Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 51–62

УДК 517.912:512.816

Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі

В.М. БОЙКО †, ***Р.О. ПОПОВИЧ*** ‡

Інститут математики НАН України, Київ

† *E-mail: boyko@imath.kiev.ua*
‡ *E-mail: rop@imath.kiev.ua*

Доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку однопараметричної групи локальних перетворень в просторі n незалежних та m залежних змінних будується через одну квадратуру і диференціювання.

It is proved that if universal invariant for one-parameter group of local transformations in the space of n independent and m dependent variables is known then the complete set of its functionally independent differential invariants can be constructed via one quadrature and differentiation.

1. Вступ. Диференціальні інваріанти широко застосовуються при інтегруванні в квадратурах або пониженні порядку звичайних диференціальних рівнянь, а також для опису класів інваріантних диференціальних рівнянь, тому їх теорія є важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. В теорії диференціальних інваріантів особливу роль відіграють різні варіанти теореми про скінчений базис диференціальних інваріантів, що нестрого формулюється наступним чином: *для довільної групи G локальних перетворень існує такий скінчений набір диференціальних інваріантів, що кожен диференціальний інваріант групи G є функцією цих інваріантів та їх похідних.* Вперше твердження такого типу (для однопараметричної групи локальних перетворень у просторі двох змінних) отримано ще С. Лі наприкінці XIX ст. [1] (див. також [2, 3]) і невдовзі суттєво узагальнено А. Трессом [4]. Прогрес останнього часу в цьому напрямі пов'язаний з роботами Л.В. Овсяннікова [5] і П. Олвера [6]–[9], де введено поняття оператора інваріантного диференціювання, інваріантного кофрейму дифренціальних форм та ін., отримано, зокрема, результати зі стабілізації рангу продовженої дії групи і оцінки кількості диференціальних інваріантів.

В цій статті вивчаються диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень в просторі n незалежних та m залежних змінних ($m, n \in \mathbb{N}$). (Випадок $n = m = 1$ розглянуто в [10], а результати для для випадку $n = 1$ при довільному $m \in \mathbb{N}$ опубліковано в [11].) Важливість такої задачі обумовлена тим, що побудова диференціальних інваріантів однопараметричної групи локальних перетворень є складовою задачі пошуку диференціальних інваріантів для групи довільної розмірності [3]. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень проведено не тільки за кількістю залежних і незалежних змінних, але й і безпосереднім посиленням її твердженням. А саме, доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи будується через одну квадратуру і диференціювання. Проаналізовано зв'язок між диференціальними інваріантами першого порядку і інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

2. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти. Нехай $Q = \xi^a(x,u)\partial_{x_a} + \eta^i(x,u)\partial_{u^i}$ — інфінітезімальний оператор однопараметричної групи G локальних перетворень, що діє на множині $M \subset J_{(0)} = X \times U$, де $X \simeq \mathbb{R}^n$ — простір незалежних змінних $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $U \simeq \mathbb{R}^m$ — простір залежних змінних $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, $G^{(r)}$ — продовження дії групи G на підмножину $M_{(r)} = M \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(r)}$ продовженого простору $J_{(r)} = X \times U_{(r)}$ струменів r-го порядку над простором $X \times U$ (тут $U_{(r)} = U \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(r)}$, $r \geq 1$, $Q^{(r)}$ — r-те продовження оператора Q (див. [3, 8]). Диференціальним інваріантом r-го порядку групи G (або оператора Q) називається функція $I\colon M_{(r)} \to \mathbb{R}$, яка є інваріантом продовженої дії $G^{(r)}$. Необхідною і достатньою умовою для того, щоб функція I була диференціальним інваріантом r-го порядку групи G, є співвідношення $Q^{(r)}I = 0$.

Тут і надалі, якщо не обумовлено інше, індекси a, b, c, d змінюються від 1 до n, індекси i, j, k, l — від 1 до m. За індексами, що повторюються, йде підсумовування.

