ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: **ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**

ВИПУСК №5

КИЇВ - 2001

верхню. При проходженні даної маси газорідинного середовища через звужену зону швидкість її переміщення у верхню зону різко зростає, що зумовлено геометричною формою сопла Лаваля. При цьому було відмічено, що в результаті різкого збільшення швидкості переміщення рідини у звуженій зоні тут відбувається суттєве падіння локального тиску рідини до тиску насичених парів. А це, в свою чергу, суттєво інтенсифікує процес кавітації в рідині. В результаті цього рідина у верхній частині моделі повністю насичується мілкими кавітаційними пухирцями, які за рахунок переміщення рідини з верхньої зони в нижню насичують всю рідину в складеній конічній оболонці.

Література

1. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д., Павловский В.С., Пелых Н.А. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. – Київ: Наук. Думка, 1988. - 256 с.
2. Kubenko V.D., Lakiza V.D. Vibration Effects of the Dynamic Interaction between a Gas-Liquid Media and Elastic Shells// Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, № 7. – P. 896-902.
3. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S.Nonlinear Problems of the Dynamics of Elastic Shells Partially Filled with a Liquid// Int. Appl. Mech. 2000. – **36**, № 4. – P.421-448.
4. Лакиза В.Д. Экспериментальные исследования динамического поведения газожидкостных сред в сферических оболочках при воздействии вибрации//Прикл. механика. – 1995. – **31**, №1. – С.68-73.

Надійшла до редакції 15.06.2001

УДК 534.1:629.764.7

Іван О. Луковський*, Олександр В. Солодун*

Варіаційний метод в задачах про нелінійні коливання рідини в циліндричних баках, розділених на секторіальні відсіки. ** **Серія: фізико-математичні науки**

Вивчаються нелінійні коливання рідини в циліндричних секторіальних контейнерах. Використовуючи варіаційний метод виводиться скінченновимірна наближена математична модель руху рідини. Вираховуються гідродинамічні параметри цієї системи.

Ключові слова: сектор, мода.

Ivan O. Lukovsky*, Alexander V. Solodun*

A variational method in a tasks of nonlinear oscillation in cylindrical containers, which is broken on sectors. ** **Series: Physics & Mathematics**

The problem of nonlinear sloshing in a cylindrical sectorial tank is examined. By using variational method a finite dimensional approximate mathematical model of sloshing is derived. Hydrodynamic parameters of this system are calculated.

Key Words: sector, mode.

*E-mail: lukovsky@imath.kiev.ua, solodun@imath.kiev.ua

Проблеми динаміки та стійкості різного роду рідинно-наповнених конструкцій займають важливе місце в сучасній техніці. Особлива увага приділяється задачам, що описують взаємодію твердих чи пружних тіл з обмеженим об'ємом рідини, що частково заповнює порожнини цих тіл. В лінійній постановці ці задачі вважаються добре вивченими, але результати лінійної теорії мають обмежену область застосування. Вже давно завдяки експериментальним та теоретичним дослідженням [1,2,3,4,6,10,15] та ін., були з'ясовані границі застосування лінійної теорії та виявлені фізичні явища, що потребують розгляду з позицій нелінійної теорії. В останні десятиріччя така теорія розвивалася на засадах методу збурень та варіаційних принципів механіки [7,12,16]. Ефективність методів нелінійної динаміки була підтверджена дослідженням цілого ряду конкретних задач [2,5,7,8,9,11,12,13] та ін.

Дана робота присвячена побудові математичної моделі в нелінійній задачі про поступальні рухи циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, розбитого на чотири рівновеликі відсіки двома вертикальними взаємно перпендикулярними діаметральними перегородками. Ця модель одержана варіаційним методом [13], який приводить у випадках циліндричних баків без перегородок [12] і баків у формі паралелепіпеда [5] до добре узгоджених з експериментом результатів. Експериментальними методами розглядувана тут задача досліджувалась в роботах [2,9,10] та ін.

