Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 200–211

УДК 517.945:519.46

# Про $Q$-умовну симетрію лінійного $n$-вимірного рівняння теплопровідності

***Р.О. ПОПОВИЧ*** †, ***І.П. КОРНЄВА*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ*
*E-mail: roman@apmat.freenet.kiev.ua*

‡ *Приазовський державний технічний університет, Маріуполь*
*E-mail: 000024@astu.donetsk.ua*

Описано оператори $Q$-умовної симетрії лінійного $n$-вимірного ($n \geq 2$) однорідного рівняння теплопровідності. Введено поняття еквівалентності операторів $Q$-умовної симетрії відносно групи перетворень. Отримано деякі результати стосовно рівнянь теплопровідності з джерелом.

The $Q$-conditional symmetry operators of the linear $n$-dimensional ($n \geq 2$) homogeneous heat equation are described. The notion of the equivalence of $Q$-conditional symmetry operators under a transformation group is introduced. Some results for heat equations with source are obtained.

**1. Вступ.** В теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними чільне місце займають рівняння, які мають просту структуру і яким водночас притаманні нетривіальні математичні, зокрема, симетрійні властивості. Як правило, такі рівняння плідно використовуються для математичного моделювання об'єктів, явищ і процесів в різних наукових галузях, і саме вони стимулюють виникнення та розвиток нових понять і методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Одним з таких рівнянь є лінійне рівняння теплопровідності. Його симетрійні властивості досліджував ще С. Лі. В 1969 році Блумен і Коул [1] саме на прикладі лінійного одновимірного рівняння теплопровідності ввели поняття і продемонстрували алгоритм знаходження $Q$-умовної (або, в їхній термінології, некласичної) симетрії диференціального рівняння з частинними похідними відносно одного оператора. Надалі задача досліження $Q$-умовної симетрії лінійного одновимірного рівняння теплопровідності розглядалася багатьма авторами. Зокрема, в [2] в одному з випадків, що виникають, для частини системи визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора $Q$-умовної інваріантності вивчена ліївська симетрія та знайдені нелокальні перетворення, що зв'язують досліджувану систему з рівнянням Бюргерса та рівнянням теплопровідності з джерелом. Повне (в певному сенсі) розв'язання задачі про $Q$-умовну інваріантность лінійного одновимірного рівняння теплопровідності дано в [3] (див. також [4, 5]). А саме, в обох випадках, що виникають, знайдена ліївська симетрія систем визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора $Q$-умовної інваріантності і нелокальні перетворення, що зводять ці системи до вихідного рівняння.

В даній роботі вперше розв'язана задача про $Q$-умовну симетрію лінійного $n$-вимірного ($n \geq 2$) однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{aa}, \quad \text{де} \quad u = u(t, \vec{x}), \quad t = x_0, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Отримані результати застосовано до лінійних рівнянь теплопровідності з джерелом.

В (1) і надалі індекси $a$, $b$, $c$ і $d$ змінюються від 1 до $n$, індекси $i$ та $j$ – від 1 до $n-1$, індекс $\mu$ – від 0 до $n$. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Нижній індекс функції означає диференціювання по відповідній змінній.

Ліївська симетрія рівняння (1) добре вивчена: максимальна (в сенсі Лі) алгебра його інваріантності $A$(LHE) породжується операторами

$$\begin{aligned} &\partial_t = \partial/\partial_t, \quad \partial_a = \partial/\partial_{x_a}, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a, \\ &G_a = t\partial_a - \tfrac{1}{2}x_a u\partial_u, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \ (a < b), \quad I = u\partial_u, \\ &\Pi = 4t^2 + 4tx_a\partial_a - (x_a x_a + 2t)u\partial_u, \quad f(t, \vec{x})\partial_u, \end{aligned} \tag{2}$$

де $f = f(t, \vec{x})$ – довільний розв'язок рівняння (1). Для алгебри $A$(LHE) справедливий такий розклад:

$$A(\mathrm{LHE}) = AG_2(1, n) + A^\infty(\mathrm{LHE}),$$

де $AG_2(1, n) = \langle \partial_t,\ \partial_a,\ D,\ G_a,\ J_{ab},\ I,\ \Pi \rangle$ – скінченновимірна частина алгебри $A$(LHE) (алгебра узагальненої групи Галілея $G_2(1, n)$ з однією часовою і $n$ просторовими змінними); $A^\infty(\mathrm{LHE}) = \langle f(t, \vec{x})\partial_u \mid f = f(t, \vec{x}) \colon\ f_t = f_{aa} \rangle$.

