Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 194–199

УДК 517.945:519.46

Про клас Q-умовних симетрій та розв'язки еволюційних рівнянь

Р.О. ПОПОВИЧ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: roman@apmat.freenet.kiev.ua

Доведено, що для довільного еволюційного рівняння з n просторовими змінними ($n \in \mathbb{N}$) задача дослідження Q-умовної симетрії відносно інволютивних множин n операторів з нульовими коефіцієнтами при ∂_t зводиться до розв'язання цього рівняння, а довільна однопараметрична сім'я його розв'язків інваріантна відносно однієї з таких множин.

It is proved that, for an arbitrary evolutionary equation in n space variables ($n \in \mathbb{N}$), the problem of investigating Q-conditional symmetry under the involutive sets of n operators with the vanishing coefficients of ∂_t is reduced to solving this equation. And, an arbitrary one-parameter family of its solutions is invariant under one from such sets.

Незважаючи на плідні застосування Q-умовних (некласичних) симетрій для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними, багато аспектів їх теорії до цього часу залишаються нез'ясованими. В роботах [1–3] було показано, що для одновимірного лінійного рівняння теплопровідності та деякого його узагальнення задача відшукання Q-умовного оператора з нульовим коефіцієнтом при ∂_t композицією нелокального перетворення і перетворення годографа зводиться до розв'язання вихідного рівняння. Р. Жданов і В. Лагно [4] узагальнили цей результат на довільне еволюційне рівняння з однією просторовою змінною. В даній роботі доведено аналог цього результату для еволюційних рівнянь з довільною кількістю $n \in \mathbb{N}$ просторових змінних, а також обернену теорему про зв'язок однопараметричних сімей розв'язків цих рівнянь з їх Q-умовними симетріями.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$u_t = H(t, \vec{x}, u_{(r)}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

відносно функції $u = u(t, \vec{x})$, де через $u_{(r)}$ позначено множину всіх похідних функції u по просторових змінних $\vec{x}$ від 0-го до r-го порядку включно, $u_t = \partial u/\partial t$. Щоб редукувати рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння, необхідно знайти інволютивну множину з n операторів

$$Q^a = \xi^{a0}(t, \vec{x}, u)\partial_t + \xi^{ab}(t, \vec{x}, u)\partial_b + \eta^a(t, \vec{x}, u)\partial_u, \tag{2}$$

де $\operatorname{rank}(\xi^{a0}, \xi^{ab}) = n$, відносно якої рівняння (1) Q-умовно інваріантне. (Тут і надалі $\partial_b = \partial/\partial_{x_b}$, індекси a і b змінюються від 1 до n, за індексами, що повторюються, йде підсумовування.) При цьому, як правило, виникає необхідність розглядати два випадки: $\exists a$: $\xi^{a0} \neq 0$ або $\forall a$: $\xi^{a0} = 0$. Предметом нашого дослідження буде другий випадок.

Теорема 1. *Задача повного дослідження Q-умовної інваріантності рівняння (1) відносно інволютивних множин з n операторів (2), де $\xi^{a0} = 0$, зводиться до розв'язання вихідного рівняння.*

Доведення. Нехай в (2) $\xi^{a0} = 0$. Для інволютивних множин операторів Q-умовної симетрії можна ввести відношення еквівалентності [5, 6]:

$$\{\widehat{Q}^a\} \sim \{Q^a\}, \quad \text{якщо} \quad \widehat{Q}^a = \lambda^{ab} Q^b,$$

