Академия наук Украинской ССР

Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Сборник научных трудов

Киев

Институт математики АН УССР

1989

УДК 517.987

С.Ф. К о л я д а

О ТРЕУГОЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТИПА 2^∞ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНТРОПИЕЙ.

1. В в е д е н и е . Динамическую систему, задаваемую непрерывным отображением f компакта X в себя ($f: X \circlearrowleft$), естественно называть структурно сложной, если её топологическая энтропия $h(f)$ положительна. Какие свойства характеризуют структурно сложную систему, что может служить признаком сложности её структуры? Поскольку $h(f)=h(f|_{C(f)})$, где $C(f)$ – центр динамической системы [1], и по теореме Биркгофа – центр $C(f)$ совпадает с замыканием множества точек, устойчивых по Пуассону $\overline{Pois(f)}$ ([2], см. также [3]), то, чтобы дать ответ на поставленные вопросы, необходимо, прежде всего, изучить структуру множества $\overline{Pois(f)}$.

Если $f\in C(I,I)$, I – отрезок из R^1, то теорема Биркгофа о структуре центра существенно уточняется $\overline{Pois(f)}=\overline{Rec(f)}=\overline{Per(f)}$, где $Rec(f)$ – множество рекуррентных точек, $Per\,f$ – множество периодических точек [4, 5], и удаётся получить ряд эквивалентных утверждений, позволяющих решать вопрос о сложности отображения (см. [6]). Тому, что топологическая энтропия $h(f)$ положительна, например, равносильны следующие утверждения:

1) существует периодическая траектория периода $\neq 2^t$, $t=0,1,2,\dots$ [7];

2) множество устойчивых по Пуассону точек отлично от множества рекуррентных точек: $Pois(f)\neq Rec(f)$ [8];

3) множество периодических точек не есть G_δ -множество [9].

Естественно возникает задача: имеются ли какие-либо утверждения, аналогичные приведенным, для непрерывных отображений, заданных в R^n, $n\geq 2$ (см. [10]).

В настоящей работе показано, что динамические свойства многомерных отображений, фазовое пространство которых последовательно расслаивается на инвариантные одномерные подпространства (отрезки), уже могут существенно отличаться от свойств одномерных отображений.

2. Ф о р м у л и р о в к а р е з у л ь т а т о в . Пусть $I^2\subset R^2$ – прямое произведение отрезков I_1 и I_2 ($I^2=I_1\times I_2$)

и $F\in C(I^2,I^2)$ – треугольное отображение, т.е. $F:(x,y)\mapsto(f(x),g(x,y))$ для любой точки $(x,y)\in I^2$, где $f\in C(I_1,I_1)$, $g\in C(I_1\times I_2,I_2)$.

Порядок Шарковского сосуществования периодов циклов отображений интервала [11] имеет место для непрерывных треугольных отображений $F: I^2\circlearrowleft$ [12]. Благодаря этому, нетрудно показать (повторив рассуждения, использующиеся при доказательстве соответствующих утверждений для отображений отрезка [13, 14]), что топологическая энтропия $h(F)$ равна нулю, если периоды циклов отображения F равномерно ограничены, и положительна, если F имеет цикл периода $\neq 2^t$, $t=0,1,2,\dots$. Более того, если периоды циклов "базисного" отображения $f: I_1\circlearrowleft$ равномерно ограничены, то динамические свойства треугольного отображения $F:I^2\circlearrowleft$ определяются отображениями отрезков. Однако, как будет показано ниже, в отличие от одномерного случая, топологическая энтропия треугольного отображения $F:I^2\circlearrowleft$ типа 2^∞ (F имеет циклы периодов всех степеней 2 и не имеет циклов других периодов) уже может быть положительной. В этом случае может наблюдаться также другое отличие динамических свойств треугольного отображения $F:I^2\circlearrowleft$ от свойств одномерных отображений: $\overline{Pois(F)}\neq\overline{Rec(F)}\neq\overline{Per(F)}$.