**2. Еквівалентність операторів $Q$-умовної симетрії.** Дамо необхідні означення. Нехай

$$L(x, u_{(r)}) = 0, \tag{3}$$

– диференціальне рівняння з частинними похідними $r$-го порядку з $n+1$ незалежною змінною $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ відносно невідомої функції $u=u(x)$. Тут $u_{(r)}$ позначає всі похідні функції $u$ від 0-го до $r$-го порядку включно.

**Означення 1** [6, 7]. *Кажуть, що рівняння (3) $Q$-умовно інваріантне відносно оператора*

$$Q=\xi^\mu(x,u)\partial_\mu+\eta(x,u)\partial_u \tag{4}$$

*(у якого хоча б один коефіцієнт $\xi^\mu$ не дорівнює 0), якщо виконується умова*

$$Q_{(r)}L(x,u_{(r)})\,\Big|_{L(x,u_{(r)})=0,\ \mathcal{M}}=0, \tag{5}$$

*де $Q_{(r)}$ – $r$-е продовження оператора $Q$, а $\mathcal{M}$ – множина всіх диференціальних наслідків рівняння $Q[u]=0$ до порядку $r-1$ включно, $Q[u]:=\eta-\xi^\mu u_\mu$ – дія оператора $Q$ на функцію $u=u(x)$. При цьому оператор $Q$ називають оператором $Q$-умовної симетрії рівняння (3).*

Якщо рівняння (3) $Q$-умовно інваріантне відносно деякого оператора $Q$, то воно $Q$-умовно інваріантне і відносно оператора $\lambda Q$ для довільної ненульової функції $\lambda=\lambda(x,u)$. Тому на множині операторів природно ввести наступне відношення еквівалентності.

**Означення 2** [1, 6, 7]. *Два оператори $Q^1$ і $Q^2$ $Q$-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними, якщо вони відрізняються на ненульвий множник $\lambda=\lambda(x,u)$.*
**Позначення:** $Q^1\sim Q^2$.

Це відношення еквівалентності можна узагальнити, скориставшись наступним спостереженням: для довільного локального перетворення $g$: $(x,u)\longrightarrow(\tilde x,\tilde u)=g(x,u)$, відносно якого рівняння (3) інваріантне, приєднане зображення $\mathrm{Ad}(g)$ визначає бієкцію множини операторів $Q$-умовної симетрії рівняння (3) на себе.

**Означення 3.** *Два оператори $Q^1$ і $Q^2$ $Q$-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними відносно локального перетворення $g$ симетрії рівняння (3), якщо*

$$\exists\lambda=\lambda(x,u)\neq 0:\quad Q^2=\lambda\,\mathrm{Ad}(g)\,Q^1.$$

**Позначення:** $Q^1\sim Q^2\,(\mathrm{mod}\,g)$.

**Означення 4.** *Два оператори $Q^1$ і $Q^2$ $Q$-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними відносно групи $G$ локальних перетворень симетрії рівняння (3), якщо вони еквівалентні відносно деякого елемента цієї групи.*

*Два оператори $Q^1$ і $Q^2$ $Q$-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними відносно алгебри $A$ ліївської симетрії рівняння (3), якщо вони еквівалентні відносно однієї з однопараметричних груп, що породжуються елементами цієї алгебри.*
**Позначення:** $Q^1 \sim Q^2 \,(\mathrm{mod}\, G)$; $\quad Q^1 \sim Q^2 \,(\mathrm{mod}\, A)$.

**Зауваження 1.** Еквівалентні в сенсі означення 2 оператори визначають однакові, а еквівалентні в сенсі означення 3 (або 4) – несуттєво різні відносно перетворення $g$ (групи $G$, алгебри $A$) сім'ї розв'язків рівняння (3).

**Зауваження 2.** Відношення еквівалентності операторів з означень 2, 3 і 4 можна легко узагальнити на інволютивні множини операторів $Q$-умовної симетрії.