** Робота виконувалася при частковій підтримці ДФФД (наукова робота № 01.07/096).

Абсолютний рух ідеальної нестисливої рідини будемо вивчати у зв'язаній з баком циліндричній системі координат x,ξ,η. Початок O виберемо на незбуреній вільній поверхні Σ_0. Вісь Ox направимо по осі циліндра в напрямі, протилежному вектору сил земного тяжіння $\vec{g}$. Вісь Oy є віссю симетрії Σ_0. Двогранний кут між перегородками позначимо через 2α. Обмежившись розглядом безвихорових рухів рідини, розподіл її швидкостей можна представити у вигляді градієнта потенціальної функції $\Phi(x,\xi,\eta,t)$: $\vec{v} = \nabla\Phi$. При цьому потенціал швидкостей повинен бути розв'язком наступної нелінійної крайової задачі:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \vec{r} \in Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{\upsilon}_0 \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{r} \in S, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{\upsilon}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\varsigma_t}{(\nabla\varsigma, \nabla\varsigma)}, \quad \vec{r} \in \Sigma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot \vec{\upsilon}_0 + U = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma, \tag{4}$$

де $\vec{\nu}$ - орт зовнішньої нормалі до поверхні області Q, зайнятою рідиною; S та Σ - тверда стінка та збурена вільна поверхня рідини відповідно; $\vec{r}$ - радіус - вектор точок об'єму рідини Q у зв'язаній системі координат; $\vec{\upsilon}_0$ - вектор поступального руху об'єму рідини Q; U - потенціал сил земного тяжіння; $\varsigma(x,\xi,\eta,t) = 0$ - рівняння збуреної поверхні рідини, яке надалі представимо у вигляді $x = f(\xi,\eta,t)$. Розподіл тиску в об'ємі рідини визначається за допомогою інтегралу Лагранжа - Коші, записаного у зв'язаній системі координат x,ξ,η

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot \vec{\upsilon}_0 + gx + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \tag{5}$$

де ρ - густина рідини; p_0 - тиск газу над вільною поверхнею рідини.

Не важко показати, що потенціал швидкостей може бути представлений у вигляді суми $\Phi(x,\xi,\eta,t) = \vec{\upsilon}_0 \cdot \vec{r} + \varphi(x,\xi,\eta,t)$, якщо гармонічна функція φ являється розв'язком крайової задачі, що описує рух рідини в нерухомому контейнері

$$\Delta\varphi = 0, \; в \; Q, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + gx = 0, \; на \; \Sigma,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \; на \; S, \quad \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \; на \; \Sigma, \tag{6}$$

при умові збереження об'єму рідини $\int_Q dQ = const$.

Для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (6) застосуємо варіаційний метод [12]. Відповідне формулювання варіаційної проблеми пов'язане з функціоналом

$$W = \int_{Q(t)} (p - p_0) dQ = -\rho \int_{Q(t)} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) + gx \right] dQ, \tag{7}$$

стаціонарні значення якого досягаються на розв'язках крайової задачі (6).

Прямий метод розв'язування варіаційної задачі полягає у конструктивному представленні для заданої області $Q(t)$ форми вільної поверхні $f(\xi,\eta,t)$ і потенціалу швидкостей $\varphi(x,\xi,\eta,t)$ у вигляді

$$x = f(\xi,\eta,t) = \sum_m \sum_p \beta_{mp}(t) f_{mp}(\xi,\eta), \tag{8}$$

$$\varphi(x,\xi,\eta,t) = \sum_m \sum_p R_{mp}(t) \varphi_{mp}(x,\xi,\eta), \tag{9}$$

$$f_{mp}(\xi,\eta) = Y_m(k_{mp}\xi) \cos m(\eta + \alpha), \tag{10}$$

$$Y_m(k_{mp}\xi) = \frac{J_m(k_{mp}\xi) N'_m(\varsigma_{mp}) - N_m(k_{mp}\xi) J'_m(\varsigma_{mp})}{J_m(\varsigma_{mp}) N'_m(\varsigma_{mp}) - N_m(\varsigma_{mp}) J'_m(\varsigma_{mp})}, \tag{11}$$

$$\varphi_{mp}(x,\xi,\eta) = \frac{ch k_{mp}(x+h)}{ch k_{mp} h} Y_m(k_{mp}\xi) \cos m(\eta + \alpha), \tag{12}$$

де $J_m(k_{mp}\xi)$ і $N_m(k_{mp}\xi)$ - функції Беселя і Неймана m-го порядку; $\varsigma_{mp} = k_{mp} R_1$ - корені рівняння $J'_m(\delta\varsigma) N'_m(\varsigma) - N'_m(\delta\varsigma) J'_m(\varsigma) = 0$; h- глибина заповнення рідини; R_0 і R_1 - радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндрів відповідно.

Тут та надалі збережені позначення, прийняті в роботах [14] та [5].

