Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ПОПОВИЧ Роман Омелянович

УДК 517.95

Класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант
академік НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор
САМОЙЛЕНКО
Анатолій Михайлович

Київ — 2009

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$A^{\sim}(\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}})$	алгебра Лі групи еквівалентності класу $\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}}$
$A^{\cap}(\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}})$	алгебра Лі ядра основних груп класу $\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}}$
$A^{\max}$, $A(\mathcal{L})$	максимальна алгебра ліївської інваріантності (МАІ)
$\mathrm{CV}(\mathcal{L})$	множина векторів, що зберігаються, системи $\mathcal{L}$
$\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$	множина тривіальних збережних векторів системи $\mathcal{L}$
$\mathrm{CL}(\mathcal{L})$	простір законів збереження системи $\mathcal{L}$
D_i, D_{x_i}	оператор повного диференціювання за змінною x_i
$G^{\sim}(\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}})$	група еквівалентності класу $\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}}$
$G^{\cap}(\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}})$	ядро основних груп класу $\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}}$
$G^{\max}$, $G^{\mathrm{p}}(\mathcal{L})$	основна група (ліївських симетрій) системи $\mathcal{L}$
J^k	простір джетів порядку k
$\mathcal{L}$	система диференціальних рівнянь
$\mathcal{L}^k$	потенціальна система k-го рівня
$\mathcal{L}_{(k)}$	многовид системи $\mathcal{L}$ у просторі J^k
$\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}}$	клас систем з довільними елементами з множини $\mathcal{S}$
$Q_{(r)}$	r-те продовження оператора Q
$\mathrm{sco}_L\, Q$ $(\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q)$	(слабкий) копорядок сингулярності оператора Q відносно диференціальної функції L (рівняння $\mathcal{L}$)
$\mathrm{T}(\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}})$	множина допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}\vert_{\mathcal{S}}$

Якщо не обумовлено інше, індекси i, j і k пробігають від 1 до n, індекси a і b — від 1 до m, індекси s, σ і ς — від 1 до p. Додаткові або інші зв'язки на індекси вказано явно. По індексах, що повторюються, йде підсумовування, якщо не вказано інше або з контексту очевидно, що індекси фіксовані. $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_{u^a} = \partial/\partial u^a$.

ВСТУП

Актуальність теми. Груповий аналіз диференціальних рівнянь, започаткований як самостійна галузь теорії диференціальних рівнянь С. Лі, почав інтенсивно розвиватися з 60-х років XX століття. Більшість проблем групового аналізу допускає формулювання у вигляді задач класифікації певних об'єктів чи властивостей, асоційованих з диференціальними рівняннями, відносно заданої еквівалентності. Фактично такі задачі займають центральне місце у груповому аналізі і саме вони стимулюють розвиток його методів.

Дослідженню з симетрійної точки зору важливих класів диференціальних рівнянь, що виникають при моделюванні явищ і процесів у теоретичній і математичній фізиці, біології, фінансовій математиці та інших науках, присвячено багато робіт. Практика застосування симетрійних методів показує, що модельні рівняння часто мають нетривіальні симетрійні властивості. Групова класифікація дозволяє виділити з класу рівнянь ті, що допускають алгебру симетрії певної структури чи найвищої розмірності. У рамках єдиного інфінітезімального підходу існують два основні методи розв'язання задач групової класифікації, які тісно переплітаються між собою у застосуваннях. Перший метод бере свій початок з робіт Л.В. Овсяннікова і представників його школи. Він базується на прямому інтегруванні системи визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів симетрії з точністю до перетворень еквівалентності. І хоч цей метод продовжують широко застосовувати, він дозволяє ефективно класифікувати лише прості класи диференціальних рівнянь з малою кількістю довільних елементів, що є або сталими, або функціями одного аргументу. Основним елементом другого — алгебраїчного — методу є вивчення можливої структури алгебр ліївської інваріантності. Вперше його використано ще С. Лі для класифікації звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а значно пізніше розвинуто і застосовано до рівнянь з частинними похідними, зокрема, у роботах П. Вінтерніца, Л. Ганьона, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Б.А. Магадєєва, А.М. Самойленка. Класи рівнянь, вивчені цим методом, хоч і мають просту структуру, але містять значні довільності у параметрах і відповідних групах еквівалентності. Відомі методи не дозволяли розв'язувати задачі групової класифікації у класах складнішої структури, які також виникають у застосуваннях, наприклад, у класах так званих нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. Для забезпечення розв'язності і прийнятного формулювання класифікаційних результатів необхідно також модифікувати постановку задач класифікації у таких класах.

Для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними поряд з ліївською редукцією широко використовують і некласичний метод, запропонований Дж. Блуменом і Дж. Коулом. У різних версіях і термінах (метод некласичної, умовної або Q-умовної симетрії, прямий метод, метод редукції тощо) цей підхід розвинуто у роботах В.І. Фущича, І.М. Цифри, Є.М. Воробйова, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, П. Олвера, П. Вінтерніца, П. Кларксона та багатьох інших авторів. Він дозволяє отримати точні розв'язки, які неможливо побудувати методом ліївської редукції. Задача пошуку некласичних симетрій і тим більше їх класифікації в класах диференціальних рівнянь технічно і теоретично є більш складною, ніж аналогічна задача для ліївських симетрій. Тому існує незначна кількість прикладів вичерпного опису некласичних симетрій у класах диференціальних рівнянь. Багато проблем теорії некласичних симетрій не є достатньо вивченими. На деякі питання, що виникають у цій теорії, лише недавно знайдено відповіді, більшість же таких питань і досі залишаються відкритими. Зокрема, тривалий час не було відомо, чи можна якимось чином поширити вже відомі "no-go" результати щодо операторів редукції еволюційних рівнянь на інші класи рівнянь. Для факторизації множини операторів редукції (що є важливим етапом у їх знаходженні) використовувався емпіричний підхід до розбиття цієї множини на підмножини, а це, як правило, приводило до істотного ускладнення всього подальшого розгляду. Більше того, існуюче означення некласичних симетрій є цілком коректним лише для спеціальних систем диференціальних рівнянь, включаючи окремі диференціальні рівняння.

Поряд з дослідженням симетрій, важливим є використання симетрійних методів для класифікації законів збереження диференціальних рівнянь. Закони збереження мають низку застосувань, а саме, для контролю чисельних похибок, як показник можливої інтегровності, у теорії асимптотичної інтегровності та для опису нелокальних перетворень симетрії чи еквівалентності. Ідея використання законів збереження для ітеративної побудови потенціальних структур над диференціальними рівняннями, а також поняття псевдопотенціалів і загальних накриттів виникли у роботах Х.Д. Уолквіста і Ф.Б. Естебрука. Ця ідея створила підґрунтя для введення понять потенціальної симетрії і потенціального закону збереження. Незважаючи на низку цікавих результатів щодо потенціальних симетрій і законів збереження конкретних класів диференціальних рівнянь, отриманих у роботах С. Анко, Дж. Блумена, Е. Пуччі, Дж. Сакоманді та інших, питанням теоретичного обґрунтування достатньої уваги не приділяли. Серед таких питань — вибір відношення еквівалентності для класифікації, застосовність методу характеристик для знаходження законів збереження потенціальних систем, критерій еквівалентності потенціальних законів збереження локальним тощо.

Початок розвитку теорії груп та алгебр Лі нерозривно пов'язаний з груповим аналізом диференціальних рівнянь і, зокрема, задачами групової класифікації. Теорія Галуа розв'язання алгебраїчних рівнянь надихнула С. Лі на ідею створення універсальної теорії інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Для реалізації цієї ідеї ним було запропоновано теорію неперервних груп точкових перетворень, а невдовзі, після класифікації неперервних груп перетворень на площині, виконано групову класифікацію звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Взаємопроникаючий зв'язок деяких розділів теорії алгебр Лі з груповим аналізом диференціальних рівнянь продовжує інтенсивно поглиблюватися через розвиток алгебраїчних методів у груповому аналізі і застосування його методів до алгебр Лі. До таких розділів можна віднести теорії інваріантів (узагальнених операторів Казіміра), реалізацій і контракцій алгебр Лі. Опис реалізацій алгебр Лі у різних класах векторних полів принципово важливий для розв'язання задач групової класифікації. Граничні переходи (контракції) між алгебрами Лі з'являються при дослідженні зображень, інваріантів, спеціальних функцій і диференціальних рівнянь. Найбільш відомим прикладом контракцій алгебр Лі у фізиці є сингулярний перехід від алгебри Пуанкаре до алгебри Галілея. Він надає симетрійне обґрунтування граничного переходу від релятивістської до класичної механіки за умови, що швидкість світла прямує до нескінченності. Поліноміальні базиси інваріантів напівпростих і неоднорідних алгебр Лі знайдено у роботах І.М. Гельфанда, А.М. Пєрєломова, М. Чайчіана та інших. Настільки ж повних результатів щодо інваріантів розв'язних алгебр Лі у літературі немає. Для побудови таких інваріантів використовують, як правило, інфінітезимальний метод, у рамках якого необхідно інтегрувати громіздкі перевизначені системи квазілінійних рівнянь першого порядку, що можна зробити лише для деяких простих класів алгебр Лі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України у рамках тем "Аналітичні та симетрійні методи дослідження диференціальних моделей математичної фізики" (номер держреєстрації 0198U001993), "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098) та "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є вдосконалення існуючих і розробка нових методів групового аналізу диференціальних рівнянь та суміжних галузей теорії алгебр Лі, а також застосування цих методів у різних класифікаційних задачах. Основну увагу приділено задачам групової класифікації, що не розв'язуються класичними методами, та узагальненню постановок класифікаційних задач. *Об'єктом дослідження* є загальні класи диференціальних рівнянь, нелінійні рівняння Шрьодінгера, еволюційні рівняння та їх спеціальні типи, узагальнені рівняння Гамільтона–Якобі, нелінійні хвильові рівняння та алгебри Лі. *Предметом дослідження* є групова класифікація, допустимі перетворення, потенціальні симетрії, оператори редукції, закони збереження і точні розв'язки зазначених вище рівнянь, а також узагальнені оператори Казіміра, реалізації і контракції алгебр Лі.

Методи дослідження. Інфінітезімальний метод Лі–Овсяннікова та алгебраїчний метод групової класифікації доповнено методами, запропонованими у дисертації, — такими як метод калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності і відображеннями між класами диференціальних рівнянь, метод розбиття класу на нормалізовані підкласи та метод розгалуженого розщеплення. Прямий метод у термінах скінченних перетворень застосовано до знаходження повних груп еквівалентності і множин допустимих перетворень класів диференціальних рівнянь. Точні розв'язки побудовано методами ліївської та некласичної редукції. Для опису законів збереження використано оригінальну модифікацію прямого методу, що залучає групи перетворень різних типів. Для обчислення узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі запропоновано алгоритм, який базується на методі рухомих реперів Картана.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Запропоновано поняття умовної, розширеної і узагальненої розширеної груп еквівалентності, нормалізованого класу диференціальних

рівнянь, подібних класів і відображення між класами, породженого точковими перетвореннями. На основі цих понять обґрунтовано і розвинуто існуючі та розроблено нові методи групової класифікації (метод калібрування довільних елементів і відображення між класами, метод розбиття класу на нормалізовані підкласи, метод розгалуженого розщеплення). Розвинуті методи застосовано до низки важливих класів диференціальних рівнянь.

2. Побудовано ієрархію вкладених нормалізованих класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера у випадку довільної кількості просторових змінних. Виконано повну групову класифікацію у класах (1+1)-вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами та модульними нелінійностями, (1+2)-вимірних кубічних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами, рівнянь Шрьодінгера з довільною нелінійністю, залежною лише від невідомої функції і спряженої до неї.
3. З точністю до контактної еквівалентності описано закони збереження (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку.
4. Доведено теорему про закони збереження двовимірних потенціальних систем, індуковані законами збереження вихідних систем. Узагальнення цього результату отримано для багатовимірних абелевих накриттів, багатовимірних потенціальних систем, псевдопотенціальних систем та загальних розшарованих систем.
5. Запропоновано необхідний і достатній критерій для визначення того, чи є закон збереження абелевого накриття чисто потенціальним законом збереження вихідної системи. Використовуючи цей критерій, проаналізовано ієрархію потенціальних законів збереження рівнянь конвекції–дифузії.
6. Введено поняття сингулярних і регулярних операторів редукції. Доведено, що особливі випадки редукції спричинені пониженням порядку розглядуваного рівняння на многовидах, заданих відповідними умовами інваріантної поверхні у просторі струменів.

7. Описано сингулярні оператори редукції (1+1)-вимірних еволюційних і хвильових рівнянь, а також знайдено зв'язок таких операторів з сім'ями розв'язків відповідних рівнянь.
8. Доведено "no-go" теорему про сингулярні оператори редукції копорядку 1 диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними, що допускають модулі векторних полів першого копорядку сингулярності.
9. Проведено розширений симетрійний аналіз (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, що включає вивчення структури нормалізованих підкласів, локальних і потенціальних законів збереження, звичайних та узагальнених потенціальних симетрій і операторів редукції. Знайдено оператори редукції багатовимірного лінійного рівняння теплопровідності.
10. Застосовуючи оригінальний підхід, що залучає метод рухомих реперів Картана, побудовано інваріанти (узагальнені оператори Казіміра) серій розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких ізоморфні алгебрам строго верхньотрикутних матриць, зокрема серій алгебр верхньотрикутних та спеціальних верхньотрикутних матриць.
11. Запропоновано нові необхідні критерії контракцій алгебр Лі і критерій нееквівалентності реалізацій алгебр Лі, які дозволили прокласифікувати контракції і реалізації алгебр Лі до розмірності чотири включно.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті методи можуть бути використані у подальших дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь. При вирішенні прикладних проблем ці результати можна застосовувати для вивчення конкретних модельних диференціальних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. В роботах, які опубліковано разом з іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У статтях [10, 35, 37, 180, 181, 234, 240–242] співавтори дисертанта незалежно виконували обрахунки та/або перевіряли отримані результати і приймали участь у їх обговоренні та інтерпретації. Постановка задач у цих роботах, розробка методів для їх розв'язання та доведення результатів належать дисертанту.

У циклі статей [84–88] щодо інваріантів алгебр Лі В.М. Бойку належать загальний план дослідження, розробка основного варіанту алгоритму, що базується на методі рухомих реперів, та виконання основного обсягу обчислень, особливо при побудові інваріантів алгебр Лі низької розмірності, дисертанту — модифікація алгоритму з залученням процедури нормалізації, спеціальна модифікація алгоритму для розв'язних алгебр Лі з нільрадикалом, ізоморфним алгебрі строго трикутних матриць, та обчислення, в основному, при побудові інваріантів певних серій розв'язних алгебр Лі. І. Патера приймав участь у обговоренні результатів. У статті [191] М.В. Лутфулліну належить побудова реалізацій розглянутих алгебр, дисертанту — введення поняття мегаідеалу, визначення плану дослідження та перевірка обрахунків. У роботі [232] дисертанту належать загальний план дослідження, удосконалення техніки класифікації реалізацій на основі поняття мегаідеалу та класифікація реалізацій простих алгебр Лі, В.М. Бойку — перевірка класифікації алгебр Лі, порівняння одержаних результатів з результатами інших авторів, М.О. Нестеренко виконала класифікацію реалізацій алгебр Лі в просторах з чотирма змінними, М.В. Лутфуллін — класифікацію реалізацій розв'язних алгебр в просторах з довільною скінченною кількістю змінних. У препринті [233], що є розширеним варіантом статті [232], дисертанту додатково належать алгоритми для обчислення алгебраїчних величин, а М.О. Нестеренко — їх знаходження та впорядкування; решту результатів розподілено, як у [232]. У роботі [204] М.О. Нестеренко побудувала всі реалізації нерозв'язних алгебр Лі, а дисертант запропонував доведення нееквівалентності реалізацій та застосування інфінітезимальних операторів для знаходження допустимих перетворень змінних між реалізаціями. В роботі [205] М.О. Нестеренко належить повний опис контракцій низькорозмірних алгебр Лі та поняття багатопараметричної контракції; дисертант знайшов нові необхідні критерії існування контракцій та довів їх, як і твердження про властивості повторних і багатопараметричних контракцій.

У роботах [160, 235–239] дисертанту належить постановка задач, розробка методів дослідження та застосування прямого методу до знаходження перетворень еквівалентності, паралельний обрахунок, перевірка та інтерпретація інших результатів; Н.М. Івановій — доведення результатів класифікацій, симетрійна редукція та побудова точних розв'язків. У роботі [236] дисертант також вивчив потенціальні закони збереження лінійного рівняння теплопровідності та лінеаризовних рівнянь конвекції–дифузії. Х. Ешрагі в роботах [237, 238] виконав перевірку складних технічних обчислень.

У статті [250] Х. Ешрагі запропонував застосувати формалізм багатовимірних простих хвиль у випадку слабо дисипативних рідин, сформулював метод для виведення основного модельного рівняння та виконав фізичну інтерпретацію частини знайдених точних розв'язків. Основний обсяг розрахунків при виведенні модельного рівняння та фізичній інтерпретації його точних розв'язків належить Л. Раджаї. Дисертант виконав симетрійний аналіз, провів редукцію і побудував точні розв'язки модельного рівняння.

У роботі [27] А.Г. Нікітін поставив задачу і порівняв результати з аналогічними, що існували у літературі. У статті [36] І.А. Єгорченко поставила початкову задачу для підкласу розглядуваного класу рівнянь і розв'язала її. У роботі [38] Р.М. Черніга поставив задачу і виконав огляд літератури щодо її актуальності. Узагальнення постановок задач у цих роботах, розробка нових методів групової класифікації та доведення результатів належать дисертанту.

У статті [297] Р.З. Жданову належить план дослідження, загальне означення умовної симетрії, більша частина доведень і наведений приклад, І.М. Цифрі — означення умовної симетрії у випадку одного оператора та участь у обговоренні результатів, дисертанту — спрощення доведення тверджень через використання леми Адамара, уніфікація позначень і введених понять.

К. Софоклеусу в роботах [163, 275–277] належить початковий вибір класів рівнянь для дослідження, а також перевірка знайдених додаткових перетворень еквівалентності і випадків групової класифікації, в [243] — нетривіальний приклад оператора редукції з нульовим коефіцієнтом при ∂_t, у [161, 162, 164–166] — перевірка побудованих законів збереження і потенціальних симетрій. У статтях [275, 276] А.Г. Джонпіллаі виконав часткову перевірку групової класифікації досліджуваних класів. Н.М. Івановій у роботі [244] належить опрацювання літератури, що стосується точних розв'язків рівняння швидкої дифузії, а також перевірка виконаних обчислень; у [159] — обрахунок локальних законів збереження і визначальних рівнянь для потенціальних симетрій; у [162] — класифікація законів збереження і потенціальних симетрій першого і другого рівнів; у [161] — класифікація законів збереження відносно звичайної групи еквівалентності; в [163] — паралельне виконання групової класифікації; в [164] — побудова точних розв'язків і некласичних симетрій; у [165, 166] — основний обсяг обчислень законів збереження, потенціальних симетрій і точних розв'язків. О.О. Ванєєва виконала в роботах [162,243,244,275] основний обсяг обчислень по груповій класифікації, побудові додаткових перетворень еквівалентності, точних розв'язків, потенціальних і некласичних симетрій і законів збереження. У роботах, згаданих у цьому абзаці, дисертанту належать постановка задач або її коригування, розробка методів дослідження, введення нових типів еквівалентностей, вивчення їх властивостей, паралельне проведення обчислень тощо. Так, у [159] дисертантом було сформульовано критерій існування нетривіальних потенціальних симетрій для лінійного рівняння теплопровідності і встановлено зв'язок між потенціальними симетріями цього рівняння і рівняння Фокера–Планка. У [277] доведено твердження щодо загальних властивостей відображень між класами, запропоновано ідею застосування відображення між класами диференціальних рівнянь для виконання групової класифікації і класифікації операторів редукції, знайдено нестандартне калібрування довільних елементів і описано допустимі перетворення у відображеному класі. Виокремлено з класу рівнянь дифузії між пластинами рівняння, побудові точних розв'язків якого присвячено статтю [243]. Побудовано повну групу еквівалентності і додаткові перетворення еквівалентності в [276]. Запропоновано метод для доведення теореми про некласичні симетрії нелінійних рівнянь фільтрації та знайдено зв'язок між звичайними і потенціальними операторами редукції в [244]. У [162] описано ієрархію потенціальних законів і потенціальних симетрій лінійних і лінеаризовних рівнянь з розглядуваних класів та знайдено додаткові потенціальні перетворення між випадками класифікації. Введено поняття розширеної групи еквівалентності, контракцій алгебр ліївської інваріантності та законів збереження, знайдено розширену групу еквівалентності класу рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, запропоновано метод групової класифікації і класифікації локальних і потенціальних законів збереження та потенціальних симетрій і виконано групову класифікацію цього класу в [163–166]. Також у [161] запропоновано класифікувати закони збереження відносно розширеної групи еквівалентності і виконано цю класифікацію.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на I–VII Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007), Українському математичному конгресі (Київ, 2001), X Міжнародній конференції "Symmetry Methods in Physics" (Єреван, Арменія, 2003), XI Регіональній конференції “Mathematical Physics and Mathematics” (Тегеран, Іран, 2004), Міжнародній конференції “Nonlinear Partial Differential Equations” (Тегеран, Іран, 2004), X Міжнародній конференції “Modern Group Analysis” (Ларнака, Кіпр, 2004), I–IV Міжнародних симпозіумах “Group Analysis of Differential Equations — Integrable Systems” (Нікосія, Кіпр, 2005, 2006, 2007 та Протарас, Кіпр, 2008), IV Міжнародному Симпозіумі “Quantum Theory and Symmetries” (Варна, Болгарія, 2005), V Міжнародній школі-семінарі “QFT and Hamiltonian Systems” (Калімaнешті, Румунія, 2006), конференції “Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2006), Міжнародній конференції “MM-VII Symmetries and Mechanics” (Новий Сад, Сербія, 2007), секції “Symbolic Symmetry Analysis and Its Applications” Міжнародної конференції “Applications of Computer Algebra” (Гагенберг, Австрія, 2008).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися і обговорювалися на науковому семінарі відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (керівники семінару — член-кореспондент НАН України, професор В.І. Фущич, 1992–1997, і професор А.Г. Нікітін, 1997–2008). Крім цього, результати дисертації були предметом доповідей на науковому семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань Інституту математики НАН України (керівник — академік НАН України, професор А.М. Самойленко, 2002, 2009), науковому семінарі Лабораторії теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Об’єднаного інституту ядерних досліджень (Дубна, Росія, 2003), науковому семінарі факультету математики та статистики Кіпрського університету (Нікосія, Кіпр, 2004–2008), науковому семінарі Центру математичних досліджень Монреальського університету (Монреаль, Канада, 2004), наукових семінарах Інституту досліджень у теоретичній фізиці і математиці (Тегеран, Іран, 2003–2004), а також наукових семінарах математичного факультету Віденського університету (Відень, Австрія, 2006–2008).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 50 роботах [1–50], з них 30 робіт, а саме [1–30], відповідають вимогам ВАК України до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях, 8 робіт опубліковано без співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 297 найменувань, та трьох додатків. Повний обсяг дисертації становить 396 сторінок, з них список використаних джерел займає 31 сторінку, а додатки — 57 сторінки.

Короткий зміст основної частини роботи. Основну частину роботи складають сім розділів і доповнюють три додатки. На початку кожного розділу подано стислий опис результатів, що містяться в ньому, а в кінці — висновки.

У **першому** розділі виконано огляд літератури за темою дисертації.

Другий розділ присвячено теоретичним основам симетрійного аналізу у класах систем диференціальних рівнянь. Проаналізовано поняття і об'єкти, асоційовані з груповою класифікацією диференціальних рівнянь (класи диференціальних рівнянь і їх властивості, різні типи груп еквівалентності і симетрії тощо). Класичне формулювання проблеми групової класифікації подано у строгий спосіб і вказано низку можливостей для його модифікацій і узагальнень. Нові поняття, пов'язані з класами диференціальних рівнянь, природно виникають при такому розгляді, зокрема як аналоги відповідних понять для окремих систем диференціальних рівнянь. Так, подібність систем розширено до подібності класів систем і відображень між класами, породжених точковими або контактними перетвореннями, а поняття умовної симетрії мотивувало введення поняття групи умовної еквівалентності. Існуючі поняття звичайної і узагальненої груп еквівалентності доповнено новими поняттями розширеної та узагальненої розширених груп еквівалентності, які відіграють важливу роль при груповій класифікації у складних класах диференціальних рівнянь.

Виокремлено спеціальні класи систем диференціальних рівнянь, які названо нормалізованими. Вони характеризуються властивістю, що кожне допустиме перетворення в такому класі породжено деяким перетворенням з групи еквівалентності. У залежності від типу групи еквівалентності (звичайна, узагальнена, розширена, узагальнена розширена) кажуть про нормалізованість у відповідному сенсі. Додатково введено поняття сильної нормалізованості і напівнормалізованості. Запропоновані поняття нормалізованості використано для обґрунтування застосування алгебраїчних методів до розв'язання задач групової класифікації. Показано, що саме нормалізованість класу систем диференціальних рівнянь, для якого виконується групова класифікація, а не значна довільність у його параметрах чи інша характеристика гарантує ефективність алгебраїчних методів. Також можна стверджувати, що результат так званої часткової групової класифікації співпадає з результатом повної за умови, що класифікований клас є нормалізованим. Доведено, що ієрархії нормалізованих підкласів природно виникають при груповій класифікації у нормалізованих класах. Поставлено проблему про класифікацію допустимих перетворень у класах систем диференціальних рівнянь та запропоновано розв'язувати її через класифікацію максимальних груп умовної еквівалентності і максимальних нормалізованих підкласів. Як ілюстрацію введених понять вивчено властивості нормалізованості (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь. Зокрема доведено, що для квазілінійних еволюційних рівнянь будь-яке контактне допустиме перетворення індуковано точковим.

Розроблені методи застосовано у **третьому** розділі до класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Побудовано ієрархію вкладених нормалізованих класів таких рівнянь у випадку довільної кількості просторових змінних. Останній з побудованих класів містить клас нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами та модульною нелінійністями і є зручним для виконання попередньої групової класифікації такого класу. Для повної групової класифікації у (1+1)-вимірному випадку використано метод з розбиттям на нормалізовані підкласи. У кожному з підкласів, утворених відповідно рівняннями з загальною, логарифмічною та степеневою нелінійностями, виконано класифікацію відносно його групи еквівалентності за допомогою алгебраїчного метода, що ґрунтується на дослідженні структури алгебри еквівалентності. Аналогічно прокласифіковано ліївські симетрії найбільш цікавого у розмірності 1+2 випадку кубічної нелінійності з потенціалом. Відповідний клас також є нормалізованим.

Задачу групової класифікації у ненормалізованому класі нелінійних рівнянь Шрьодінгера з довільною нелінійністю, залежною лише від невідомої функції і спряженої до неї, розв'язано за допомогою оригінального метода розгалуженого розщеплення у випадку довільної кількості просторових змінних. Комбінований метод, що включає і дослідження різних випадків інтегрування системи визначальних рівнянь, і вивчення можливої структури алгебри інваріантності, застосовано для групової класифікації класу систем двох нелінійних рівнянь Лапласа на дві невідомих функції від двох незалежних змінних. Такі системи можна розглядати зокрема як зображення стаціонарних двовимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера.

Четвертий розділ присвячено класифікації локальних і потенціальних законів збереження. Вивчено перетворення законів збереження і потенціальних систем при локальних перетвореннях між відповідними початковими системами. Сформульовано проблеми щодо класифікації законів збереження і потенціальних симетрій у класах диференціальних рівнянь. Введено поняття потенціальної групи еквівалентності. Прокласифіковано закони збереження (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку відносно контактної еквівалентності. Властивість контактної нормалізованості класу таких рівнянь виявилась принципово важливою для повного розв'язання цієї проблеми і лаконічного формулювання кінцевого результату. Розмірність простору законів збереження може дорівнювати 0, 1, 2 або нескінченості. Для ненульових значень розмірності описано вигляд рівнянь, які мають такі простори законів збереження.