**3. Основні результати.** Сформулюємо основний результат роботи.

**Теорема 1.** *Для будь-якого оператора $Q$ $Q$-умовної симетрії рівняння (1) виконується одне з співвідношень:*

1. $Q \sim \widetilde{Q}^0$, *де* $\widetilde{Q}^0 \in A(\mathrm{LHE})$;

2. $Q \sim \widetilde{Q}^1 = \partial_n + g_n g^{-1} u\partial_u \,(\mathrm{mod}\, ASO(n) + A^\infty(\mathrm{LHE}))$,
*де $g = g(t, x_n)$ – розв'язок рівняння теплопровідності, тобто $g_t = g_{nn}$;*

3. $Q \sim \widetilde{Q}^2 = J_{12} + \varphi(\theta) u\partial_u \,(\mathrm{mod}\, AG(1,n) + A^\infty(\mathrm{LHE}))$,
*де $\varphi = \varphi(\theta)$ – розв'язок рівняння $\varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0$, $\varphi_\theta \neq 0$, $\theta$ – полярний кут в площині $OX_1X_2$.*

**Зауваження 3.** Для функції $\varphi$ з теореми 1 існує чотири суттєво різні (відносно зсувів по $\theta$) випадки:

а) $\varphi = -\varkappa \,\mathrm{tg}\, \varkappa\theta$, б) $\varphi = \varkappa \,\mathrm{th}\, \varkappa\theta$, в) $\varphi = \varkappa \,\mathrm{cth}\, \varkappa\theta$, г) $\varphi = \theta^{-1}$,

де $\varkappa$ – ненульова константа.

**Зауваження 4.** Анзаци і редуковані рівняння, що відповідають операторам $\widetilde{Q}^1$ і $\widetilde{Q}^2$, мають відповідно вигляд:

1) $u = g(t, x_n)v(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$, де $\omega_0 = t$, $\omega_i = x_i$

$(1) \quad \Longrightarrow \quad v_0 = v_{ii}$;

2) $u = \exp\bigl(\int\varphi(\theta)d\theta\bigr)v(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$,

де $\omega_0 = t$, $\omega_1 = r$, $\omega_s = x_{s+1}$, $s = \overline{2, n-1}$

$(1) \quad \Longrightarrow \quad v_0 = v_{11} + \omega_1^{-1}v_1 - \lambda\omega_1^{-2}v + v_{ss}$.

В 2) $\lambda = -\varphi_\theta - \varphi^2 = \mathrm{const}$, $(r, \theta)$ – полярні координати в площині $OX_1X_2$.

В силу зауваження 3 другий анзац об'єднує в собі чотири суттєво різні відносно $A^\infty(\mathrm{LHE})$ анзаци:

а) $\varphi = -\varkappa \operatorname{tg} \varkappa\theta$: $\quad u = v(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \cos \varkappa\theta$, $\quad \lambda = \varkappa^2$;

б) $\varphi = \varkappa \operatorname{th} \varkappa\theta$: $\quad u = v(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \operatorname{ch} \varkappa\theta$, $\quad \lambda = -\varkappa^2$;

в) $\varphi = \varkappa \operatorname{cth} \varkappa\theta$: $\quad u = v(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \operatorname{sh} \varkappa\theta$, $\quad \lambda = -\varkappa^2$;

г) $\varphi = \theta^{-1}$: $\quad u = v(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})\theta$, $\quad \lambda = 0$.

В доведенні теореми 1 використовуються наступні твердження.

**Лема 1.** *Функція $z = z(t, \vec{x})$ задовольняє рівняння*

$$z_t - z_{aa} - 2h_n z = 0, \quad \textit{де } h = h(t, x_n){:}\ h_t - h_{nn} - 2h_n h = 0, \tag{6}$$

*тоді і тільки тоді, коли має місце зображення*

$$z = f_n - hf, \quad \textit{де} \quad f = f(t, \vec{x}){:}\ f_t = f_{aa}. \tag{7}$$

**Доведення.** Введемо позначення: $T := \partial_t - \partial_a\partial_a$, $\widehat{T} := T - 2h_n$. В силу співвідношення $\widehat{T}(\partial_n - h) = (\partial_n - h)T$ рівняння (6) є наслідком зображення (7). Доведемо, що зображення (7) має місце для будь-якого розв'язку рівняння (6). Фіксуємо розв'язок $z$ цього рівняння і розв'яжемо (7) відносно $f$ як лінійне диференціальне рівняння з параметрами $t$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$: $f := f^0 + Cg$, де $f^0 = f^0(t, \vec{x})$ – частковий розв'язок цього рівняння, $C = C(t, \bar{x})$ – довільна гладка функція своїх аргументів, $g = g(t, x_n)$ – розв'язок рівняння теплопровідності $g_t = g_{nn}$, що визначається з заміни Коула-Хопфа $g_n/g = h$. Тоді $0 = \widehat{T}z = \widehat{T}(\partial_n - h)f^0 = (\partial_n - h)Tf^0$, звідки $Tf^0 = Dg$, де $D = D(t, \bar{x})$, а тому $Tf = 0$, якщо $TC = -D$. ■