Представлення для шуканих функцій (8) і (9) грунтуються на розв'язках гідродинамічної проблеми в лінійній постановці задачі для секторіального відсіку, утвореного розбиттям області між двома концентричними циліндричними поверхнями [15]. Порядок функції Беселя m у цьому випадку залежить від кількості відсіків $k = \pi/\alpha$ і визначається в залежності від кінематики руху відсіку співвідношеннями

$$m = \begin{cases} k(2s+1)/2, \\ ks, \end{cases} \quad (s = 1,2,..). \tag{13}$$

У кожному відсіку при русі ємності виникають одночасно симетричні та антисиметричні форми коливань рідини, що характеризуються відповідними комбінаціями індексів m і p.

На основі варіаційного методу для визначення параметрів $\beta_i(t)$ і $R_n(t)$ одержано наступну нескінченну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь [12]:

$$\frac{dA_n}{dt} - \sum_k A_{nk} R_k = 0, \quad (n = 1,2,...),$$
$$\sum_n \frac{dR_n}{dt} \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + (\vec{\upsilon}_0 - \vec{g}) \frac{\partial \vec{l}}{\partial \beta_i} = 0, \quad (i = 1,2,..), \tag{14}$$

$$A_n = \rho \int_{Q(t)} \varphi_n dQ, \quad A_{nk} = A_{kn} = \rho \int_{Q(t)} (\nabla\varphi_n, \nabla\varphi_k) = \rho \int \varphi_n \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu} dS,$$
$$\lambda_{i1} = \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} f_i^2 dS, \quad \lambda_{i2} = \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} y f_i dS, \quad \lambda_{i3} = \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} = \rho \int_{\Sigma_0} z f_i dS, \tag{15}$$

$$l_1 = \rho \int_{Q(t)} x dQ, \quad l_2 = \rho \int_{Q(t)} y dQ, \quad l_3 = \rho \int_{Q(t)} z dQ,$$

x, y, z - декартові координати, які пов'язані з циліндричними координатами співвідношеннями $x = x, \quad y = \xi \cos\eta, \quad z = \xi \sin\eta$.

Величини A_n і A_{nk} складним чином залежать від параметрів $\beta_i(t)$, що визначають деформації збуреної вільної поверхні рідини (8). Виписати конкретний вигляд нелінійної системи (14) для кожного конкретного випадку, без додаткових припущень, на даний момент представляє собою складну проблему. Надалі ми обмежимося розглядом скінченовимірної системи рівнянь руху, одержаної із (14) за припущень теорії третього порядку малості відносно параметрів $\beta_i(t)$.

Маючи на увазі описати нелінійні фізичні процеси в околі основного резонансу коливань вільної поверхні рідини, із всієї сукупності антисиметричних і симетричних форм коливань залишимо в розгляді тільки ті, які в лінійній теорії дають суттєвий вклад у приєднані маси і моменти інерції системи "тіло-рідина". Із антисиметричних форм - це форма з частотним параметром $\varsigma_{21} = 3.05424$, із симетричних форм - форми з частотними параметрами $\varsigma_{01} = 3.83181, \varsigma_{41} = 5.31755$. Вирази (8) та (9) набувають тепер наступного вигляду:

$$x = p_0(t)Y_0(k_{01}\xi) + r_2(t)Y_2(k_{21}\xi)\cos 2(\eta + \pi/4) + p_4(t)Y_4(k_{41}\xi)\cos 4(\eta + \pi/4), \quad (16)$$

$$\varphi = P_0(t)\phi_{01}(x,\xi) + R_2(t)\phi_{01}(x,\xi)\cos 2(\eta + \pi/4) + P_4(t)\phi_{01}(x,\xi)\cos 4(\eta + \pi/4). \quad (17)$$

Узагальнена координата $p_0(t)$, відповідає основному тону коливань рідини в лінійному наближенні з частотним параметром $\chi_{01} = k_{01} th k_{01} h$, ($\varsigma_{01} = 3.83181$) при руховi баку в напрямку бісектриси сектору, а $r_2(t)$ - основному тону коливань з частотним параметром $\chi_{21} = k_{21} th k_{21} h$, $\varsigma_{21} = 3.05424$ в перпендикулярному до бісектриси напрямку. В розглядуваній математичній моделі ми обмежимося величинами третього порядку малості відносно $p_0(t)$. Приймаємо, що $p_0(t) \approx r_2(t) \approx \varepsilon$, а $p_4(t) \approx \varepsilon^2$. Ця гіпотеза підкріплена в процесі реалізації методу конкретними розрахунками.