Іншим важливим результатом у цьому ж розділі є теорема, формулювання якої об'єднує у собі дослідження законів збереження різних типів розширених систем, які включають вихідну систему як підсистему. Дано означення загальних розшарованих систем, що узагальнюють властивості потенціальних чи псевдопотенціальних конструкцій над диференціальними рівняннями. Доведено, що наступні твердження про закон збереження двовимірної потенціальної системи (або системи, що визначає абелеве накриття, або багатовимірної стандартної потенціальної системи без калібрувань) еквівалентні: 1) цей закон збереження індуковано законом збереження відповідної вихідної система; 2) він містить вектор густини, не залежний від потенціалів; 3) деякі з його розширених характеристик індуковано характеристиками вихідної системи; 4) він має характеристику, не залежну від потенціалів. Еквівалентність трьох перших властивостей також має місце для законів збереження загальних розшарованих систем, включаючи багатовимірні калібровані потенціальні системи та накриваючі системи. Доведення вимагало розробки версії леми Адамара для розшарованих просторів, введення навантажених просторів струменів і модифікації поняття цілковитої невиродженості систем диференціальних рівнянь. На основі доведеного у випадку абелевих накриттів отримано критерій для визначення того, коли закон збереження потенціальної системи є чисто потенціальним законом збереження, тобто не індукується локальними законами збереження вихідної системи. Цей критерій застосовано до аналізу ієрархії потенціальних законів збереження рівнянь конвекції–дифузії. Для тих же рівнянь розглянуто потенціальні перетворення еквівалентності. Знайдено цікавий зв'язок між невизначеністю потенціалів з абелевих накриттів та їх законами збереження.

Оператори редукції диференціальних рівнянь (які в літературі називають некласичними або умовними симетріями) вивчено у **п'ятому** розділі. Для них також сформульовано задачі класифікації відносно різних типів точкової еквівалентності у класах диференціальних рівнянь. Прокласифіковано оператори редукції нелінійних рівнянь фільтрації, всі з яких можна вважати потенціальними операторами редукції для нелінійних рівнянь дифузії. Встановлено зв'язок між звичайними і потенціальними операторами редукції загальних (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії. Вичерпно описано оператори редукції лінійного рівняння теплопровідності з довільною кількістю просторових змінних.

Усі інші результати у цьому розділі пов'язані з сингулярними операторами редукції ДРЧП з двома незалежними змінними. Введено низку понять, необхідних для розбиття множини операторів редукції на сингулярні і регулярні і подальшого дослідження сингулярних операторів (сингулярне векторне поле і сингулярний модуль векторних полів, слабкий і сильний копорядок сингулярності та ін.). Також показано, що особливі випадки операторів редукції спричинені пониженням порядку розглядуваного рівняння на многовидах, заданих відповідними умовами інваріантної поверхні в підхожому просторі струменів. Якщо диференціальне рівняння з в двома незалежними змінними допускає модуль векторних полів першого копорядку сингулярності, то це рівняння обов'язково має сингулярні оператори редукції копорядку 1, що належать цьому модулю. Система визначальних рівнянь для таких операторів складається з одного диференціального рівняння з трьома незалежними змінними такого ж порядку, як і вихідне рівняння. Визначальне рівняння зводиться до вихідного нелокальною заміною. Вичерпно досліджено сингулярні оператори редукції (1+1)-вимірних еволюційних і нелінійних хвильових рівнянь. Показано, що традиційне розбиття множини операторів редукції для факторизації є природним для еволюційних рівнянь і не є таким для нелінійних хвильових рівнянь.

У **шостому** розділі виконано розширений симетрійний аналіз (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Проаналізовано структуру нормалізаних підкласів таких рівнянь, знайдено локальні і потенціальні закони збереження, описано потенціальні симетрії, узагальнені потенціальні симетрії і оператори редукції. Зокрема доведено, що всі потенціальні закони збереження таких рівнянь індуковано локальними. Це дало змогу побудувати повну ієрархію потенціальних систем. Потенціальний фрейм розширено через уведення модифікованих потенціалів і визначення різних типів зображень для потенціальних систем та асоційованих з ними окремих потенціальних рівнянь. Основним інструментом дослідження (модифікованих) потенціальних структур є багатократне двоїсте перетворення Дарбу, тому значну увагу приділено його властивостям. Перетворення еквівалентності вихідних рівнянь продовжено на весь потенціальний фрейм. Запропоновано критерії існування нетривіальних потенціальних симетрій. Для деяких рівнянь знайдено алгебри потенціальних симетрій довільного порядку. Вивчено і регулярні, і сингулярні оператори редукції. Доведено, що проблеми побудови всіх однопараметричних (двопараметричних лінійних за параметрами) сімей розв'язків кожного такого рівняння і опису його операторів редукції з (не)нульовими коефіцієнтами при ∂_t повністю еквівалентні. Визначальні рівняння на коефіцієнти операторів редукції обох типів зведено за допомогою нелокальних замін до вихідних рівнянь. Досліджено ліївські симетрії та ліївські редукції визначальних рівнянь і допустимі перетворення між ними. Доведено, що алгебри ліївської інваріантності і групи точкових симетрій визначальних рівнянь, а також групи еквівалентності і множини допустимих перетворень їх класів індуковано відповідними об'єктами для вихідних рівнянь, а ліївська редукція визначальних рівнянь дає такі оператори редукції, що кожна з асоційованих сімей розв'язків вихідних рівнянь або складається з ліївських розв'язків, або породжена з фіксованого розв'язку дією групи ліївських симетрій. У результаті отримано вичерпну відповідь на питання про межі застосовності операторів редукції для побудови точних розв'язків вихідних рівнянь.

Сьомий розділ присвячено суміжним проблемам теорії алгебр Лі. Використовуючи оригінальний алгоритм на основі методу рухомих реперів Картана, знайдено узагальнені оператори Казіміра (тобто інваріанти коприєднаного зображення) серій розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких ізоморфні алгебрі строго верхньотрикутних матриць. Розглянуті серії включають алгебри строго верхньотрикутних матриць, нестрого верхньотрикутних матриць, спеціальних верхньотрикутних матриць та алгебри з одним нільнезалежним елементом. Запропоновано низку необхідних критеріїв контракцій алгебр Лі і критерій нееквівалентності реалізацій алгебр Лі, що дозволило виконати класифікацію контракцій і реалізацій алгебр Лі до розмірності чотири включно. Вивчено багатопараметричні і повторні контракції.

У кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

У трьох додатках наведено результати, що ілюструють і доповнюють результати основної частини.

У додатку А проаналізовано ієрархію потенціальних законів збереження рівнянь конвекції–дифузії вигляду $u_t = (A(u)u_x)_x + B(u)u_x$. Наведено результати щодо узагальнених розширених і умовних груп еквівалентності, законів збереження, допустимих перетворень, ліївських і потенціальних симетрій, точних розв'язків (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії та реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. Ці рівняння дають приклади класів з нетривіальними узагальненими розширеними групами еквівалентності. Також знайдено приховані симетрії і точні розв'язки (1+2)-вимірного рівняння Бюргерса.

Доведення теореми 4.2 у випадку абелевих і загальних накриттів та багатовимірних потенціальних систем з калібруваннями і без них розміщено у додатку Б разом з обґрунтуванням для таких структур коректності поняття характеристики закону збереження. Крім цього вивчено закони збереження загальних накриттів, що містять збережні вектори, лінійні по псевдопотенціалам.

У додатку В на прикладі узагальнених рівнянь Гамільтона–Якобі продемонстровано, що і для ненормалізованих класів можна використовувати алгебраїчний метод групової класифікації, наприклад, розбиваючи вихідні класи на нормалізовані підкласи і потім вивчаючи можливу структуру алгебр інваріантності.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультанту академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Михайловичу Самойленку і завідувачу відділу прикладних досліджень, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за постійну увагу і допомогу в роботі та кандидатам фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку, Олені Олександрівні Ванєєвій та іншим співробітникам відділу прикладних досліджень за плідну довголітню співпрацю і підтримку.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

У цьому розділі проведено детальний огляд та аналіз результатів, що існують у літературі і пов'язані з темою дисертації.

1.1. Групова класифікація

Групова класифікація дає ефективний засіб для відбору фізично релевантних моделей з параметризованих класів диференціальних рівнянь. Інваріантність відносно певної групи перетворень є фундаментальним принципом багатьох фізичних теорій. Так, всі нерелятивістські теорії повинні задовольняти принцип відносності Галілея, тобто їх базові фізичні закони мають бути інваріантними відносно групи Галілея. В релятивістських теоріях галілеївський принцип замінено принципом спеціальної відносності, що відповідає інваріантності відносно групи Пуанкаре. Тому фізичні моделі зазвичай зв'язані апріорними вимогами щодо їх симетрійних властивостей. Це природно приводить до загального формулювання так званої *оберненої задачі групової класифікації* для систем диференціальних рівнянь: *для заданої групи перетворень (реалізації алгебри Лі) у просторі фіксованої кількості залежних і незалежних змінних описати всі системи диференціальних рівнянь, що допускають цю групу (алгебру) як групу (алгебру) симетрій.* Дослідження багатьох задач такого типу представлено, наприклад, у [48, 124, 125, 132, 137]. Як правило, для їх розв'язання необхідно залучати методи теорії диференціальних інваріантів [30, 117, 118, 136, 213–215, 218].

Диференціальні рівняння, що моделюють реальні явища, часто містять числові або функціональні параметри (так звані *довільні елементи*), які визначають експериментально, а тому вони не є наперед фіксованими. Водночас вибрані моделі мають бути достатньо простими, щоб піддаватися систематичному вивченню. Симетрійний підхід виступає як універсальний метод розв'язання таких нелінійних моделей. Крім того, широка група симетрій системи диференціальних рівнянь вказує на наявність інших цікавих властивостей цієї системи і підказує шлях для застосування специфічних методів, адаптованих до відповідної конкретної проблеми. Тому властивості інваріантності моделі можуть слугувати для визначення її придатності. Стратегію вибору серед усіх можливих моделей тих, що допускають найширші групи симетрій, можна використовувати для виокремлення "правильних" значень довільних елементів у модельних рівняннях [30].

У рамках групового аналізу диференціальних рівнянь ця стратегія приводить до постановки (прямої) *задачі групової класифікації* [22, 29, 30]: *для заданого параметризованого класу систем диференціальних рівнянь у просторі фіксованої кількості залежних і незалежних змінних визначити спільну групу симетрій усіх систем з класу і з точністю до відношення еквівалентності, породженого групою еквівалентності класу, описати ті системи, що допускають ширші групи симетрій, ніж спільна.* (Докладніше обговорення постановки цієї задачі представлено у пункті 2.1.5.) Деякі проблеми групового аналізу (наприклад, вибір рівнянь з параметризованого класу, які допускають реалізації фіксованої алгебри Лі) виявляють властивості і прямої, і оберненої задач групової класифікації. Класичними прикладами розв'язання задач групової класифікації є класифікація С. Лі ЗДР другого порядку [186], яка дозволила С. Лі описати рівняння з цього класу, інтегровні в квадратурах, а також його ж класифікація двовимірних лінійних ДРЧП другого порядку [16, 156, 187, 256].

Групова класифікація в класах диференціальних рівнянь є набагато складнішою задачею, ніж знаходження групи ліївських симетрій окремої системи диференціальних рівнянь, оскільки зазвичай вона вимагає інтегрування громіздкої перевизначеної системи ДРЧП (*визначальних рівнянь*), до якої входять і коефіцієнти операторів інфінітезімальної симетрії, і довільні елементи класу. Для її розв'язання за останні десятиліття розвинуто різноманітні методи, які можно умовно об'єднати у два основних підходи, причому основою обох є інфінітезімальний критерій інваріантності [22, 30, 31, 75].

Перший підхід є більш алгебраїчним і ґрунтується на підгруповому аналізі групи еквівалентності розглядуваного класу диференціальних рівнянь. Якщо клас є достатньо загальним і має широку групу еквівалентності, то задача зводиться до опису нееквівалентних реалізацій алгебр Лі у певній множині векторних полів. Відповідне теоретичне підґрунтя докладно представлено у [22, 61, 293, 295]. Саме цей підхід застосовано С. Лі до розв'язання найвідомішої класичної задачі групової класифікації — класифікації ЗДР другого порядку [16, 187, 256]. В його рамках було класифіковано багато класів загальних або квазілінійних $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь і інших важливих класів диференціальних рівнянь [1,21,22,25,61,144,151,160,182,183,234,237,238,293–296]. Незважаючи на це, причини, що лежать в основі ефективності цієї техніки, і межі їх застосовності тривалий час залишалися нез'ясованими.

Незалежно від загального алгебраїчного підходу в [3, 155] було запропоновано так званий метод попередньої (або часткової) групової класифікації, що залучає підгруповий аналіз групи еквівалентності і побудову диференціальних інваріантів отриманих нееквівалентних підгруп. Він є простим і ефективним у випадку, коли групі еквівалентності відповідає скінченновимірна алгебра Лі. Питання про те, коли результати попередньої і повної групової класифікації співпадають, також залишалося відкритим.

Другий підхід до задач групової класифікації ґрунтується на дослідженні сумісності і прямому інтегруванні, з точністю до відношення еквівалентності, породженого відповідною групою еквівалентності, визначальних рівнянь, що випливають з інфінітезімального критерію інваріантності [30]. Цей підхід застосовують найчастіше, але він ефективний тільки для класів простої структури, наприклад, тих, що мають малу кількість довільних елементів, які є сталими або функціями одного-двох однакових аргументів і допускають скінченновимірні групи еквівалентності. До задач, вперше розв'язаних у цьому підході, можна віднести класифікації С. Лі двовимірних лінійних ДРЧП другого порядку [111, 187] і нелінійних хвильових рівнянь загального вигляду $d^2z/dxdy = F(z)$ [188], а також класифікація Л.В. Овсянніковим нелінійних рівнянь дифузії [28]. Саме з останньої статті розпочався сучасний етап розвитку групового аналізу. Велику кількість результатів щодо проблем групової класифікації, вивчених в рамках цього підходу, зібрано в [30, 75, 111, 112, 196]. Одним з "еталонних" і відомих прикладів є групова класифікація нелінійних рівнянь реакції–дифузії [12]. Відмітимо також групову класифікацію систем двох нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі сталою матрицею дифузії [208], яка за складністю, трудомісткістю і рівнем виконання сильно вирізняється серед відомих класифікацій подібного типу.

Водночас класи простої структури, в яких класифікацію можна отримати прямим застосуванням одного з існуючих методів, не вичерпують усіх класів диференціальних рівнянь, цікавих для застосувань із математичної точки зору. Відомі методи не дозволяють розв'язувати задачі групової класифікації у класах складнішої структури, наприклад, у класах так званих нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. Для забезпечення розв'язності і прийнятного формулювання класифікаційних результатів необхідно розвити нові потужні засоби і релевантні поняття, а також модифікувати постановку задач класифікації. І такий процес вже частково розпочався. Так, у [26, 195, 196] запропоновано поняття узагальненої групи еквівалентності, хоча певний час воно не знаходило істотних застосувань. Додаткові перетворення еквівалентності, перший нетривіальний приклад яких знайдено в [20] для класифікації з [12], почали регулярно застосовувати для спрощення складних класифікаційних списків [103, 208, 235]. Подальший рух у цьому напрямі вимагав розвитку загального теоретичного підґрунтя задач групової класифікації.

Багато зусиль докладено також до розробки алгоритмів і пакетів програм для виконання групової класифікації за допомогою комп'ютерів. Незважаючи на певний прогрес, значних успіхів тут, на відміну від знаходження ліївських симетрій конкретних систем диференціальних рівнянь [152], поки що не досягнуто [189, 190, 286–288].

1.2. Ліївські симетрії нелінійних рівнянь Шрьодінгера

Нелінійні рівняння Шрьодінгера є важливими об'єктами для дослідження завдяки їх цікавим математичним властивостям, низці застосувань у різних галузях фізики і інших наук: оптиці, нелінійній квантовій механіці, теорії конденсації Бозе–Айнштайна, фізиці плазми, інформатиці, геофізиці тощо. Вони також виникають у застосуваннях у вигляді так званих рівнянь рідини Маделунга, які пов'язані з стандартною формою через перетворення Маделунга $\psi = \sqrt{R}\,e^{i\varphi}$, де R і φ — нові дійснозначні невідомі функції. Кубічне рівняння Шрьодінгера є однією з найбільш вивчених інтегровних моделей математичної фізики.

Рівняння Шрьодінгера також інтенсивно вивчали за допомогою симетрійних методів. Маловідомо, що перші дослідження рівнянь Шрьодінгера з симетрійної точки зору виконано С. Лі. Більш точно, його класифікація [187] лінійних рівнянь з двома незалежними комплексними змінними містить у неявному вигляді розв'язок класифікаційної задачі для лінійних $(1+1)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера з довільним потенціалом. Цілеспрямовано вивчати ліївські симетрії рівнянь Шрьодінгера розпочали значно пізніше і теж з лінійного випадку [197, 206, 207]. Згодом симетрійні дослідження було поширено на нелінійні рівняння Шрьодінгера. Всі рівняння з класу (3.1), інваріантні відносно підалгебр алгебри ліївської симетрії $(1+1)$-вимірного вільного рівняння Шрьодінгера, побудовано в [83]. Пізніше загальнішу проблему опису рівнянь з класу (3.1), що мають одно-, два- та тривимірні алгебри ліївської інваріантності, розв'язано в [296]. Було помічено [83, 126], що $(1+n)$-вимірні нелінійні рівняння Шрьодінгера з нелінійностями вигляду $F = f(|\psi|)\psi$ вирізняються симетрійними властивостями, оскільки кожне таке рівняння інваріантне відносно зображення $(1+n)$-вимірній групи Галілея. Розширення групи інваріантності можливе для логарифмічної [49] і степеневої [126] функцій і тільки для них [27]. Степінь $\gamma = 4/n$ є особливим, оскільки вільне рівняння Шрьодінгера і нелінійне рівняння Шрьодінгера з нелінійністю $|\psi|^{4/n}\psi$ виокремлюються з багатьох подібних рівнянь тим, що допускають повну групу Галілея, розширену масштабними і конформними перетвореннями [126]. Це нелінійне рівняння Шрьодінгера має і інші виняткові властивості, через які значення $\gamma = 4/n$ тепер називають критичним степенем для нелінійних рівнянь Шрьодінгера.

Завершуючи серію робіт [140–144] щодо групового аналізу і точних розв'язків нелінійних рівнянь Шрьодінгера, Ганьон і Вінтерніц [144] дослідили загальний клас $(1+1)$-вимірних кубічних рівнянь Шрьодінгера зі змінними коефіцієнтами. Дойбнер і Голдін застосуванням симетрійного підходу отримали нові рівняння, які узагальнюють рівняння Шрьодінгера і їх можна застосувати у нелінійній квантовій механіці [114]. Ці рівняння детально вивчено з симетрійної точки зору багатьма авторами [115, 123, 200]. Дослідження щодо умовної інваріантності і методу прямої редукції привели до розширення множини нелінійних рівнянь Шрьодінгера, для яких точні розв'язки було побудовано симетрійними чи спорідненими методами [50, 106]. Багато точних розв'язків нелінійних рівнянь Шрьодінгера зібрано в [32]. Ліївські симетрії векторних нелінійних систем Шрьодінгера вигляду $i\boldsymbol{\psi}_t+\triangle\boldsymbol{\psi}+S(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\psi}^*)\boldsymbol{\psi}=\mathbf{0}$ розглядались у [286–288] за допомогою пакету символьних обчислень, щоб продемонструвати його ефективність при розв'язанні перевизначених систем ДРЧП. Тут $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{\psi}$ — набори n просторових змінних і m невідомих функцій відповідно, S — дійснозначна гладка функція своїх аргументів. Зокрема, обчислено максимальні розмірності алгебр ліївської інваріантності для невеликих значень n і m. Було також запропоновано використовувати визначальні рівняння для ліївських симетрій певних систем наведеного вигляду у якості еталону для тестування алгоритмів і пакетів програм, що працюють з перевизначеними системами ДРЧП.

Як видно з огляду, загальний об'єм відомих результатів щодо ліївських симетрій нелінійних рівнянь Шрьодінгера значно менший ніж, наприклад, для еволюційних рівнянь. Навіть для важливого класу рівнянь Шрьодінгера з нелінійностями вигляду $F=f(|\psi|)\psi$ вичерпну групову класифікацію представлено порівняно недавно [27], незважаючи на велику кількість попередніх часткових результатів, а рівняння Шрьодінгера з потенціалами і модульними нелінійностями вивчали тільки для спеціальних значень потенціалів. Це і обумовлює актуальність подальших досліджень нелінійних рівнянь Шрьодінгера в рамках групового аналізу.

1.3. Закони збереження

Після того, як робота Е. Ньотер [210] стала загальновідомою, більшість авторів шукали закони збереження, використовуючи симетрійний підхід на основі (узагальненої теореми) Ньотер [15, 31, 75]. Цей підхід має ряд переваг. Він зводить побудову законів збереження до знаходження симетрій, для відшукання яких існують добре розвинуті методи. Крім того, симетрійні властивості вже відомі для багатьох систем диференціальних рівнянь. Проте такий підхід можна застосувати лише до рівнянь Ейлера–Лагранжа, які утворюють нормальну систему і допускають групи симетрій, що задовольняють додаткову “варіаційну” умову збереження варіаційного інтегралу [31], що обмежує область застосовності цього підходу. Водночас означення законів збереження безпосередньо дає шлях до їх знаходження. Техніка обчислень при цьому подібна до класичного методу Лі дослідження симетрій диференціальних рівнянь [111, Розділ 6]. Згідно традиціям групового аналізу, цей метод називають *прямим* [172, 289]. Можна виокремити дві основні його версії [289]. Перша — більш пряма — ґрунтується безпосередньо на означенні збережних векторів [111,236,289], друга залучає характеристичну форму законів збереження або два її наслідки, тому для неї існує три модифікації [54–56, 73, 77, 79, 279, 289]. Недоліком першою версії є додаткова невизначеність збережних векторів порівняно з характеристиками, пов’язана з існуванням нульових дивергенцій, що значно ускладнює обчислення, але вона немає суттєвих обмежень щодо властивостей систем, до яких може застосовуватися. Другу версію можна використовувати тільки для цілком невироджених систем, і як додатковий крок вона включає обчислення збережних векторів за знайденими характеристиками. До обох версій можна додатково залучати відношення еквівалентності, породжені групами перетворень на множинах збережних векторів і характеристик, але такі еквівалентності у літературі регулярно не розглядалися і відповідні задачі класифікації не ставилися. Те саме твердження справедливе і щодо потенціальних симетрій.

Ідея ітеративної побудови потенціальних структур над диференціальними рівняннями через використання законів збереження, поняття псевдопотенціалів і загальних накриттів [283] створила підґрунтя для введення понять потенціальної симетрії і потенціального закону збереження [76, 116, 148, 253, 280]. Незважаючи на низку цікавих і змістовних результатів щодо таких симетрій і законів збереження конкретних диференціальних рівнянь чи деяких їх класів (іноді сформульованих у інших термінах) [3, 7, 70, 71, 73, 75–77, 79, 80, 148, 246, 253, 280, 294], питанням теоретичного обґрунтування достатньої уваги не приділялося. Не виконувалося аналізу відношень еквівалентності, які можна було б застосовувати. Збережні вектори для введення потенціалів відбирали на основі емпіричних міркувань. При застосуванні методів, що залучають характеристичну форму законів збереження не перевіряли умову цілковитої невиродженості потенціальних систем. Не існувало загального критерію для перевірки еквівалентності потенціальних законів збереження. Тільки недавно було запропоновано необхідний критерій для такої перевірки у випадку характеристик, що є функціями лише незалежних змінних [77].

1.4. Некласичні (Q-умовні) симетрії

"Некласичний метод побудови автомодельних розв'язків" запропоновано Дж. Блуменом і Дж. Коулом у [72]. Значно пізніше цей метод почали асоціювати з термінами *Q-умовна* [48], просто *умовна* [43, 45, 139] або *некласична* [185] симетрія. Використовуючи результати з [297] як обґрунтування, також запропоновано термін *оператор редукції* [10, 244], який і використовується у дисертації.

Справжній сплеск дослідницького інтересу до некласичних симетрій розпочався після статей [135, 216, 217], що привело до інтенсивного розвитку їх теоретичних основ упродовж двох останніх десятиліть. Крім того, їх ефективно застосовували до знаходження точних розв'язків багатьох ДРЧП, які виникають у фізиці, біології, фінансовій математиці тощо. Див., наприклад, огляди в [45, 46, 122, 219].

У [72] "некласичний" метод описано на прикладі $(1+1)$-вимірного лінійного рівняння теплопровідності і підкреслено, що будь-який розв'язок відповідних визначальних рівнянь дає коефіцієнти такого оператора, що анзац, побудований за ним, зводить рівняння теплопровідності до ЗДР.

У [216] “некласичний” метод розглянуто під час порівняльного аналізу широкого спектру різних підходів до побудови точних розв’язків. Поняття слабкої симетрії систем ДРЧП, що узагальнює “некласичний” метод, введено в [217]. Там же обговорено загальну процедуру редукції, а також вперше виведено фундаментальні тотожності [217, рівняння (23)], критично важливі для теорії некласичних симетрій. Першу версію критерію умовної інваріантності, що явно враховує диференціальні наслідки умови інваріантної поверхні, запропоновано в [135]. Узагальнюючи результати з [44, 135] і інших попередніх статей, у [43] введено поняття загальної умовної інваріантності. Починаючи зі збірника статей, що містить [43], багато авторів стали регулярно використовувати терміни “умовна інваріантність” і “Q-умовна інваріантність” у зв’язку з методом Блумена–Коула. Назву “некласична симетрія”, здається, вперше використано в [185]. До цього не існувало ніякої спеціальної назви для операторів, порахованих при такому підході, а існуюча термінологія робила наголос на характеристиках методу або інваріантності. Прямий метод редукції (метод анзаца) в явному вигляді і систематично вперше застосовано в [107] до рівняння Бусінеска, хоча деякі приклади подібних редукцій для інших рівнянь будувалися і раніше (див. посилання в [107], а також [129]). Умова інволютивності для сімей операторів вперше введено у формулювання критерію умовної інваріантності в [139, 281, 282]. Зв’язок між некласичними симетріями, редукцією і формальною сумісністю комбінованої системи, утвореної вихідним рівнянням і умовою інваріантної поверхні, відкрито в [246] і пізніше вивчено в [212]. Проблему алгоритмізації обчислення некласичних симетрій поставлено в [109]. Поняття узагальнених або вищих умовних симетрій запропоновано в [119, 290] для класу $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь, а у більш широкому контексті воно обговорено в [212]. Еквівалентність некласичного підходу, що ґрунтується на умовній симетрії, та прямого (анзацного) методу редукції ДРЧП встановлено в загальній формі в [297], використовуючи точне означення редукції диференціальних рівнянь. Водночас, не зважаючи на тривалу історію некласичної симетрії та надихаючі результати її застосувань, багато базових проблем цієї теорії дотепер залишаються відкритими. Так, існуюче означення некласичних симетрій є цілком коректним лише у випадку окремих диференціальних рівнянь та для деяких спеціальних систем ДРЧП. Задовільного означення для загальних систем у літературі немає.

Вичерпно некласичні симетрії описано лише для незначної кількості окремих диференціальних рівнянь або одиничних їх класів. Мабуть, найбільш відомим і достатньо повним є дослідження некласичних симетрій нелінійних рівнянь теплопровідності з джерелом [39, 47, 59, 108, 109], але і в ньому є певні прогалини [277]. Задачі про опис некласичних симетрій не ставились як задачі класифікації, тому для спрощення їх розв'язання і кінцевих результатів не використовувались відношення еквівалентності за групами перетворень, хоча в деяких випадках це є істотнім [244, 277]. Тільки у [185] було зауважено, що для будь-якого рівняння його група лівської інваріантності породжує добре визначену дію на його операторах некласичної симетрії, тому її можна використати для розбиття множини цих операторів на класи еквівалентності, але в цій же статті зазначене спостереження не було регулярно використано при обчисленні операторів некласичної симетрії $(1+1)$-вимірного рівняння Бусінеска. Більш строго твердження про дію перетворень точкової симетрії на множині інволютивних сімей операторів некласичної симетрії сформульовано в [282] без зв'язку з проблемами класифікації. Різні типи точкових еквівалентностей у класах диференціальних рівнянь у контексті класифікації некласичних симетрій у літературі навіть не згадували. Зазначимо також, що існуючі результати щодо некласичних симетрій стосуються, як правило, рівнянь з двома чи зрідка трьома незалежними змінними (див., наприклад, [17]). Регулярне вивчення некласичних симетрій багатовимірних рівнянь (за вийнятком багатовимірного лінійного рівняння теплопровідності [37]) взагалі не проводилось.