де $\lambda^{ab} = \lambda^{ab}(t, \vec{x}, u)$, $\det(\lambda^{ab}) \neq 0$. Якщо покласти $(\lambda^{ab}) = (\xi^{ab})^{-1}$, то отримаємо еквівалентну $\{Q^a\}$ множину операторів $\{\widehat{Q}^a\}$ з $\widehat{\xi}^{ab} = \delta^{ab}$ (δ^{ab} – символ Кронекера). Тому одразу будемо вважати, що

$$Q^a = \partial_a + \eta^a(t, \vec{x}, u)\partial_u. \tag{3}$$

Умова інволютивності множини операторів (3) співпадає з умовою їх комутування, яка рівносильна таким рівнянням на функції η^a:

$$\eta^a_b + \eta^b \eta^a_u = \eta^b_a + \eta^a \eta^b_u. \tag{4}$$

Лема 1. *Функції η^a задовольняють систему (4) тоді і тільки тоді, коли існує така функція $\Phi = \Phi(t, \vec{x}, u)$ $(\Phi_u \neq 0)$, що*

$$\eta^a = -\Phi_a/\Phi_u. \tag{5}$$

Доведення. Достатність зображення (5) для розв'язків системи (4) очевидна. Доведення необхідності проведемо індукцією по k – кількості операторів. Для $k=1$ за шукану функцію візьмемо довільний розв'язок рівняння $\Phi_1+\eta^1\Phi_u=0$ з $\Phi_u\neq 0$.

Припустимо, що твердження леми справедливе для k операторів, тобто

$$\exists\Phi=\Phi(t,\vec{x},u)\ (\Phi_u\neq 0):\quad \eta^i=-\frac{\Phi_i}{\Phi_u},\quad i=\overline{1,k}.$$

Випишемо з системи (4) рівняння, в яких $a=k+1$, $b=i$, $i=\overline{1,k}$:

$$\eta_i^{k+1}-\frac{\Phi_i}{\Phi_u}\eta_u^{k+1}=-\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_u}\right)_{k+1}-\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_u}\right)_u\eta^{k+1},\quad i=\overline{1,k}. \tag{6}$$

Якщо в (6) виконати заміну змінних

$$\eta^{k+1}=-\frac{\Phi_{k+1}}{\Phi_u}+\frac{\Psi(\tau,\vec{y},\varkappa)}{\Phi_u},\quad \tau=t,\quad \vec{y}=\vec{x},\quad \varkappa=\Phi(t,\vec{x},u),$$

то на функцію Ψ отримаємо рівняння $\Psi_{y_i}=0$, $i=\overline{1,k}$, тобто $\Psi=\Psi(t,x_{k+1},\ldots,x_n,\Phi)$. Нехай функція $\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Phi}(t,\vec{x},u)$ визначається співвідношенням $\Phi=\Theta(t,x_{k+1},\ldots,x_n,\widetilde{\Phi})$, де Θ – розв'язок рівняння $\Theta_{k+1}=\Psi(t,x_{k+1},\ldots,x_n,\Theta)$. (Така функція Θ існує як розв'язок звичайного диференціального рівняння з параметрами $t,x_{k+2},\ldots,x_n$; функція $\widetilde{\Phi}$ підставляється замість сталої інтегрування, $\Theta_{\widetilde{\Phi}}\neq 0$.) Тоді

$$\eta^i=-\frac{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_i}{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_u}=-\frac{\widetilde{\Phi}_i}{\widetilde{\Phi}_u},\quad i=\overline{1,k},$$

$$\eta^{k+1}=-\frac{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_{k+1}+\Theta_{k+1}}{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_u}+\frac{\Psi}{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_u}=-\frac{\widetilde{\Phi}_{k+1}}{\widetilde{\Phi}_u},$$

причому $\widetilde{\Phi}_u=\Phi_u/\Theta_{\widetilde{\Phi}}\neq 0$, тобто $\widetilde{\Phi}$ – шукана функція.