Упорядкувавши відповідним чином гармоніки, що відповідають узагальненим координатам $p_0(t), r_2(t), p_4(t)$ та знайшовши величини $A_n, A_{nk}, \bar{l}$ як функції цих узагальнених координат, на основі (14) одержимо систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\mu_0(p_0'' + \sigma_0^2 p_0) + (2d_1 p_0 + d_2 p_0^2 + d_6 r_2^2)p_0'' + (d_5 r_2'^2 + d_{22} r_2 r_2'')p_0 + \\
&+ (d_1 p_0' + d_2 p_0 p_0' + d_3 r_2 r_2')p_0' + d_4 r_2'^2 + d_7 r_2 r_2'' + \lambda_{12} \upsilon_{02}' = 0, \\
&\mu_2(r_2'' + \sigma_2^2 r_2) + (d_9 p_0 + d_{10} p_0^2 + d_{14} r_2^2 + d_{11} p_4)r_2'' + (d_9 p_0' + 2d_{10} p_0 p_0' + \\
&+ d_{12} r_2 r_2' + d_{11} p_4')r_2' + (d_8 p_0'^2 + d_7 p_0'' + d_{22} p_0 p_0'' + d_{13} p_4'')r_2 + \lambda_{23} \upsilon_{03}' = 0, \\
&\mu_4(p_4'' + \sigma_4^2 p_4) + d_{15} p_0 p_4'' + d_{15} p_0' p_4' + d_{19} p_0'' p_4 + (d_{13} r_2 + d_{21} p_0 r_2) r_2'' + \\
&+ d_{20} p_0'' r_2^2 + (d_{17} r_2' + d_{16} r_2 p_0' + d_{18} r_2' p_0) r_2' + \lambda_{32} \upsilon_{02}' = 0.
\end{aligned} \quad (18)$$

При виведенні рівнянь (18) приймалося, що індекс i у формулах (15) відповідає номеру гармонік у виразі (8). Зауважимо, що в даному випадку вибір узагальнених координат $\beta_i(t)$ відрізняється від аналогічних, вибраних в роботі [14]. Це спричинено геометрією розглядуваного типу баку та характером його руху.

Коефіцієнти системи (18) визначаються деякими квадратурами від циліндричних функцій. Чисельні значення цих коефіцієнтів для випадку $R_0 = 0$, в залежності від глибини заповнення рідини h, наведені в таблиці.

Таблиця

h	μ_0	μ_2	μ_4	d_1	d_2	d_3
0.2	0.31788	0.13482	0.04073	0.06959	-1.82251	-0.52223
0.6	0.20914	0.07730	0.03217	-0.16467	-2.00019	-0.75486
1.0	0.20516	0.07376	0.03206	-0.17141	-1.98474	-0.75647
1.4	0.20498	0.07347	0.03206	-0.17172	-1.98400	-0.75698
1.8	0.20497	0.07344	0.03206	-0.17173	-1.98396	-0.75705
h	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
0.2	-0.23583	-1.06575	-0.45952	-0.10378	0.07569	0.03723
0.6	-0.08895	-0.46881	-0.47135	0.04309	0.39351	0.10088
1.0	-0.08327	-0.44366	-0.46879	0.04877	0.39824	0.10366
1.4	-0.08286	-0.44172	-0.46884	0.04918	0.39871	0.10389
1.8	-0.08283	-0.44156	-0.46885	0.04921	0.39876	0.10391
h	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
0.2	-1.85075	0.23664	-0.29769	-0.08908	0.68543	-0.02502
0.6	-1.08678	0.13581	-0.47043	0.00696	0.09323	0.03260
1.0	-1.03820	0.13140	-0.46040	0.01085	0.07751	0.03324
1.4	-1.03408	0.13104	-0.45943	0.01116	0.07630	0.03325
1.8	-1.03372	0.13101	-0.45934	0.01118	0.07620	0.03325
h	d_{16}	d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}	d_{21}
0.2	0.51363	-0.17552	-0.07997	-0.09094	-0.04106	-0.14076
0.6	-0.00348	-0.07947	-0.26154	-0.04724	-0.14520	-0.29640
1.0	-0.01612	-0.07558	-0.25793	-0.04619	-0.14754	-0.29119
1.4	-0.01702	-0.07527	-0.25753	-0.04615	-0.14780	-0.29066
1.8	-0.01710	-0.07525	-0.25750	-0.04614	-0.14783	-0.29061

Нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь (18) дає можливість дослідити різноманітні коливні режими руху рідини та їх стійкість при заданому законові руху резервуару, в тому числі і у випадку резонансів. Це буде предметом окремого дослідження.