Дослідження так званих “no-go” випадків некласичних симетрій було розпочато з $(1+1)$-вимірного лінійного рівняння теплопровідності. У [284] в одному з випадків, що виникають при обчисленнях некласичних симетрій, для частини системи визначальних рівнянь на коефіцієнти відповідного оператора вивчено ліївську симетрію та знайдено нелокальні перетворення, що зв'язують досліджувану систему з рівнянням Бюргерса та рівнянням теплопровідності з джерелом. Повне (у певному сенсі) розв'язання задачі про Q-умовну інваріантність лінійного одновимірного рівняння теплопровідності дано в [134] (див. також [33,127,224]). А саме, в обох випадках, що виникають, знайдено ліївську симетрію систем визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q-умовної інваріантності і нелокальні перетворення, що зводять їх до вихідного рівняння. Ці результати було повністю поширено на клас лінійних рівнянь переносу [33, 127, 224]. У [291, 292] помічено, що теорема з [134] про зведення визначального рівняння для множини операторів Q-умовної симетрії з нульовим коефіцієнтом при ∂_t до вихідного рівняння повністю переноситься на випадок довільного $(1+1)$-вимірного еволюційного рівняння. Трохи згодом цю теорему вдалося узагальнити на інволютивні сім'ї операторів Q-умовної симетрії спеціального вигляду багатовимірних еволюційних рівнянь [34] і навіть систем таких рівнянь [10]. Однак узагальнення з [291, 292] було найважливішим, оскільки воно виконано для класу рівнянь, до яких некласичний метод пошуку інваріантних розв'язків застосовують найчастіше.

Усі згадані “no-go” результати щодо операторів редукції стосуються тільки певних — еволюційних — рівнянь. Тривалий час не було відомо, чи можна взагалі якимось чином поширити їх на інші класи рівнянь і якщо так, то за яких умов це можна зробити. Їх значення для загальної теорії некласичних симетрій і можливі застосування не були зрозумілі і еволюційні рівняння здавались особливими. Для факторизації множини операторів редукції (яка в дійсності є важливим етапом їх знаходження) використовувався емпіричний підхід до розбиття всієї множини на підмножини, а це, як правило, приводило до істотного ускладнення всього подальшого розгляду.

1.5. Інваріанти, реалізації та контракції алгебр Лі

Однією з визначальних характеристик алгебр Лі є їх інваріанти, які мають численні застосування в різних галузях математики і фізики, де виникають алгебри Лі (теорія зображень, інтегровність гамільтонових диференціальних рівнянь, квантові числа тощо). Зокрема, поліноміальні інваріанти деякої алгебри Лі вичерпують множину її операторів Казіміра, тобто центр її універсальної обгортуючої алгебри [52]. Тому неполіноміальні інваріанти також називають узагальненими операторами Казіміра. Оскільки структура інваріантів сильно залежить від структури алгебри і класифікація всіх (скінченновимірних) алгебр Лі є "дикою" задачею, здається неможливим створити повну теорію узагальнених операторів Казіміра у загальному випадку.

Існує багато робіт про властивості і особливості обчислення інваріантів алгебр Лі, оцінку їх кількості та застосування для різноманітних класів алгебр Лі, або навіть конкретних алгебр Лі, які виникають у фізичних задачах [57, 84, 97, 99, 169, 170, 201–203, 220, 252, 270, 272, 273].

Останнім часом у якості основного підходу до обчислення інваріантів алгебр Лі використовувався інфінітезімальний метод. Ефективний у простих випадках, для складніших алгебр він приводить до інтегрування громіздких перевизначених систем квазілінійних ДРЧР першого порядку [52,220,270]. Так, у [272,273] було вивчено розв'язні алгебри Лі, нільрадикали яких ізоморфні алгебрі строго верхньотрикутних матриць, і зроблено спробу порахувати інфінітезімальним методом їх інваріанти. Для довільних розмірностей успіху вдалося досягти лише для серії алгебр строго верхньотрикутних матриць, а ще для двох серій алгебр (зокрема, алгебр спеціальних верхньотрикутних матриць) інваріанти було пораховано лише для невеликих розмірностей, після чого висунуто гіпотези про їх вигляд. Водночас у груповому аналізі (а саме, теорії диференціальних інваріантів і задачах еквівалентності) вже давно використовують сучасну версію потужного методу рухомих реперів Картана [117,118,154,218], застосування якого дозволяє уникнути інтегрування ДРЧП при побудові інваріантів алгебр Лі, див. підрозділ 7.1.

Вперше питання про опис реалізацій алгебр Лі векторними полями поставив ще С. Лі, він же отримав найбільш важливі результати, а саме, прокласифікував несингулярні скінченновимірні алгебри Лі векторних полів на комплексних і дійсних прямій і площині. Проте це питання і досі є складною математичною задачею та має широкий спектр застосувань, зокрема до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, групової класифікації рівнянь у частинних похідних, класифікації гравітаційних полів тощо. Лише недавно було прокласифіковано реалізації дійсних алгебр Лі розмірностей до чотири включно у просторах довільної кількості змінних [232, 233] . При цьому суттєву роль відіграв критерій нееквівалентності реалізацій, представлений у підрозділі 7.2. У цих же роботах виконано також огляд інших відомих результатів щодо реалізацій алгебр Лі, їх застосувань і класифікації низькорозмірних алгебр.

Хоча вперше концепцію контракцій між алгебрами Лі запропоновано в [258], загальновідомою вона стала лише після [157,158]. Існуючі роботи по теорії контракцій можна умовно розділити на два великі потоки — в математичній і фізичній літературі, — які практично не перетинаються. Але навіть усіх зібраних у літературі необхідних критеріїв контракцій виявилось недостатньо для опису контракцій низькорозмірних алгебр Лі. Як правило, критерії формулювалися для певного класу (наприклад, нільпотентних) алгебр Лі. Особливо нестача критеріїв відчувалася для дійсного, складнішого за комплексний, випадку. Див. детальний огляд у [205], посилання у підрозділі 7.3 і особливо — зауваження 7.7.

РОЗДІЛ 2

Груповий аналіз у класах диференціальних рівнянь

Цей розділ присвячено теоретичним основам групового аналізу у класах (систем) диференціальних рівнянь. У підрозділі 2.1 з симетрійної точки зору проаналізовано базові поняття і об'єкти, асоційовані з системами диференціальних рівнянь та їх класами, а також розглянуто різні можливості для їх розвитку і узагальнення. Відображення між класами та їх потенційні застосування у класифікаційних задачах досліджено у підрозділі 2.2. Ключове поняття нормалізованого класу систем диференціальних рівнянь, яке може стати основою для перебудови теорії групової класифікації і інших споріднених розділів групового аналізу, запропоновано і вивчено у підрозділі 2.3. Нормалізаційні властивості класів (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь є предметом дослідження у підрозділі 2.4.

Умовимося, що всі перетворення діють зліва. Термін "група точкових перетворень" використовуємо як скорочення для терміну "локальна (псевдо)група локально визначених точкових перетворень". Області визначення і значень для відображень не вказані явно. Припустимо також, що всі функції є достатньо гладкими (як правило, дійсноаналітичними) на підхожих відкритих множинах.

2.1. Точкові перетворення у класах диференціальних рівнянь

Щоб створити міцне теоретичне підґрунтя для строгого введення поняття нормалізованих класів диференціальних рівнянь у параграфі 2.3, необхідно уважно переглянути основні поняття групового аналізу диференціальних рівнянь. Розпочнемо з аналізу базового поняття загального класу (систем) диференціальних рівнянь. Потім формалізуємо поняття точкових перетворень у таких класах і визначимо різні типи груп еквівалентності. Також будуть строго сформульовані проблема групової класифікації у деякому класі диференціальних рівнянь, а також проблема класифікації допустимих перетворень. Це дає основу для розвитку методів групового аналізу з використанням поняття нормалізованих класів диференціальних рівнянь.

2.1.1. Системи диференціальних рівнянь. Нехай $\mathcal{L}$ — система $L(x, u_{(p)}) = 0$ l диференціальних рівнянь $L^1 = 0, \ldots, L^l = 0$ для m невідомих функцій $u = (u^1, \ldots, u^m)$ від n незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тут $u_{(p)}$ позначає множину всіх похідних функцій u по x порядку не вище p, включаючи u як похідну порядку нуль. Завжди вважаємо, що множина диференціальних рівнянь, які утворюють розглядувану систему, канонічно зображає цю систему і є мінімальною. Мінімальність множини рівнянь означає, що ніяке рівняння з цієї множини не є диференціальним наслідком інших рівнянь. Через $L_{(k)}$ позначимо максимальну множину алгебраїчно незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$, що мають як диференціальні рівняння порядки не вище k. Ототожнимо $L_{(k)}$ з відповідною системою алгебраїчних рівнянь у $J^k(x|u)$ і пов'яжемо її з многовидом $\mathcal{L}_{(k)}$, визначеним цією системою.

Нагадаємо, що $J^k(x|u)$ — це простір струменів k-го порядку з незалежними змінними x і залежними змінними u. Гладку функцію, визначену на підмножині простору $J^k(x|u)$ для деякого k, тобто залежну від x і скінченної кількості похідних від u, називають диференціальною функцією від u. Позначення $H[u]$ вказує, що H — диференціальна функція від u. Див. [31] для вичерпних означень.

Для того, щоб многовид $\mathcal{L}_{(k)}$ дійсно зображав систему $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь, система $\mathcal{L}$ повинна бути *локально розв'язною* у кожній точці многовиду $\mathcal{L}_{(k)}$. Для застосування леми Адамара до диференціальних функцій, що дорівнюють нулю на многовиді $\mathcal{L}_{(k)}$, потрібно, щоб система $L_{(k)}$ як система алгебраїчних рівнянь, визначених у просторі струменів $J^k(x|u)$, мала *максимальний ранг* у кожній точці многовиду $\mathcal{L}_{(k)}$. Якщо для будь-якого k система $\mathcal{L}$ задовольняє обидві ці умови, то її називають *цілком невиродженою.* (Це означення трохи відрізняється від наведеного в [31].)

Для певних цілей, наприклад, при дослідженні різних потенціальних і псевдо-потенціальних конструкцій замість поняття порядку зручно використовувати більш загальне поняття *ваги* диференціальних змінних, яке враховує структуру систем диференціальних рівнянь, що розглядаються. А саме, для кожної змінної простору струменів $J^\infty(x|u)$ нескінченного порядку (що є оберненою границею башти з просторів струменів $\{J^k(x|u),\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ відносно канонічної проекції $\pi^k\colon J^k(x|u)\to J^{k-1}(x|u)$, $k\in\mathbb{N}$) визначимо її вагу ϱ за правилом:

$$\varrho(x_i)=0,\quad \varrho(u^a_\alpha)=\varrho_a+|\alpha|.$$

Ваги $\varrho(u^a)=\varrho_a$ визначають з урахуванням структури системи $\mathcal{L}$. (У розділі 4 наведено конкретні приклади такого визначення.) Надалі u^a_α позначає змінну в $J^\infty(x|u)$, відповідну похідній $\partial^{|\alpha|}u^a/\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — довільний мультиіндекс, $\alpha_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $|\alpha|:=\alpha_1+\dots+\alpha_n$. Якщо $\varrho_a=0$, то вага змінної u^a_α очевидно співпадає зі звичайним порядком похідної $|\alpha|$. У *навантажений простір струменів* $J^k_\varrho(x|u)$ включаємо змінні з вагами, не більшими, ніж k. Простір струменів нескінченного порядку $J^\infty(x|u)$ є оберненою границею башти навантажених просторів струменів $\{J^k_\varrho(x|u),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ відносно канонічної проекції $\pi^k_\varrho\colon J^k_\varrho(x|u) \to J^{k-1}_\varrho(x|u)$, $k \in \mathbb{N}$.

Техніка роботи з вагами не відрізняється від техніки порядків, причому всі означення в термінах порядків можна переформулювати у термінах вагів. Так, вага $\varrho(H)$ будь-якої диференціальної функції $H[u]$ дорівнює максимальній вазі змінних, що явно виникають у H. Вага рівняння $H[u] = 0$ дорівнює $\varrho(H)$. Повна множина незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$, які мають ваги не вище, ніж k, і асоційований многовид у $J^k_\varrho(x|u)$ позначимо символами $L_{[k]} = L_{[k]_\varrho}$ і $\mathcal{L}_{[k]} = \mathcal{L}_{[k]_\varrho}$ відповідно. Систему $\mathcal{L}$ називають *цілком невиродженою відносно ваги* ϱ, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ у кожній точці многовиду $\mathcal{L}_{[k]}$ вона локально розв'язна і алгебраїчна система $L_{[k]}$ має *максимальний ранг.* Лему Адамара можна застосовувати у звичайний спосіб до диференціальних функцій, які визначені в $J^k_\varrho(x|u)$ і дорівнюють нулю на $\mathcal{L}_{[k]}$.

Усі місця, в яких використання навантажених просторів струменів суттєве, будемо вказувати явно. В інших місцях використано термінологію, що використовує порядки, хоча її можна замінити на таку, що ґрунтується на вагах.

2.1.2. Класи систем диференціальних рівнянь. Розглянемо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ систем диференціальних рівнянь

$$\mathcal{L}_\theta\colon \quad L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})) = 0,$$

параметризований $\theta = \theta(x, u_{(p)})$. Тут L — набір фіксованих функцій від x, $u_{(p)}$ і θ. Символ θ позначає набір довільних (параметричних) функцій $\theta(x, u_{(p)}) = (\theta^1(x, u_{(p)}), \dots, \theta^k(x, u_{(p)}))$, що пробігає множину роз'язків $\mathcal{S}$ системи $S(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) = 0$. Цю систему складають диференціальні рівняння на функції θ, де x і $u_{(p)}$ виступають у якості незалежних змінних, $\theta_{(q)}$ — множина всіх частинних похідних від θ порядку не вище q. Іноді множину $\mathcal{S}$ додатково обмежують умовою $\Sigma(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) \neq 0$ нерівності нулю з деяким іншим набором Σ диференціальних функцій.

(Ця нерівність означає, що всі компоненти набору Σ не рівні 0. Для простоти набір Σ можна замінити окремою диференціальною функцією, що є добутком його компонент.) Надалі назвемо функції θ довільними елементами. Також позначимо *клас систем* $\mathcal{L}_\theta$ *з довільними елементами* θ*, що пробігають множину* $\mathcal{S}$ як $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Нехай $L_{\theta,(k)}$ позначає множину всіх алгебраїчно незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}_\theta$, які мають як диференціальні рівняння порядки не вищі за $k \in \mathbb{N}$. Ототожнимо $L_{\theta,(k)}$ з відповідною системою алгебраїчних рівнянь у $J^k(x|u)$ і пов'яжемо її з многовидом $\mathcal{L}_{\theta,(k)}$, визначеним цією системою. Тоді $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ можна проінтерпретувати як сім'ю многовидів у $J^{(p)}$, параметризованих довільними елементами $\theta \in \mathcal{S}$.

Потрібно зауважити, що наведене означення класу систем диференціальних рівнянь не є повним. Проблема полягає у тому, що відповідність $\theta \to \mathcal{L}_\theta$ між довільними елементами і системами (трактованими не як формальні алгебраїчні рівності, а як справжні системи диференціальних рівнянь або многовиди в $J^{(p)}$) може бути не взаємно-однозначною. А саме, одна система може відповідати різним значенням довільних елементів. Причиною цієї невизначеності є те, що різні значення θ і $\tilde\theta$ довільних елементів можуть давати після підстановки в L той самий вираз від x і $u_{(p)}$. Більш того, для співпадіння $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ достатньо, щоб асоційовані системи $L_{\theta,(p)}$ і $L_{\tilde\theta,(p)}$ відрізнялися одна від іншої множником, що є неособливою матриця, залежною від змінних з $J^{(p)}$.

Значення довільних елементів θ і $\tilde\theta$ назвемо *калібрувально еквівалентними* ($\theta \overset{\mathrm{g}}{\sim} \tilde\theta$), якщо $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ є тою самою системою диференціальних рівнянь. Для того, щоб відповідність $\theta \to \mathcal{L}_\theta$ була взаємно-однозначною, множину $\mathcal{S}$ довільних елементів потрібно факторизувати відносно відношення калібрувальної еквівалентності. $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ формально розглядають як різні зображення однієї системи з $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Іноді можливо виконати калібрування неформально через зміну вибраного зображення роглядуваного класу (через зміну кількості k довільних елементів і заміну диференціальних функцій L і S, хоча це може призводити до більш складних обчислень). Оскільки класи часто не факторизують, зокрема, через відсутність природньої факторизації, це призводить до необхідності розгляду калібрувальних допустимих перетворень і калібрувальних перетворень еквівалентності (див. наступні підрозділи).

Підкласи в класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ виокремлюють за допомогою додаткових допоміжних систем рівнянь і/або умов нерівності нулю, що приєднують до основної допоміжної системи.

Перетин скінченної кількість підкласів класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ завжди є підкласом цього класу:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}^1}\cap\dots\cap\mathcal{L}|_{\mathcal{S}^j}=\mathcal{L}|_{\mathcal{S}^\cap},\quad \mathcal{S}^1,\dots,\mathcal{S}^k\subset\mathcal{S},\quad \mathcal{S}^\cap=\mathcal{S}^1\cap\dots\cap\mathcal{S}^j.$$

Додаткова допоміжна умова на перетин $\mathcal{S}^\cap$ — це система, що складається з усіх додаткових допоміжних умов для множин $\mathcal{S}^1$, …, $\mathcal{S}^j$, що перетинають.

Ситуація з доповненнями, об'єднаннями і різницями підкласів класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ складніша. Вони будуть підкласами класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ у визначеному вище сенсі тільки за спеціальних обмежень на додаткові допоміжні умови. Складнощі виникають при наявності одночасно і рівнянь, і нерівностей як зв'язків для підкласів.

Так, доповнення $\overline{\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}}=\mathcal{L}|_{\overline{\mathcal{S}'}}$ підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ також є підкласом класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, якщо або додаткова система рівнянь, або додаткова система нерівностей порожня. Якщо $\mathcal{S}'$ задано системою $S'_1=0,\dots,S'_{s'}=0$, то додатковою допоміжною умовою для $\overline{\mathcal{S}'}$ є $|S'_1|^2+\dots+|S'_{s'}|^2\neq0$. Якщо $\mathcal{S}'$ задано нерівностями $\Sigma'_1\neq0$, …, $\Sigma'_{\sigma'}\neq0$, то додатковою допоміжною умовою для $\overline{\mathcal{S}'}$ є $\Sigma'_1\cdots\Sigma'_{\sigma'}=0$.

Об'єднання $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}\cup\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}=\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cup\mathcal{S}''}$ і різниця $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}\setminus\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}=\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\setminus\mathcal{S}''}$ підкласів $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ і $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ також є підкласами класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, якщо або додаткові системи рівнянь, або додаткові системи нерівностей цих підкласів співпадають. Додаткові допоміжні умови відповідно будують з додаткових допоміжних умов для $\mathcal{S}'$ ($S'_1=0$, …, $S'_{s'}=0$, $\Sigma'_1\neq0$, …, $\Sigma'_{\sigma'}\neq0$) і $\mathcal{S}''$

$(S''_1 = 0,\ \ldots,\ S''_{s''} = 0,\ \Sigma''_1 \neq 0,\ \ldots,\ \Sigma''_{\sigma''} \neq 0)$ у наступний спосіб (спільна частина умов зберігається):

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'': & \text{або} & |\Sigma'_1 \cdots \Sigma'_{\sigma'}|^2 + |\Sigma''_1 \cdots \Sigma''_{\sigma''}|^2 \neq 0, \\
 & \text{або} & S'_i S''_j = 0,\ i = 1, \ldots, s',\ j = 1, \ldots, s''; \\
\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}'': & \text{або} & \Sigma'_1 \cdots \Sigma'_{\sigma'} \neq 0,\ \Sigma''_1 \cdots \Sigma''_{\sigma''} = 0, \\
 & \text{або} & S' = 0,\ |S''_1|^2 + \cdots + |S''_{s''}|^2 \neq 0.
\end{array}
$$

Для замкненості множин підкласів відносно всіх операцій над множинами, поняття підкласу необхідно розширити, вважаючи, що об'єднання будь-якої скінченної кількості підкласів деякого фіксованого класу за означенням також є підкласом цього класу. Ще не зрозуміло, чи знайде таке розширення застосування у задачах групового аналізу.

2.1.3. Допустимі перетворення. Для $\theta, \tilde\theta \in \mathcal{S}$ назвемо множину точкових перетворень з системи $\mathcal{L}_\theta$ у систему $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ *множиною допустимих перетворень з* $\mathcal{L}_\theta$ *у* $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ і позначимо її через $\mathrm{T}(\theta, \tilde\theta)$. Максимальна група G_θ точкових симетрій системи $\mathcal{L}_\theta$ співпадає з $\mathrm{T}(\theta, \theta)$. Якщо системи $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ еквівалентні відносно точкового перетворення, то $\mathrm{T}(\theta, \tilde\theta) = \varphi^0 \circ G_\theta = G_{\tilde\theta} \circ \varphi^0$, де φ^0 — фіксоване перетворення з $\mathrm{T}(\theta, \tilde\theta)$. Інакше $\mathrm{T}(\theta, \tilde\theta) = \varnothing$. Аналогічно множину $\mathrm{T}(\theta, \mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{\, (\tilde\theta, \varphi) \mid \tilde\theta \in \mathcal{S},\, \varphi \in \mathrm{T}(\theta, \tilde\theta) \,\}$ назвемо *множиною допустимих перетворень системи* $\mathcal{L}_\theta$ *у класі* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Означення 2.1. Множину $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{(\theta, \tilde\theta, \varphi) \mid \theta, \tilde\theta \in \mathcal{S},\, \varphi \in \mathrm{T}(\theta, \tilde\theta)\}$ назвемо *множиною допустимих перетворень у класі* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Зауваження 2.1. Множину допустимих перетворень деякого класу у нетривіальному випадку вперше описано Кінгстоном і Софоклеусом для класу узагальнених рівнянь Бюргерса [175]. Перетворення такого типу ці автори називають *формозберігаючими* [174–176]. Поняття допустимих перетворень можна розглядати як формалізацію їх підходу.

Зауваження 2.2. Поняття і результати, наведені в цьому і наступному пунктах, можна переформулювати в інфінітезімальних термінах, використовуючи поняття векторних полів, алгебр Лі замість точкових перетворень, груп Лі тощо. Наприклад, див. [6] для означення "конусів дотичних еквівалентностей", яке є інфінітезімальним аналогом означення множини допустимих перетворень фіксованої системи у класі. Там же у рамках інфінітезімального підходу досліджено нетривіальний приклад напівнормалізованих класів (див. означення 2.10).

Зауваження 2.3. У випадку однієї залежної змінної ($m = 1$) всі попередні і наступні поняття можна поширити на контактні перетворення.

Елемент $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi)$ з $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ називають *калібрувальним допустимим перетворенням у* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, якщо $\theta \overset{\mathrm{g}}{\sim} \tilde{\theta}$ і φ — тотожне перетворення.

Твердження 2.1. $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ *для будь-якого підкласу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ *класу* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$*. Якщо* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ *— інший підклас класу* $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$*, то* $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \cap \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}) = \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$.

Поняття, пов'язані з допустимими перетвореннями у класах диференціальних рівнянь, можна переформулювати у термінах теорії категорій [245]. Зауважимо, що в додаток до допустимих перетворень категорії параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними, побудовані в [245], також включають відображення редукції між рівняннями з різною кількістю незалежних змінних.

2.1.4. Групи еквівалентності. Групи еквівалентності різних типів, що діють у класах диференціальних рівнянь, визначають у строгий спосіб через поняття допустимих перетворень.

Так, будь-який елемент Φ зі *звичайної групи еквівалентності* $G^\sim = G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ є точковим перетворенням у просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$, яке проектовне на простір змінних $(x, u_{(p')})$ для будь-якого $0 \leq p' \leq p$ так, що проекція $\Phi|_{(x,u_{(p')})}$ є продовженням p'-го порядку перетворення $\Phi|_{(x,u)}$, $\forall\theta \in \mathcal{S}$: $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ і $\Phi|_{(x,u)} \in \mathrm{T}(\theta, \Phi\theta)$. Трійки вигляду

$(\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)})$, де $\theta \in \mathcal{S}$ і $\Phi \in G^{\sim}$, називають допустимими перетвореннями, індукованими елементами групи еквівалентності $G^{\sim}$.

Нагадаємо, що точкове перетворення φ: $\tilde{z} = \varphi(z)$ у просторі змінних $z = (z_1, \ldots, z_k)$ називають проектовним на простір змінних $z' = (z_{i_1}, \ldots, z_{i_{k'}})$, де $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k'} \leq k$, якщо вирази для $\tilde{z}'$ залежать тільки від z'. Позначимо обмеження φ на z'-простір як $\varphi|_{z'}$: $\tilde{z}' = \varphi|_{z'}(z')$.

Якщо довільні елементи θ явно залежать щонайбільше від x і u (цього можна завжди досягнути формально, вважаючи похідні новими залежними змінними), то можна допустити залежність перетворень змінних (x, u) від θ і розглянути *узагальнену групу еквівалентності* $G^{\sim}_{\rm gen} = G^{\sim}_{\rm gen}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ [26, 195, 196]. Будь-який елемент Φ з $G^{\sim}_{\rm gen}$ є точковим перетворенням у (x, u, θ)-просторі, таким що $\forall\theta \in \mathcal{S}$: $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ і $\Phi|^{\theta}_{(x,u)} = \Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x,u)} \in \mathrm{T}(\theta, \Phi\theta)$.

Дія перетворення $\Phi \in G^{\sim}_{\rm gen}$ на довільні елементи як функції від (x, u) задається правилом: $\tilde{\theta} = \Phi\theta$, якщо $\tilde{\theta}(x, u) = \Phi^{\theta}(\Theta(x, u), \theta(\Theta(x, u)))$, де $\Theta = (\Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x,u)})^{-1}$.

Грубо кажучи, $G^{\sim}$ — це множина допустимих перетворень, які можна застосувати до будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, а $G^{\sim}_{\rm gen}$ утворено допустимими перетвореннями, які можна розбити на класи, параметризовані значеннями θ, що пробігають множину $\mathcal{S}$.

Розглядають і інші узагальнення груп еквівалентності, наприклад групи, елементи яких є точковими перетвореннями відносно незалежних та залежних змінних і включають нелокальні вирази від довільних елементів [161, 275, 277]. Дамо означення деяких узагальнень.

Означення 2.2. *Розширена група еквівалентності* $\bar{G}^{\sim} = \bar{G}^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ *класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *складається з перетворень, кожне з яких зображено парою* $\Phi = (\check{\Phi}, \hat{\Phi})$, *де* $\check{\Phi}$ *— взаємно-однозначне неперервне разом з оберненим відображення на множині* $\mathcal{S}$ *довільних елементів як функцій від* $(x, u_{(p)})$, *а* $\hat{\Phi}$ *— точкове перетворення змінних* (x, u), *що належить* $\mathrm{T}(\theta, \check{\Phi}\theta)$ *для будь-якого* θ *з* $\mathcal{S}$.

Тут і надалі неперервність за функціональним аргументом розуміється відносно рівномірної збіжності усіх похідних на кожному компакті з області визначення.

Означення 2.3. *Розширену узагальнену групу еквівалентності* $\bar{G}^{\sim}_{\rm gen} = \bar{G}^{\sim}_{\rm gen}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ складають перетворення, кожне з яких зображено набором $\Phi = (\check{\Phi}, \{\hat{\Phi}^{\theta}, \theta \in \mathcal{S}\})$. Тут $\check{\Phi}$ визначається, як вище, а $\{\hat{\Phi}^{\theta}, \theta \in \mathcal{S}\}$ — сім'я точкових перетворень змінних (x, u), неперервно параметризована θ, причому $\hat{\Phi}^{\theta} \in \mathrm{T}(\theta, \check{\Phi}\theta)$ для кожного θ з $\mathcal{S}$.

Множини, в яких шукають відображення довільних елементів, задають у залежності від досліджуваних класів систем диференціальних рівнянь. Надалі по можливості не будемо уточнювати конкретний тип груп еквівалентності. Це означатиме, що можна застосувати будь-яке з наведених понять.

Група еквівалентності породжує відношення еквівалентності на множині допустимих перетворень відповідного класу. А саме, допустимі перетворення $(\theta^1, \tilde{\theta}^1, \varphi^1)$ і $(\theta^2, \tilde{\theta}^2, \varphi^2)$ з $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ називають $G^{\sim}$-*еквівалентними*, якщо існує таке $\Phi \in G^{\sim}$, що $\theta^2 = \Phi\theta^1$, $\tilde{\theta}^2 = \Phi\tilde{\theta}^1$ і $\varphi^2 = \Theta \circ \varphi^1 \circ \Theta^{-1}$, де $\Theta = \Phi|_{(x,u)}$ (або $\Theta = \Phi|^{\theta}_{(x,u)}$ у випадку з $G^{\sim}_{\rm gen}$).

