені рівняння

$$J'_m(\delta\zeta)N'_m(\zeta) - N'_m(\delta\zeta)J'_m(\zeta) = 0, \qquad \delta = \frac{R_0}{R_1}; \tag{16}$$

h — глибина рідини; R_0 і R_1 — радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндрів відповідно.

Представлення для шуканих функцій (11) і (12) грунтується на розв'язках гідродинамічної проблеми в лінійній постановці задачі для секторіального відсіку, утвореного розбиттям області між двома концентричними циліндричними поверхнями [7]. Порядок функції Бесселя m у цьому випадку залежить від кількості відсіків $k = \dfrac{\pi}{\alpha}$ і визначається залежно від кінематики руху відсіку формулою

$$m = \begin{cases} \dfrac{k(2s+1)}{2}, & s = 0,1,2,\ldots \\ ks, & \end{cases} \tag{17}$$

У кожному відсіку при русі ємності виникають одночасно симетричні і антисиметричні форми коливань рідини, що характеризуються відповідними комбінаціями індексів m і p.

На основі варіаційного методу для визначення параметрів $\beta_i(t)$ і $R_n(t)$ одержано таку нескінченну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь [5]:

$$\begin{gathered} \frac{dA_n}{dt} - \sum_k A_{nk}R_k = 0, \qquad n = 1,2,\ldots, \\ \sum_k \frac{dR_n}{dt}\frac{\partial A_n}{\partial\beta_i} + \frac{1}{2}\sum_n\sum_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial\beta_i}R_nR_k + (\vec{v}_0 - \vec{g})\frac{\partial\vec{l}}{\partial\beta_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$A_n = \rho\int\limits_{Q(t)}\varphi_n dQ, \qquad A_{nk} = A_{kn} = \rho\int\limits_{Q(t)}(\nabla\varphi_n,\nabla\varphi_n)dQ = \rho\int\limits_{S+\Sigma}\varphi_n\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS,$$

$$l_1 = \rho\int\limits_{Q(t)} x dQ, \qquad l_2 = \rho\int\limits_{Q(t)} y dQ, \qquad l_3 = \rho\int\limits_{Q(t)} z dQ, \tag{19}$$

$$\lambda_{i1} = \frac{\partial l_1}{\partial\beta_i} = \rho\int\limits_{\Sigma_0} x f_i^2 dS, \qquad \lambda_{i2} = \frac{\partial l_2}{\partial\beta_i} = \rho\int\limits_{\Sigma_0} y f_i^2 dS, \qquad \lambda_{i3} = \frac{\partial l_3}{\partial\beta_i} = \rho\int\limits_{\Sigma_0} z f_i^2 dS,$$

x, y, z — декартові координати, які пов'язані з циліндричними координатами співвідношеннями

$$x = x, \qquad y = \xi\cos\eta, \qquad z = \xi\sin\eta. \tag{20}$$

Величини A_n і A_{nk} складним чином залежать від параметрів $\beta_i(t)$, що визначають деформації збуреної вільної поверхні рідини (11). Виписати конкретний вигляд нелінійної системи (18) без додаткових припущень на даний час не можливо. Надалі ми обмежимося розглядом скінченновимірної системи рівнянь руху, одержаної із (18) за припущень теорії третього порядку малості відносно параметрів $\beta_i(t)$.

Розглянемо для прикладу циліндричний відсік, утворений розбиттям циліндричного баку діаметральною перегородкою.

Маючи на увазі описання нелінійних фізичних процесів в околі основного резонансу коливань вільної поверхні рідини, із всієї сукупності антисиметричних і симетричних форм коливань залишимо в розгляді тільки ті, які в лінійній теорії дають істотний внесок в приєднані маси і моменти інерції системи тіло – рідина. Із антисиметричних форм — це форми з частотними параметрами $\zeta_{11} = 1{,}84118$ і $\zeta_{31} = 4{,}20119$, а із симетричних — з частотними параметрами $\zeta_{21} = 3{,}05424$ і $\zeta_{01} = 3{,}83171$. Вирази (11), (12) тепер набувають вигляду

$$x = p_0(t)Y_0(k_{01}\xi) - r_1(t)Y_1(k_{11}\xi)\sin\eta - \\ - p_2(t)Y_2(k_{21}\xi)\cos 2\eta + r_3(t)Y_3(k_{31}\xi)\sin 3\eta, \tag{21}$$

$$\varphi(x,\xi,\eta,t) = P_0(t)\psi_{01}(x,\xi) - R_1(t)\psi_{11}(x,\xi)\sin\eta - \\ - P_2(t)\psi_{21}(x,\xi)\cos 2\eta + R_3(t)\psi_{31}(x,\xi)\sin 3\eta. \tag{22}$$

Узагальнена координата $r_1(t)$ відповідає основному тону коливань рідини в лінійному наближенні з частотним параметром $\chi_{11} = k_{11}thk_{11}h$ ($\zeta_{11} = 1{,}8412$). В розглядуваній математичній моделі ми обмежимося величинами третього порядку малості відносно $r_1(t)$, прийнявши $p_0(t)$ і $p_2(t)$ величинами порядку $r_1^2(t)$, а $r_3(t)$ — величиною порядку $r_1^3(t)$. Ця гіпотеза підкріплена в процесі реалізації методу конкретними розрахунками.