Т е о р е м а . Существуют непрерывные треугольные отображения типа 2^∞ $F_1: I^2\circlearrowleft$ и $F_2: I^2\circlearrowleft$, обладающие следующими свойствами:

А. $\overline{Pois(F_1)}=\overline{Rec(F_1)}\neq\overline{Per(F_1)}$ и $h(F_1)=0$;

Б. $\overline{Pois(F_2)}\neq\overline{Rec(F_2)}=\overline{Per(F_2)}$ и $h(F_2)>0$.

3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы . В связи с тем, что имеется различие в терминологии, уточним: $Pois(F)$ – множество точек, устойчивых по Пуассону (точек, принадлежащих своему ω -предельному множеству); $Rec(F)$ – множество рекуррентных точек (точек (x,y), для любой окрестности U которых множество тех n_i, $i=0,1,2,\dots$, для которых $F^{n_i}(x,y)\in U$, относительно плотно, т.е. имеется такое $N=N(U)$, что в любом отрезке $[s,s+N]$, $s=0,1,2,\dots$ имеется хоть одна точка этого множества).

Будем говорить, что I_1 – база I^2, обозначать $I_1\times\{y\}$ через I_1^y, для любого $y\in I_2$, $\{x\}\times I_2$ через I_2^x, для любого $x\in I_1$, и называть эти множества сечениями (соответственно горизонтальным и вертикальным). Отображение $f: I_1\circlearrowleft$ будем называть базисным отображением для отображения $F:I^2\circlearrowleft$

А. Пусть база I_1 – стандартный единичный отрезок $[0,1]$, а базисное отображение – квадратичное отображение $f: x \mapsto \lambda^* x(1-x)$, $\lambda^* = 3{,}569\ldots$, типа 2^∞. В этом случае $C(f) = \mathrm{Per}(f) \cup K$, где K – канторово множество, не содержащее периодических точек отображения $f: I_1 \circlearrowleft$ ($K = \overline{\mathrm{Per}(f)} \setminus \mathrm{Per}(f)$).

Пусть $I_2 = [0,1]$. Положим $g(x,y) = g_1(x) \cdot y$, где $g_1(x)$ – непрерывная функция $[0,1] \to [0,1]$ равная 1, если $x \in K$, и меньше 1, если $x \notin K$ (это может быть и функция класса C^∞).

В этом случае любая точка $(x,y) \in K \times I_2$ для непрерывного треугольного отображения $F_1: (x,y) \mapsto (f(x), g(x,y))$ будет рекуррентной, поскольку $F_1: (x,y) \mapsto (f(x), y)$ и $x \in \mathrm{Rec}(f)$. Следовательно, множество $K \times I_2$ принадлежит центру $C(F_1)$.

Точка $(x,y) \in \mathrm{Per}(F_1)$, если существует $m > 0$, что $f^m(x) = x$ и $h^m_x(y) = y$, где $h_x(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g(x,y)$ и $h^m_x(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} h_{f^m(x)}(h_{f^{m-1}(x)} \ldots (h_{f(x)}(h_x(y))))$. Поскольку $h_x(0) = 0$ при любом $x \in I_1$; $\frac{d}{dy} h^{(n)}_x(y) < 1$ для любых $n = 1,2,\ldots$, фиксированного $x \in I_1 \setminus K$ и $y \in I_2$, то периодическими точками отображения $F_1: I^2 \circlearrowleft$ являются лишь точки вида $(x,0)$, где $x \in \mathrm{Per}(f)$.

Итак, очевидно $C(F_1) = K \times [0,1] \cup \mathrm{Per}(f) \times \{0\}$ и $\mathrm{Per}(F_1) = \mathrm{Per}(f) \times \{0\}$. Следовательно, $C(F_1) \setminus \overline{\mathrm{Per}(F_1)} = K \times [0,1]$ и поскольку $F_1|_{K \times [0,1]} = f_K \times \mathrm{id}_{[0,1]}$, то из [7] получаем $h(F_1) = 0$.