**Лема 2.** *Функція $z = z(t, \vec{x})$ задовольняє рівняння*

$$z_t - z_{aa} - 2\frac{\varphi_\theta}{r^2} z = 0, \ \text{де}\ \varphi = \varphi(\theta)\colon\ \varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0,\ \varphi_\theta \neq 0 \quad (8)$$

*(тут $(r, \theta)$ – полярні координати в площині $OX_1X_2$) тоді і тільки тоді, коли має місце зображення*

$$z = x_1 f_2 - x_2 f_1 - \varphi f, \quad \text{де} \quad f = f(t, \vec{x})\colon\ f_t = f_{aa}. \quad (9)$$

Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 1.

**Зауваження 5.** Твердження лем 1 і 2 легко переносяться на лінійне рівняння Шрьодінгера

$$i\psi_t = -\psi_{aa} + V\psi \quad (10)$$

з стаціонарним потенціалом $V = V(\vec{x})$, де $\psi = \psi(t, \vec{x})$ – комплексно-значна функція, $i$ – уявна одиниця. А саме, якщо

1) $V = -2h_n$,   де   $h = h(x_n):\ \ h_{nn} + 2h_n h = 0,\ h_n \neq 0,$   або

2) $V = -2\dfrac{\varphi_\theta}{r^2}$,   де   $\varphi = \varphi(\theta):\ \ \varphi_{\theta\theta} + 2\varphi_\theta\varphi = 0,\ \varphi_\theta \neq 0$

(нагадаємо, що $(r, \theta)$ позначають полярні координати в площині $OX_1X_2$), то нелокальною заміною

$$1)\ \psi = \widetilde{\psi}_n - h\widetilde{\psi} \quad \text{або} \quad 2)\ \psi = x_1\widetilde{\psi}_2 - x_2\widetilde{\psi}_1 - \varphi\widetilde{\psi}$$

рівняння (10) зводиться до вільного рівняння Шрьодінгера ($V = 0$). Згідно з зауваженням 3 обом випадкам відповідає по чотири класи потенціалів:

$$1)\ V = \frac{2\varkappa^2}{\cos^2 \varkappa x_n}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2 \varkappa x_n}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{\operatorname{sh}^2 \varkappa x_n}; \quad V = \frac{2}{x_n^2};$$

$$2)\ V = \frac{2\varkappa^2}{r^2\cos^2 \varkappa\theta}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{r^2\operatorname{ch}^2 \varkappa\theta}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{r^2\operatorname{sh}^2 \varkappa\theta}; \quad V = \frac{2}{r^2\theta^2};$$

Перший набір потенціалів добре відомий для одновимірного рівняння Шрьодінгера ($n = 1$).

**4. Доведення теореми 1.** Нехай (4) – оператор $Q$-умовної симетрії рівняння (3). Розглянемо окремо два суттєво різних випадки: $\xi^0 \neq 0$ і $\xi^0 = 0$.

**I.** $\xi^0 \neq 0$. В силу існування відношення еквівалентності можна вважати, що $\xi^0 = 1$, тобто $Q = \partial_t + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u$. Умова (5) для такого оператора і рівняння (1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}&\eta_t - \xi^a_t u_a - (\eta_{aa} + 2\eta_{au}u_a + \eta_{uu}u_a u_a)+\\&+(\xi^b_{aa} + 2\xi^b_{au}u_a + \xi^b_{uu}u_a u_a)u_b + (\xi^b_a + \xi^b_u u_a)u_{ab} = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

якщо $u_{nn} = \eta - \xi^a u_a - u_{ii}$. Розщеплюючи в (11) по змінним $u_{ab}$, $a \neq b$, $u_{ii}$, $u_a$, після спрощення отримаємо наступну систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора $Q$:

$$\xi^a_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^a = \xi^a(t,\vec{x}), \quad \eta = \eta^1(t,\vec{x})u + \eta^0(t,\vec{x})$$

(тобто функції $\xi^a$ не залежать від $u$, а функція $\eta$ лінійна по $u$);

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0, \quad a \neq b, \qquad \xi^i_i = \xi^n_n, \tag{12}$$

$$2\eta^1_a = -(\xi^a_t - \xi^a_{cc} + 2\xi^n_n\xi^a), \tag{13}$$

$$\eta^1_t - \eta^1_{aa} + 2\xi^n_n\eta^1 = 0, \tag{14}$$

$$\eta^0 t - \eta^0_{aa} + 2\xi^n_n\eta^0 = 0. \tag{15}$$

(Підсумовування по $i$ в (12) немає.)