Література

1. *Abramson H.N.* The dynamic behavior of liquid in moving containers. NASA SP-106, Washington, D.C., 1966. 467p.
2. *Abramson H.N., Chu W.H., Kana D.D.* Some Studies of Nonlinear Lateral Sloshing in Rigid Containers. Journal of Applied Mechanics. 1966. **33**, №4. P.

66 - 74.
3. *Cooper R.M.* Dynamic of liquid in moving containers// ARS J. 1960. **30,** №8. P. 725 – 729.
4. *Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N.* Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers // AIAA Journ. 1965. **3**, №4. P. 685 - 695.
5. *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // J. Fluid Mech., 2000, **407**, P. 201 - 234.
6. *Hara Fumio.* Experimental study on sloshing characteristics of a flowing liquid in a tank // JSME Int. J.Ser.3 (1990), **33**, № 3, P. 330-338.
7. *Miles J.W.* Nonlinear surface waves in closed basins// J. Fluid Mech. 1976, **75**, №3. P. 419 – 448.
8. *Hutton R.E.* An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container // AIAA Fifth Annual Structures and Materials Conference, Fifth Palm. Springcalif., April 1-3, 1964, P. 191 - 194.
9. *Woodward J.H., Bauer H.F.* Fluid behaviour in a longitudinally excited cylindrical tank of arbitrary sector - annular cross section// AIAA Journ. 1970, **8**, №4. P. 713 - 719.
10. *Абрамсон Н.Х., Гарца, Кана Д.Д.* Движение массы жидкости в цилиндрических баках, разделённых на отсеки // Ракетная техника. 1962, №6. С. 155 - 158.
11. *Лимарчено О.С.* Вариационная формулировка задачи о движении резервуара с жидкостью // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978, №10. с. 904 – 908.
12. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твёрдого тела с полостями, содержащими жидкость. - Киев: Наук. думка, 1990. 296с.
13. *Луковський И.А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объёма жидкости со свободной поверхностью. В кн.: "Колебания упругих конструкций с жидкостью". М.: Волна. 1976, с. 260 - 264.
14. *Луковский И.А., Солодун О.В.* Нелінійна модель руху маси рідини в циліндричних ємностях, розділених на відсіки. Доповіді НАНУ, 2000, №5, с 51 - 55.
15. *Фещенко С.Ф., Луковский И.А.* и др. Методы определения присоединённых масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка, 1969, 250 с.
16. *Луковский И.А., Тимоха А.Н.* Нелинейная теория плесканий жидкости в подвижных полостях. В кн.: "Вопросы аналитической механики и её применений." // Труды Института математики НАН Украины. Т.**26**, Киев:, 1999, с. 169 – 200.

Надійшла до редакції 15.06.2000

УДК 517.946:621.77

В.П.Ляшенко, Н.Г.Кирилаха

Построение математической модели термической обработки трехмерных осесимметричных тел

Предложена математическая модель, позволяющая подобрать параметры процесса обработки металла для достижения требуемых показателей процесса.

Ключевые слова: математическая модель, термическая обработка.

V.P.Lyashenko, N.G.Kirilaha

Construction of three-dimensional axially symmetric bodies termic treatment mathematical model

The mathematical model is proposed for determination of treatment process parameters to achieve tolerant process indexes.

Key words: mathematical model, termic treatment.

E-mail: n_kirilaha@hotbox.ru@mailru.com

В металлургии при получении заготовок под пластическую деформацию из порошковых металлов используется технологическая схема получения штабиков. Эта схема состоит из целого ряда технологических операций. Создание металлической структуры осуществляется путем применения операций спекания в муфельных печах в защитной атмосфере и сварки в вакуумных или специальных колпаковых аппаратах в атмосфере защитного газа. Штабики нагреваются проходящим через них электрическим током до температуры близкой к температуре плавления материала. Температура повышается равномерно и медленно , особенно в начальной стадии процесса, что ведет к активной сегрегации примесей по границам образующихся зерен к поверхности. Концы штабика закреплены в водоохлаждаемых токоподводящих контактах и имеют гораздо более низкую температуру [1].

С геометрической точки зрения штабик представляет собой прямоугольный параллелепипед конечной длины, разогреваемый внутренними источниками тепла. Определение температурного поля штабика в процессе сварки приводит к решению краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности: [2]