2.1.5. Проблеми групової класифікації Нагадаємо, що для фіксованого $\theta \in \mathcal{S}$ максимальна локальна (псевдо)група точкової симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$ співпадає з $\mathrm{T}(\theta, \theta)$ і позначається G_θ. Спільну частину $G^{\cap} = G^{\cap}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \bigcap_{\theta \in \mathcal{S}} G_\theta$ всіх G_θ, $\theta \in \mathcal{S}$, називають *ядром максимальних точкових груп симетрії* систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Зауважимо, що $G^{\cap}$ можна природно вкласти в $G^{\sim}$ через тривіальне (тотожне) продовження перетворень ядра у довільні елементи. Асоційована підгрупа $\hat{G}^{\cap}$ групи $G^{\sim}$ є нормальною.

Проблема групової класифікації для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ полягає в описі всіх $G^{\sim}$-нееквівалентних значень $\theta \in \mathcal{S}$ разом з відповідними групами G_θ, для яких $G_\theta \neq G^{\cap}$. Розв'язком проблеми групової класифікації є список пар

$(\mathcal{S}_\gamma, \{G_\theta, \theta \in \mathcal{S}_\gamma\})$, $\gamma \in \Gamma$. Тут $\{\mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — сім'я підмножин множини $\mathcal{S}$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ містить тільки $G^\sim$-нееквівалентні значення θ з $G_\theta \neq G^\cap$, і для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$ з $G_\theta \neq G^\cap$ існує $\gamma \in \Gamma$ таке, що $\theta \in \mathcal{S}_\gamma \bmod G^\sim$. Структури груп G_θ подібні для різних значень $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$ при фіксованому γ. Зокрема, G_θ, $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, мають однакову довільність у групових параметрах.

Проблеми групової класифікації в наведеному вище формулюванні дуже складні і, в загальному випадку, нерозв'язні, оскільки приводять до систем функціональних диференціальних рівнянь. Ось чому зазвичай розглядають тільки зв'язану компоненту одиниці G_θ^{p} для кожного θ замість цілої групи G_θ. G_θ^{p} називають *основною групою* (симетрій) системи $\mathcal{L}_\theta$. Генератори однопараметричних підгруп групи G_θ^{p} утворюють алгебру Лі A_θ векторних полів у просторі змінних (x, u), яку називають *максимальною алгеброю ліївської інваріантністі* (або основною алгеброю інфінітезімальних операторів симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$). Ядром основних груп класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ є група $G^{\cap\mathrm{p}} = G^{\cap\mathrm{p}}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} G_\theta^{\mathrm{p}}$, для якої алгебра Лі є $A^\cap = A^\cap(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} A_\theta$.

Будь-який оператор $Q = \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta^a(x,u)\partial_{u^a}$ з A_θ задовольняє *критерій інфінітезімальної інваріантності* [30, 31] для системи $\mathcal{L}_\theta$

$$Q_{(p)} L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)}))\big|_{\mathcal{L}_\theta^p} = 0,$$

тобто результат дії продовженого оператора $Q_{(p)}$ на L дорівнює нулю на многовиді $\mathcal{L}_\theta^p$. $Q_{(p)}$ позначає стандартне p-те продовження оператора Q:

$$Q_{(p)} := Q + \sum_{0<|\alpha|\leqslant p} \Big(D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \big(\eta^a(x,u) - \xi^i(x,u)u_i^a\big) + \xi^i u_{\alpha,i}^a \Big) \partial_{u_\alpha^a},$$

$D_i = \partial_i + u_{\alpha,i}^a \partial_{u_\alpha^a}$ — оператор повного диференціювання за змінною x_i, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $|\alpha|\colon= \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Змінну u_α^a з простору струменів J^r ототожнюють з похідною $\partial^{|\alpha|} u^a / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, а $u_{\alpha,i}^a := \partial u_\alpha^a / \partial x_i$. Після розщеплення за незв'язаними змінними критерій інфінітезімальної інваріантності дає *систему визначальних рівнянь* на коефіцієнти оператора Q, де довільні елементи класу виступають параметрами. Розширення ліївської симетрії пов'язані, як правило, з розширенням множини розв'язків цієї системи.

Знаючи A_θ, можна відновити G^{p}_θ. При інфінітезімальному підході проблема групової класифікації означає пошук всіх можливих нееквівалентних випадків розширення для A_θ, тобто перелік всіх $G^\sim$-нееквівалентних значень довільного параметра θ разом з A_θ, що задовольняє умові $A_\theta \neq A^\cap$ [3, 30]. Більш точно, розв'язком проблеми групової класифікації при інфінітезімальному підході є перелік пар $(\mathcal{S}_\gamma, \{A_\theta, \theta \in \mathcal{S}_\gamma\})$, $\gamma \in \Gamma$. Тут $\{\mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — сім'я підмножин множини $\mathcal{S}$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ містить тільки $G^\sim$-нееквівалентні значення θ з $A_\theta \neq A^\cap$, і для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$ з $A_\theta \neq A^\cap$ існує $\gamma \in \Gamma$ таке, що $\theta \in \mathcal{S}_\gamma \bmod G^\sim$. Структури алгебр A_θ подібні для різних значень $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$ при фіксованому γ. Зокрема, всі A_θ, $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, мають однакову розмірність або однакову довільність у параметрах у нескінченно-вимірному випадку.

Процедуру групової класифікації можна доповнити знаходженням явних умов (наприклад, систем диференціальних рівнянь) для довільних елементів, що забезпечують розширення ліївської симетрії. Іншими словами, для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ потрібно явно описати підмножину $\bar{\mathcal{S}}_\gamma \subset \mathcal{S}$, що включає довільні елементи, $G^\sim$-еквівалентні довільним елементам з підмножини $\mathcal{S}_\gamma$. Хоча цей крок зазичай пропускають, він може приводити до нетривіальних результатів (див., наприклад, [5, 6]).

Якщо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ не нормалізований, тобто якщо множину $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ не породжено групою $G^\sim$ (див. пункт 2.3.1 для строгих означень), отриманий класифікаційний список може включати рівняння, взаємно еквівалентні відносно точкових перетворень, які не належать до $G^\sim$. Знання таких *додаткових* еквівалентностей дозволяє суттєво спростити подальші дослідження класу $\mathcal{L}|_S$. Їх явну побудову можна розглядати як ще один крок алгоритму групової класифікації [235]. Для виконання цього кроку можна використовувати той факт, що еквівалентні рівняння мають подібні максимальні алгебри інваріантності. Більш систематичний спосіб —

опис повної множини допустимих перетворень. Зауважимо, що перший нетривіальний приклад допустимих перетворень знайдено в [20].

Класичну постановку проблем групової класифікації можна розширити у двох напрямках.

Перший охоплює можливі варіації у відношеннях еквівалентності, з точністю до яких виконують групову класифікацію. Можна використати різні типи груп еквівалентності (звичайні, узагальнені, розширені, узагальнені розширені). Всі такі групи складаються, у дійсності, з точкових перетворень незалежних і залежних змінних. Модифікації торкаються лише структури перетворень відносно довільних елементів. Якщо клас допускає узагальнену/розширену групу еквівалентності, суттєво ширшу, ніж звичайна, групова класифікація у такому класі відносно звичайної групи еквівалентності, як правило, занадто громіздка і класифікаційний список далекий від оптимального або може навіть не існувати у замкнутій формі [163, 275].

Інша можливість модифікації проблем групової класифікації у тому ж напрямі полягає у розбитті розглядуваного класу на сім'ї підкласів, кожен з яких складається з рівнянь, нееквівалентних рівнянням з інших підкласів, і має групу еквівалентності, що не міститься у групі еквівалентності цілого класу (так звана нетривіальна умовна група еквівалентності, див. параграф 2.1.7). Кінцевий класифікаційний список для цілого класу буде об'єднанням класифікаційних списків для підкласів. Підкласи з розбиття і їх групи еквівалентності є необхідними елементами у представленні отриманого результату. Саме цей підхід використано у параграфі 3.2 для групової класифікації нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами і модульними нелінійностями.

Включення додаткових перетворень еквівалентності до фрейму групової класифікації також є способом зміни відношення еквівалентності, що використовується. Після знаходження всіх додаткових еквівалентностей класифікація з точністю до $G^{\sim}(\mathcal{L}|_S)$-еквівалентності перетворюється на *класифікацію з точністю до* $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_S)$*-еквівалентності*, тобто з точністю до еквівалентності, породженої всіма можливими точковими перетвореннями. При наявності спеціальної властивості, яку назвемо напівнормалізацією, у класі $\mathcal{L}|_S$ гарантовано немає ніяких додаткових еквівалентностей. Тоді ці класифікації співпадають (наслідок 2.1 нижче).

Крім еквівалентностей, породжених точковими перетвореннями незалежних і залежних змінних, у випадку однієї залежної змінної ($m = 1$) можна використовувати також контактні перетворення. Потенціальні перетворення еквівалентності виникають для деяких класів з двома незалежними змінними [239]. При дослідженні наближених симетрій природно застосовувати наближені перетворення еквівалентності.

Другий напрям для модифікації проблем групової класифікації — застосування критеріїв вибору, відмінних від розширення ліївської симетрії. Перетворення між рівняннями (або класами рівнянь) зберігають багато їх властивостей, індукують перетворення між об'єктами, спорідненими з ними, і тому породжують різні відношення еквівалентності на множини пар вигляду "(рівняння, об'єкт)" (або "(клас рівнянь, об'єкт)"). Отже, специфікацію таких об'єктів або їх властивостей можна використати як критерій вибору рівнянь (або класів рівнянь) з точністю до введених вище відношень еквівалентності у спосіб, подібний ліївської симетрії. Коло таких об'єктів досить широке. Воно включає некласичні (умовні) симетрії [225, 244], закони збереження, асоційовані потенціальні системи і потенціальні або квазилокальні симетрії [3, 89, 161, 236, 239, 241], узагальнені симетрії (симетрії Лі-Беклунда) [90], контактні і наближені симетрії, допустимі перетворення [228, 275, 277] і т. ін.

2.1.6. Калібрувальні групи еквівалентності. Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_S$ може містити перетворення, що діють тільки на довільні елементи і фактично не замінюють системи, тобто такі, що породжують калібрувальні допустимі перетворення. Зазвичай перетворення цього типу можна вважати тривіальними [189] (калібрувальними) перетвореннями еквівалентності, причому вони утворюють *калібрувальну* підгрупу

$$G^{\mathrm{g}\sim} = \{\Phi \in G^{\sim} \mid \Phi x = x,\ \Phi u = u,\ \Phi\theta \overset{g}{\sim} \theta\}$$

групи еквівалентності $G^{\sim}$. Більш того, $G^{\mathrm{g}\sim}$ — нормальна підгрупа в $G^{\sim}$.

Застосування калібрувальних перетворень еквівалентності рівносильно переписуванню системи в іншому вигляді. На відміну від звичайних перетворень еквівалентності, їх роль у груповій класифікації зводиться не до вибору представників у класах еквівалентності, а до вибору вигляду цих представників. Як правило, калібрувальне відношення еквівалентності на множині довільних елементів класу диференціальних рівнянь породжено його калібрувальною групою еквівалентності. Будемо вживати назву “калібрувальні перетворення еквівалентності”, оскільки існують зовсім тривіальні перетворення еквівалентності, які фактично не перетворюють навіть довільні елементи. Такі перетворення виникають, якщо допоміжна система приводить до функціональної залежності довільних елементів, і утворюють нормальну підгрупу відповідної групи еквівалентності і відповідної калібрувальної групи еквівалентності. Будемо нехтувати цими перетвореннями і вважати, що групи еквівалентності співпадають, якщо вони мають однакові фактор-групи за тривіальними підгрупами еквівалентності.

2.1.7. Умовні групи еквівалентності. Поняття *умовної еквівалентності* виникає як розширення поняття перетворень умовної симетрії окремої системи диференціальних рівнянь [45] до перетворень еквівалентності у класах систем. Воно навіть більш природне, ніж поняття умовної симетрії, оскільки опис будь-якого класу включає як необхідну складову допоміжну систему (*умову*) на довільні елементи. Накладаючи додаткові зв’язки на довільні елементи, можна виокремити підклас у розглядуваному класі, група еквівалентності якого не міститься у групі еквівалентності цілого класу.

Нехай $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ — підклас класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, який виокремлено додатковою системою рівнянь $S'(x, u_{(p)}, \theta_{(q')}) = 0$ і нерівностей $\Sigma'(x, u_{(p)}, \theta_{(q')}) \neq 0$ на довільні елементи $\theta = \theta(x, u_{(p)})$. (Або рівняння, або нерівності можуть виконуватись тотожно.) Тут $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ — множина розв'язків об'єднаної системи $S = 0$, $\Sigma \neq 0$, $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$. Об'єднана система має бути сумісною для того, щоб підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ був непорожнім.

Означення 2.4. Групу еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ називають *умовною групою еквівалентності* всього класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ за умови $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$. Умовну групу еквівалентності називають *нетривіальною* тоді і тільки тоді, коли вона не є (з точністю до тривіальних перетворень еквівалентності) власною підгрупою групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.

Групу еквівалентності всього класу можна вважати (невласною) умовною групою еквівалентності, асоційованою з порожньою додатковою умовою. Умовна група еквівалентності може бути тривіальною не відносно групи еквівалентності всього класу, а відносно іншої (власної) умовної групи еквівалентності. Дійсно, якщо $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}''$ і $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \subset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})$, то підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ нецікавий з точки зору умовної еквівалентності. Отже, множину додаткових умов на довільні елементи, які необхідно розглядати, можна суттєво скоротити.

Означення 2.5. Умовну групу еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ при додатковій умові $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$ називають *максимальною*, якщо вона є нетривіальною умовною групою еквівалентності для будь-якого підкласу класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, що власно містить підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.

Іншими словами, тільки максимальні умовні групи еквівалентності є цікавими. Будь-яка максимальна умовна група еквівалентності нетривіальна.

Група еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ породжує відношення еквівалентності на множині пар додаткових допоміжних умов і відповідних умовних груп еквівалентності. А саме, якщо перетворення з $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ перетворює систему $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$ у систему $S'' = 0$, $\Sigma'' \neq 0$, то умовні групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ і $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})$ є подібними відносно цього перетворення і називаються $G^{\sim}$-*еквівалентними*. Якщо умовна група еквівалентності максимальна, то будь-яка умовна група еквівалентності, $G^{\sim}$-еквівалентна їй, також є максимальною.

Ґрунтуючись на понятті умовної еквівалентності, можна сформулювати проблему опису $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ аналогічно до звичайної проблеми групової класифікації. Нетривіальні додаткові допоміжні умови для довільних елементів природно виникають при вивченні $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Зазвичай для цього необхідно виконати наступні кроки:

1. Побудувати $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ (або $G^{\sim}_{\rm gen}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ і т. ін.).

2. Описати умовні перетворення еквівалентності в $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, тобто знайти повну сім'ю $G^{\sim}$-нееквівалентних додаткових допоміжних умов S_γ, $\gamma \in \Gamma$ таких, що $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})$ — максимальна умовна група еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ для будь-якого $\gamma \in \Gamma$.

3. Знайти допустимі перетворення, що не належать будь-якій умовній групі еквівалентності.

У дійсності запропонована процедура не є оптимальною. До її вдосконалення повернемося після введення поняття нормалізованих класів систем диференціальних рівнянь.

2.2. Відображення між класами

Відображення між класами систем диференціальних рівнянь, породжені точковими перетвореннями, відіграють важливу роль при груповому аналізі цих класів [226, 240]. Вивчимо поведінку трансформаційних властивостей класів при таких відображеннях. Ці результати утворюють основу для нового підходу до групової класифікації у певних класах диференціальних рівнянь, для яких існуючі методи не є достатньо потужними [277].

2.2.1. Подібність класів. Поняття подібних диференціальних рівнянь [30] можна розширити на класи (системи) диференціальних рівнянь багатьма способами. Найбільш пряме й очевидне узагальнення подано у наступному означенні.

Означення 2.6. Класи $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ *подібні*, якщо $n = n'$, $m = m'$, $p = p'$, $k = k'$ і існує точкове перетворення $\Psi\colon (x, u_{(p)}, \theta) \to (x', u'_{(p)}, \theta')$, проектовне на простір змінних $(x, u_{(q)})$ для кожного $0 \leq q \leq p$, причому $\Psi|_{(x,u_{(q)})}$ є продовженням q-го порядку перетворення $\Psi|_{(x,u)}$, та $\Psi\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ і $\Psi|_{(x,u_{(p)})}\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}'_{\Psi\theta}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$.

Тут і надалі дія такого точкового перетворення Ψ у просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$ на довільні елементи з $\mathcal{S}$ як диференціальні функції p-го порядку задається формулою:

$$\tilde{\theta} = \Psi\theta, \quad \text{якщо} \quad \tilde{\theta}(x, u_{(p)}) = \Psi^\theta\Big(\Theta(x, u_{(p)}), \theta\big(\Theta(x, u_{(p)})\big)\Big),$$

де $\Theta = (\mathrm{pr}_p\Psi|_{(x,u)})^{-1}$, а pr_p позначає операцію стандартного продовження точкових перетворень на похідні порядку не вище, ніж p. Грубо кажучи, подібні класи складаються з подібних рівнянь з однаковими перетвореннями подібності.

Твердження 2.2. *Подібні класи мають подібні множини допустимих перетворень. А саме, перетворення подібності Ψ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ породжує взаємно-однозначне відображення Ψ^{T} з $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ на $\mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ за правилом $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') = \Psi^{\mathrm{T}}(\theta, \tilde{\theta}, \varphi)$, якщо $\theta' = \Psi\theta$, $\tilde{\theta}' = \Psi\tilde{\theta}$ і $\varphi' = \Psi|_{(x,u)} \circ \varphi \circ \Psi|_{(x,u)}{}^{-1}$. Тут $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') \in \mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$.*

Подібні класи диференціальних рівнянь також мають подібні групи еквівалентності. Більш точно, якщо класи подібні відносно перетворень певного типу (наприклад, точкових перетворень незалежних змінних, залежних змінних, їх похідних і довільних елементів), то групи еквівалентності, утворені перетвореннями еквівалентності одного типу, також подібні відносно цього перетворення.

Очевидно, що списки ліївських симетрій при груповій класифікації відносно будь-яких наведених вище відношень еквівалентності подібні для подібних класи. А саме, якщо перетворення Ψ породжує перетворення подібності класу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ на клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\{\{(\theta, A_\theta), \theta \in \mathcal{S}_\gamma\}, \mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}, \gamma \in \Gamma\}$ — класифікаційний список для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, то

$$\{\{(\Psi\theta, (\Psi|_{(x,u)})_* A_\theta), \Psi\theta \in \Psi\mathcal{S}_\gamma\}, \Psi\mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}', \gamma \in \Gamma\} \text{ —}$$

класифікаційний список для класу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$. Тут $(\Psi|_{(x,u)})_*$ — відображення, індуковане перетворенням Ψ у множині векторних полів на просторі (x, u) (підняття векторних полів), A_θ позначає максимальну алгебру ліївської інваріантності системи $\mathcal{L}_\theta$.

Множину перетворень, використаних в означенні 2.6, можна розширити за допомогою різних типів залежності від довільних елементів, як у випадку груп еквівалентності. Зазвичай класи систем, подібні в розширеному сенсі, також мають подібні властивості з точки зору групового аналізу. При точкових перетвореннях подібності властивості фактично співпадають з точністю до подібності. Якщо Ψ — точкове перетворення у просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$, то відповідні класи мають практично ті ж самі трансформаційні властивості.

2.2.2. Репараметризація класів. Якщо перетворення Ψ тотожне відносно x і u, то $\mathcal{L}'_{\Psi\theta} = \mathcal{L}_\theta$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, тобто насправді класи $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ співпадають як множини многовидів у просторі струменів. Будемо казати, що клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ — *точкова репараметризація* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, асоційована з репараметризуючим перетворенням Ψ. При найбільш загальному підході Ψ можна вважати довільним взаємно-однозначним відображенням з $\mathcal{S}$ у $\mathcal{S}'$, що задовольняє умові $\mathcal{L}'_{\Psi\theta} = \mathcal{L}_\theta$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$. Зауважимо, що кількість довільних елементів у $\mathcal{S}'$ може не співпадати з кількістю довільних елементів у $\mathcal{S}$. Узгодженість трансформаційних властивостей може порушуватися при узагальненій репараметризації.

Приклад неточкової репараметризації, яку застосовують у груповому аналізі, дають класи $\{\mathcal{I}=\theta(\mathcal{I}',\mathcal{J})\}$ і $\{\mathcal{I}'=\theta'(\mathcal{I},\mathcal{J})\}$, де $\mathcal{I}$ і $\mathcal{I}'$ ($\mathcal{J}$) — k-набори (l-набори) фіксованих функціонально незалежних виразів змінних x і $u_{(p)}$, а θ і θ' — довільні $(k+l)$-арні k-вектор-функції з ненульовими якобіанами за першими k аргументами, $k,l\in\mathbb{N}$. Відповідне відображення між множинами довільних елементів полягає у взятті оберненої функції до кожного елемента множини. Перевагою такої репараметризації є збереження трансформаційних властивостей класів.

2.2.3. Загальні відображення між класами, породжені точковими перетвореннями. Подібність класів приводить до взаємно-однозначної відповідності між асоційованими множинами довільних елементів. Якщо знехтувати цією властивістю, отримаємо більш загальне і складне поняття відображення між класами диференціальних рівнянь.

Означення 2.7. Клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ назвемо *точковим образом* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, якщо $n=n'$, $m=m'$, $p=p'$, $k=k'$ і існує сім'я $\bar\varphi$ точкових перетворень $\varphi_\theta\colon (x,u)\to(x',u')$, параметризована $\theta\in\mathcal{S}$, що задовольняє таку умову: для кожного $\theta\in\mathcal{S}$ існує $\tilde\theta\in\tilde{\mathcal{S}}$ і, навпаки, для кожного $\tilde\theta\in\tilde{\mathcal{S}}$ існує $\theta\in\mathcal{S}$ такі, що $\mathrm{pr}_p\varphi_\theta\mathcal{L}_\theta=\tilde{\mathcal{L}}_{\tilde\theta}$.

Будемо казати, що сім'я $\bar\varphi$ здійснює точкове відображення класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$, і ототожнювати цю сім'ю з відповідним відображенням класів із асоційованим відображенням множин довільних елементів. Так, формулу $\mathrm{pr}_p\,\varphi_\theta\mathcal{L}_\theta=\mathcal{L}'_{\theta'}$ можна скорочено записати як $\bar\varphi\theta=\theta'$.

У випадку подібних класів сім'я, що здійснює відповідне точкове відображення, насправді складається з єдиного елемента, тобто перетворення з сім'ї не залежать від довільних елементів.

Точковий клас-образ успадковує певні трансформаційні властивості свого класу-прообразу. Існує також зворотній зв'язок. Наприклад, рівняння з клас-прообразу еквівалентні відносно точкових перетворень тоді і тільки тоді, коли їх образи також еквівалентні.

Твердження 2.3. *Точкове відображення між класами диференціальних рівнянь індукує відображення між відповідними множинами допустимих перетворень. А саме, якщо клас* $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ *є точковим образом класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *відносно сім'ї точкових перетворень* $\varphi_\theta\colon (x,u)\to(x',u')$, $\theta\in\mathcal{S}$, *то образом допустимого перетворення* $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ *є* $(\theta',\tilde\theta',\varphi')\in\mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$, *де* $\mathcal{L}'_{\theta'}=\mathrm{pr}_p\varphi_\theta\mathcal{L}_\theta$, $\mathcal{L}'_{\tilde\theta'}=\mathrm{pr}_p\varphi_{\tilde\theta}\mathcal{L}_\theta$ *і* $\varphi'=\varphi_{\tilde\theta}\circ\varphi\circ(\varphi_\theta)^{-1}$.

Більш того, подібне твердження також є вірним у зворотному напрямі.

Твердження 2.4. *Множину допустимих перетворень вихідного класу* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *можна відновити з множини допустимих перетворень його точкового образу* $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$.

Доведення. Припустимо, що сім'я точкових перетворень $\varphi_\theta\colon (x,u)\to\to(x',u')$, $\theta\in\mathcal{S}$, відображає клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$, $(\theta',\tilde\theta',\varphi')\in\mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$, а $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ — деякі рівняння, відображені у $\mathcal{L}'_{\theta'}$ і $\mathcal{L}'_{\tilde\theta'}$, відповідно. Тоді $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, де $\varphi=(\varphi_{\tilde\theta})^{-1}\circ\varphi\circ\varphi_\theta$. Кожне допустиме перетворення з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна отримати наведеним способом. □

Якщо клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ є тільки точковим образом класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у сенсі означення 2.7 без подібності в сенсі означення 2.6, то подібність їх класифікацій може бути порушено. Тільки у випадку класифікацій відносно цілих множин допустимих перетворень завжди існує взаємно-однозначна відповідність між класифікаційними списками для клас-образу і клас-прообразу. Для того, щоб така відповідність мала місце в випадку класифікацій відносно груп еквівалентності, потрібно додатково вимагати, щоб образ кожної орбіти групи $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ у $\mathcal{S}$ співпадав з орбітою групи $G^\sim(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ у $\mathcal{S}'$. Ці властивості можна застосувати для спрощення розв'язання проблеми групової класифікації. Якщо один з класів є класифіковним у простіший спосіб, володіючи, наприклад, множиною довільних елементів (групою еквівалентності, множиною допустимих перетворень тощо) простішої структури, то спочатку можна виконати його групову класифікацію, а потім використати її для отримання класифікації іншого класу. Саме цей підхід застосовано в [277] для групової класифікації деякого класу рівнянь реакції–дифузії (див. підрозділ А.3).

Особливий тип відображень між класами диференціальних рівнянь складають відображення класів у їх підкласи. Якщо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ відображено на його підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ сім'єю перетворень $\bar\varphi = \{\varphi_\theta, \theta \in \mathcal{S}\}$, то $(\theta, \bar\varphi\theta, \varphi_\theta) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$. В окремих випадках відображення $\bar\varphi$ асоційоване з підгрупою H групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$. А саме, відображення побудовано наступним чином. Виберемо підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ так, щоб кожна орбіта дії підгрупи H у $\mathcal{S}$ перетинала $\mathcal{S}'$ точно по одному елементу. Тоді покладемо $\bar\varphi\theta = \theta'$, де $\{\theta'\} = \mathcal{S}' \cap H\theta$, тобто будь-який елемент орбіти відображаємо в елемент з перетину орбіти і $\mathcal{S}'$. Як реалізацію перетворення φ_θ виберемо $h|^\theta_{(x,u)}$, де h — елемент з H, що відображає θ у θ'. Корисно ототожнити φ_θ і h. Систему додаткових допоміжних умов $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$, що виокремлює підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ з класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, називають *калібруванням* довільних елементів, породженим підгрупою H. Прообрази кожного довільного елемента з $\mathcal{S}'$ відносно відображення $\bar\varphi$, асоційованого з H, є $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$-еквівалентними. При певних умовах на H відображення $\bar\varphi$ також встановлює зв'язок між узагальненими розширеними групами еквівалентності вихідного і відображеного класів.

Твердження 2.5. *Припустимо, що H — нормальна підгрупа узагальненої розширеної групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і кожна орбіта підгрупи H у $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ точно по одному елементу. Нехай $\bar\varphi$ — відображення з $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ у $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, асоційоване з H, і $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ позначає узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$. Тоді рівняння з $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх образи при відображенні $\bar\varphi$ $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$-еквівалентні.*

Це означає, що групова класифікація у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ з точністю до $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$-еквівалентності зводиться до групової класифікації у підкласі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ відносно його групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$. Твердження 2.5

можна поширити на випадок калібрування довільних елементів, породженого підгрупою, яка не є нормальною.

Твердження 2.6. *Припустимо, що $\{H_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — сім'я підгруп узагальненої розширеної групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, кожне перетворення з $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ індукує відношення подібності на цій сім'ї і для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ кожна орбіта підгрупи H_γ у $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ точно в одному елементі. Нехай $\bar\varphi$ — відображення з $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ у $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, асоційоване з H_{γ_0} для фіксованого значення $\gamma_0 \in \Gamma$, $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ позначає узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$. Тоді рівняння з $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх образи при відображенні $\bar\varphi$ $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$-еквівалентні.*

2.3. Нормалізовані класи диференціальних рівнянь

Розв'язання задач групової класифікації є значно простішим у випадках, коли розглядуваний клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ систем диференціальних рівнянь має додаткову властивість нормалізованості відносно точкових перетворень. На додачу дослідження множини $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ допустимих перетворень можна поглибити вивченням умовних груп еквівалентності підкласів з такою властивістю.