Нехай $I = I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — повний набір функціонально незалежних інваріантів (або *універсальний інваріант* [5]) оператора Q, а $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції $I^1(x,u)$, $I^2(x,u)$, $\dots$, $I^{m+n-1}(x,u)$

і $J(x,u)$ — функціонально незалежні. Виконаємо локальну заміну змінних: $y_c = I^c(x,u)$, $c = \overline{1,n-1}$, $y_n = J(x,u)$ — нові незалежні змінні та $v^i = I^{i+n-1}(x,u)$ — нові залежні змінні. В змінних $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ і $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$ оператор Q має вигляд ∂_{y_n}. Отже, для будь-якого $r \geq 1$ вигляд продовженого оператора $Q^{(r)}$ співпадає з $Q = \partial_{y_n}$, а тому

$$\hat{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$
$$v_{(r)} = \left\{ v^i_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} v^i}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} \;\middle|\; \alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ |\alpha| = \sum_{a=1}^{n} \alpha_a \leq r \right\}$$

(тут $v^i_\alpha = v^i$, якщо $|\alpha| = 0$) утворюють повний набір його функціонально незалежних інваріантів, тобто $(\hat{y}, v_{(r)})$ — універсальний інваріант групи $G^{(r)}$. (Функціональна незалежність компонент $\hat{y}$ і $v_{(r)}$ очевидна, бо $(y, v_{(r)})$ є набором змінних у просторі $J_{(r)}$.) Це означає, що $(\hat{y}, v)$ є фундаментальним набором диференціальних інваріантів оператора Q, тобто будь-який диференціальний інваріант оператора Q можна зобразити як функцію від $\hat{y}$ і v та похідних v за операторами G-інваріантного диференціювання, які співпадають тут з операторами $D_{y_a} = \partial_{y_a} + v^i_{y_a}\partial_{v^i} + v^i_{y_a y_b}\partial_{v^i_{y_b}} + \cdots$ повних похідних за змінними y_a.

Повернемося до змінних x, u. В цих змінних

$$\begin{aligned} D_{y_c} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, d\neq c,\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a}, \quad c = \overline{1,n-1}, \\ D_{y_n} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1})}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $D_{x_a} = \partial_{x_a} + u^i_{x_a}\partial_{u^i} + u^i_{x_a x_b}\partial_{u^i_{x_b}} + \cdots$ — оператор повної похідної за змінною x_a, а

$$\frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, d\neq c,\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)},\ \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1})}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)},\ \Delta = \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n})}$$

позначають якобіани (з повних похідних)

функцій I^d, $d = \overline{1,n-1}$, $d \neq c$, J за змінними x_b, $b = \overline{1,n}$, $b \neq a$,

функцій I^d, $d = \overline{1,n-1}$ за змінними x_b, $b = \overline{1,n}$, $b \neq a$,

функцій I^d, $d = \overline{1,n-1}$, J за змінними x_b, $b = \overline{1,n}$,

відповідно.

Як результат отримаємо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай* $I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ *— універсальний інваріант оператора* Q, $J(x,u)$ *— частинний розв'язок рівняння* $QJ = 1$. *Тоді функції*

$$I^c(x,u), \quad D^{\alpha_1}_{y_1} D^{\alpha_2}_{y_2} \dots D^{\alpha_n}_{y_n} I^{i+n-1}(x,u),$$

де $c = \overline{1, n-1}$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum_{a=1}^n \alpha_a \le r$, *а оператори* D_{y_a} *визначаються формулами (1), утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант)* r*-го порядку оператора* Q.

Наслідок 1. *Для будь-якого оператора* Q *існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів* r*-го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних* u^i_α $(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \sum_{a=1}^n \alpha_a \le r)$ *продовженого простору* $J_{(r)}$ *з коефіцієнтами, що залежать від* x_a *та* u^j.

Наслідок 2. *Якщо* $I = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ *— універсальний інваріант оператора* Q *і* $J = J(x,u)$ *— частинний розв'язок рівняння* $QJ = 1$, *то функції*

$$\begin{aligned} D_{y_c} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, d\neq c,\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a} I^{i+n-1}, \\ D_{y_n} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1})}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a} I^{i+n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

$(c = \overline{1, n-1})$ *утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора* Q.