Упорядкувавши відповідним чином гармоніки, що відповідають узагальненим координатам $p_0(t)$, $r_1(t)$, $p_2(t)$ і $r_3(t)$ та знайшовши величини A_n, A_{nk}, $\vec{l}$ як функції цих узагальнених координат, на основі (18) одержимо таку систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\mu_0(\ddot{p}_0 + \sigma_0^2 p_0) + d_6 r_1\ddot{r}_1 + d_8\dot{r}_1^{\,2} + \lambda_{12}\dot{v}_{02} = 0;$$

$$\mu_1(\ddot{r}_1 + \sigma_1^2 r_1) + d_1(r_1\dot{r}_1^2 + r_1^2\ddot{r}_1) + d_3(p_2\ddot{r}_1 + \dot{p}_2\dot{r}_1) + \\ + d_4 r_1\ddot{p}_2 + d_5(\dot{p}_0\dot{r}_1 + p_0\ddot{r}_1) + d_6 r_1\ddot{p}_0 - \lambda_{23}\dot{v}_{03} = 0; \tag{23}$$

$$\mu_2(\ddot{p}_2 + \sigma_2^2 p_2) + d_4 r_1\ddot{r}_1 + d_7\dot{r}_1^{\,2} - \lambda_{32}\dot{v}_{02} = 0;$$

$$\mu_3(\ddot{r}_3 + \sigma_3^2 r_3) + d_9 r_1\dot{r}_1^2 + d_{10}r_1^2\ddot{r}_1 + d_{11}\dot{r}_1\dot{p}_2 + d_{12}p_2\ddot{r}_1 + d_{13}r_1\ddot{p}_2 = 0.$$

При виведенні рівнянь (23) приймалося, що вісь Oy є віссю симетрії Σ_0, а індекс i формулах (19) відповідає номеру гармонік у виразі (21).

Таблиця 1

h	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	d_1	d_3	d_4
0,2	0,63578	0,85328	0,26965	0,13357	4,64340	0,91043	−0,75083
0,4	0,45006	0,47964	0,17483	0,09821	0,77045	0,44235	−0,12992
0,6	0,41829	0,37490	0,15460	0,09281	0,34592	0,35823	−0,01997
0,8	0,41173	0,33410	0,14912	0,09184	0,23563	0,33105	0,01460
1,0	0,41033	0,31626	0,14754	0,09166	0,19599	0,32015	0,02801
1,4	0,40997	0,30423	0,14694	0,09162	0,17216	0,31313	0,03632
1,8	0,40995	0,30153	0,14689	0,09162	0,16717	0,31159	0,03807
2,2	0,40995	0,30092	0,14688	0,09162	0,16605	0,31125	0,03846

Таблиця 2

h	d_5	d_6	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}
0,2	2,35691	−0,81239	−1,33682	−0,41442	3,79991	1,18946	−0,28388
0,4	0,89999	−0,18658	−0,44707	−0,05720	0,50706	0,14156	−0,03358
0,6	0,63815	−0,07345	−0,29387	0,00856	0,17351	0,03902	0,00388
0,8	0,55354	−0,03656	−0,24752	0,03052	0,09404	0,01562	0,01256
1,0	0,51960	−0,02163	−0,23008	0,03957	0,06765	0,00820	0,01484
1,4	0,49776	−0,01196	−0,21954	0,04553	0,05296	0,00427	0,01565
1,8	0,49298	−0,00983	−0,21736	0,04685	0,05009	0,00354	0,01571
2,2	0,49190	−0,00935	−0,21688	0,04715	0,04947	0,00338	0,01572

Коефіцієнти системи (23) визначаються деякими квадратурами від циліндричних функцій. Їх числові значення при $\delta = 0$ наведені в табл. 1 і 2.

Нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь (23) дає можливість дослідити різноманітні коливні режими руху рідини і їх стійкість при заданому законі руху резервуару, в тому числі і резонансі. Це буде предметом дослідження окремої публікації.

1. *Абрамсон Х. Н., Гарца Л. Р., Кана Д. Д.* Движение массы жидкости в цилиндрических баках, разделенных на отсеки // Ракетная техника. – 1962. – **6**. – С. 155–158.
2. *Abramson H. N., Chu W. H., Kana D. D.* Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers // Journ. of Appl. Mech. Trans ASME. – 1966. – **33**, No 4. – P. 66–74.
3. *Dodge F. T., Kana D. D., Abramson H. N.* Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers // AIAA Journ. – 1965. – **3**, No 4. – P. 685–695.
4. *Woodward J. H., Bauer H. F.* Fluid behavoir in a longitudinally excited cylindrical tank of arbitrary sector – annural cross section // AIAA Journ. – 1970. – **8**, No 4. – P. 713–719.
5. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
6. *Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // J. Fluid Mech. – 2000. – **407**. – P. 201–234.
7. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А. и др.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наук. думка, 1969. – 250 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 16.08.2000