Заметим, если вместо $g_1(x)y$ взять $g_1(x)y^2$, то очевидно $C(F_1) \setminus \overline{\mathrm{Per}(F_1)} = K \times \{1\}$ и, следовательно, из [7] следует, что $h(F_1) = 0$.

Б. Пусть I^2, как и в п.А,– прямое произведение отрезков $[0,1]$, $f: x \mapsto \lambda^* x(1-x)$ – отображение типа 2^∞. Известно [15] (см. также [16]), что для отображения f существует система отрезков $J^{(n)}_k$, $0 \le k < 2^n$, $n = 0,1,2\ldots$, обладающая следующими свойствами: а) отрезки $J^{(n)}_k$ попарно не пересекаются при разных k, $0 \le k < 2^n$, и $\frac{1}{2} \in J^{(n)}_0$; б) $f(J^{(n)}_k) = J^{(n)}_{k+1}$, $0 \le k < 2^n - 1$, $f(J^{(n)}_{2^n-1}) = J^{(n)}_0$; в) каждый отрезок $J^{(n-1)}_k$ содержит ровно два отрезка n-го ранга: $J^{(n)}_k$ и $J^{(n)}_{k+2^{n-1}}$ и интервал $U^{(n-1)}_k = J^{(n-1)}_k \setminus (J^{(n)}_k \cup J^{(n)}_{k+2^{n-1}})$ содержит единственную периодическую точку $p^{(n-1)}_k$, период которой 2^{n-1}; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{0 \le k \le 2^n-1} |J^{(n)}_k| = 0$ и $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{k=0}^{2^n-1} J^{(n)}_k$.

Обозначим $U^{(n)}_0$ через (a_n, b_n), $n = 1,2,\ldots$, и положим $g(x,y) = g_1(x) g_2(y)$, где

$$g_1(x) = \begin{cases} 2^{1-i}, \text{ если } x \in J^{(n)}_{2^n-1},\ n \in [n_i, n_{i+1}],\ i = 1,2,\ldots, \text{ где } 1 = n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \text{ – последовательность целых чисел, выбор которой будет уточнен ниже,} \\ 0, \text{ если } x \in \{0, \tfrac{1}{2}, p^{(n)}_0\},\ n = 1,2,3,\ldots, \\ \text{непрерывная монотонно убывающая на } [a_n, p^{(n)}_0) \text{ функция и непрерывная монотонно возрастающая на } (p^{(n)}_0, b_n] \text{ и на } [0, f^2(\tfrac{1}{2})] \text{ функция } n = 1,2,3,\ldots, \end{cases}$$

$$g_2(y) = \begin{cases} 2y, \text{ если } y \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ 2(1-y), \text{ если } y \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Тогда $F_2: (x,y) \mapsto (f(x), g_1(x) g_2(y))$ – треугольное непрерывное отображение $I^2 \circlearrowleft$ типа 2^∞, поскольку $h^{2^n}_x(y) = 0$ для любых $n = 0,1,2,\ldots$, и фиксированного $x \in \mathrm{Per}(f)$.

Напомним необходимое нам определение топологической энтропии (см. [17]). Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $F: X \circlearrowleft$ равномерно непрерывное отображение. Подмножество E пространства X называется (n,ε)-раздельным, если для любых двух различных точек z_1, z_2 из E существует $0 \le j < n$, что $\rho(F^j(z_1), F^j(z_2)) > \varepsilon$. Если M – компактное подмножество X, через $s_n(\varepsilon, M, F)$ обозначим максимальное возможное число точек в (n,ε)-разделенных подмножествах M (в силу компактности M и равномерной непрерывности F, $s_n(\varepsilon, M, F) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$). Положим $\bar{s}(\varepsilon, M, F) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, M, F)$. Поскольку $s_n(\varepsilon_1, M, F) \le s_n(\varepsilon_2, M, F)$, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то и $\bar{s}(\varepsilon_1, M, F) \le \bar{s}(\varepsilon_2, M, F)$ для $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Топологическая энтропия отображения $F: X \circlearrowleft$ относительно компактного подмножества M и топологическая энтропия отображения $F: X \circlearrowleft$ определяются соответственно формулами $h(F, M) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \bar{s}(\varepsilon, M, F)$ и $h(F) = \sup\{h(F, M) / M$ – компактное подмножество $X\}$.