**Лема 2.** *Для довільного розв'язку системи (12)–(14) справедливе зображення:*

$$\xi^a = \mu^{ab}x_b + \nu x_a + \chi^a \qquad (\mu^{ab} = -\mu^{ba}), \tag{16}$$

$$\eta^1 = -\tfrac{1}{4}(\nu_t + 2\nu^2)x_a x_a - \tfrac{1}{2}(\chi^a_t + 2\nu\chi^a)x_a + \sigma, \tag{17}$$

*де функції $\mu^{ab} = \mu^{ab}(t)$, $\nu = \nu(t)$, $\chi^a = \chi^a(t)$ і $\sigma = \sigma(t)$ задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned}&\nu_{tt} + 6\nu\nu_t + 4\nu^3 = 0, \quad (\chi^a_t + 2\nu\chi^a)_t + 2\nu(\chi^a_t + 2\nu\chi^a) = 0,\\&\mu^{ab}_t + 2\nu\mu^{ab} = 0, \quad \sigma_t + 2\nu\sigma + \tfrac{1}{2}n(\nu_t + 2\nu^2) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

**Доведення.** Покажемо спочатку, що функції $\xi^a$ лінійні по $\vec{x}$.

Якщо $n > 2$, то з (12) (це система Кіллінга) випливає, що всі похідні 3-го порядку по просторових змінних від функцій $\xi^a$ рівні 0. Продиференціюємо рівняння (13) по $x_b$, де $b \neq a$, після чого з рівності мішаних похідних $\eta^1_{ab}$ і $\eta^1_{ba}$ отримаємо ще один набір рівнянь на $\xi^a$:

$$\xi^a_{bt} + 2(\xi^n_n \xi^a)_b = \xi^b_{at} + 2(\xi^n_n \xi^b)_a. \tag{19}$$

Диференціальні наслідки 2-го порядку рівнянь (19) і 1-го порядку системи Кіллінга (12) разом дають умову рівності 0 других похідних функцій $\xi^a$ по просторових змінних, тобто $\xi^a$ лінійні по $\vec{x}$.

Для $n = 2$ доведення дещо складніше. Перейдемо до комплексних змінних: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\xi = \xi^1 + i\xi^2$. В силу (12) (при $n = 2$ це система Коші-Рімана) функція $\xi$ аналітична по $z$, тобто $\xi = \xi(t, z)$, а тому $\xi^a_{bb} = 0$. Нехай $\xi^* := \overline{\xi(t, z)}$, звідки $\xi^* = \xi^*(t, \bar{z})$. (Тут риска означає операцію комплексного спряження.) Перепишемо в комплексних змінних рівняння (13):

$$2\eta^1_{\bar{z}} = -(\xi_t + (\xi_z + \xi^*_{\bar{z}})\xi), \quad 2\eta^1_z = -(\xi^*_t + (\xi_z + \xi^*_{\bar{z}})\xi^*). \tag{20}$$

Знайдемо різницю похідної першого рівняння системи (20) по $z$ і другого – по $\bar{z}$:

$$(\xi_t + \xi_z \xi)_z = (\xi^*_t + \xi^*_{\bar{z}} \xi^*)_{\bar{z}} =: \alpha, \qquad \alpha = \alpha(t) \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Проінтегруємо рівняння (21):

$$\xi_t + \xi_z \xi = \alpha z + \beta \Longleftrightarrow \xi^*_t + \xi^*_{\bar{z}} \xi^* = \alpha \bar{z} + \bar{\beta}, \quad \beta = \beta(t) \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

Підставимо результат в (20) і розв'яжемо отримані таким чином рівняння відносно $\eta^1$:

$$\eta^1 = \tfrac{1}{2}(-\alpha z \bar{z} + \beta \bar{z} + \bar{\beta} z + \gamma + \xi \xi^*), \qquad \gamma = \gamma(t) \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Враховуючи (22) і (23), подіємо оператором $(\partial_z)^2 (\partial_{\bar{z}})^2$ на рівняння (14): $\xi_{zzz} \xi^*_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$, тобто $\xi_{zzz} = 0$, а тому з (22) отримаємо умову $\xi_{zz} = 0$. Це означає, що $\xi^a$ лінійні по $\vec{x}$.