2.3.1. Означення нормалізованого класу.

Означення 2.8. Клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ назвемо *нормалізованим* (відносно точкових перетворень), якщо $\forall(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})\ \exists\Phi\in G^\sim\colon\ \tilde\theta=\Phi\theta$ і $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$.

Клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ назвемо *нормалізованим в узагальненому сенсі*, якщо $\forall(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})\ \exists\Phi\in G^\sim_{\mathrm{gen}}\colon \tilde\theta=\Phi\theta$ і $\varphi=\Phi(\cdot,\cdot,\theta(\cdot,\cdot))|_{(x,u)}$.

Означення 2.9. Клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ назвемо *сильно нормалізованим*, якщо він нормалізований і $G^\sim|_{(x,u)}=\prod_{\theta\in\mathcal{S}}G_\theta$, і назвемо *сильно нормалізованим в узагальненому сенсі*, якщо він нормалізований в узагальненому сенсі і $\forall\theta^0\in\mathcal{S}\colon\ G^\sim_{\mathrm{gen}}|^{\theta=\theta^0}_{(x,u)}=\prod_{\theta\in\mathcal{S}_{\theta^0}}G_\theta$, де $\mathcal{S}_{\theta^0}=\{\theta'\in\mathcal{S}\mid G^\sim_{\mathrm{gen}}|^{\theta=\theta'}_{(x,u)}=G^\sim_{\mathrm{gen}}|^{\theta=\theta^0}_{(x,u)}\}$.

Означення 2.10. Клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ назвемо *напівнормалізованим*, якщо $\forall(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})\ \exists\tilde\varphi\in G_\theta,\ \exists\Phi\in G^\sim\colon \varphi=\Phi|_{(x,u)}\circ\tilde\varphi$, тобто

$$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})=\{(\theta,\Phi\theta,\Phi|_{(x,u)}\circ\tilde\varphi)\mid\theta\in\mathcal{S},\ \tilde\varphi\in G_\theta,\ \Phi\in G^\sim\}.$$

($\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})=\{(\theta^0,\Phi\theta^0,\Phi|^{\theta=\theta^0}_{(x,u)}\circ\tilde\varphi)\mid\theta^0\in\mathcal{S},\ \tilde\varphi\in G_\theta,\ \Phi\in G^\sim_{\rm gen}\}$, якщо $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ є *напівнормалізованим в узагальненому сенсі.*)

Грубо кажучи, клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ є нормалізованим, якщо кожне допустиме перетворення в цьому класі індуковано перетворенням з групи еквівалентності $G^\sim$, і є сильно нормалізованим, якщо додатково $G^\sim|_{(x,u)}$ породжено елементами з G_θ, $\theta\in\mathcal{S}$. Множину допустимих перетворень напівнормалізованого класу породжено перетвореннями з групи еквівалентності цілого класу і перетвореннями з груп ліївської симетрії окремих рівнянь.

Твердження 2.7. *Якщо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ нормалізований/напівнормалізований (у звичайному або узагальненому сенсі) і підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ замкнутий під дією групи $G^\sim$ (або $G^\sim_{\rm gen}$), то підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ нормалізований/напівнормалізований у тому ж сенсі.*

Перетин нормалізованих підкласів класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ з однаковою групою еквівалентності $G^\sim_0$ є нормалізованим підкласом, причому $G^\sim_0$ є підгрупою його групи еквівалентності, що породжує всю відповідну множину допустимих перетворень. Дійсно, нехай $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ і $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ — нормалізовані підкласи класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})=G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})=G^\sim_0$. Якщо $\Phi\in G^\sim_0$, то $(\theta,\Phi\theta,\Phi|_{(x,u)})\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$ для будь-якого $\theta\in\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$, тобто $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$. В силу нормалізованості підкласів $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ і $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ для будь-якого $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$ існує $\Phi\in G^\sim_0$ таке, що $\tilde\theta=\Phi\theta$ і $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$. Отже, $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''}$ — нормалізований підклас. Доведення у випадку нормалізованості в узагальненому сенсі аналогічне.

Властивість нормалізованості було встановлено (в явній або неявній формах) для різних класів диференціальних рівнянь, важливих для застосувань. Як приклади згадаємо узагальнені рівняння Бюргерса [175], $(1+1)$-вимірні загальні або квазілінійні еволюційні рівняння та різні їх підкласи [1,21,22,25,61,151,174,182,293,295] і системи таких рівнянь [241], (1+1)-вимірні узагальнені нелінійні хвильові рівняння [183], рівняння ейконалу в просторах розмірності один, два і три [5,6], різні типи нелінійних рівнянь Шрьодінгера [144, 160, 234, 237, 238, 296].

2.3.2. Особливі приклади нормалізованих класів. Існує багато очевидних прикладів нормалізованих класів. Так, інтуїтивно зрозуміло, що граничні випадки класів, утворених або окремою системою диференціальних рівнянь, або всіма системами фіксованої кількості незалежних змінних, невідомих функцій і диференціальних рівнянь з обмеженнями або без обмежень порядку, є нормалізованими. Покажемо це в рамках наведеного формального підходу.

Розглянемо систему $L(x,u_{(p)})=0$ з l диференціальних рівнянь для m невідомих функцій u від n незалежних змінних x, яка допускає максимальну групу G точкових симетрій. Вважаємо, що набір θ складається з єдиного довільного елемента, який також позначимо як θ, і L є сталою по θ. Допоміжну систему $\mathcal S$ для довільного елемента θ можна вибрати різними способами. Обговоримо дві можливості.

Перша полягає у тому, щоб зв'язати θ єдиним (алгебраїчним або диференціальним) рівнянням, наприклад, $\theta=0$. Тоді $\mathcal S$ — одноелементна множина, що складається з функції, тотожно рівної 0 на $J^{(p)}$, $\mathrm T(\mathcal L|_{\mathcal S})=\{\,(0,0,\varphi)\mid\varphi\in G\,\}$ і $G^\sim=\{\,(\tilde x,\tilde u)=\varphi(x,u),\ \tilde\theta=F(x,u_{(p)},\theta)\theta\mid \varphi\in G,\ F(\cdot,\cdot,0)\neq0\,\}$, тобто в силу означення 1 клас $\mathcal L|_{\mathcal S}$ є нормалізованим. Він має непорожню тривіальну групу еквівалентності $G^\sim_{\mathrm{triv}}=\{\,(\tilde x,\tilde u)=(x,u),\ \tilde\theta=F(x,u_{(p)},\theta)\theta\mid F(\cdot,\cdot,0)\neq0\}$, якою потрібно знехтувати, і $G^\sim/G^\sim_{\mathrm{triv}}=\{\,(\tilde x,\tilde u)=\varphi(x,u),\ \tilde\theta=\theta\mid\varphi\in G\,\}$.

Друга можливість — не накладати ніяких зв'язків на θ. Тоді $\mathcal S$ — вся множина диференціальних функцій від $(x\,|\,u)$ p-го порядку, $\mathrm T(\mathcal L|_{\mathcal S})=\{\,(\theta,\tilde\theta,\varphi)\mid\theta,\tilde\theta\in\mathcal S,\ \ \varphi\in G\}$ і $G^\sim=\{\,(\tilde x,\tilde u_{(p)})=\mathrm{pr}_p\,\varphi(x,u_{(p)}),$ $\tilde\theta=F(x,u_{(p)},\theta)\mid\varphi\in G,\ \partial F/\partial\theta\neq0\,\}$. Отже, клас $\mathcal L|_{\mathcal S}$ нормалізований, причому це приклад класів без взаємно-однозначної відповідності між довільними елементами і системами диференціальних рівнянь.

Для класу всіх систем l диференціальних рівнянь для m невідомих функцій n незалежних змінних, які мають порядок не вище, ніж p (тут l, m, n, p — фіксовані натуральні числа), ліві частини рівнянь можна вважати довільними елементами і взяти порожню допоміжну систему S, тобто $k = l$, $L \equiv \theta$ і $\mathcal{S}$ — вся множина з наборів l функціонально незалежних диференціальних функцій від $(x\,|\,u)$ p-го порядку. Тоді $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{(\theta, \tilde\theta, \varphi) \mid \theta{\in}\mathcal{S},\ \tilde\theta = \mathrm{pr}_p\,\varphi\, F(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})),\ |\partial\varphi/\partial(x,u)| \neq 0,$ $\partial F/\partial\theta|_{\theta=0} \neq 0\,\}$ і $G^\sim = \{\,\Phi = (\varphi(x,u), F(x, u_{(p)}, \theta)) \mid |\partial\varphi/\partial(x,u)| \neq 0,$ $\partial F/\partial\theta|_{\theta=0} \neq 0\,\}$, що очевидно показує нормалізованість цього класу.

2.3.3. Нормалізовані класи і проблеми групової класифікації. Поняття нормалізованих класів неявно використано при розв'язанні проблем групової класифікації для багатьох класів систем диференціальних рівнянь. Найбільш відомі класичні проблеми групової класифікації, такі як класифікації С. Лі звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [186] і двовимірних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку [187], було розв'язано з суттєвим залученням сильної нормалізованості наведених вище класів. Подібні класифікаційні техніки, що неявно ґрунтуються на властивостях нормалізованих класів, недавно застосовано при розв'язанні проблем групової класифікації багатьма авторами (див., наприклад, [6, 61, 144, 183, 238, 293, 296]).

Твердження 2.8. *Нехай клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ нормалізований і G^i, $i = 1, 2$, — локальні групи точкових перетворень у просторі змінних (x, u), причому $\mathcal{S}^i = \{\theta{\in}\mathcal{S} \mid G^{\mathrm{p}}_\theta = G^i\} \neq \varnothing$. За цих умов $\mathcal{S}^1 \sim \mathcal{S}^2 \bmod G^\sim$ тоді і тільки тоді, коли $G^1 \sim G^2 \bmod G^\sim$.*

Твердження 2.9. *Дві системи з напівнормалізованого класу перетворюються одна в іншу точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні відносно групи еквівалентності цього класу.*

Наслідок 2.1. *У напівнормалізованому класі класифікації з точністю до еквівалентності, індукованої дією групи еквівалентності, і з точністю до загальної точкової еквівалентності співпадають.*

Твердження 2.10. *Кожний нормалізований клас систем диференціальних рівнянь є напівнормалізованим.*

Твердження 2.11. *Нехай клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований і припустимо, що підмножина $\mathcal{S}'$ множини $\mathcal{S}$ визначає підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, інваріантний відносно дії групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Тоді підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ нормалізований (у тому ж самому сенсі), а $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ — підгрупа групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$, що породжує $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ і, якщо $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі, співпадає з $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ з точністю до калібрувальних перетворень еквівалентності в $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.*

Доведення. $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \supset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, оскільки для будь-якого $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ і для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}'$ маємо $\Phi\theta \in \mathcal{S}'$, тобто

$$(\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}),$$

звідки випливає, що $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$. Оскільки $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, для будь-якого $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ існує $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ таке, що $\tilde{\theta} = \Phi\theta$ і $\varphi = \Phi|_{(x,u)}$, Попередню частину доведення легко поширити на випадок нормалізованості в узагальненому сенсі.

Кожне $\Psi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ і кожне $\theta \in \mathcal{S}'$ визначають допустиме перетворення $(\theta, \Psi\theta, \Psi|_{(x,u)}) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$. Отже, існує $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ таке, що $\Psi|_{(x,u)} = \Phi|_{(x,u)}$ і $\Psi\theta = \Phi\theta$. □

Зауважимо, що за зроблених припущень підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}'}$ має аналогічні властивості.

Для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і локальної (зв'язаної) групи G точкових перетворень змінних (x, u) такої, що $G = G^{\mathrm{p}}_{\theta}$ для деякого $\theta \in \mathcal{S}$, розглянемо такі підмножини множини $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_G = \{\,\theta{\in}\mathcal{S} \mid G^{\mathrm{p}}_{\theta} \supset G\}, \quad \bar{\mathcal{S}}_G = \{\,\theta{\in}\mathcal{S} \mid G^{\mathrm{p}}_{\theta} \supset G \bmod G^{\sim}\},$$

$$\mathcal{S}'_G = \{\,\theta{\in}\mathcal{S} \mid G^{\mathrm{p}}_{\theta} = G\}, \quad \bar{\mathcal{S}}'_G = \{\,\theta{\in}\mathcal{S} \mid G^{\mathrm{p}}_{\theta} = G \bmod G^{\sim}\}.$$

Наслідок 2.2. *Нехай клас* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *нормалізований. Тоді* $\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G}$ *і* $\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G}$ *— його нормалізовані підкласи.* $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ *є підгрупою груп* $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G})$ *і* $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G})$ *і породжує* $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G})$ *і* $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G})$.

Твердження 2.12. *Підклас* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ *інваріантний відносно* $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$*, де* $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}'_{G^{\cap}}$, $G^{\cap} = G^{\cap\mathrm{p}}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.

Доведення. Фіксуємо $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ і довільне $\theta \in \mathcal{S}_0$. Треба показати, що $\Phi\theta \in \mathcal{S}_0$. Маємо $G^{\mathrm{p}}_{\Phi\theta} = \mathrm{Ad}_{\Phi} G^{\mathrm{p}}_{\theta} = \mathrm{Ad}_{\Phi} G^{\cap}$, де Ad_{Φ} — дія Φ на групах перетворень: $G \ni \psi \to \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Ad}_{\Phi} G$, $\varphi := \Phi|_{(x,u)}$. $G^{\mathrm{p}}_{\Phi\theta} \supset G^{\cap}$ з огляду на те, що $\Phi\theta \in \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Якби $G^{\mathrm{p}}_{\Phi\theta} = \mathrm{Ad}_{\Phi} G^{\cap} \supsetneq G^{\cap}$, то $G^{\cap} \supsetneq \mathrm{Ad}_{\Phi^{-1}} G^{\cap}$. Але тоді б $\mathrm{Ad}_{\Phi^{-1}} G^{\cap} = G^{\mathrm{p}}_{\Phi^{-1}\theta}$, $\Phi^{-1}\theta \in \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і, отже, $\mathrm{Ad}_{\Phi^{-1}} G^{\cap} \supset G^{\cap}$, що приводить до суперечності. Ось чому $G^{\mathrm{p}}_{\Phi\theta} = G^{\cap}$, тобто $\Phi\theta \in \mathcal{S}_0$. □

Твердження 2.13. *Якщо клас* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *нормалізований у звичайному сенсі, то клас* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}$ *має таку ж властивість. Множину* $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ *породжено групою* $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}) \cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$*, проекція якої на* (x,u) *— нормалізатор* G *в* $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$.

Доведення. Фіксуємо будь-яке $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$. Оскільки $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}) \subset \subset \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, то існує $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ таке, що $\tilde{\theta} = \Phi\theta$ і $\varphi = \Phi|_{(x,u)}$, $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}'_G$, а тому $G = G^{\mathrm{p}}_{\tilde{\theta}} = \varphi \circ G^{\mathrm{p}}_{\theta} \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$, тобто $\varphi = \Phi|_{(x,u)}$ належить нормалізатору G у $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$.

Розглянемо довільне перетворення $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ таке, що його проекція $\varphi = \Phi|_{(x,u)}$ належить нормалізатору G у $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$. Тоді $(\theta, \Phi\theta, \varphi) \in \mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}'_G$, оскільки $\Phi\theta \in \mathcal{S}'_G$. Дійсно, $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ і $G^{\mathrm{p}}_{\Phi\theta} = \varphi \circ G^{\mathrm{p}}_{\theta} \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ G \circ \varphi^{-1} = G$. Отже, $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$. □

Твердження 2.14. *Припустимо, що* $\mathcal{S}'_G \neq \varnothing$*. Тоді* $G^{\cap\mathrm{p}}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) = G$, $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) \subset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ *і, якщо клас* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ *нормалізований у звичайному сенсі, проекції цих груп еквівалентності на* (x,u) *співпадають.*

Доведення. Перше твердження тривіально випливає з означення підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}$. Тоді в силу твердження 2.12, підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}$ інваріантний відносно $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})$, тобто $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) \subset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$, а тому

$G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})\cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) \subset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})\cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Водночас $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})\cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ містить усі перетворення з $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, проекції яких на простір змінних (x, u) належать нормалізатору групи G у $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$. В силу твердження 2.13 це зумовлює, що

$$\begin{aligned} &G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})|_{(x,u)} \supset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) \cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)} = \\ &\qquad = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}) \cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)} = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})|_{(x,u)}. \end{aligned}$$

Зокрема, $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) \cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}) \cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. □

Зауваження 2.4. Взагалі кажучи, нормалізованість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ не призводить до нормалізованості підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}$.

З огляду на наведені твердження, проблема групової класифікації у будь-якому нормалізованому класі диференціальних рівнянь зводиться до підгрупового аналізу відповідної групи еквівалентності. Властивість сильної нормалізованості є ознакою того, що значна частина підгруп буде групами ліївської симетрії систем з класу, що розглядається. Більш того, під час класифікації природно виникає ієрархія нормалізованих підкласів, що відповідають випадкам розширення симетрії.

2.3.4. Нормалізовані підкласи і допустимі перетворення. Дослідження нормалізованості класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ або його підкласів необхідне для опису множини $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, і його можна включити як крок у вивчення $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Як і для умовних груп еквівалентності, тільки частина нормалізованих підкласів при цьому є значимою.

Означення 2.11. Нормалізований підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ назвемо *максимальним*, якщо жоден нормалізований підклас класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ не містить власно підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.

Означення максимальності можна сформулювати в той же спосіб для інших типів нормалізованості, тобто для сильно нормалізованих і напівнормалізованих (у звичайному або узагальненому сенсі) класів. Взагалі кажучи, максимальний сильно нормалізований підклас не є обов'язково максимальним нормалізованим підкласом і максимальний нормалізований підклас не є обов'язково максимальним напівнормалізованим підкласом. Більш того, максимальний нормалізований або напівнормалізований підклас може бути неасоційований з максимальною умовною групою еквівалентності. Однак жоден власний підклас нормалізованого класу не приводить до максимальної умовної групи еквівалентності.

Алгоритм опису множини допустимих перетворень можна модифікувати через включення у нього як додаткового кроку дослідження нормалізованих властивостей підкласів, асоційованих з максимальними групами еквівалентності, і побудови повної сім'ї максимальних нормалізованих підкласів. Максимальні нормалізовані підкласи можна вивчати з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності. Зауважимо, що при розв'язанні проблеми групової класифікації, немаксимальні нормалізовані підкласи виникають як можливі класифікаційні випадки, а тому також мають бути розглянуті.

Проблему класифікації допустимих перетворень можна вважати розв'язаною, наприклад, у таких випадках.

1. У силу означення нормалізованого класу, множина допустимих перетворень відома, якщо клас виявляється нормалізованим і пораховано його групу еквівалентності. Тоді

$$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{\, (\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \mid \theta \in \mathcal{S}, \Phi \in G^{\sim}\}.$$

До цього випадку відносяться всі класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, вивчені у параграфі 3.1. Зауважимо, що будь-який нормалізований клас має, з точністю до тривіальних перетворень еквівалентності, єдину максимальну умовну групу еквівалентності, яка очевидно співпадає з групою еквівалентності цього класу. Підклас не може породжувати максимальну умовну групу еквівалентності класу, якщо він власно міститься у нормалізованому підкласі.

2. Припустимо, що клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ зображено як об'єднання неперетинних нормалізованих підкласів, і допустимих перетворень між системи з різних підкласів немає. Тобто $\mathcal{S} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{S}_\gamma$, $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma}$ — нормалізований для будь-якого $\gamma\in\Gamma$, $\mathcal{S}_\gamma\cap\mathcal{S}_{\gamma'}=\varnothing$ і $\mathrm{T}(\theta,\theta')=\varnothing$, де $\theta\in\mathcal{S}_\gamma$, $\theta'\in\mathcal{S}_{\gamma'}$, $\gamma\neq\gamma'$. Тоді $G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \cap_{\gamma\in\Gamma}G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})$ і $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ — об'єднання множин $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})$ допустимих перетворень підкласів, кожну з яких легко побудувати:

$$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\{\,(\theta,\Phi\theta,\Phi|_{(x,u)})\mid\theta\in\mathcal{S}_\gamma,\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})\,\}.$$

Виберемо підмножину Λ у Γ таку, що $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\lambda})\neq G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_{\lambda'}})$ для будь-яких різних $\lambda,\lambda'\in\Lambda$ і для довільного $\gamma\in\Gamma$ існує $\lambda\in\Lambda$, що задовольняє умову $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\lambda}) = G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})$. Позначимо через Γ_λ підмножину тих γ, що відповідають фіксованому λ. Тоді множину максимальних нормалізованих підкласів класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ вичерпують об'єднання $\bar{\mathcal{S}}_\lambda = \bigcup_{\gamma\in\Gamma_\lambda}\mathcal{S}_\gamma$, $\lambda\in\Lambda$. Групи $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\lambda}) = G^\sim(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_\lambda})$ вичерпують множину максимальних умовних груп еквівалентності класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Множина допустимих перетворень класу нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами і загальною модульною нелінійністю має наведену структуру для довільної просторової розмірності [227, 234, 240]. Див. також теорему 3.6 і зауваження 3.8.

3. Більш нетривіальна ситуація щодо допустимих перетворень виникає, коли максимальні нормалізовані підкласи мають непорожній перетин. Нехай $\mathcal{S}',\mathcal{S}''\subset\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''\neq\varnothing$, підкласи $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ і $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ нормалізовані, $\mathcal{S}' = G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})\ \mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$ і $\mathcal{S}'' = G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})\ \mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$. Останні дві умови означають, що будь-яке рівняння з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ (або $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$) еквівалентне відносно $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ (або $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})$) рівнянню з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''}$. Тоді будь-яке допустиме перетворення $(\theta',\theta'',\varphi)$ з $\theta'\in\mathcal{S}'$ і $\theta''\in\mathcal{S}''$ можна зобразити у вигляді $(\theta',\Phi^2(\Phi^1\theta'),(\Phi^2\circ\Phi^1)|_{(x,u)})$, де $\Phi^1\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$, $\Phi^2\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})$ і $\Phi^1\theta'\in\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$. Множини допустимих перетворень такої структури мають, наприклад, деякі класи рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами [275].

Наведені випадки охоплюють тільки найпростіші ситуації опису множин допустимих перетворень у термінах нормалізованих підкласів.

2.4. Нормалізовані класи систем еволюційних рівнянь

Вивчимо властивості нормалізованості загальних класів $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь, їх підкласів та деяких класів систем $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку.

Розглянемо клас $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь n-го порядку

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{(n,x)}), \tag{2.1}$$

де $n \geqslant 2$, $H_{u_n} \neq 0$. Тут $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $u_0 = u$, $u_{(n,x)} = (u_0, \ldots, u_n)$.

Добре відомо [25], що кожне контактне перетворення, яке відображає рівняння з класу (2.1) у рівняння з цього ж класу, обов'язково має вигляд

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = U(t, x, u, u_x). \tag{2.2}$$

Функції T, X і U задовольняють умови невиродженості

$$T_t \neq 0, \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} X_x & X_u & X_{u_x} \\ U_x & U_u & U_{u_x} \end{pmatrix} = 2 \tag{2.3}$$

і контактності

$$(U_x + U_u u_x) X_{u_x} = (X_x + X_u u_x) U_{u_x}. \tag{2.4}$$

Перетворення (2.2) однозначно продовжується на похідні u_x і u_{xx} за формулами $\tilde{u}_{\tilde{x}} = V(t, x, u, u_x)$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = D_x V / D_x X$, де

$$V = \frac{U_x + U_u u_x}{X_x + X_u u_x} \quad \text{або} \quad V = \frac{U_{u_x}}{X_{u_x}},$$

якщо $X_x + X_u u_x \neq 0$ або $X_{u_x} \neq 0$ відповідно. Права частина перетвореного рівняння дорівнює

$$\tilde{H} = \frac{U_u - X_u V}{T_t} H + \frac{U_t - X_t V}{T_t} \tag{2.5}$$

і $(X_u, U_u) \neq (0,0)$ в силу (2.3) і (2.4). Більш того, кожне з перетворень вигляду (2.2) відображає клас (2.1) на себе, а тому його продовження на довільний елемент H належить контактній групі еквівалентності $G^\sim_{\rm c}$ класу (2.1). (Інших елементів у $G^\sim_{\rm c}$ немає.) Іншими словами, група еквівалентності $G^\sim_{\rm c}$ породжує всю множину допустимих контактних перетворень у класі (2.1), тобто цей клас нормалізований відносно контактних перетворень. Стисло сформулюємо наведені результати.

Твердження 2.15. *Клас* (2.1) *контактно-нормалізований. Контактна група еквівалентності* $G^\sim_{\rm c}$ *класу* (2.1) *складається з перетворень* (2.2)*, що задовольняють умови* (2.3) *і* (2.4) *і продовжені на довільний елемент* H *згідно* (2.5)*.*

Зауважимо, що клас (2.1) також точково-нормалізований. Його точкова група еквівалентності $G^\sim_{\rm p}$ складається з перетворень

$$\begin{aligned} &\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X(t,x,u), \quad \tilde u = U(t,x,u),\\ &\tilde H = \frac{\Delta}{T_tD_xX}H + \frac{U_tD_xX - X_tD_xU}{T_tD_xX}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

де T, X і U пробігають відповідні множини гладких функції, що задовольняють умови невиродженості $T_t \neq 0$ і $\Delta = X_xU_u - X_uU_x \neq 0$.

Існують підкласи класу (2.1), допустимі контактні перетворення в яких насправді вичерпано точковими перетвореннями.

Твердження 2.16. *Кожне контактне перетворення між квазілінійними рівняннями вигляду* (2.1) *є продовженням точкового.*

Розглянемо клас систем еволюційних рівнянь другого порядку загального вигляду

$$\bar u_t = \bar F(t,x,\bar u,\bar u_x,\bar u_{xx}), \tag{2.7}$$

де $\bar u = (u^1,\dots,u^m)$, $\bar F = (F^1,\dots,F^m)$ і $|\partial\bar F/\partial\bar u_{xx}| \neq 0$. Будь-яке точкове перетворення $\mathcal T$ у просторі змінних $(t,x,\bar u)$ має вигляд

$$\tilde t = \mathcal T^t(t,x,\bar u), \quad \tilde x = \mathcal T^x(t,x,\bar u), \quad \tilde u^a = \mathcal U^a(t,x,\bar u),$$

де $|\partial(\mathcal T^t,\mathcal T^x,\bar{\mathcal U})/\partial(t,x,\bar u)| \neq 0$, $\bar{\mathcal U} = (\mathcal U^1,\dots,\mathcal U^m)$.

Лема 2.1. *Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує дві системи з класу* (2.7) *тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{T}^t_x = \mathcal{T}^t_{u^a} = 0$, тобто $\mathcal{T}^t = T(t)$, де T — довільна гладка функція від t з $T_t \neq 0$. Довільні елементи перетворюються за формулою*

$$\tilde{F}^a = \frac{\mathcal{U}^a_{u^b} D_x \mathcal{T}^x - \mathcal{T}^x_{u^b} D_x \mathcal{U}^a}{T_t D_x \mathcal{T}^x} F^b + \frac{\mathcal{U}^a_t D_x \mathcal{T}^x - \mathcal{T}^x_t D_x \mathcal{U}^a}{T_t D_x \mathcal{T}^x},$$

де $D_x = \partial_x + u^b_x \partial_{u^b} + \cdots$ — оператор повного диференціювання по x. Отже, клас (2.7) *нормалізований. Група еквівалентності класу* (2.7) *складається з перетворень, визначених у просторі змінних і довільних елементів згідно наведених формул.*

Аналогічно, розглянемо підклас класу (2.7), утворений системами з довільними елементами, лінійними по $\bar{u}_{xx}$, тобто

$$u^a_t = S^{ab}(t, x, \bar{u}) u^b_{xx} + H^a(t, x, \bar{u}, \bar{u}_x), \tag{2.8}$$

де $|S| \neq 0$, $S = (S^{ab})$, $\bar{H} = (H^1, \ldots, H^m)$.