Если $F: I^2$ – непрерывное треугольное отображение, то для вычислений (или оценок) топологической энтропии $h(F)$, вместо обычной (евклидовой) метрики $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ в $\mathbb{R}^2$, удобно использовать эквивалентную ей (в топологическом смысле) метрику произведения $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$.

В силу [17] топологические энтропии $h_d(F)$ метрического пространства (I^2, d) и $h_\rho(F)$ метрического пространства (I^2, ρ) равны.

Обозначим $\sup_{x \in I_1} h(F, I_2^x)$ через $h_f(g)$ (ср. с [18])

По определению $h(F) \geq \max\{h(f); h_f(g)\}$.

Для оценки снизу топологической энтропии $h(F_2)$ отображения $F_2 : (x,y) \mapsto (\lambda^* x(1-x), g_1(x) g_2(y))$ вычислим максимальную мощность (n, ε) -разделённых подмножеств компакта $I_2^{f(1/2)}$.

Выберем последовательность $\{n_t\}_{t=1}^{\infty}$ так, чтобы $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{1-n_{t+1}} < 1$. На самом деле, для любого $\delta > 0$ можно указать последовательность $n_t = n_t(\delta)$, что $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{1-n_{t+1}} < \delta$.

Тогда нетрудно видеть, что $F_2^{2^{n_t - 1}}(I_2^{f(1/2)}) = I_2^{f^{2^{n_t-1}}(1/2)}$ и

$$h(F, I_2^{f(1/2)}) \geq \overline{\lim_{t \to \infty}} (2^{n_t - n_1} - 1)^{-1} \log 2^{(2^{n_t-n_1}-1)\cdot(2^{n_t-n_2}-1)\cdots(2^{n_t-n_t}-1)} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \log 2^{1-\sum_{i=1}^{t} 2^{1-n_{i+1}}}$$

Следовательно, для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует последовательность $\{n_t\}_{t=1}^{\infty}$, что $h_f(g) \geq \log 2 - \delta$. Поскольку $h(F_2) \geq \max\{h(f); h_f(g)\}$ и $h(f) = 0$, то $h(F_2) \geq \log 2 - \delta > 0$. Множество периодических точек отображения $F_2 : I^2 \circlearrowleft$ есть G_δ -множество, поскольку $Per(F_2) = Per(f) \times \{0\}$ и так как $h(F_2) = h(F_2|_{C(F_2)}) > 0$; то $C(F_2) \neq \overline{Per(F_2)}$. Таким образом, существуют устойчивые по Пуассону точки из $K \times (0,1]$. Покажем, что ни одна из них не является рекуррентной.

Действительно, пусть $(x,y) \in K \times (0,1]$ – рекуррентная точка. Тогда для любой её окрестности U необходимо существование $N = N(U)$ такого, что в любом отрезке $[s+(k-1)N, s+kN]$ при фиксированном $s \geq 0$ и $k = 1,2,\ldots$ существует n_k, что $F_2^{n_k}(x,y) \in U$. Пусть, например, окрестность U точки (x,y) такова, что $|y - y^*| < \min\{\frac{1-y}{2}; \frac{y}{2}\}$ для любой точки $(x^*, y^*) \in U$. Тогда существует $t \geq 0$ и $\ell = \ell(x)$, что $F_2^{2^{n_{t-1}} - \ell + j_t}(I_2^x) \subset J^2$, где $J^2 = I_1 \times [0, y - \min\{\frac{1-y}{2}; \frac{y}{2}\}]$, при всех $j_t \in \overline{0, m_t}$ и $m_i \to \infty$, если $i \to \infty$. Следовательно, точка (x,y) не является рекуррентной.