Отже, в силу доведеного і системи (12) для функцій $\xi^a$ справедливе зображення (16). Рівняння на функції $\mu^{ab}$ з системи (18) і зображення (17) для $\eta^1$ є наслідками рівнянь (19) і (13) відповідно. Інші рівняння з системи (18) отримаємо після підстановки зображень (16) і (17) в (14). ■

Інтегрування першого рівняння з системи (18) дає три сім'ї розв'язків для функції $\nu$ :

$$\nu = \frac{t+C_1}{(t+C_1)^2+C_2}, \qquad \nu = \frac{1}{2(t+C_1)}, \qquad \nu = 0.$$

Для кожної з цих сімей розв'яжемо інші рівняння системи (18), а рівняння (15) зведемо до (1). В результаті ми побудуємо набори операторів $Q$-умовної симетрії, в яких будь-який оператор еквівалентний оператору з $A(\mathrm{LHE})$ :

$$\begin{aligned}
&Q^1 = \big((t+C_1)^2+C_2\big)^{-1}\big[\Pi + C_1 D + (C_1^2+C_2)\partial_t + \widehat{Q}^1\big],\\
&Q^2 = \big(t+C_1\big)^{-1}\big[\tfrac{1}{2}D + C_1\partial_t + \widehat{Q}^2\big],\\
&Q^3 = \partial_t + \widehat{Q}^3
\end{aligned}$$

де $\widehat{Q}^1$, $\widehat{Q}^2$, $\widehat{Q}^3$ – довільні оператори з $\langle J_{ab},\, G_a,\, \partial_a,\, I\rangle \oplus\, A^\infty(\mathrm{LHE})$.

Отже, *для лінійного $n$-вимірного ($n \geq 2$) рівняння теплопровідності будь-який оператор $Q$-умовної симетрії з $\xi^0 \neq 0$ еквівалентний оператору лієвської симетрії цього рівняння.*

**II.** $\xi^0 = 0$. Зважаючи на відношення еквівалентності операторів відносно алгебри симетрії рівняння (1), без обмеження загальності можна покласти $\xi^n = 1$, тобто $Q = \partial_n + \xi^i\partial_i + \eta\partial_u$. Умова (5) для такого оператора і рівняння (1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
&\eta_t - \xi^i_t u_i - (\eta_{aa} + 2\eta_{au}u_a + \eta_{uu}u_a u_a) +\\
&+(\xi^i_{aa} + 2\xi^i_{au}u_a + \xi^i_{uu}u_a u_a)u_i + (\xi^i_a + \xi^i_u u_a)u_{ai} = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

якщо $u_n = \eta - \xi^i u_i$, $u_{jn} = \eta_j + \eta_u u_j - (\xi^i_j + \xi^i_u u_j)u_i - \xi^i u_{ij}$. Розщеплюючи в (24) по змінних $u_{ij}$ та $u_i$, після спрощення отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора $Q$:

$$\xi^i_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^i = \xi^i(t,\vec{x}), \quad \eta = \eta^1(t,\vec{x})u + \eta^0(t,\vec{x})$$

(тобто функції $\xi^i$ не залежать від $u$, а функція $\eta$ лінійна по $u$);

$$\xi^i_i - \xi^i\xi^i_n = 0, \qquad \xi^i_j + \xi^j_i - \xi^i\xi^j_n - \xi^j\xi^i_n = 0, \quad i \neq j, \tag{25}$$

$$\eta^1_i - (\xi^i\eta^1)_n = -\tfrac{1}{2}(\xi^i_t - \xi^i_{aa} + 2\xi^j_n\xi^i_j), \tag{26}$$

$$\eta^1_t - \eta^1_{aa} - 2\eta^1_n\eta^1 + 2\xi^j_n\eta^1_j = 0, \tag{27}$$

$$\eta^0_t - \eta^0_{aa} - 2\eta^1_n\eta^0 + 2\xi^j_n\eta^0_j = 0, \tag{28}$$

(Підсумовування по $i$ в (25) немає.)

Інтегруючи систему (25)–(28), необхідно дослідити окремо такі випадки:

$$\text{а) } \xi^i = \mathrm{const}; \qquad \text{б) } \xi^i_n = 0 \ \text{ і } \ \exists i\colon\ \xi^i \neq \mathrm{const}; \qquad \text{в) } \exists i\colon\ \xi^i_n \neq 0.$$

А. $\xi^i = \mathrm{const}$. Перейдемо до еквівалентного (відносно поворотів) оператора, у якого $\widetilde{\xi}^i = 0$. Тоді система (25)–(28) набуває вигляду

$$\eta^1_i = 0, \qquad \eta^1_t - \eta^1_{nn} - 2\eta^1_n\eta^1 = 0, \qquad \eta^0_t - \eta^0_{aa} - 2\eta^1_n\eta^0 = 0,$$