Лема 2.2. *Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує дві системи з класу* (2.8) *тоді і лише тоді, коли $\mathcal{T}^t_x = \mathcal{T}^t_{u^a} = 0$ і $\mathcal{T}^x_{u^a} = 0$, тобто $\mathcal{T}^t = T(t)$ і $\mathcal{T}^x = X(t, x)$, де T і X — довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що $T_t X_x \neq 0$. Більш того, якобіан $|\partial\bar{\mathcal{U}}/\partial\bar{u}| \neq 0$. Довільні елементи перетворюються за формулами*

$$\tilde{S} = \frac{X_x^{\,2}}{T_t} \frac{\partial\bar{\mathcal{U}}}{\partial\bar{u}} S \left(\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}}{\partial\bar{u}}\right)^{-1},$$

$$\tilde{\bar{H}} = \frac{1}{T_t}\Bigg(\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}}{\partial\bar{u}} \bar{H} + \bar{\mathcal{U}}_t - \frac{X_t}{X_x} D_x \bar{\mathcal{U}} - {}$$
$${} - \frac{\partial\bar{\mathcal{U}}}{\partial\bar{u}} S \left(\frac{\partial\bar{\mathcal{U}}}{\partial\bar{u}}\right)^{-1} \left(D_x \bar{\mathcal{U}}_x + u^a_x D_x \bar{\mathcal{U}}_{u^a} - \frac{X_{xx}}{X_x} D_x \bar{\mathcal{U}}\right)\Bigg).$$

Отже, клас (2.8) *нормалізований. Група еквівалентності класу* (2.8) *складається з перетворень, визначених у просторі змінних і довільних елементів згідно наведених формул.*

Зауваження 2.5. Якщо $S = \operatorname{diag}(\Sigma^1, \dots, \Sigma^m)$ і $\tilde{S} = \operatorname{diag}(\tilde{\Sigma}^1, \dots, \tilde{\Sigma}^m)$ — діагональні матриці-функції, то в силу леми 2.2 існує перестановка $\sigma \in \in \mathrm{S}_m$ така, що $\tilde{\Sigma}^a = X_x^2 T_t^{-1} \Sigma^{\sigma(a)}$ і $\mathcal{U}^a_{u^b}(\Sigma^{\sigma(a)} - \Sigma^b) = 0$. (В останній формулі підсумовування немає.) У випадку, коли $\Sigma^a \neq \Sigma^b$ для будь-якого $a \neq b$, з цього випливає, що $\mathcal{U}^a_{u^b} = 0$ при $\sigma(a) \neq b$.

Наслідок 2.3. *Підклас класу* (2.8)*, утворений системами, лінійними за похідними, тобто визначений зв'язками $S^{ab}_{u^c_x} = 0$, $H^a_{u^c_x u^b_x} = 0$ на довільні елементи, є нормалізованим. Група еквівалентності цього підкласу є підгрупою групи еквівалентності класу* (2.8) *і складається з перетворень, в яких параметр-функції $\mathcal{U}^a$ додатково задовольняють умови $\mathcal{U}^a_{u^b u^c} = 0$, тобто $\mathcal{U}^a = U^{ab}(t,x)u^b + U^{a0}(t,x)$.*

Наслідок 2.4. *Підклас класу* (2.8)*, виокремлений зв'язками $S^{ab}_{u^c_x} = = S^{ab}_{u^c} = 0$, $H^a_{u^c_x u^b_x} = H^a_{u^c_x u^b} = H^a_{u^c u^b} = 0$, тобто утворений лінійними системами, є нормалізованим. Група еквівалентності цього підкласу співпадає з групою, описаною у наслідку 2.3.*

Зауваження 2.6. Існує співвідношення між нормалізаційними властивостями загальних класів неоднорідних і відповідних однорідних лінійних систем диференціальних рівнянь. А саме, розглянемо клас $\mathcal{L}_{\mathrm{hom}}$ однорідних лінійних систем з l диференціальних рівнянь вигляду $L_\theta u = 0$ для m невідомих функцій $u = (u^1, \dots, u^m)$ від n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тут $L_\theta = (L^{\mu a}_\theta)$, $\mu = 1, \dots, l$ — матричний диференціальний оператор, параметризований θ, що пробігає множину функцій від x. Нехай відповідний клас $\mathcal{L}_{\mathrm{inh}}$ неоднорідних систем нормалізований і його група еквівалентності $G^\sim_{\mathrm{inh}}$ складається з перетворень, проектовних по x і афінних по u, тобто перетворення для (x,u) мають вигляд $\tilde{x} = X(x)$ і $\tilde{u} = U^{ab}(x)u^b + U^{a0}(x)$ для будь-якого $\mathcal{T} \in G^\sim_{\mathrm{inh}}$. Тоді клас $\mathcal{L}_{\mathrm{hom}}$ напівнормалізований. Група еквівалентності $G^\sim_{\mathrm{hom}}$ класу $\mathcal{L}_{\mathrm{hom}}$ ізоморфна підгрупі групи $G^\sim_{\mathrm{inh}}$, складеної перетворення з $(\hat{U}^{ab}U^{a0})$, що пробігає перетин множин розв'язків систем з $\mathcal{L}_{\mathrm{hom}}$, де $(\hat{U}^{ab})$ — обернена до (U^{ab}) матриця. Зазвичай з цього випливає, що $U^{a0} = 0$. Додаткова умова на допустимі перетворення в $\mathcal{L}_{\mathrm{hom}}$ полягає у тому, що $(\hat{U}^{ab}U^{b0})$ є розв'язком вихідної системи (з фіксованими значеннями довільних елементів). Отже, при обмеженні на $\mathcal{L}_{\mathrm{hom}}$ нормалізація порушується через лінійний принцип суперпозиції. Це обґрунтовує розгляд неоднорідних лінійних систем при дослідженні допустимих перетворень.

Комбінування зауваження 2.6 і наслідку 2.4 приводить до твердження про властивості відповідного класу однорідних лінійних систем.

Наслідок 2.5. *Підклас класу* (2.8)*, утворений однорідними лінійними системами (тобто зв'язками на довільні елементи є* $S^{ab}_{u^c_x} = S^{ab}_{u^c} = 0$*,* $H^a_{u^c_x u^b_x} = H^a_{u^c_x u^b} = H^a_{u^c u^b} = 0$ *і* $u^c_x H^a_{u^c_x} + u^c H^a_{u^c} = H^a$*), є напівнормалізованим. Група еквівалентності цього підкласу — підгрупа групи з наслідку 2.3, яка складається з перетворень з* $U^{a0} = 0$*. Точкове перетворення* $\mathcal{T}$ *пов'язує дві системи з цього класу тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{T}^t_x = \mathcal{T}^t_{u^a} = 0$*,* $\mathcal{T}^x_{u^a} = 0$ *і* $\mathcal{U}^a_{u^b u^c} = 0$*, тобто* $\mathcal{T}^t = T(t)$*,* $\mathcal{T}^x = X(t,x)$ *і* $\mathcal{U}^a = U^{ab}(t,x)u^b + U^{a0}(t,x)$*, де* T*,*X*,* U^{ab} *і* U^{a0} *— довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що* $T_t X_x |U^{ab}| \neq 0$*, і додатково* $(\hat{U}^{ab}U^{b0})$ *є розв'язком вихідної системи. Тут* $(\hat{U}^{ab})$ *— матриця, обернена до* (U^{ab}).

Зауваження 2.7. При зображенні систем з класу (2.7), лінійних по $\bar{u}_{xx}$, у вигляді (2.8) кожне F^a замінено набором довільних елементів (S^{ab}, H^a). У цьому конкретному випадку різні зображення дають еквівалентні результати. Так, формули для перетворень елементів S^{ab} і H^a можна отримати з аналогічних формул для F^a розщепленням відносно $\bar{u}_{xx}$. Відповідні множини допустимих перетворень, а також групи еквівалентності — ізоморфні. З розглянутими вище підкласами класу (2.8) можна працювати таким же способом. А саме, можна накладати зв'язки на функції S^{ab} і послідовно заміняти H^a виразами $H^{ab}(t,x,\bar{u})u^b_x + G^a(t,x,\bar{u})$, $H^{ab}(t,x)u^b_x + G^{ab}(t,x)u^b + G^{a0}(t,x)$ і $H^{ab}(t,x)u^b_x + G^{ab}(t,x)u^b$. Формули перетворення для нових довільних елементів можна знайти розщепленням формул перетворення для $\bar{H}$ відносно $\bar{u}_x$ або $(\bar{u}_x, u)$. Групи еквівалентності різних зображень цих підкласів ізоморфні.

2.5. Висновки

У цьому розділі розвинуто теоретичні основи симетрійного аналізу у класах систем диференціальних рівнянь. Запропоновано низку нових понять, пов'язаних з такими класами: розширена (узагальнена розширена, умовна, потенціальна) група еквівалентності, нормалізований (напівнормалізований, строго нормалізований) клас, подібні класи, відображення між класами, породжене точковими перетвореннями тощо. Вони дозволяють адекватно формулювати проблеми класифікації для складних класів, узагальнювати постановки задач і отримувати кінцеві результати класифікацій у замкненому і простому вигляді. Нові методи, розроблені на основі отриманих результатів, істотно розширяють коло розв'язних класифікаційних задач.

Уточнено поняття цілком невиродженої системи диференціальних рівнянь, введено поняття цілковитої невиродженості відносно ваги, яке є важливим у дослідженнях потенціальних структур над диференціальними рівняннями (див. розділ 4).

Також введено нове поняття нормалізованого (сильно нормалізованого, напівнормалізованого) класу відносно різних типів групи еквівалентності. Показано, що алгебраїчні методи групової класифікації можна прямо застосовувати до класу систем диференціальних рівнянь тоді і тільки, коли клас нормалізований. Це визначає межі ефективності алгебраїчних методів у чистому вигляді і природно веде до висновку, що для використання у ненормалізованих класах їх потрібно додатково комбінувати з іншими підходами, наприклад, розбивати такі класи на нормалізовані підкласи або розглядати замість вихідних класів нормалізовані надкласи. Нормалізованість також є відповіддю на питання, яку властивість має мати клас, щоб так звана часткова групова класифікація [3,155] в ньому давала вичерпний результат.

Доведено ряд тверджень, з яких випливає, що аналіз нееквівалентних випадків при груповій класифікації у нормалізованому класі природно веде до побудови ієрархії нормалізованих підкласів. Це дає ще одну можливість для оптимізації процесу класифікації.

Вперше поставлено задачу про класифікацію допустимих перетворень у класах систем диференціальних рівнянь та запропоновано розв'язувати її через класифікацію максимальних груп умовної еквівалентності і максимальних нормалізованих підкласів.

Для ілюстрації введених понять побудовано ланцюжки вкладених нормалізованих або напівнормалізованих класів (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь, що знаходить своє застосування у доведеннях розділів 4 і 6. Зокрема доведено, що для квазілінійних еволюційних рівнянь будь-яке контактне допустиме перетворення індуковано точковим.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [160, 163, 226, 227, 234, 240, 241, 277].

РОЗДІЛ 3

Допустимі перетворення і групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера

Мета цього розділу — на прикладі класу $\mathcal{F}$ $(1+n)$-вимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера загального вигляду

$$i\psi_t + \triangle\psi + F = 0 \tag{3.1}$$

та його підкласів продемонструвати ефективність розроблених методів групової класифікації і можливість класифікації множини допустимих перетворень. Тут і надалі ψ — комплексна невідома функція $1+n$ дійсних незалежних змінних t і $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\triangle\psi = \psi_{jj}$, $\nabla\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, $F = F(t, x, \psi, \psi^*, \nabla\psi, \nabla\psi^*)$ — довільна гладка комплекснозначна функція своїх аргументів. Верхній індекс "*" будь-якої комплексної величини позначає комплексне спряження.

Сильну нормалізованість класу $\mathcal{F}$ доведено у підрозділі 3.1. Також обговорено нормалізованість ширших класів і виокремлено два важливих вкладених сильно нормалізованих підкласи класу $\mathcal{F}$. Менший підклас $\mathcal{S}$ все ще містить клас $\mathcal{V}$ нелінійних рівнянь Шрьодінгера з модульною нелінійностю і потенціалами. Тому нормалізаційні властивості підкласу $\mathcal{S}$ суттєві для груповою класифікації у класі $\mathcal{V}$, виконаної у підрозділі 3.2 для розмірності $1 + 1$. Оскільки клас $\mathcal{V}$ не є нормалізованим, для повної класифікації його розбито на сім'ю нормалізованих підкласів і кожен з цих підкласів прокласифіковано окремо. Для того, щоб продемонструвати ефективність підходу, що ґрунтується на нормалізаційних властивостях, у випадку більше двох незалежних змінних, у підрозділі 3.3 проведено групову класифікацію класу $\mathcal{C}$ $(1+2)$-вимірних кубічних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами. Задачу групової класифікації у ненормалізованому класі нелінійних рівнянь Шрьодінгера з довільним елементом вигляду $F = F(\psi, \psi^*)$ розв'язано у підрозділі 3.4 у випадку довільної кількості просторових змінних як приклад застосування методу розгалуженого розщеплення. Комбінований метод, що включає і дослідження різних випадків інтегрування системи визначальних рівнянь, і вивчення можливої структури алгебри інваріантності, застосовано до групової класифікації класу систем двох нелінійних рівнянь Лапласа на дві невідомі функції від двох незалежних змінних у підрозділі 3.5.

3.1. Ієрархія вкладених нормалізованих класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера

Розпочнемо розгляд з найширшого класу $\mathcal{F}$. Послідовно збільшуючи кількість зв'язків на довільний елемент F, побудуємо серію вкладених нормалізованих класів $(1{+}n)$-вимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Останній клас з побудованих все ще буде містити клас рівнянь Шрьодінгера з модульними нелінійностями та потенціалами і матиме певні властивості, які дозволяють дослідити ці рівняння.

Для всього класу (3.1) допоміжна система на довільний елемент F складається з рівнянь

$$F_{\psi_{tt}} = F_{\psi_{tj}} = F_{\psi_{jk}} = F_{\psi^*_{tt}} = F_{\psi^*_{tj}} = F_{\psi^*_{jk}} = 0, \quad F_{\psi_t} = F_{\psi^*_t} = 0.$$

Зауважимо, що необхідно враховувати також спряжене до рівняння (3.1), тобто у дійсності маємо систему двох спряжених рівнянь для двох спряжених невідомих функцій. Усі умови інваріантності і еквівалентності потрібно перевіряти тільки для одного з рівнянь (оскільки тоді вони автоматично виконуються також для спряженого рівняння), але на многовиді всієї системи. Комплексних величин можна уникнути, заміняючи рівняння (3.1) системою двох рівнянь на дві дійсні невідомі функції, проте це призводить до складніших обчислень.

Будь-яке точкове перетворення $\mathcal{T}$ у просторі змінних класу $\mathcal{F}$ має загальний вигляд

$$\begin{aligned}&\tilde t = \mathcal{T}^t(t,x,\psi,\psi^*), \quad \tilde x_j = \mathcal{T}^j(t,x,\psi,\psi^*),\\&\tilde\psi = \mathcal{T}^\psi(t,x,\psi,\psi^*), \quad \tilde\psi^* = \mathcal{T}^{\psi^*}(t,x,\psi,\psi^*),\end{aligned}$$

де $\mathcal{T}^{\psi^*} = (\mathcal{T}^\psi)^*$ і $|\partial(\mathcal{T}^t,\mathcal{T}^x,\mathcal{T}^\psi,\mathcal{T}^{\psi^*})/\partial(t,x,\psi,\psi^*)| \neq 0$.

Лема 3.1. *Якщо точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує два рівняння з класу $\mathcal{F}$, то*

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}^t_\psi = \mathcal{T}^t_{\psi^*} = \mathcal{T}_j^{\,t} = 0, \quad \mathcal{T}^j_\psi = \mathcal{T}^j_{\psi^*} = 0,\\&|\mathcal{T}_t^{\,t}| = \mathcal{T}^1_k\mathcal{T}^1_k = \dots = \mathcal{T}^n_k\mathcal{T}^n_k, \quad \mathcal{T}^j_k\mathcal{T}^{j'}_k = 0, \quad \textit{якщо} \quad j \neq j',\\&\mathcal{T}^\psi_{\psi^*} = 0, \ \textit{якщо}\ \mathcal{T}^t_t > 0 \ \ \textit{і} \ \ \mathcal{T}^\psi_\psi = 0, \ \textit{якщо}\ \mathcal{T}^t_t < 0, \ \textit{тобто}\ \mathcal{T}^\psi_{\hat\psi^*} = 0.\end{aligned}$$

Зауваження 3.1. Тут і надалі $\varepsilon_T = \operatorname{sign} T$ і для будь-якої комплексної величини β використовуємо позначення

$$\hat\beta = \beta, \quad \text{якщо} \quad \mathcal{T}^t_t > 0 \quad \text{і} \quad \hat\beta = \beta^*, \quad \text{якщо} \quad \mathcal{T}^t_t < 0.$$

Доведення. Перейдемо до неявного зображення хвильової функції ψ:

$$\psi = \psi(t,x),\ \psi^* = \psi^*(t,x) \quad \Longleftrightarrow \quad H(t,x,\psi,\psi^*) = 0,\ H^*(t,x,\psi,\psi^*) = 0.$$

Підставляючи вирази для похідних функцій ψ, ψ^* через похідні функцій H, H^* у кожне рівняння вигляду (3.1), отримаємо споріднений клас $\mathcal{F}_H$ систем двох комплексно спряжених рівнянь на невідомі функції H і H^*, де t, x, ψ і ψ^* відіграють роль незалежних змінних, а F — єдиний довільний елемент. Будь-яке точкове перетворення $\mathcal{T}$ у просторі $(t,x|\psi,\psi^*)$ тривіально продовжується до точкового перетворення $\mathrm{pr}_H\,\mathcal{T}$ у просторі $(t,x,\psi,\psi^*|H,H^*)$ (H і H^* вважаємо тотожно перетвореними). Більш того, продовження встановлює бієкцію між множиною допустимих перетворень у класі $\mathcal{F}$ і множиною допустимих перетворень у класі $\mathcal{F}_H$ з тотожно перетвореними H і H^*.

Припустимо, що два рівняння з $\mathcal{F}$ пов'язані точковим перетворенням $\mathcal{T}$, тобто асоційовані системи з $\mathcal{F}_H$ пов'язані точковим перетворенням $\mathrm{pr}_H\,\mathcal{T}$. Виконаємо перетворення $\mathrm{pr}_H\,\mathcal{T}$ у вихідній системі, виключимо зв'язані похідні перетворених H і H^*, використовуючи кінцеву систему і розщепимо відносно незв'язаних похідних. Після громіздких обчислень отримаємо систему рівнянь на компоненти перетворення, наведену у формулюванні леми. □

Застосування будь-якого перетворення $\mathcal{T}$, що задовольняє систему з леми 3.1, до довільного рівняння з класу $\mathcal{F}$ приводить до рівняння з того ж класу. Відповідні значення довільних елементів пов'язані у локальний спосіб, тобто перетворення $\mathcal{T}$ належить групі еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$. Це дозволяє сформулювати твердження щодо $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$.

Теорема 3.1. *Клас $\mathcal{F}$ сильно нормалізований. Група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ класу $\mathcal{F}$ складається з перетворень*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t} = T, \quad \tilde{x} = |T_t|^{1/2} O x + X, \quad \tilde{\psi} = \Phi(t, x, \hat{\psi}), \\
&\tilde{F} = \frac{1}{|T_t|}\biggl(\Phi_{\hat{\psi}}\hat{F} - i\varepsilon_T \Phi_t - \Phi_{jj} - 2\Phi_{a\hat{\psi}}\hat{\psi}_j - \Phi_{\hat{\psi}\hat{\psi}}\hat{\psi}_j\hat{\psi}_j + \\
&\qquad + i\biggl(\frac{T_{tt}}{2|T_t|}x_k + \varepsilon_T O^{jc}_t O^{jk} x_c + \frac{\varepsilon_T X^j_t O^{jk}}{|T_t|^{1/2}}\biggr)(\Phi_k + \Phi_{\hat{\psi}}\hat{\psi}_k)\biggr),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

де T і $X = (X^1, \dots, X^n)$ — довільні гладкі дійснозначні функції змінної t, $T_t \neq 0$, Φ — довільна гладка комплекснозначна функція змінних t, x і $\hat{\psi}$, $\Phi_{\hat{\psi}} \neq 0$, O — довільна n-вимірна ортогональна матриця-функція, гладко залежна від t.

Зауваження 3.2. Використовуючи аналогічні аргументи, можна довести, що ширший клас рівнянь, подібних рівнянням Шрьодінгера, загального вигляду $i\psi_t + G\triangle\psi + F = 0$, де F і G — довільні гладкі комплекснозначні функції від $(t, x, \psi, \psi^*, \nabla\psi, \nabla\psi^*)$, нормалізований. Підкласи з довільними $G = G(t, x, \psi, \psi^*)$ або $G = G(t, x)$ або G, що пробігають усі дійснозначні функції одного з наведених типів, також нормалізовані. Можна накласти різноманітні зв'язки на довільні елементи, при яких відповідні підкласи будуть нормалізованими.

Зауваження 3.3. Насправді групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ породжено неперервною сім'єю перетворень вигляду (3.2), де $T_t > 0$ і $\det O = 1$, і двома дискретними перетвореннями: просторовим віддзеркаленням I_j для фіксованого j ($\tilde{t} = t$, $\tilde{x}_j = -x_j$, $\tilde{x}_k = -x_k$, $k \neq j$, $\tilde{\psi} = \psi$, $\tilde{F} = F$) і вігнерівським віддзеркаленням часу I_t ($\tilde{t} = -t$, $\tilde{x}_j = x_j$, $\tilde{\psi} = \psi^*$, $\tilde{F} = F^*$). Подібні твердження справедливі і щодо груп еквівалентності класів, розглянутих нижче.

Зауваження 3.4. Сильну нормалізованість класу $\mathcal{F}$ можна легко довести. Згідно означення 2.9 і зауваження 3.3, для цього достатньо показати, що для кожного з дискретних перетворень I_1 і I_t або інфінітезімальних перетворень еквівалентності існує рівняння вигляду (3.1), інваріантне відносно його проекції на просторі змінних (t, x, ψ, ψ^*). Проекція перетворення I_1 є точковою симетрією рівняння (3.1) тоді і тільки тоді, коли F — парна функція від (x_1, ψ_1, ψ^*_1), тобто

$$\begin{aligned} &F(t, x, \psi, \psi^*, \nabla\psi, \nabla\psi^*) = \\ &\qquad = F(t, -x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi, \psi^*, -\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, -\psi^*_1, \psi^*_2, \ldots, \psi^*_n). \end{aligned}$$

Аналогічно, рівняння (3.1) інваріантне відносно проекції перетворення I_t тоді і тільки тоді, коли

$$F(t, x, \psi, \psi^*, \nabla\psi, \nabla\psi^*) = F^*(-t, x, \psi, \psi^*, \nabla\psi, \nabla\psi^*).$$

Проекція будь-якого оператора, генеруючого однопараметричну підгрупу групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, має вигляд

$$Q = \tau\partial_t + \left(\frac{1}{2}\tau_t x_j + \chi^j\right)\partial_j + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*},$$

де коефіцієнти $\tau = \tau(t)$, $\chi^j = \chi^j(t)$ — довільні гладкі дійснозначні функції від t, а $\eta = \eta(t, x, \psi, \psi^*)$ — довільна гладка функція своїх аргументів.

Інфінітезімальна інваріантність рівняння (3.1) відносно Q приводить до одного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку на довільний елемент F, яке вочевидь має розв'язок.

Звузимо досліджуваний клас до підкласу $\mathcal{F}'$, припускаючи, що довільний елемент F не залежить від похідних $\nabla\psi$ і $\nabla\psi^*$, тобто доповнимо допоміжну систему на F зв'язками $F_{\psi_j} = F_{\psi_j^*} = 0$. Додаткові зв'язки на F у підкласі $\mathcal{F}'$ приводять до сильніших умов на компоненти допустимих перетворень відносно ψ і ψ^*. А саме, додатково маємо

$$\mathcal{T}^{\psi}_{\hat\psi\hat\psi} = 0, \quad \mathcal{T}^{\psi}_{\hat\psi a} = \frac{i\varepsilon_T \mathcal{T}^k_t O^{kj}}{2|\mathcal{T}^t_t|^{1/2}} \mathcal{T}^{\psi}_{\hat\psi}.$$

Після перехресного диференціювання копій останньої формули при різних значеннях a отримаємо, що $O^{bj'}_t O^{kj} = 0$, тобто $O_t = 0$ в силу ортогональності матриці O. Аналогічно теоремі 3.1, маємо таке твердження щодо класу $\mathcal{F}'$. (Сильна нормалізованість $\mathcal{F}'$ доводиться у спосіб, подібний до зауваження 3.4.)

Теорема 3.2. *Підклас $\mathcal{F}'$ класу $\mathcal{F}$, у якому довільний елемент F залежить лише від t, x, ψ і ψ^*, сильно нормалізований. Його група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$ є підгрупою групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$ і складається з перетворень* (3.2), *де*

$$\Phi = \hat\psi \exp\left(\frac{i}{8}\frac{T_{tt}}{|T_t|}\, x_j x_j + \frac{i}{2}\frac{\varepsilon_T X^k_t}{|T_t|^{1/2}}\, O^{kj} x_j + \Theta + i\Psi\right) + \Phi^0(t,x),$$

і T, $X = (X^1, \dots, X^n)$, Θ і Ψ — довільні гладкі дійснозначні функції від t, $T_t \neq 0$, Φ^0 — довільна гладка комплекснозначна функція змінних t і x, O — довільна стала n-вимірна ортогональна матриця.

Подальше звуження класу рівнянь виконаємо у більш спеціальний спосіб, а саме розглянемо клас $\mathcal{S}$ рівнянь вигляду

$$i\psi_t + \triangle\psi + S(t,x,|\psi|)\psi = 0, \quad S_{|\psi|} \neq 0, \tag{3.3}$$

який містить у собі клас $(1+n)$-вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами і модульними нелінійностями і, у той же час, у деякому сенсі є більш придатним для попередньої групової класифікації. Тут S — довільна комплекснозначна функція від t, x і $\rho=|\psi|$, причому вважаємо, що $S_\rho\neq 0$. Остання умова інваріантна відносно будь-яких точкових перетворень у фіксованих парах рівнянь вигляду (3.3). Зворотній умові $S_\rho=0$ відповідає лінійний випадок, який потрібно досліджувати окремо через його особливість. Тому накладена нерівність є природною.

Підклас $\mathcal S$ виокремлено з класу $\mathcal F$ через представлення $F = S(t,x,|\psi|)\psi$, тобто у підкласі $\mathcal S$ довільний елемент F задовольняє, додатково до вже наведених допоміжних рівнянь, умови

$$(\psi\partial_\psi-\psi^*\partial_{\psi^*})(F/\psi)=0,\quad (\psi\partial_\psi+\psi^*\partial_{\psi^*})(F/\psi)\neq 0.$$

Для зручності надалі будемо розглядати $S=F/\psi$ замість F як довільний елемент, який не залежить від похідних і задовольняє умови

$$\psi S_\psi-\psi^*S_{\psi^*}=0,\quad \psi S_\psi+\psi^*S_{\psi^*}\neq 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.3. *Клас $\mathcal S$ сильно нормалізований. Група еквівалентності $G^\sim_{\mathcal S}$ класу $\mathcal S$ є підгрупою групи $G^\sim_{\mathcal F'}$, виокремленою умовою $\Phi^0=0$, тобто складеною, у термінах довільного елементу S, з перетворень*

$$\begin{aligned}
&\tilde t=T,\quad \tilde x=|T_t|^{1/2}Ox+X,\\
&\tilde\psi=\hat\psi\exp\left(\frac{i}{8}\frac{T_{tt}}{|T_t|}x_jx_j+\frac{i}{2}\frac{\varepsilon_TX^k_t}{|T_t|^{1/2}}O^{kj}x_j+\Theta+i\Psi\right),\\
&\tilde S=\frac{\hat S}{|T_t|}+\frac{2T_{ttt}T_t-3{T_{tt}}^2}{16\varepsilon_T{T_t}^3}x_jx_j+\frac{\varepsilon_T}{2|T_t|^{1/2}}\left(\frac{X^k_t}{T_t}\right)_tO^{kj}x_j+\\
&\qquad+\frac{\Psi_t-i\Theta_t}{T_t}-\frac{X^j_tX^j_t+inT_{tt}}{4{T_t}^2}.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Тут T, $X=(X^1,\dots,X^n)$, Θ і Ψ — довільні гладкі дійснозначні функції від t, O — довільна стала n-вимірна ортогональна матриця.

Див. зауваження 3.5 стосовно доведення того, що клас $\mathcal S$ сильно нормалізований.

Наслідок 3.1. *Для кожного рівняння з класу* $\mathcal{S}$ *величина* $\rho S_{\rho\rho}/S_\rho$ *зберігається при будь-якому перетворенні, що відображає це рівняння у рівняння з цього ж класу, за вийнятком* I_t. *Зокрема, якщо* $\rho S_{\rho\rho}/S_\rho$ *— дійснозначна функція, то вона є інваріантом допустимих перетворень у класі* $\mathcal{S}$.