Зауважимо, що за відомого універсального інваріанта I оператора Q частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$ легко знаходиться через одну квадратуру. Наприклад, у випадку, коли для деякого фіксованого a $\xi^a \neq 0$, маємо частинний розв'язок

$$J(x,u) = \int dx_a / \xi^a(X^1 \dots, X^{a-1}, x_a, X^{a+1}, \dots, X^n, U^1, \dots, U^m),$$

де $x_b = X^b(x_a, C)$, $b \neq a$, $u^j = U^j(x, C)$ — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x,u) = C := (C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1})$ відносно змінних x_b, $b \neq a$, u^j, а після інтегрування необхідно виконати зворотну підстановку $C = I(x,u)$ (підсумовування по a тут немає). Аналогічно, коли $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого i, тоді можна покласти

$$J(x,u) = \int du^i / \eta^i(X^1, \dots, X^n, U^1, \dots, U^{i-1}, u^i, U^{i+1}, \dots, U^m)$$

(підсумовування по i тут немає), де $x_b = X^b(u^i, C)$, $u^j = U^j(u^i, C)$, $j \neq i$, — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C$ відносно змінних x_b, u^j, $j \neq i$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо знайдено універсальний інваріант оператора Q, то повний набір його функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку будується через одну квадратуру і диференціювання.*

3. Інваріантні диференціали. Введемо поняття інваріантного диференціала що є частинним випадком більш загального поняття контактно-інваріантної диференціальної форми першого порядку у продовженому просторі [7].

Означення. *Диференціал $dW(x, u)$ назвемо інваріантним відносно групи G (оператора Q), якщо він не змінюється під дією перетворень з групи G.*

Необхідною і достатньою умовою інваріантності диференціала є рівність $dQW(x, u) = 0$. Можливі два принципово різні випадки:

1) функція $W(x, u)$ є інваріантом оператора Q, тобто $QW(x, u) = 0$; диференціал $dW(x, u)$ автоматично є інваріантним відносно оператора Q (*інваріантний диференціал першого роду*);

2) функція $W(x, u)$ не є інваріантом оператора Q, але диференціал $dW(x, u)$ інваріантний відносно оператора Q (*інваріантний диференціал другого роду*); тоді $QW(x, u)$ — ненульова стала.

Якщо відомо деякий набір функцій $I(x, u) = (I^q(x, u))_{q=\overline{1,m+n-1}}$ і $J(x, u)$, що задають універсальний інваріант і інваріантний диференціал оператора Q другого роду відповідно, то всі такі набори, очевидно, можна знайти за формулами

$$\hat{I}(x, u) = F(I(x, u)), \qquad \hat{J}(x, u) = J(x, u) + H(I(x, u)), \tag{3}$$

де $F = (F^1, F^2, \ldots, F^{m+n-1})$ і H — диференційовні функції своїх аргументів, $|\partial F/\partial I| \neq 0$. Формули (3) визначають відношення еквівалентності Ω на множині $\mathcal{M}$ наборів з $m + n$ гладких функцій від $m + n$ змінних з ненульовим якобіаном. Відповідну множину класів еквівалентності позначимо через $\mathcal{M}/\Omega$.

Твердження 1. *Між $\mathcal{M}/\Omega$ і множиною ненульових операторів $\{Q\}$ в просторі змінних (x, u) існує взаємно-однозначна відповідність: сукупність $\{(I(x, u); J(x, u))\}$ розв'язків системи $QI^q = 0$,*

$q=\overline{1,m+n-1}$, $QJ=1$, де I^q — функціонально незалежні, є елементом множини $\mathcal{M}/\Omega$, і навпаки, якщо $(I(x,u);J(x,u))$ — деякий представник класу еквівалентності з $\mathcal{M}/\Omega$, то система $QI^q=0$, $q=\overline{1,m+n-1}$, $QJ=1$ є визначеною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів відповідного оператора Q.

4. Випадок $n=1$. Розглянемо докладніше випадок однієї незалежної змінної x ($n=1$), в якому можна значно компактніше сформулювати теорему 1 та її наслідки, а також отримати деякі додаткові результати.

Теорема 1′. *Нехай $I=I(x,u)=(I^1(x,u),I^2(x,u),\ldots,I^m(x,u))$ — універсальний інваріант оператора Q, $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ=1$. Тоді функції*

$$I^j(x,u),\qquad \left(\frac{1}{D_xJ}D_x\right)^s I^j(x,u),\quad s=\overline{1,r},$$

де $D_x=\partial_x+u^i_x\partial_{u^i}+u^i_{xx}\partial_{u^i_x}+\ldots$ — оператор повної похідної за змінною x, утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант) r-го порядку оператора Q.