Доведення леми 1 завершено. ■

За означенням, рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно множини операторів (2), якщо

$$Q^a_{(r)}\bigl(u_t-H(t,\vec{x},u_{(r)})\bigr)\Big|_{u_t=H(t,\vec{x},u_{(r)}),\ \mathcal{M}}=0, \tag{7}$$

де $Q^a_{(r)}$ – r-е продовження оператора Q^a, а $\mathcal{M}$ – множина всіх диференціальних наслідків системи $Q^a[u] := \eta^a - \xi^{a0}u_t - \xi^{ab}u_b = 0$ до порядку $r-1$ включно. Для операторів (3) умова (7) має вигляд

$$\eta^a_t + \eta^a_u \widehat{H} = Q^a \widehat{H}, \qquad \text{де} \qquad \widehat{H} = \widehat{H}(t,\vec{x},u) = H\Big|_{\mathcal{M}}, \tag{8}$$

бо $\mathcal{M} = \left\{ \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = (Q^1)^{\alpha_1}\!\ldots(Q^n)^{\alpha_n}u, \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha_a \in \mathbb{N}, \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n \le r\end{array} \right\}$.
Підкреслимо, що в (8) і нижче оператори Q^a діють в просторі змінних $(t,\vec{x},u)$, а тому $Q^a u = \eta^a$, $Q^aQ^bu = \eta^a_b + \eta^b\eta^a_u$ і т.д.

Скористаємося зображенням (5) для функцій η^a, після чого виконаємо перетворення годографа:

$$\begin{array}{l} \tau = t, \quad \vec{y} = \vec{x}, \quad \varkappa = \Phi \quad - \quad \text{нові незалежні змінні;} \\ v = u \quad - \quad \text{нова залежна змінна, тобто} \quad v = v(t,\vec{x},u). \end{array} \tag{9}$$

(Зауважимо, що співвідношеннями (5) функція Φ визначається з точністю до перетворення $\Phi = \zeta(\tau,\widetilde{\Phi})$, яке в нових змінних має вигляд

$$\tau = \widetilde{\tau}, \quad \vec{y} = \vec{\widetilde{y}}, \quad \varkappa = \zeta(\widetilde{\tau},\widetilde{\varkappa}), \quad v = \widetilde{v}. \tag{10}$$

Тут ζ – довільна гладка функція своїх аргументів.) Тоді $\eta^a = v_{y_a}$, $Q^a = \partial_{y_a}$, і умова (8) набуває вигляду

$$v_{\tau y_a} - \frac{v_{\varkappa y_a}}{v_\varkappa}v_\tau - \frac{v_{\varkappa y_a}}{v_\varkappa}\widehat{H} = \mathcal{D}_{y_a}\widehat{H}, \tag{11}$$

де $\widehat{H} = \widetilde{H}(\tau,\vec{y}\,) := H(\tau,\vec{y},v_{(r)}(\tau,\vec{y},))$, $\mathcal{D}_{y_a}$ – оператор повного диференціювання по y_a. З (11) випливає, що

$$\left(\mathcal{D}_{y_a} - \frac{v_{\varkappa y_a}}{v_\varkappa}\right)(v_\tau - \widehat{H}) = 0, \quad \text{або} \quad \mathcal{D}_{y_a}\frac{v_\tau - \widehat{H}}{v_\varkappa} = 0, \tag{12}$$

тобто

$$v_\tau - H(\tau,\vec{y},v_{(r)}) = \gamma(\tau,\varkappa)v_\varkappa, \tag{13}$$

де $\gamma = \gamma(\tau,\varkappa)$ – деяка гладка функція. Виконавши в рівнянні (13) заміну змінних (10), де $\zeta = \zeta(\widetilde{\tau},\widetilde{\varkappa})$ – деякий розв'язок рівняння $\zeta_{\widetilde{\tau}} + \gamma(\widetilde{\tau},\zeta) = 0$, отримаємо рівняння того ж типу з $\widetilde{\gamma} = 0$, яке співпадає з вихідним рівнянням. Змінна $\varkappa$ входить в розв'язок рівняння як параметр. Доведення теореми 1 завершено. ■

Обернення доведення теореми 1 дає наступне твердження.