звідки в силу леми 1 $\eta^0 = f_n - \eta^1 f$, де $f = f(t, \vec{x})$ – розв'язок рівняння (1), а тому даний оператор еквівалентний відносно $\langle f\partial_u \rangle$ оператору з $\widetilde{\eta}^{\,0} = 0$. Рівняння Бюргерса на $\eta^1$ заміною Коула-Хопфа $\eta^1 = g_n/g$ зведемо до рівняння теплопровідності на функцію $g = g(t, x_n)$. В результаті отримаємо оператор $\widetilde{Q}^1$ (випадок 2 теореми 1).

Б. $\xi^i_n = 0$ і $\exists i:\ \xi^i \neq \mathrm{const}$. З (25) за цих умов випливає, що $\xi^i = \mu^{ij}x^j + \nu^i$, де $\mu^{ij} = \mu^{ij}(t)$, $\nu^i = \nu^i(t)$ – гладкі функції змінної $t$, $\mu^{ij} = -\mu^{ji}$, причому $\exists (i, j)$: $\mu^{ij} \neq 0$ або $\exists i$: $\nu^i_t \neq 0$. З системи (26)–(27) після підстановки виразів для $\xi^i$ і диференціювання та алгебраїчних перетворень отримаємо такі рівняння:

$$\left.\begin{array}{lcl} \mu^{ij}_t = 2\eta^1_n\mu^{ij} & \Longrightarrow & \mu^{ij}\eta^1_{na} = 0 \\ \nu^i_{tt} = 4\eta^1_n\nu^i_t & \Longrightarrow & \nu^i_t\eta^1_{na} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \eta^1_{na} = 0,$$

тобто $\exists \alpha = \alpha(t)$: $\eta^1_n = \frac{1}{2}\alpha$. Продиференціюємо (27) по $x_n$ і домножимо на $\frac{1}{2}$: $\alpha_t = \alpha^2$, а тому $\alpha = -\varepsilon/(\varepsilon t + C)$, де $\varepsilon \in \{0; 1\}$, $C$ – довільна стала, якщо $\varepsilon = 1$, і $C = 1$, якщо $\varepsilon = 0$. Тоді

$$\mu^{ij} = \frac{M_{ij}}{\varepsilon t + C}, \qquad \nu^i = \frac{A_i t + B_i}{\varepsilon t + C}, \qquad \eta^0 = \frac{f(t, \vec{x})}{\varepsilon t + C},$$

де $M_{ij}$, $A_i$, $B_i$ – константи інтегрування, $M_{ij} = -M_{ji}$, $f = f(t, \vec{x})$ – розв'язок рівняння теплопровідності (1). Враховуючи виведені умови, систему (26)–(27) можна переписати у вигляді

$$\eta^1_i = -\tfrac{1}{2}(\nu^i_t - \alpha\nu^i), \qquad \eta^1_t = \alpha\eta^1,$$

звідки $\eta^1 = (\varepsilon t + C)^{-1}[-\frac{1}{2}A_i x_i - \frac{1}{2}\varepsilon x_n + E]$, де $E = \mathrm{const}$. Отже, в силу доведеного

$$Q = (\varepsilon t + C)^{-1}\Big[\,\varepsilon G_n + C\partial_n + \sum_{i<j} M_{ij}J_{ij} + A_i G_i + B_i\partial_i + EI + f\partial_u\,\Big],$$

тобто оператор $Q$ еквівалентний оператору з $A(\mathrm{LHE})$.

B. $\exists i$: $\xi^i_n \neq 0$. Зважаючи на відношення еквівалентності операторів відносно $A(\mathrm{LHE})$, без обмеження загальності можна покласти $\xi^1_n \neq 0$. Виконаємо в системі (25)–(27) перетворення годографа:

$$\tau = t, \quad y_i = x_i, \quad y_n = \xi^1 \quad \text{– нові незалежні змінні,}$$
$$\psi^1 = x_n, \quad \psi^s = \xi^s, \ s = \overline{2, n-1}, \quad \zeta = -2\eta^1 \text{ – нові залежні змінні.}$$

Проінтегруємо в нових змінних визначальні рівняння, дотримуючись такого порядку:

$$(25,\, i = 1), \quad (25,\, i > 1), \quad (26,\, i = 1), \quad (26,\, i > 1), \quad (27).$$