З теореми 3.3 випливає, що перетворення з групи еквівалентності будь-якого підкласу класу $\mathcal{S}$ з точністю до тривіальних перетворень еквівалентності мають вигляд (3.5). Це твердження також вірне для перетворень ліївської симетрії будь-якого рівняння з класу $\mathcal{S}$, якщо вважати, що в (3.5) S — інваріантна функція. Зокрема, теорема 3.3 разом з інфінітезімальним методом Лі приводить до такого твердження щодо операторів ліївської симетрії рівнянь з класу $\mathcal{S}$.

Теорема 3.4. *Будь-який оператор* Q *з максимальної алгебри* $A(S)$ *ліївської інваріантності рівняння* (3.3) *з довільним елементом* S $(S_\rho \neq 0)$ *можна зобразити у вигляді* $Q = D(\tau) + \kappa_{jk}J_{jk} + G(\bar\sigma) + \chi M + \zeta I$, *де*

$$
\begin{aligned}
&D(\tau) = \tau\partial_t + \frac{1}{2}\,\tau_t x_j\partial_j + \frac{1}{8}\,\tau_{tt}x_jx_jM,\\
&G(\bar\sigma) = \sigma^j\partial_j + \frac{1}{2}\sigma^j_t x_jM, \quad J_{jk} = x_j\partial_k - x_k\partial_j,\\
&M = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \quad I = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$\kappa_{jk} = -\kappa_{kj}$ *— сталі,* τ, χ, ζ *і* $\bar\sigma = (\sigma^1,\dots,\sigma^n)$ *— довільні гладкі дійснозначні функції від* t. *Крім того, коефіцієнти оператора* Q *повинні задовольняти класифікуючу умову*

$$
\begin{aligned}
&\tau S_t + \left(\frac{1}{2}\tau_t x_j + \kappa_{jk}x_k + \sigma^j\right)S_j + \zeta\rho S_\rho + \tau_t S =\\
&\qquad = \frac{1}{8}\,\tau_{ttt}x_jx_j + +\frac{1}{2}\sigma^j_{tt}x_j + \chi_t - i\zeta_t - i\frac{n}{4}\,\tau_{tt}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Теорему 3.4 можна також довести прямим застосуванням інфінітезімального методу Лі. А саме, розглянемо оператор з $A(S)$ у найбільш загальному вигляді $Q = \xi^t\partial_t + \xi^j\partial_j + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$, де ξ^t, ξ^j і η — гладкі функції від t, x, ψ і ψ^*. Умова інфінітезімальної інваріантності [30, 31] рівняння (3.3) відносно оператора Q приводить до лінійної перевизначеної системи диференціальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\begin{aligned}
&\xi^t_\psi = \xi^t_{\psi^*} = \xi^j_\psi = \xi^j_{\psi^*} = 0, \quad \eta_{\psi^*} = \eta_{\psi\psi} = 0, \quad \psi\eta_\psi = \eta,\\
&\xi^j_k + \xi^k_j = 0,\ a \neq b, \quad \xi^t_j = 0, \quad \xi^t_t = 2\xi^1_1 = \dots = 2\xi^n_n, \quad 2\eta_{\psi a} = i\xi^j_t,\\
&i\eta_{\psi t} + \eta_{\psi aa} + \xi^t S_t + \xi^j S_j + \rho S_\rho \operatorname{Re}\eta_\psi + \xi^t_t S = 0.
\end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо твердження теореми 3.4.

Оператори $D(\tau)$, J_{jk}, $G(\bar\sigma)$, M і ζI, де τ, $\bar\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$, χ і ζ пробігають всю множину гладких функцій від t, породжують нескінченновимірну алгебру Лі $A^\cup_{\mathcal S}$ зі звичайною дужкою Лі векторних полів, а ненульові комутаційні співвідношення між ними вичерпуються наступними:

$$\begin{aligned}
&[D(\tau^1), D(\tau^2)] = D(\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t), \quad [D(\tau), G(\bar\sigma)] = G\Big(\tau\bar\sigma_t - \frac12\tau_t\bar\sigma\Big),\\
&[D(\tau), \chi M] = \tau\chi_t M, \quad [D(\tau), \zeta I] = \tau\zeta_t I,\\
&[J_{jk}, G(\bar\sigma)] = G(\tilde{\bar\sigma}),\ j \neq k, \quad [G(\bar\sigma^1), G(\bar\sigma^2)] = \frac12(\sigma^{1j}\sigma^{2j}_t - \sigma^{2j}\sigma^{1j}_t)M,
\end{aligned}$$

де $\tilde\sigma^j = \sigma^k$, $\tilde\sigma^k = -\sigma^j$, $\tilde\sigma^{j'} = 0$, $c \neq a, b$. Отже, підпростори $\langle\chi M\rangle$, $\langle\zeta I\rangle$, $\langle G(\bar\sigma), \chi M\rangle$, $\langle G(\bar\sigma), \chi M, \zeta I\rangle$, $\langle J_{jk}, G(\bar\sigma), \chi M\rangle$, $\langle J_{jk}, G(\bar\sigma), \chi M, \zeta I\rangle$, і $\langle D(\tau), G(\bar\sigma), \chi M, \zeta I\rangle$ є ідеалами алгебри $A^\cup_{\mathcal S}$, а підпростори $\langle D(\tau)\rangle$, $\langle J_{jk}\rangle$ і $\langle D(\tau), J_{jk}\rangle$ — її підалгебрами.

Зауваження 3.5. Алгебру Лі $A^\sim_{\mathcal S}$ групи $G^\sim_{\mathcal S}$ породжено операторами

$$\begin{aligned}
&\tilde D(\tau) = D(\tau) - \tau_t(S\partial_S + S^*\partial_{S^*}) +\\
&\qquad\qquad + \frac18\tau_{ttt}x_jx_j(\partial_S + \partial_{S^*}) - i\frac{n}{4}\tau_{tt}(\partial_S - \partial_{S^*}),\\
&J_{jk}, \quad \tilde G(\bar\sigma) = G(\bar\sigma) + \frac12\sigma^j_{tt}x_j(\partial_S + \partial_{S^*}),\\
&\tilde M(\chi) = \chi M + \chi_t(\partial_S + \partial_{S^*}), \quad \tilde I(\zeta) = \zeta I - i\zeta_t(\partial_S - \partial_{S^*}),
\end{aligned}$$

де τ, $\bar\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$, χ і ζ пробігають всю множину гладких функцій від t. При доведенні сильної нормалізованості класу $\mathcal S$ способом, подібним до наведеного у зауваженні 3.4, проекції операторів мають вигляд $Q = D(\tau) + \kappa_{jk}J_{jk} + G(\bar\sigma) + \chi M + \zeta I$, що збігається з виглядом операторів з теореми 3.4. З огляду на класифікуючу умову (3.4), Q є оператором ліївської інваріантності рівняння вигляду (3.3) тоді і тільки тоді, коли $(\tau, \bar\sigma, \zeta) \neq (0, \bar 0, 0)$ або $\chi_t = 0$. Тому $A^{\cup}_{\mathcal{S}} = \langle \bigcup_S A(S) \rangle$. Цього достатньо, щоб вивести твердження про сильну нормалізованість класу S.

Вважаючи S довільною функцією і розщеплюючи (3.4) відносно S, S_t, S_j і S_ρ, отримаємо, що алгеброю Лі ядра $G^{\cap}_{\mathcal{S}}$ максимальних груп ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{S}$ є $A^{\cap}_{\mathcal{S}} = \langle M \rangle$. Повна група $G^{\cap}_{\mathcal{S}}$ співпадає з проекцією на (t, x, ψ) нормальної підгрупи $\hat G^{\cap}_{\mathcal{S}}$ групи $G^{\sim}_{\mathcal{S}}$, яка містить перетворення (3.5), що діють тотожно на довільний елемент S (тобто $T = t$ і $X^j = \Theta = \Psi_t = 0$, див. підрозділ 2.1.5).

Теорема 3.5. *$\hat G^{\cap}_{\mathcal{S}}$ складається з перетворень $\tilde t = t$, $\tilde x = x$, $\tilde \psi = \psi e^{i\Phi}$, $\tilde S = S$, де Φ — довільна стала.*

Зауваження 3.6. Іноді зручніше замість хвильової функції $\psi = \rho e^{i\varphi}$ використовувати амплітуду ρ і фазу φ. Тоді рівняння (3.3) заміняє система двох рівнянь для двох дійснозначних функцій ρ і φ:

$$\rho_t + 2\rho_j\varphi_j + \rho\varphi_{jj} + \rho \operatorname{Im} S = 0, \quad -\rho\varphi_t - \rho\varphi_j\varphi_j + \rho_{jj} + \rho \operatorname{Re} S = 0,$$

де $S = S(t, x, \rho)$, а допоміжна система для S набуває вигляду $S_\varphi = 0$, $S_\rho \neq 0$. У змінних (ρ, φ) оператори $D(\tau)$ і $G(\bar\sigma)$ зберігають вигляд (3.6), а $M = \partial_\varphi$ і $I = \rho\partial_\rho$. Нижче змінні (ρ, φ) і (ψ, ψ^*) вживатимемо одночасно.

3.2. Нелінійні (1 + 1)-вимірні рівняння Шрьодінгера з потенціалами і модульними нелінійностями

Перейдемо до підкласу $\mathcal{V}$ класу $\mathcal{S}$, який складається з $(1+1)$-вимірних рівнянь загального вигляду

$$i\psi_t + \psi_{xx} + f(|\psi|)\psi + V\psi = 0, \tag{3.8}$$

де f — довільна комплекснозначна нелінійність, залежна тільки від $\rho = |\psi|$, $f_\rho \neq 0$, а V — довільний комплекснозначний потенціал, залежний від t і x. Довільний елемент S зображено як $S = f(\rho) + V(t,x)$, де $f_\rho \neq 0$. Отже, цей підклас виокремлено з класу $\mathcal{S}$ умовами $S_{\rho t} = S_{\rho x} = 0$ і $S_\rho \neq 0$ або, у термінах ψ і ψ^*,

$$\psi S_{\psi t} + \psi^* S_{\psi^* t} = \psi S_{\psi x} + \psi^* S_{\psi^* x} = 0, \qquad \psi S_\psi + \psi^* S_{\psi^*} \neq 0. \tag{3.9}$$

У цьому підрозділі розв'язано проблему групової класифікації для класу $\mathcal{V}$. Хоча клас $\mathcal{V}$ не є нормалізованим, підхід, що ґрунтується на нормалізованості, застосовний до $\mathcal{V}$ завдяки його зображенню як об'єднання нормалізованих підкласів.

3.2.1. Групи еквівалентності і допустимі перетворення. Щоб знайти групу еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{V}}$ класу $\mathcal{V}$, застосовуємо прямий метод, тобто шукаємо всі точкові перетворення у просторі змінних t, x, ψ, ψ^*, S і S^*, які зберігають систему, утворену рівняннями (3.3), (3.4) і (3.9). Більш того, у той самий спосіб можна класифікувати всі допустимі точкові перетворення у класі $\mathcal{V}$.

Теорема 3.6. *$G^\sim_{\mathcal{V}}$ складається з перетворень* (3.5), *де $T_{tt} = 0$ і $\Theta_t = 0$. Клас $\mathcal{V}$ не є нормалізованим. Підклас $\mathcal{V}'$ класу $\mathcal{V}$, який відповідає додатковій умові, що значення $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho$ ($\equiv \rho S_{\rho\rho}/S_\rho$) не є дійсною сталою, має таку ж групу еквівалентності і є нормалізованим. Існують два різних випадки додаткових (умовних) перетворень еквівалентності у класі $\mathcal{V}$ (σ — комплексна стала):*

1. *$\rho f_{\rho\rho}/f_\rho = -1$, тобто $f = \sigma \ln \rho$.*
2. *$\rho f_{\rho\rho}/f_\rho = \gamma - 1 \in \mathbb{R}$ і $\gamma \neq 0$, тобто $f = \sigma \rho^\gamma$.*

Для будь-якої дійсної сталої γ підклас $\mathcal{P}_\gamma$, що складається з рівнянь (3.8), *де $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho = \gamma - 1$, нормалізований. Між рівняннями з різних підкласів, узятих з множини $\{\mathcal{V}', \mathcal{P}_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$, точкових перетворень немає.*

Зауваження 3.7. Перетворення еквівалентності можна знайти іншим способом, вважаючи f і V довільними елементами замість S. Тоді необхідно відшукати всі точкові перетворення у просторі змінних t, x, ψ, ψ^*, f, f^*, V і V^*, які зберігають систему, утворену рівняннями

$$\begin{aligned} &i\psi_t + \psi_{xx} + (f+V)\psi = 0, \quad f_t = f_x = 0, \\ &\psi f_\psi - \psi^* f_{\psi^*} = 0, \quad V_\psi = V_{\psi^*} = 0, \end{aligned}$$

а також нерівністю $\psi f_\psi + \psi^* f_{\psi^*} \neq 0$. При використанні зображення $S = f + V$ додатково виникають тільки калібрувальні перетворення еквівалентності вигляду $\tilde f = f + \beta$, $\tilde V = V - \beta$, де β — довільна комплексна стала, а t, x і ψ не змінюються. Нехтуючи цими перетвореннями, можна вибрати f найбільш підхожого вигляду. Наприклад, саме завдяки цьому можна вважати, що $f = \sigma \ln \rho$, коли $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho = -1$. Також покладемо $f = \sigma\rho^\gamma$ з точністю до калібрувальних перетворень еквівалентності, якщо $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho = \gamma - 1 \in \mathbb{R}$ і $\gamma \neq 0$.

Аналогічні зауваження щодо опису допустимих точкових перетворень та переходу до інших довільних елементів справедливі і для підкласів $\mathcal{P}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Зауваження 3.8. Теорема 3.6 дає приклад другого типу множин допустимих перетворень найпростішої структури з тих, що описані у підрозділі 2.3.4.

Групи еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{V}'}$ і $G^\sim_{\mathcal{P}_\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, вичерпують множину максимальних умовних груп еквівалентності класу $\mathcal{V}$. (Див. наступні підрозділи для їх точного опису.) Оскільки вони різні, підкласи $\mathcal{V}'$ і $\mathcal{P}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, вичерпують максимальні нормалізовані підкласи класу $\mathcal{V}$. Дозволяючи розгляд узагальнених груп еквівалентності, можна об'єднати підкласи $\mathcal{P}_\gamma$, $\gamma \neq 0$, у повний підклас $\hat{\mathcal{P}}$ рівнянь (3.8) зі степеневими нелінійностями. Підклас $\hat{\mathcal{P}}$ нормалізований в узагальненому сенсі відносно своєї узагальненої групи еквівалентності $G^\sim_{\hat{\mathcal{P}}}$, яка є сплетенням груп $G^\sim_{\mathcal{P}_\gamma}$, $\gamma \neq 0$, за параметром γ. Група еквівалентності $G^\sim_{\hat{\mathcal{P}}}$ є узагальненою, оскільки перетворення відносно ψ залежать від довільного елемента γ класу $\hat{\mathcal{P}}$. Отже, клас $\mathcal{V}$ має тільки три максимальних умовних узагальнених групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{V}'}$, $G^{\sim}_{\hat{\mathcal{P}}}$ і $G^{\sim}_{\mathcal{P}_0}$, асоційованих з максимальними нормалізованими (в узагальненому сенсі) підкласами $\mathcal{V}'$, $\hat{\mathcal{P}}$ і $\mathcal{P}_0$. Інших максимальних підкласів класу $\mathcal{V}$, нормалізованих в узагальненому сенсі, немає.

Оскільки клас $\mathcal{V}$ не є нормалізованим і має нетривіальні умовні групи еквівалентності, вся множина допустимих перетворень цього класу набагато ширша, ніж її підмножина, породжена групою еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{V}}$. Тому при груповій класифікації за стандартною технікою у кінцевий класифікаційний список рівнянь з розширенням ліївської симетрії увійшло б багато $G^{\sim}_{\mathcal{V}}$-нееквівалентних, але еквівалентних відносно точкових перетворень випадків, і для спрощення списку необхідно було б шукати багато додаткових перетворень еквівалентності.

Використаємо ефективніший метод. А саме, виконаємо окремо групову класифікацію в кожному з максимальних нормалізованих підкласів відносно відповідної умовної групи еквівалентності, використовуючи розвинутий вище підхід до задач групової класифікації в нормалізованих класах диференціальних рівнянь. Запропонований алгоритм застосовано в різних підкласах у максимально уніфікований спосіб, щоб продемонструвати його можливості. Класифікаційний список для всього класу $\mathcal{V}$ є об'єднанням списків, отриманих для підкласів; збереження розбиття випадків на групи у відповідності з підкласами, для яких їх було отримано, забезпечує його функціональність. Завдяки спеціальній структурі множини максимальних нормалізованих підкласів класу $\mathcal{V}$, цей список містить всі випадки розширення ліївської симетрії, нееквівалентні відносно точкових перетворень (і тільки такі випадки). Його можна розширити до списку $G^{\sim}_{\mathcal{V}}$-нееквівалентних випадків розширення за допомогою відповідних перетворень умовної еквівалентності, профакторизованих відносно $G^{\sim}_{\mathcal{V}}$.

Зауваження 3.9. З теореми 3.3 і результатів підрозділів 3.2.2–3.2.4 випливає, що групу $G^\sim_{\mathcal{S}}$ породжують трансформаційні частини допустимих перетворень класу (3.8). Точніше, для будь-якого фіксованого $\gamma \neq 0$ кожне перетворення з $G^\sim_{\mathcal{S}}$ можна зобразити як композицію перетворень з максимальних умовних груп еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{P}_0}$ і $G^\sim_{\mathcal{P}_\gamma}$. У той же час, клас $\mathcal{S}$ не є мінімальним нормалізованим надкласом класу (3.8). Ним є підклас класу $\mathcal{S}$, виокремлений умовою $S = R'(t)f(R(t)|\psi|) + V(t,x)$, де R і R' — довільні гладкі дійснозначні функції від t.

3.2.2. Загальний випадок нелінійності. В цьому підрозділі прокласифіковано тільки загальний випадкок $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho \neq \mathrm{const} \in \mathbb{R}$ (підклас $\mathcal{V}'$). Інші підкласи стисло розглянуто у наступних підрозділах. Класифікації у підкласах максимально уніфіковано для демонстрації універсальності запропонованого підходу до проблем групової класифікації.

Не зважаючи на відсутність розширень у групи еквівалентності, рівняння з загальною нелінійністю можуть мати достатньо великі алгебри ліївської інваріантності. Крім того, спеціальні нелінійності такого типу виникають у застосуваннях і математичних дослідженнях [32, 140–142].

З теореми 3.6 випливає таке твердження.

Наслідок 3.2. *Потенціал V у* (3.8) *з нелінійністю загального вигляду можна занулити за допомогою точкових перетворень тоді і тільки тоді, коли він є, з точністю до калібрувальних перетворень еквівалентності, дійснозначною функцією, лінійною по x.*

Зауваження 3.10. Дія групи $G^\sim_{\mathcal{V}}$ на f зводиться до множення на ненульову дійсну сталу і/або комплексного спряження. Отже, загальний випадок можна розбити на нескінченну кількість підкласів, причому кожний підклас утворено рівняннями з нелінійностями, пропорційними довільній фіксованій функції або спряженій до неї з дійсним сталим коефіцієнтом пропорційності, а тому він є нормалізованим. Більше того, можна навіть обмежити розгляд класом рівнянь з довільною фіксованою нелінійністю $f(\rho)$, вважаючи f визначеною з точністю до дійсного множника і/або комплексного спряження і розглядаючи як довільний елемент тільки V. Групу еквівалентності такого обмеженого класу $\mathcal{V}^f$, де $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho$ не є дійсною сталою, позначимо як $G^{\sim}_f$. Її елементи мають вигляд (3.5) з $T_t = 1$ ($T_t = \pm 1$, якщо f — дійснозначна функція) і $\Psi = 0$.

Підстановка зображення $S = f(\rho) + V(t,x)$ у класифікуючу умову (3.4) і наступне розщеплення при умові $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho \neq \mathrm{const} \in \mathbb{R}$ дають рівняння $\tau_t = 0$, $\zeta = 0$. У силу теореми 3.4 є вірним наступне твердження.

Лема 3.2. *Будь-який оператор Q з МАІ $A_f(V)$ рівняння* (3.8) *у випадку, коли $\rho f_{\rho\rho}/f_\rho$ не є дійсною сталою, можна зобразити у вигляді $Q = c_0\partial_t + G(\chi) + \lambda M$, де $\chi = \chi(t)$ і $\lambda = \lambda(t)$ — довільні гладкі дійснозначні функції від t, $c_0 = \mathrm{const}$. Крім того, коефіцієнти оператора Q мають задовольняти класифікуючу умову*

$$c_0 V_t + \chi V_x = \frac{1}{2}\chi_{tt} x + \lambda_t. \tag{3.10}$$

Ядром максимальних груп лиївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{V}^f$ є група $G^{\cap}_f = G^{\cap}_{\mathcal{V}} = G^{\cap}_{\mathcal{S}}$, а його алгебра Лі — $A^{\cap}_f = \langle M \rangle$.

Опишемо у загальних рисах ланцюжок тверджень, які приводять, з огляду на результати підрозділа 2.3, до повної групової класифікації класу $\mathcal{V}^f$.

Множина $A^{\cup}_f = \{Q = c_0\partial_t + G(\chi) + \lambda M\}$ є (нескінченно-вимірною) алгеброю Лі відносно звичайної дужки Лі векторних полів. Для будь-якого $Q \in A^{\cup}_f$ з $(c_0, \chi) \neq (0,0)$ можна знайти V, що задовольняє умову (3.10), тобто $A^{\cup}_f = \langle \bigcup_V A_f(V) \rangle$. Крім того, просторове віддзеркалення належить групі точкових симетрій певних рівнянь з $\mathcal{V}^f$. Таке ж твердження справедливе щодо вігнерівського віддзеркалення часу, якщо f — дійснозначна функція. Отже, $\mathcal{V}^f$ — сильно нормалізований клас диференціальних рівнянь для кожної фіксованої нелінійності f. (Це обґрунтовує введення класу $\mathcal{V}^f$, оскільки клас $\mathcal{V}'$ не є сильно нормалізованим.)

Група $G_f^\sim$ діє на $A_f^\cup$ і на множині рівнянь вигляду (3.10), а тому породжує відношення еквівалентності на цих множинах. Група автоморфізмів, індукована на $A_f^\cup$, і група еквівалентності, індукована на множині рівняння (3.10), ізоморфні групі $G_f^\sim/\hat{G}_S^\cap$. (Перетворення з $\hat{G}_S^\cap$ діють на (3.10) як калібрувальні перетворення еквівалентності і ними можна знехтувати.) Алгебра $A_f^\cap = \langle M\rangle$ співпадає з центром алгебри $A_f^\cup$ і є інваріантною відносно $G_f^\sim$.

Нехай A^i — MAI деякого рівняння з класу $\mathcal{V}^f$ і $\mathcal{V}^i = \{\, V \mid A_f(V) = A^i\}$, $i = 1, 2$. Оскільки клас $\mathcal{V}^f$ нормалізований, $\mathcal{V}^1 \sim \mathcal{V}^2 \bmod G_f^\sim$ тоді і тільки тоді, коли $A^1 \sim A^2 \bmod G_f^\sim$.

Повний список $G_f^\sim$-нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $A_f^\cup$ вичерпують $\langle\partial_t\rangle$, $\langle G(\chi)\rangle$, $\langle\lambda M\rangle$, де χ і λ — довільні фіксовані функції від t. (Існують додаткові еквівалентності в $\{\langle G(\chi)\rangle\}$ і $\{\langle\lambda M\rangle\}$, породжені зсувами по t і, якщо f дійснозначна, вігнерівським віддзеркаленням часу I_t.)

Теорема 3.7. *Повну множину нееквівалентних потенціалів у рівняннях з класів $\mathcal{V}^f$, що допускають розширення MAI, вичерпують такі потенціали:*

0. $V = V(t, x)$: $\langle M\rangle$;
1. $V = V(x)$: $M,\ \partial_t$;
2. $V = v(t)x^2 + iw(t)$: $M,\ G(\chi^1),\ G(\chi^2)$;
3. $V = 0$ або i: $M,\ \partial_t,\ G(1),\ G(t)$;
4. $V = x^2 + i\nu$: $M,\ \partial_t,\ G(e^{-2t}),\ G(e^{2t})$;
5. $V = -x^2 + i\nu$: $M,\ \partial_t,\ G(\cos 2t),\ G(\sin 2t)$.

Тут $v(t), w(t), \nu \in \mathbb{R}$, $(v_t, w_t) \neq (0, 0)$. Функції $\chi^1 = \chi^1(t)$ і $\chi^2 = \chi^2(t)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків ЗДР $\chi_{tt} = 4v\chi$.

Доведення. Припустимо, що рівняння (3.8) допускає розширення алгебри ліївської інваріантності для потенціалу V, тобто $A_f(V) \neq A_f^\cap$. Тоді існує оператор $Q = c_0\partial_t + G(\chi) + \lambda M \in A_f(V)$ такий, що $(c_0, \chi) \neq (0, 0)$.

Якщо $c_0 \neq 0$, то $\langle Q\rangle \sim \langle\partial_t\rangle \bmod G^{\sim}_f$, тобто отримаємо випадок 1. Дослідження додаткових розширень зводиться до наступного випадку.

Якщо $c_0 = 0$, то $\langle Q\rangle \sim \langle G(\chi)\rangle \bmod G^{\sim}_f$. З (3.10) випливає, що потенціал V має вигляд $V = v(t)x^2 + iw(t) + \tilde{w}(t)$, $\tilde{w} = 0 \bmod G^{\sim}_f$. При $(v_t, w_t) \neq (0, 0)$ отримуємо випадок 2, а за умови $v, w = \mathrm{const}$ — випадки 3, 4 і 5 залежно від знаку v. При $v = 0$ і $w = \mathrm{const}$ величину w можна звести за допомогою перетворень еквівалентності до 0 або 1. □

Зауваження 3.11. Маємо на увазі, що алгебри інваріантності для випадків 0, 1 і подібних їм з інших підкласів є максимальними, якщо ці випадки нееквівалентні відносно відповідної групи еквівалентності іншим, вужчим і з додатковим розширенням, випадкам з цього ж підкласу.

3.2.3. Логарифмічна модульна нелінійність. Розглянемо перший підклас $\mathcal{P}_0$ класу $\mathcal{V}$, введений у теоремі 3.6, який допускає розширення групи еквівалентності і груп ліївських симетрій порівняно з цілим класом $\mathcal{V}$. Його утворюють рівняння

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \sigma\psi \ln|\psi| + V(t, x)\psi = 0. \tag{3.11}$$

Тут σ — довільне ненульове комплексне число, V — довільна комплекснозначна функція змінних t і x. Цей підклас виокремлено з класу $\mathcal{S}$ умовами $S_{\rho t} = S_{\rho x} = 0$ і $(\rho S_\rho)_\rho = 0$, тобто $\psi S_{\psi t} + \psi^* S_{\psi^* t} = \psi S_{\psi x} + \psi^* S_{\psi^* x} = 0$, $(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})^2 S = 0$.

Рівняння Шрьодінгера з логарифмічною нелінійністю вперше запропоновано у [62–64] як можливі моделі нелінійної квантової механіки. Хоча цю можливість пізніше ставили під сумнів, ці рівняння завдяки хорошим математичним властивостям застосовують для опису нелінійних явищ у багатьох інших галузях фізики (теорії дисипативних систем, ядерній фізиці, оптиці і геофізиці), див., наприклад, посилання в [65]. Максимальні алгебри ліївської інваріантності таких рівнянь з нульовим потенціалом знайдено в [49], а їх точні розв'язки побудовано вже в [62–64]. Розв'язки для інших потенціалів також відомі [65].

Теорема 3.8. *Групу еквівалентності* $G^{\sim}_{\mathcal{P}_0}$ *класу* $\mathcal{P}_0$ *складають перетворення* (3.5), *де* $T_{tt}=0$. *Відповідні перетворення відносно* σ *і* V *мають вигляд*

$$\tilde V=\frac{\hat V}{|T_t|}+\frac{\varepsilon X_{tt}}{2|T_t|^{3/2}}x-\hat\sigma\frac{\Theta}{|T_t|}-\frac{1}{4}\frac{X_t^2}{T_t^2}+\frac{\Psi_t}{T_t}-i\frac{\Theta_t}{T_t},\qquad \tilde\sigma=\frac{\hat\sigma}{|T_t|}.$$

Крім того, клас $\mathcal{P}_0$ *нормалізований.*

Наслідок 3.3. *Потенціал* V *можна занулити в* (3.11) *за допомогою точкових перетворень тоді і тільки тоді, коли* $V_{xx}=0$ *і коефіцієнти при* x *у* V *є дійснозначними функціями змінної* t.