Теорема 2. *Для будь-якої однопараметричної сім'ї розв'язків рівняння (1) існує інволютивна множина операторів (3) Q-умовної симетрії рівняння (1), відносно якої дана сім'я розв'язків інваріантна.*

Доведення. Нехай

$$u = v(\tau, \vec{y}, \varkappa), \quad \text{де} \quad v_\varkappa \neq 0, \quad \tau = t, \quad \vec{y} = \vec{x}, \tag{14}$$

– однопараметрична сім'я розв'язків рівняння (1). Розв'яжемо (14) як рівняння відносно $\varkappa$: $\varkappa = \Phi(t, \vec{x}, u)$ – і визначимо функції η^a за допомогою формул (5). Тоді в силу леми 1 оператори (3) утворюють інволютивну множину. Так як за визначеннями $v_{y_a} = \Phi_{x_a}/\Phi_u = \eta^a$, то $Q^a[v] = 0$, тобто розв'язок (14) інваріантний відносно множини операторів (3). Залишилося довести, що рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно цієї множини операторів.

Підставимо розв'язок (14) в (1) і подіємо на результат операторами $\mathcal{D}_{y_a} - v_{\varkappa y_a}/v_\varkappa$. Отримані таким чином рівняння співпадають з (11). Виконавши в них перетворення годографа, зворотнє до (9) (тобто, $t = \tau$, $\vec{x} = \vec{y}$, $u = v$ – нові незалежні змінні; $\Phi = \varkappa$ – нова залежна змінна), і враховуючи (5), приходимо до рівняння (8), яке еквівалентне умові інваріантності (7).

Доведення теореми 2 завершено. ■

Зауваження 1. Анзац, побудований за множиною операторів (3), де функції η^a визначаються формулами (5), має вигляд

$$\Phi(t, \vec{x}, u) = \varphi(\omega), \quad \text{або} \quad u = v(t, \vec{x}, \varphi(\omega)), \quad \text{де} \quad \omega = t.$$

Після підстановки його в рівняння (1) отримаємо редуковане рівняння $\varphi' = \gamma(\omega, \varphi)$, в якому функція $\gamma = \gamma(\omega, \varphi)$ знаходиться із співвідношення

$$\gamma = -\Phi_t - \Phi_u \widehat{H} = \frac{v_t - H(t, \vec{x}, v_{(r)})}{v_\varphi}$$

(в силу рівняння (12) $\mathcal{D}_{y_a}\gamma = 0$).

Якщо функція Φ ($\Leftrightarrow v$) задає однопараметричну сім'ю розв'язків $\Phi(t, \vec{x}, u) = \varkappa$ ($\Leftrightarrow u = v(\tau, \vec{y}, \varkappa)$) рівняння (1), то редуковане рівняння має вигляд $\varphi' = 0$, тобто $\varphi = \mathrm{const}$.

Теореми 1 і 2 можна об'єднати в одне твердження.

Теорема 3. *Для довільного еволюційного рівняння (1) існує взаємно-однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і інволютивними множинами операторів (3) Q-умовної симетрії цього рівняння. А саме, кожній сім'ї розв'язків можна поставити у відповідність множину операторів (3), відносно якої дана сім'я розв'язків інваріантна. Задачі побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння (1) та повного дослідження його Q-умовної інваріантності відносно інволютивних множин з n операторів вигляду (3) повністю еквівалентні.*

Р. Попович висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., and Popowych R.O., Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopov. Acad. Sci. Ukraine. – 1992. – № 12. – P. 27–32.

[2] Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 121–125.

[3] Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.2. – P. 437–443.

[4] Zhdanov R.Z. and Lahno V.I., Conditional symmetries of the (1+1)-dimensional Boussinesq equation: a no-go theorem // Цей зб. – С. 88–99

[5] Bluman G.W. and Cole J.D. The general similarity solutions of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**, № 11. – P. 1025–1042.

[6] Жданов Р.З., Цифра І.М. Редукція диференціальних рівнянь і умовна симетрія // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 595–602.