В процессі інтегрування рівнянь $(25, i = 1)$ і $(26, i = 1)$ змінна $y_1$ виділяється у виразах для $\psi^i$ і $\zeta$ в явному вигляді, а тому в інших рівняннях по цій змінній можна розщепити. Після повернення до старих змінних отримаємо наступний вираз для оператора $Q$:

$$\begin{aligned} Q = Z^{-1}[&J_{n1} + M_{1s}J_{1s} + M_{sn}J_{sn} \\ &+ \textstyle\sum_{s<p}(M_{sp} + M_{sn}M_{1p} - M_{pn}M_{1s})J_{sp} \\ &+ A_1G_1 + A_nG_n + (A_s - M_{sn}A_1 - M_{1s}A_n)G_s \\ &+ B_1\partial_1 + B_n\partial_n + (B_s - M_{sn}B_1 - M_{1s}B_n)\partial_s \\ &+ \tfrac{1}{2}(A_1B_n - A_nB_1)u\partial_u + \varphi(\omega)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u], \end{aligned}$$

де $M_{ab} = -M_{ba}$ $((a,b) \neq (1,n)$ або $(n,1))$, $A_a$, $B_a$ – довільні сталі; $Z = -x_1 + M_{sn}x_s + A_nt + B_n$; $\omega = Z^{-1}(x_n - M_{1s}x_s + A_1t + B_1)$; $\chi = Z^{-1}\eta^0$, а тому $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\omega Z^{-2}\chi = 0$; індекси $s$ і $p$ змінюються від 2 до $n-1$; $\varphi = \varphi(\omega)$ – розв'язок рівняння

$$\big(\sigma(\omega)\varphi_\omega\big) + 2\varphi\varphi_\omega = 0, \quad \sigma(\omega) := 1 + \omega^2 + \sum_{s=2}^{n-1}(M_{sn}\omega + M_{1s})^2,$$

для якого $M_{sp}\varphi_\omega = A_s\varphi_\omega = B_s\varphi_\omega = 0$.

Якщо серед сталих $M_{sp}$, $A_s$ та $B_s$ є хоча б одна ненульова, то $\varphi_\omega = 0$ і оператор $Q$ еквівалентний оператору з $A(\mathrm{LHE})$.

Нехай $M_{sp} = A_s = B_s = 0$. Домножимо оператор $Q$ на $Z$, послідовно подіємо на нього приєднаними зображеннями перетворень $\mathrm{Ad}\big(\exp(A_nG_1 - A_1G_n)\big)$ і $\mathrm{Ad}\big(\exp(B_n\partial_1 - B_1\partial_n)\big)$ та поворотів так, що $A_1 = A_n = B_1 = B_n = 0$, $M_{1s} = M_{sn} = 0$, і виконаємо циклічне переставлення змінних $x_i \longrightarrow x_{i+1}$, $x_n \longrightarrow x_1$. В результаті отримаємо оператор $\widehat{Q}$, еквівалентний даному відносно $G(1,n)$:

$$\widehat{Q} = J_{12} + \varphi(\omega)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u,$$

де $((1+\omega^2)\varphi_\omega)_\omega + 2\varphi\varphi_\omega = 0$, $\omega = -x_1/x_2$, $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\omega x_2^{-2}\chi = 0$, або

$$\widehat{Q} = J_{12} + \varphi(\theta)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u, \tag{29}$$

де $\varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0$, $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\theta r^{-2}\chi = 0$, $(r,\theta)$ – полярні координати в площині $OX_1X_2$. В силу леми 2 $\chi = x_1 f_2 - x_2 f_1 - \varphi f$, де $f = f(t,\vec{x})$ – розв'язок рівняння (1), а тому оператор (29) еквівалентний відносно $\langle f\partial_u\rangle$ оператору з $\widetilde{\chi} = 0$. В результаті отримаємо оператор $\widetilde{Q}^2$ (випадок 3 теореми 1). Доведення теореми 1 завершено. ■

Р. Попович висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Bluman G.W. and Cole J.D. The general similarity solutions of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**, № 11. – P. 1025–1042.

[2] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system // J. Phys. A.: Math. Gen. – 1990. – **23**, № 17. – P. 3885–3894.

[3] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., and Popowych R.O., $Q$-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopov. Acad. Sci. Ukraine. – 1992. – № 12. – P. 27–32.

[4] Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 121–125.

[5] Popovych R.O. On reduction and $Q$-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.2. – P. 437–443.

[6] Fushchych W.I. and Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – P. L45–L48.

[7] Жданов Р.З., Цифра I.М. Редукція диференціальних рівнянь і умовна симетрія // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 595–602.