Зауважимо, що ідею доведення теореми 1′ у випадку $m=1$ наведено в [12].

Наслідок 1′. *Для будь-якого оператора Q існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів n-го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних u^i_x, u^i_{xx}, $\ldots$, $(u^i)^{(n)}$ продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від x та u^i.*

Наслідок 2′. *Якщо $I=(I^1(x,u),I^2(x,u),\ldots,I^m(x,u))$ — універсальний інваріант оператора Q і $J=J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ=1$, то функції*

$$I^j_{(1)}=I^j_{(1)}(x,u_{(1)})=\frac{dI^j}{dJ}=\frac{D_xI^j}{D_xJ}=\frac{I^j_x+I^j_{u^i}u^i_x}{J_x+J_{u^{i'}}u^{i'}_x}\qquad(4)$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора Q.

Наслідок 3. *Компоненти строго першого порядку універсального диференціального інваріанту оператора Q можна шукати у вигляді дробово-лінійних функцій змінних u^i_x продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від x та u^i.*

Наслідок $2'$ можна переформулювати, використовуючи поняття інваріантного диференціала.

Наслідок 4. *Відношення інваріантних диференціалів оператора Q першого і другого роду є його диференціальним інваріантом строго першого порядку. Якщо dI^1, dI^2, ..., dI^m утворюють повний набір незалежних інваріантних диференціалів оператора Q першого роду, то їх відношення з його інваріантним диференціалом другого роду вичерпують функціонально незалежні диференціальні інваріанти строго першого порядку оператора Q.*

Наслідок 5 (теорема Лі). *Нехай $n=m=1$, $I(x,u)$ і $I_{(1)}(x,u,u_x)$ — диференціальні інваріанти нульового і строго першого порядку оператора Q. Тоді функції*

$$I, \quad I_{(1)}, \quad \frac{d^sI_{(1)}}{dI^s} = \left(\frac{1}{D_xI}D_x\right)^s I_{(1)}, \quad s=\overline{1,r-1},$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів n-го порядку оператора Q.

Оператори G-інваріантного диференціювання у випадку однієї незалежної змінної традиційно шукається у вигляді

$$\mathcal{D} = \frac{1}{D_xI^0}D_x,$$

де I^0 — диференціальний інваріант групи G (див., наприклад, наслідок 5). Тому для побудови універсального диференціального інваріанта довільного порядку однопараметричної групи локальних перетворень з допомогою оператора G-інваріантного диференціювання такого вигляду необхідно знати $m+1$ функціонально незалежних диференціальних інваріантів групи G мінімально можливого порядку, тобто m функціонально незалежних диференціальних інваріантів нульового порядку (або просто інваріантів) і один диференціальний інваріант строго першого порядку. Запропонований в теоремі $1'$ алгоритм дозволяє взагалі уникнути прямої побудови диференціальних інваріантів.

Приклад 1. (Див. для порівняння [3].) Нехай $n = m = 1$, а $G = \mathrm{SO}(2)$ — група поворотів, що діє на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, з інфінітезімальним оператором $Q = u\partial_x - x\partial_u$. $I = \sqrt{x^2+u^2}$ — інваріант групи G (оператора Q), а тому (в позначеннях з доведення теореми 2) $U(x,C) = \pm\sqrt{C^2-x^2}$. Тоді

$$J = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{C^2-x^2}} = \pm\arcsin\frac{x}{C} = \pm\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+u^2}}$$

(тут константу інтегрування покладено рівною нулю), звідки

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{x+uu_x}{-u+xu_x}\sqrt{x^2+u^2}, \quad \text{або} \quad \widetilde{I}_{(1)} = \frac{x+uu_x}{-u+xu_x}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора Q.