Таким образом, $\overline{Per(F_2)} = \overline{Rec(F_2)} = (Per(f) \cup K) \times \{0\} \neq \overline{Pois(F_2)}$ и $h(F_2) > 0$.

4. П р и м е ч а н и е . Остаётся открытым вопрос: верно ли, что для непрерывных треугольных отображений $F_2 : I^2 \circlearrowleft$ утверждения 1) $Pois(F) \neq Rec(F)$ и 2) $h(F) = 0$ эквивалентны? Как известно [19], для произвольных непрерывных отображений в $\mathbb{R}^n$, это не так: существуют минимальные отображения двумерного тора с положительной энтропией.

С п и с о к   л и т е р а т у р ы

1. Bowen R. Topological entropy and Axiom A // Global Anal., Proc. Symp. in pure Math., American Math. Society.- 1970.- 14.- p.23-41.
2. Н е м ы ц к и й В.В., С т е п а н о в В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.-2-е изд.- М.; Л.: Гостехиздат, 1949.- 550 с.
3. Б и р к г о ф Дж. Д. Динамические системы. - М.: Гостехиздат, 1941.- 320 с.
4. Ш а р к о в с ь к и й О.М. Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе // Доп. АН УРСР.- 1964.- № 7.- С. 865-868.
5. Coven E.M., Hedlund G.A. $\bar{P} = \bar{R}$ for maps of the interval // Proc. Amer. Math. Soc. - 1980.- 79, №2.- p.316-318.
6. Ш а р к о в с к и й А.Н., М а й с т р е н к о Ю.Л., Р о м а н е н к о Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения.- Киев: Наук. думка, 1986.- 280 с.
7. Misiurewicz M. Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys.- 1979.- 27, №2.- p. 167-169.
8. Ф е д о р е н к о В.В. Непрерывные отображения отрезка с замкнутым множеством почти периодических точек // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам в математике.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 79.
9. Ш а р к о в с к и й А.Н. Притягивающие множества, не содержащие циклов // Укр. мат. журн .- 1968.- 20, № 1 .- С. 136-142.
10. Ш а р к о в с к и й А.Н. Некоторые задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи мат.наук.-1983.-38, № 5.- С. 172.

11. Ш а р к о в с к и й А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн.- 1964.- 16, № 1, С. 61-71.

12. Kloeden P.E. On Sharkovsky's cycle coexistence ordering // Bull. Austral. Math. Soc.- 1979.- 20.- p. 171-177.

13. Block L. Mappings of the interval with finitely many periodic points have zero entropy // Proc. Amer. Math. Soc.- 1977.- 67, N 2.- p. 357-360.

14. Bowen R., Franks J. The periodic points of maps of the disk and the interval // Topology.- 1976.- 15, N 4.- p. 337-342.

15. Misiurewicz M. Structure of mappings of an interval with zero entropy // Publ. Math. IHES.- 1981.- 53.- p. 5-16.

16. В у л Е.Б., С и н а й Я.Г., Х а н и н К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи мат. наук./- 1984.- 39, № 3.- С. 3-37.

17. Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. - 1971.- 153.- p. 401-404.

18. А б р а м о в Л.М., Р о х л и н В.А. Энтропия косого произведения преобразований с инвариантной мерой // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика, механика и астрономия. - 1962. - № 7. С. 5-13.

19. Rees M. A minimal positive entropy homeomorphism of the 2-torus // J. London Math. Soc.- 1981.- 23, N 3.- p. 538-550.

УДК 517.9

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ : Сб. науч. тр./Редкол. Шарковский А.Н. (отв.ред.) и др.- Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.- 123 с.

Работы сборника посвящены исследованию на основе достижений современной теории динамических систем сложных нелинейных явлений и процессов турбулентного типа, выяснению общих закономерностей их эволюции. В частности изучаются математические механизмы турбулентности, образования структур и перехода к хаосу, странные аттракторы и др.

Для специалистов по теории динамических систем, синергетике, нелинейной динамике.

Рецензент В.М.Елеонский

Утверждено к печати ученым советом
Института математики АН УССР