5. Стандартний підхід та інтегрування систем рівнянь типу Рікаті. Прямим методом диференціальні інваріанти строго першого порядку знаходяться як інваріанти першого продовження

$$Q^{(1)} = \xi^a\partial_{x_a} + \eta^i\partial_{u^i} + (\eta^k_c + \eta^k_{u^j}u^j_c - \xi^b_{x_c}u^k_b - \xi^b_{u^j}u^j_c u^k_b)\partial_{u^k_c}$$

оператора Q, тобто як перші інтеграли відповідної характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_a}{\xi^a} = \frac{du^i}{\eta^i} = \frac{du^k_c}{\eta^k_c + \eta^k_{u^j}u^j_c - \xi^b_{x_c}u^k_b - \xi^b_{u^j}u^j_c u^k_b}, \tag{5}$$

що залежать не тільки від x та u, а й від інших змінних постору $J_{(1)}$. (Тут u^i_a — змінна продовженого простору $J_{(1)}$, що відповідає похідній $\partial u^i/\partial x_a$; нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними; в останньому рівнянні підсумовування по a, c, i та k немає). Інтегрування системи (5) як правило є технічно складною задачею. За відомого універсального інваріанта $I(x,u)$ оператора Q воно зводиться до інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті вигляду

$$\frac{du^k_c}{dx_a} = -\frac{\xi^b_{u^j}}{\xi^a}u^j_c u^k_b + \frac{\eta^k_{u^j}}{\xi^a}u^j_c - \frac{\xi^b_{x_c}}{\xi^a}u^k_b + \frac{\eta^k_{x_c}}{\xi^a}\Bigg|_{\substack{u=U(x_a,C)\\ x_d=X^d(x_a,C),\ d\neq a}}, \tag{6}$$

якщо $\xi^a \neq 0$ для деякого фіксованого a, або

$$\frac{du^k_c}{du^i} = -\frac{\xi^b_{u^j}}{\eta^i}u^j_c u^k_b + \frac{\eta^k_{u^j}}{\eta^i}u^j_c - \frac{\xi^b_{x_c}}{\eta^i}u^k_b + \frac{\eta^k_{x_c}}{\eta^i}\Bigg|_{\substack{x=X(u^i,C),\\ u^l=U^l(u^i,C),\ l\neq i}}, \tag{7}$$

якщо $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого i. Тут $x_d = X^d(x_a, C)$, $d \neq a$, $u = U(x, C)$ та $x = X(u^i, C)$, $u^l = U^l(u^i, C)$, $l \neq i$, — розв'язки системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C$ відносно змінних x_d, $d \neq a$, u та x, u^l, $l \neq i$, відповідно. Константи $C = (C_1, C_2, \ldots, C_{m+n-1})$ в системах (6) і (7) вважаються параметрами. Випадок $\eta^i \neq 0$ зводиться до випадку $\xi^a \neq 0$ з допомогою перетворення годографа:

$$\tilde{x}_a = u^i, \quad \tilde{x}_d = x_d, \quad \tilde{u}^i = x_a, \quad \tilde{u}^l = u^l, \quad d \neq a, \quad l \neq i,$$

$$\tilde{u}^i_a = \frac{1}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^i_d = -\frac{u^i_d}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^l_a = \frac{u^l_a}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^l_d = u^l_d - \frac{u^i_d}{u^i_a}u^l_a.$$

Тому надалі детально розглядається лише випадок $\xi^a \neq 0$.

Запропонований нами в наслідку 2 метод знаходження диференціальних інваріантів строго першого порядку на відміну від стандартного метода дозволяє уникнути прямого інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті (6) або (7) і знайти розв'язок задачі через одну квадратуру і диференціювання. Це означає, що *за відомого універсального інваріанта $I(x, u)$ оператора Q системи (6) і (7) завжди інтегруються однією квадратурою.* Дійсно, загальний розв'язок системи (6) задається неявно m незачепленими системами лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_{x_b}\hat{I}^j \Big|_{\substack{u=U(x_a,C)\\ x_d=X^d(x_a,C),\ d\neq a}} = 0,$$

де $\hat{I}^j = I^{j+n-1} + \sum_{d=1}^{n-1} \widetilde{C}_{jd} I^d + \widetilde{C}_{jn} J$, $\widetilde{C}_{ib}$ — довільні сталі. Щоб записати розв'язок в явному вигляді, додатково введемо позначення:

$$\bar{x} = (x_d)_{d=1,\, d\neq a}^n, \quad \bar{X} = (X^d)_{d=1,\, d\neq a}^n, \quad z = x_a,$$

$$I^{\bar{x}} = (I^d)_{d=1}^{n-1}, \quad I^u = (I^{j+n-1})_{j=1}^m,$$

$$C^{\bar{x}} = (C_d)_{d=1}^{n-1}, \quad C^u = (C_{j+n-1})_{j=1}^m,$$

$$\widetilde{C}' = (\widetilde{C}_{jd})_{j=1}^m{}_{d=1}^{n-1}, \quad \widetilde{C}'' = (\widetilde{C}_{jn})_{j=1}^m, \quad \hat{I} = I^u + \widetilde{C}' I^{\bar{x}} + \widetilde{C}'' J.$$

Тоді загальний розв'язок системи (6) дається формулами

$$(u^j_b)_{j=1}^m{}_{b=1}^n = -\hat{I}_u^{-1}\hat{I}_x \Big|_{\substack{u=U(x_a,C)\\ \bar{x}=\bar{X}(x_a,C)}},$$

або

$$(u^j_a)_{j=1}^m = U_z - U_{C^{\bar{x}}}\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}}\bar{X}_z + H((\widetilde{C}' + \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}})\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}}\bar{X}_z - \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}),$$

$$(u^j_b)_{j=1}^m{}_{b=1,\, b\neq a}^n = U_{C^{\bar{x}}}\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}} - H(\widetilde{C}' + \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}})\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}},$$

де $H = (U_{C^u} - U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}\bar X_{C^u})(E + \widetilde C'' J_{C^u} - (\widetilde C' + \widetilde C'' J_{C^{\bar x}})\bar X_{C^{\bar x}}^{-1} X_{C^u})^{-1}$, E — одинична матриця розміру $m\times m$; значки вектор-функцій з нижніми індексами з наборів змінних позначають відповідні матриці Якобі. Для існування в деякому околі фіксованої точки (x^0, u^0) всіх обернених матриць, що зустрічаються вище, достатньо вважати сталі $\widetilde C_{ib}$ малими і виконати попередньо невироджену лінійну заміну в множині інваріантів таким чином, щоб матриця $I_{(\bar x,u)}(x^0,u^0)$ була одиничною.

Якщо покласти $\widetilde C_{ib} = 0$, то отримаємо частинний розв'язок

$$(u^j_a)_{j=1}^m = U_z - U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}\bar X_z, \quad (u^j_b)_{j=1}^m{}_{b=1,\,b\neq a}^{n} = U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}.$$

Розв'язок системи (6) в явному вигляді при $n=1$ необхідно виписувати окремо. Так як в цьому випадку $u = U(x,C)$ — загальний розв'язок системи $du^j/dx = \eta^j(x,u)/\xi(x,u)$, то легко перевірити, що $u_x = U_x(x,C)$ є частинним розв'язком системи (6) (тут, як і в (6), C — набір параметрів). Загальний розв'язок системи (6) має вигляд

$$\begin{aligned} u_x &= -(I_u - \widetilde C J_u)^{-1}(I_x + \widetilde C J_x)\Big|_{u=U(x,C)} = \\ &= U_z - U_C(E + \widetilde C J_C)^{-1}\widetilde C J_z \end{aligned} \tag{8}$$

(в останній рівності виконано заміну $x = z$, $u = U(z,C)$), де E — одинична матриця розміру $m\times m$, $\widetilde C = (\widetilde C_1, \widetilde C_2, \dots, \widetilde C_m)^{\mathrm T}$ — стовпчик довільних констант, $I_u = (I^i_{u^j})$, $I_x = (I^i_x)$, $U_z = (U^k_z)$, $U_C = (U^i_{C_j})$. Обернені матриці в (8) завжди існують для достатньо малих $\widetilde C_i$.

Приклад 2. Нехай $n = m = 1$, $Q = e^{x+u}(\partial_x + 2x\partial_u)$. $I(x,u) = u - x^2$ — інваріант оператора Q, звідки $u = U(x,C) = x^2 + C$. Тоді

$$J = \int e^{-x-x^2-C}dx = e^{-C}\int e^{-x-x^2}dx = e^{x^2-u}\int e^{-x-x^2}dx,$$

а тому

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{(u_x - 2x)e^u}{e^{-x} - (u_x - 2x)\int e^{-x-x^2}dx}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора Q. Рівняння (6) для оператора Q має вигляд

$$\frac{du_x}{dx} = -u_x^2 + (2x-1)u_x + 2x + 2,$$

а функція $u_x = U_x = 2x$ є його частинним розв'язком.

Приклад 3. Нехай $n = m = 1$, $Q = xu(x\partial_x + ku\partial_u)$, $k \in \mathbb{R}$. $I(x,u) = ux^{-k}$ — інваріант оператора Q, звідки $U(x,C) = Cx^k$. Тоді

$$J = \int \frac{dx}{Cx^{k+2}} = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{C} = \dfrac{\ln x}{xu}, & \text{якщо} \quad k = -1, \\ -\dfrac{x^{-(k+1)}}{(k+1)C} = -\dfrac{1}{(k+1)xu}, & \text{якщо} \quad k \neq -1 \end{cases}$$

(тут константу інтегрування покладено рівною 0). Відповідне рівняння Ріккаті

$$\frac{du_x}{dx} = -\frac{1}{Cx^k}u_x^2 + \frac{2(k-1)}{x}u_x + kCx^{k-2}.$$

Функція $u_x = kCx^{k-1}$ є частинним розв'язком цього рівняння, а його загальний розв'язок задається формулою

$$u_x = -\frac{C}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\widehat{C} - \ln x}\right), \quad \text{якщо } k = -1, \quad \text{або}$$

$$u_x = Cx^{k-1}\left(k - \frac{k+1}{1 + \widehat{C}x^{k+1}}\right), \quad \text{якщо } k \neq -1,$$

де $\widehat{C}$ — довільна стала.

Зауваження. Для добре відомих груп перетворень на площині (тобто $n = m = 1$) інтегровність в квадратурах рівнянь (6) і (7) як правило очевидно випливає з вигляду цих рівнянь. Так, коли $\xi_u = 0$ або $\eta_x = 0$, вони є лінійними рівнянням або рівняннями Бернулі відповідно. Якщо G — однопараметрична група конформних перетворень, то $\xi_x = \eta_u$ і $\xi_u = -\eta_x$, а тому в рівняннях (6) і (7) змінні розділяються:

$$\frac{dv}{v^2+1} = \frac{\eta_x}{\xi}dx \,\Bigg|_{u=U(x,C)} \qquad \text{і} \qquad \frac{dv}{v^2+1} = \frac{\eta_x}{\eta}du \,\Bigg|_{x=X(u,C)}.$$

5. Висновки. Таким чином, пошук диференціальних інваріантів однопараметричної групи G локальних перетворень у просторі з однією незалежною змінною зводиться теоремами 1 і 2 до побудови універсального інваріанта групи G. Доведення цих теорем не є суттєво чутливим до кількості змінних і, крім того, допускає узагальнення на деякі класи багатопараметричних груп локальних перетворень (або алгебр Лі диференціальних операторів).

[1] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: B.G. Teubner, 1891. — 568 s.

[2] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. — М.: Знание, 1989. — 48 с.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[4] Tresse A. Sur les invariant différentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. — 1894. — **18**. — P. 1–88.

[5] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[6] Olver P.J. Differential invariants and invariant differential equations // Lie Groups and their Appl. — 1994. — **1**. — P. 177–192.

[7] Olver P.J. Differential invariants // Acta Applicandae Math. — 1995. — **41**. — P. 271–284.

[8] Olver P.J. Equivalence, invariants, and symmetry. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — 541 p.

[9] Olver P.J. Pseudo-stabilization of prolonged group actions. I. The order zero case // J. Nonlin. Math. Phys. — 1997. — **4**, № 3–4. — P. 271–277.

[10] Бойко В.М., Попович Р.О. Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних // Доповіді НАН України. — 2001. — № 5. — С. 7–10.

[11] Попович Р.Е., Бойко В.Н. Дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований и интегрируемые уравнения Риккати // Вестник Самарского госуниверситета. — 2000, N 4.

[12] Аксенов А.В. Нахождение дифференциальных инвариантов группы обыкновенного дифференциального уравнения без использования продолженного оператора // Тезисы докладов IX Коллоквиума “Современный групповой анализ. Методы и приложения”. — Нижний Новгород, 1992. — С. 4.