Зауваження 3.12. Дія групи $G^{\sim}_{\mathcal{P}_0}$ на σ зводиться до простого множення на ненульові дійсні сталі і/або комплексного спряження. Тому можна зафіксувати довільне значення σ, наприклад $|\sigma|=1$ і $\sigma_2\geq 0$, і вважати тільки V довільним елементом. Групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{P}_0^\sigma}$ відповідного обмеженого класу $\mathcal{P}_0^\sigma$ складають перетворення (3.5), де $T_t=1$ при $\sigma_2>0$ і $T_t=\pm1$ при $\sigma_2=0$. Тут і надалі $\sigma_1=\operatorname{Re}\sigma$, $\sigma_2=\operatorname{Im}\sigma$.

Теорема 3.9. *Повну множину нееквівалентних випадків розширення MAI у класах* $\mathcal{P}_0^\sigma$ *вичерпують такі потенціали:*

0. $V=V(t,x)$: $\quad M,\ I'$;
1. $V=V(x)$: $\quad M,\ I',\ \partial_t$;
2. $V=v(t)x^2+iw(t)x$: $\quad M,\ I',\ G'(\chi^1),\ G'(\chi^2)$;
3. $V=i\nu x$: $\quad M,\ I',\ \partial_t,\ G'(1),\ G'(t)$;
4. $V=\mu^2x^2+i\nu x$: $\quad M,\ I',\ \partial_t,\ G'(e^{-2\mu t}),\ G'(e^{2\mu t})$;
5. $V=-\mu^2x^2+i\nu x$: $\quad M,\ I',\ \partial_t,\ G'(\cos 2\mu t),\ G'(\sin 2\mu t)$.

Тут $v=v(t), w=w(t), \mu,\nu\in\mathbb{R}$, $(v_t,w_t)\neq(0,0)$, $\mu>0$, $\nu\geqslant 0$. *Дійснозначні функції* $\chi^1=\chi^1(t)$ *і* $\chi^2=\chi^2(t)$ *утворюють фундаментальну систему розв'язків ЗДР* $\chi_{tt}=4v\chi$. $G'(\chi)=G(\chi)-\tilde\chi I-\sigma_1\int e^{-\sigma_2 t}\tilde\chi\,dt\,M$, *де* $\tilde\chi=\int e^{\sigma_2 t}w\chi\,dt$, *а у випадках 3, 4 і 5 додатково* $w=\nu=\mathrm{const}$.

3.2.4. Степенева нелінійність. Найбільш цікавим (і водночас найскладнішим) з точки зору групового аналізу підкласом класу (3.8) є підклас, утворений рівняннями зі степеневою модульною нелінійністю

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \sigma|\psi|^\gamma\psi + V(t,x)\psi = 0. \tag{3.12}$$

Тут σ і γ — довільні ненульові комплексна і дійсна сталі відповідно, $\gamma \neq 0$, V — довільний комплекснозначний потенціал, залежний від t і x. Згідно теореми 3.6 цей підклас допускає розширення групи еквівалентності і груп ліївської симетрії своїх рівнянь порівняно з випадком нелінійності загального вигляду.

Можна розглядати весь клас $\mathcal{P}$ рівнянь вигляду (3.12), де γ пробігає $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Недоліком такого підходу є необхідність працювати з розширеною групою еквівалентності (у якій перетворення x залежать від γ, див. теорему 3.10), оскільки $\mathcal{P}$ — нормалізований клас тільки в розширеному сенсі. У силу наслідку 3.1, γ — інваріант усіх допустимих перетворень у надкласі (3.3), тобто рівняння з різними значеннями γ не переходять одне в інше. Отже, більш природно інтерпретувати (3.12) як сім'ю класів, параметризованих γ, і тоді фіксувати довільне значення γ. Вважатимемо далі, що γ фіксоване і позначимо клас рівнянь (3.12), відповідний фіксованому значенню γ, через $\mathcal{P}_\gamma$. (Див. також пункт 3.2.1, де клас $\mathcal{P}_\gamma$ введено вперше.) Його виокремлено з надкласу (3.3) накладанням умови $S_{\rho t} = S_{\rho x} = 0$, $(\rho S_\rho)_\rho = \gamma S_\rho$, тобто $\psi S_{\psi t} + \psi^* S_{\psi^* t} = \psi S_{\psi x} + \psi^* S_{\psi^* x} = 0$, $(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})^2 S = \gamma(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})S$.

Теорема 3.10. *Клас $\mathcal{P}_\gamma$, де $\gamma \neq 0$, є нормалізованим. Група еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{P}_\gamma}$ утворена перетвореннями* (3.5), *де $e^\Theta = \varkappa|T_t|^{-1/\gamma}$, $\varkappa > 0$. Відповідні перетворення відносно σ і V мають вигляд*

$$\tilde{V} = \frac{\hat{V}}{|T_t|} + \frac{2T_{ttt}T_t - 3{T_{tt}}^2}{16\varepsilon' {T_t}^3}x^2 + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2|T_t|^{1/2}}\left(\frac{X_t}{T_t}\right)_t x + \frac{\Psi_t}{T_t} - \frac{{X_t}^2}{4{T_t}^2} + i\gamma'\frac{T_{tt}}{{T_t}^2},$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\varkappa^\gamma}, \qquad \text{де} \qquad \gamma' = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{4}.$$

Наслідок 3.4. *Потенціал V у* (3.12) *можна перетворити у x-вільний тоді і тільки тоді, коли*

$$V = v(t)x^2 + u(t)x + \tilde{w}(t) + iw(t), \tag{3.13}$$

де v, u, $\tilde{w}$ і w — дійснозначні функції від t. Зокрема, якщо $\gamma = 4$, то будь-який дійснозначний потенціал квадратичний по x можна зробити нульовим. У випадку $\gamma \neq 4$ потенціал (3.13) *еквівалентний нулю тоді і тільки тоді, коли* $16(\gamma')^2 v = 2\varepsilon\gamma' w_t + w^2$.

Зауваження 3.13. З теореми 3.10 випливає, що будь-яке точкове перетворення в $\mathcal{P}_\gamma$ діє на σ тільки як множення з ненульовими дійсними сталими і/або комплексне спряження. Отже, можна далі вважати, що σ — фіксоване при припущеннях, що $|\sigma| = 1$ і $\sigma_2 \geq 0$, і розглядати тільки V як довільний елемент. Група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{P}^\sigma_\gamma}$ відповідного обмеженого класу $\mathcal{P}^\sigma_\gamma$ утворена перетвореннями (3.5), де $T_t > 0$, якщо $\sigma_2 > 0$ і $\varkappa = 1$. Тут і надалі $\sigma_1 = \operatorname{Re}\sigma$, $\sigma_2 = \operatorname{Im}\sigma$.

Теорема 3.11. *Повну множину нееквівалентних випадків розширення MAI у класах $\mathcal{P}^\sigma_\gamma$ вичерпують такі потенціали (тут $W(t), \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, для кожного значення V наведено базис алгебри $A_\gamma(V)$):*

0. $V = V(t, x)$: $\quad M$;
1. $V = iW(t)$: $\quad M,\ \partial_x,\ G(t)$;
2. $V = 2i(\gamma' t + \nu)(t^2 + 1)^{-1}$: $\quad M,\ \partial_x,\ G(t),\ D^\gamma(t^2 + 1)$;
3. $V = i\nu t^{-1}$, $\nu \neq 0, 2\gamma'$: $\quad M,\ \partial_x,\ G(t),\ D^\gamma(t)$;
4. $V = i$: $\quad M,\ \partial_x,\ G(t),\ \partial_t$;
5. $V = 0$: $\quad M,\ \partial_x,\ G(t),\ \partial_t,\ D^\gamma(t)$ та, при $\gamma = 4$, $D^\gamma(t^2)$;
6. $V = V(x)$: $\quad M,\ \partial_t$;
7. $V = (\alpha + i\beta)x^{-2}$: $\quad M,\ \partial_t,\ D^\gamma(t)$ та, при $\gamma = 4$, $D^\gamma(t^2)$.

Зауваження 3.14. На множині потенціалів $i\nu t^{-1}$, $\nu \in \mathbb{R}$, діє дискретне перетворення еквівалентності $\mathcal{T}$ вигляду (3.5) з $T = -t^{-1}$, $X = 0$, $\Psi = 0$, $e^\Theta = |t|^{2/\gamma}$. Воно перетворює ν наступним чином: $\nu \to 2\gamma' - \nu$. Для того, щоб випадки класифікації були повністю нееквівалентні, вважатимемо додатково, що $\nu \geq \gamma'$ (або $\nu \leq \gamma'$) у випадку 3. Оскільки $I_t \in G^{\sim}_{\gamma}$ при $\sigma_2 = 0$, то можна вважати $\nu \geq 0$ у випадку 2 і $\beta \geq 0$ у випадку 7. Крім того, $\mathcal{T}$ — дискретне перетворення симетрії для випадку 3 ($\nu = \gamma'$), а також (як границя неперервних перетворень, породжених оператором $D^{\gamma}(t^2+1)$) перетворення симетрії для випадку 2.

Зауваження 3.15. При доведенні теореми 3.11 виникає підклас $\mathcal{W}$ рівнянь з $\mathcal{P}^{\sigma}_{\gamma}$ з чисто уявними потенціалами, що залежать тільки від t. Підклас $\mathcal{W}$ також сильно нормалізований і, більш того, його група еквівалентності скінченнопараметрична. Це дає нетривіальний приклад (сильно) *нормалізованого класу, група еквівалентності якого має лише скінченну кількість параметрів.*

Зауваження 3.16. Тільки для степеневої нелінійності (клас $\mathcal{P}_{\gamma}$ з $\gamma \neq 0$) будь-яке розширення MAI еквівалентне тому, що максимальна ліївська алгебра інваріантності є підалгеброю скінченновимірної частини $\mathrm{sch}(1,1)$ MAI $(1+1)$-вимірного вільного рівняння Шрьодінгера. Всі рівняння з класу $\mathcal{F}'$, тобто рівняння Шрьодінгера у загальному вигляді $i\psi_t + \psi_{xx} + F(t,x,\psi,\psi^*) = 0$, які додатково є інваріантами відносно підалгебри алгебри $\mathrm{sch}(1,1)$, було побудовано в [83]. Зауважимо, що в багатовимірному випадку аналогічні рівняння не вичерпують навіть розширення випадків у клас кубічних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами (див. наступний підрозділ).

3.3. Кубічні $(1+2)$-вимірні рівняння Шрьодінгера з потенціалами

Щоб продемонструвати ефективність запропонованих методів також у розмірностях, вищих за 1+1, розглянемо клас $\mathcal{C}$ (1+2)-вимірних кубічних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами

$$i\psi_t + \psi_{11} + \psi_{22} + |\psi|^2\psi + V(t,x)\psi = 0. \tag{3.14}$$

Тут і надалі $x = (x_1, x_2)$, V — довільний комплекснозначний потенціал, залежний від t і x. Індекси j і k змінюються від 1 до 2. Проблему групової класифікації вирішено для $\mathcal{C}$, спираючись на нормалізаційні властивості цього класу і його підкласів.

Теорема 3.12. *Клас $\mathcal{C}$ є сильно нормалізованим. Група еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{C}}$ цього класу складається з перетворень*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{t} = T, \quad \tilde{x} = |T_t|^{1/2}Ox + X,\\
&\tilde{\psi} = |T_t|^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{8}\frac{T_{tt}}{|T_t|}\,x_jx_j + \frac{i}{2}\frac{\varepsilon_T X^k_t}{|T_t|^{1/2}}\,O^{kj}x_j + i\Psi\right)\hat{\psi},\\
&\tilde{V} = \frac{\hat{V}}{|T_t|} + \frac{2T_{ttt}T_t - 3{T_{tt}}^2}{16\varepsilon_T {T_t}^3}x_jx_j + \frac{\varepsilon_T}{2}\left(\frac{X^k_t}{T_t}\right)_t\frac{O^{kj}x_j}{|T_t|^{1/2}} + \frac{\Psi_t}{T_t} - \frac{X^j_tX^j_t}{4{T_t}^2}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Тут T, $X = (X^1, X^2)$ і Ψ — довільні гладкі дійснозначні функції змінної t, $T_t \neq 0$, $\varepsilon_T = \operatorname{sign} T$ і $O = (O^{jk})$ — довільна стала двовимірна ортогональна матриця.

Будь-який оператор Q з MAI $A(V)$ рівняння (3.14) з потенціалом V можна зобразити у вигляді $Q = D(\tau) + \kappa J + G(\bar{\sigma}) + \chi M$, де

$$
\begin{aligned}
&D(\tau) = \tau\partial_t + \frac{1}{2}\,\tau_t x_j\partial_j + \frac{1}{8}\,\tau_{tt}x_jx_jM - \frac{1}{2}\tau_t I,\\
&G(\bar{\sigma}) = \sigma^j\partial_j + \frac{1}{2}\sigma^j_t x_jM, \quad J = x_1\partial_2 - x_2\partial_1,\\
&M = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \quad I = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*},
\end{aligned}
$$

κ — стала, τ, $\bar{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$ та χ — гладкі дійснозначні функції змінної t. Крім того, коефіцієнти в Q мають задовольняти класифікуючу умову

$$
\tau V_t + \left(\frac{\tau_t}{2}x_j + \kappa\varepsilon_{jk}x_b + \sigma^j\right)V_j + \tau_t V = \frac{\tau_{ttt}}{8}x_jx_j + +\frac{\sigma^j_{tt}}{2}x_j + \chi_t, \tag{3.16}
$$

де $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} = 1$,

Оператори $D(\tau)$, J, $G(\bar{\sigma})$ і χM, де τ, $\bar{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2)$ і χ пробігають множину гладких функцій від t, породжують нескінченно-вимірну алгебру

Лі $A^{\cup}_{\mathcal{C}}$ зі звичайною дужкою Лі векторних полів. Ненульові комутаційні співвідношення між базисними операторами алгебри $A^{\cup}_{\mathcal{C}}$ такі:

$$
\begin{aligned}
&[D(\tau^1), D(\tau^2)] = D(\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t), \quad [D(\tau), G(\bar\sigma)] = G\Big(\tau\bar\sigma_t - \frac{1}{2}\tau_t\bar\sigma\Big),\\
&[D(\tau), \chi M] = \tau\chi_t M, \qquad [J, G(\bar\sigma)] = G(\sigma^2, -\sigma^1),\\
&[G(\bar\sigma^1), G(\bar\sigma^2)] = \frac{1}{2}(\sigma^{1j}\sigma^{2j}_t - \sigma^{2j}\sigma^{1j}_t)M.
\end{aligned}
$$

Отже, підпростори $\langle\chi M\rangle$, $\langle G(\bar\sigma), \chi M\rangle$, $\langle J, G(\bar\sigma), \chi M\rangle$ і $\langle D(\tau), G(\bar\sigma), \chi M\rangle$ — це ідеали, а підпростір $\langle D(\tau)\rangle$ — підалгебра алгебри $A^{\cup}_{\mathcal{C}}$.

Вважаючи потенціал V довільним і розщеплюючи (3.16) по V, V_t і V_j, отримаємо, що алгеброю Лі ядра $G^{\cap}_{\mathcal{C}}$ максимальних груп ліївської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{C}$ є алгебра $A^{\cap}_{\mathcal{C}} = \langle M\rangle$. Повна група $G^{\cap}_{\mathcal{C}}$ співпадає з проекцією на (t, x, ψ) нормальної підгрупи $\hat G^{\cap}_{\mathcal{C}}$ групи $G^{\sim}_{\mathcal{C}}$, яка складається з перетворень (3.15), що діють тотожно на V (тобто $T = t$, $X = \Psi_t = 0$ і O — одинична матриця).

Для будь-якого фіксованого значення довільного елементу V з класифікуючої умови (3.16) випливає, зокрема, лінійна система ЗДР на коефіцієнти τ, σ^j і χ загального вигляду

$$
\begin{aligned}
&\tau_{ttt} = g^{00}\tau_t + g^{01}\tau + g^{0,j+1}\sigma^j + g^{04}\chi,\\
&\sigma^j_{tt} = g^{j0}\tau_t + g^{j1}\tau + g^{j,j+1}\sigma^j + g^{j4}\chi,\\
&\chi_t = g^{40}\tau_t + g^{41}\tau + g^{4,j+1}\sigma^j + g^{44}\chi,
\end{aligned}
$$

де g^{pq}, $p, q = \overline{1,4}$, — функції від t, визначені за V. Отже, для будь-якого V очевидно маємо

$$
\begin{aligned}
&\dim A(V) \leqslant 9,\ \ A(V)\cap\langle\chi M\rangle = \langle M\rangle,\ \ \dim A(V)\cap\langle G(\bar\sigma), \chi M\rangle \leqslant 5,\\
&\dim \mathrm{pr}_{\langle D(\tau)\rangle} A(V)\cap\langle D(\tau), G(\bar\sigma), \chi M\rangle \leqslant 3.
\end{aligned}
$$

Перерахуємо спочатку всі можливі нееквівалентні випадки розширення МАІ для класу $\mathcal{C}$, тоді стисло опишемо процедуру побудови наведеного класифікаційного списку, після чого надамо додаткові пояснення щодо випадків розширення.

Надалі U — довільна комплекснозначна функція своїх аргументів або довільна комплексна стала, інші функції і сталі є дійснозначними,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg} x_2/x_1,$$
$$\omega = x_1 \cos t + x_2 \sin t, \quad \theta = -x_1 \sin t + x_2 \cos t.$$

Кожний елемент списку класифікації складається зі значення довільного елементу V і базису МАІ $A(V)$ відповідного рівняння (3.14). Більш точно, ці алгебри є максимальними для значень потенціалу V, які є $G^{\sim}_{\mathfrak{C}}$-нееквівалентними таким, що мають додаткове розширення МАІ. У випадках, коли асоційовані умови нееквівалентності допускають прості формулювання, їх явно вказано одразу після значення потенціалу.

0. $V = V(t,x)\colon \quad M.$
1. $V = U(x_1,x_2)\colon \quad M,\ D(1).$
2. $V = U(\omega,\theta)\colon \quad M,\ D(1)+J.$
3. $V = |x|^{-2}U(\zeta)$, $\zeta = \phi - 2\beta \ln|x|$, $\beta > 0\colon \quad M,\ D(1),\ D(t)+\beta J.$
4. $V = |x|^{-2}U(\phi)\colon \quad M,\ D(1),\ D(t),\ D(t^2).$
5. $V = U(t,|x|) + \varepsilon\phi$, $\varepsilon \in \{0,1\}\colon \quad M,\ J+\varepsilon tM.$
6. $V = U(|x|) + \varepsilon\phi$, $\varepsilon \in \{0,1\}\colon \quad M,\ J+\varepsilon tM,\ D(1).$
7. $V = |x|^{-2}U$, $U \neq 0\colon \quad M,\ J,\ D(1),\ D(t),\ D(t^2).$
8. $V = U(t,x_1)\colon \quad M,\ G(0,1),\ G(0,t).$
9. $V = U(\zeta)$, $\zeta = x_1\colon \quad M,\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(1).$
10. $V = t^{-1}U(\zeta)$, $\zeta = |t|^{-1/2}x_1\colon \quad M,\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(t).$
11. $V = (t^2{+}1)^{-1}U(\zeta)$, $\zeta = (t^2{+}1)^{-1/2}x_1\colon \quad M,\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(t^2{+}1).$
12. $V = x_1^{-2}U$, $U \neq 0\colon \quad M,\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(1),\ D(t),\ D(t^2).$
13. $V = U(t,\omega) + \frac{1}{4}(h_t t - h)h^{-1}\theta^2 + h_t h^{-1}\omega\theta$, $h = h(t) \neq 0\colon$
    $M,\ G(h\cos t, h\sin t).$
14. $V = U(\omega) + \frac{1}{4}(\alpha^2-1)\theta^2 + \alpha\omega\theta$, $\alpha \neq 0\colon$
    $M,\ D(1)+J,\ G(e^{\alpha t}\cos t, e^{\alpha t}\sin t).$

15. $V = U(\omega) - \frac{1}{4}\theta^2 + \beta\theta\colon\quad M,\ D(1) + J,\ G(\cos t, \sin t) + \beta t M.$

16. $V = h^{jk}(t)x_jx_b + ih^{00}(t)$, $h^{12} = h^{21}$, $(h^{12} \neq 0 \vee h^{11} \neq h^{22})$:
 $M,\ G(\bar\sigma^p),\ p = \overline{1,4}$, де $\{\bar\sigma^p = (\sigma^{p1}(t), \sigma^{p2}(t)),\ p = \overline{1,4}\}$ — фундаментальна множина розв'язків системи $\bar\sigma_{tt} = H\bar\sigma$, $H = (h^{jk})$.

17. $V = \frac{1}{4}\alpha x_1^2 + \frac{1}{4}\beta x_2^2 + i\gamma$, $\alpha \neq \beta$:
 $M,\ G(\sigma^{11}, 0),\ G(\sigma^{21}, 0),\ G(0, \sigma^{12}),\ G(0, \sigma^{22}),\ D(1)$,
 де функції σ^{11} і σ^{21} (σ^{12} і σ^{22}) від t утворюють фундаментальну множину розв'язків рівняння $\sigma_{tt} = \alpha\sigma$ ($\sigma_{tt} = \beta\sigma$).

18. $V = \frac{1}{4}\alpha\omega^2 + \frac{1}{4}\beta\theta^2 + i\gamma$, $\alpha \neq \beta$:
 $M,\ G(\sigma^{p1}\cos t + \sigma^{p2}\sin t, -\sigma^{p1}\sin t + \sigma^{p2}\cos t),\ p = \overline{1,4},\ D(1) + J$,
 де $\{\bar\sigma^p = (\sigma^{p1}(t), \sigma^{p2}(t)),\ p = \overline{1,4}\}$ — фундаментальна множина розв'язків системи $\sigma^1_{tt} - 2\sigma^2_t = (\alpha+1)\sigma^1$, $\sigma^2_{tt} + 2\sigma^1_t = (\beta+1)\sigma^2$.

19. $V = iW(t)\colon\ M,\ J,\ G(1,0),\ G(t,0),\ G(0,1),\ G(0,t).$

20. $V = i\colon\ M,\ J,\ G(1,0),\ G(t,0),\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(1).$

21. $V = i\nu t^{-1}$, $\nu > 0\colon\ M,\ J,\ G(1,0),\ G(t,0),\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(t).$

22. $V = 2i\nu(t^2+1)^{-1}$, $\nu > 0$:
 $M,\ J,\ G(1,0),\ G(t,0),\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(t^2+1).$

23. $V = 0\colon\ M,\ J,\ G(1,0),\ G(t,0),\ G(0,1),\ G(0,t),\ D(1),\ D(t),\ D(t^2).$

Загальний випадок (випадок 0) включено в список для повноти.

Щоб виокремити основні випадки класифікації, введемо $G^{\sim}_{\mathcal{C}}$-інваріантні величини, залежні від довільного елементу V:

$$r_\sigma = \operatorname{rank}\{\bar\sigma(t) \mid \exists\chi(t)\colon G(\bar\sigma) + \chi M \in A(V)\} \in \{0,1,2\},$$
$$r_J = \dim(\operatorname{pr}_{\langle J\rangle} A(V) \cap \langle J, G(\bar\sigma), \chi M\rangle) \in \{0,1\}.$$

Нехай $r_\sigma = r_J = 0$. Множина $S^\tau(V) = \{\tau(t) \mid \exists\kappa, \bar\sigma(t), \chi(t)\colon D(\tau) + {}+ \kappa J + G(\bar\sigma) + \chi M \in A(V)\}$ є лінійним простором, замкнутим відносно звичайної дужки Пуассона функції, тобто $\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t \in S^\tau(V)$, якщо $\tau^1, \tau^2 \in S^\tau(V)$. $\dim S^\tau(V) \leqslant 3 < \infty$. З класифікації Лі реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій випливає, що з точністю до локальних диффеоморфізмів змінної t $S^\tau(V) \in \{\langle 1\rangle, \langle 1,t\rangle, \langle 1,t,t^2\rangle\}$. Тому з точністю до $G^\sim_{\mathcal{C}}$-еквівалентності базис алгебри $A(V)$ може включати, додатково до спільного оператора M, одну з множин операторів $\{D(1)\}$, $\{D(1)+J\}$, $\{D(1), D(t)+J\}$, $\{D(1), D(t), D(t^2)\}$, що відповідає випадкам 1, 2, 3 і 4. Алгебра, базис якої представлено у випадку 3 (випадоку 4), є максимальною алгеброю ліївської інваріантності тоді і тільки тоді, коли $\beta \neq 0$ і $U_\zeta \neq 0$ ($U_\phi \neq 0$).

Припустимо, що $r_\sigma = 0$ і $r_J = 1$. Тоді алгебра $A(V)$ містить оператор $J + G(\bar\sigma) + \chi M$, де $\bar\sigma = 0 \bmod G^\sim_{\mathcal{C}}$. Загальний вигляд потенціалу V, для якого асоційоване рівняння з класу $\mathcal{C}$ допускає оператор $J + \chi M$, є $V = U(t,|x|) + h(t)\phi$. Також маємо $(|x|^{-1}U_{|x|})_{|x|} \neq 0$ або $h \neq 0$, оскільки інакше $r_\sigma > 0$. Підкласи класу $\mathcal{C}$, відповідні множинам $\{V = U(t,|x|) + h(t)\phi \mid (|x|^{-1}U_{|x|})_{|x|} \neq 0\}$ і $\{V = U(t,|x|) + h(t)\phi \mid h \neq 0\}$, а також їх об'єднання та перетин нормалізовані. Групи еквівалентності цих підкласів ізоморфні і складаються з перетворень вигляду (3.15) з $X = 0$. Можливі нееквівалентні розширення вичерпуються випадками 5–7.

Аналогічно, випадки 8–15 виокремлено умовами $r_\sigma = 1$ і $r_J = 0$. У випадках 8–12 додатково виконується наступна $G^\sim_{\mathcal{C}}$-інваріантна умова: якщо оператор $G(\bar\sigma) + \chi M$ належить $A(V)$, то $\sigma^1_t\sigma^2 = \sigma^1\sigma^2_t$, тобто набір $\bar\sigma$ пропорційний набору сталих. Подальший розгляд у цьому спеціальному випадку спрощується завдяки факту, що будь-який фіксований оператор з цією властивістю є $G^\sim_{\mathcal{C}}$-еквівалентним оператору $G(0,1)$. Якщо $G(0,1) \in A(V)$, то потенціал V має вигляд $V = U(t,x_1)$ і $G(0,t) \in A(V)$. Підклас класу $\mathcal{C}$, відповідний множині $\{V = U(t,x_1) \mid U_{111} \neq 0\}$, нормалізований. Його групу еквівалентності індуковано перетвореннями вигляду (3.15) з T дробово лінійним по t і $X = c_1T + c_0$, де c_1 і c_0 — довільні сталі. Отже, нееквівалентні розширення у цьому підкласі вичерпуються нееквівалентними підалгебрами алгебри $\langle D(1), D(t), D(t^2)\rangle$, а саме, підалгебрами $\langle D(1)\rangle$, $\langle D(t)\rangle$, $\langle D(t^2+1)\rangle$, $\langle D(1), D(t)\rangle$ і $\langle D(1), D(t), D(t^2)\rangle$.

Елементи базису, представлені у випадках 9–11, дають MAI для відповідних значень довільного елементу V тоді і тільки тоді, коли $U_{\zeta\zeta\zeta} \neq 0$ і $(\zeta^2 U)_\zeta \neq 0$. Випадки 13–15 виникають за умови, що $\sigma^1_t\sigma^2 \neq \sigma^1\sigma^2_t$ для оператору $G(\bar\sigma) + \chi M$ з $A(V)$. Тоді $\dim A(V) \cap \langle G(\bar\sigma), \chi M\rangle = 2$, оскільки $r_\sigma = 1$. Більш того, кожен оператор з доповнення до $\langle G(\bar\sigma), \chi M\rangle$ у $A(V)$ має нетривіально включати обидва оператора $D(\tau)$ і J, тобто можливі тільки одновимірні розширення.

Значення (r_σ, r_J), які ще не розглянуто, — це $(2, 0)$, $(1, 1)$ і $(2, 1)$. Оскільки $[J, G(\bar\sigma)] = G(\sigma^2, -\sigma^1)$, випадок $r_\sigma = r_J = 1$ неможливий, тому обов'язково маємо $r_\sigma = 2$, а це еквівалентно умові, що

$$V = h^{jk}(t)x_j x_k + h^{0k}(t)x_b + ih^{00}(t) + \tilde h^{00}(t),$$

де всі функції h дійснозначні, $h^{12} = h^{21}$. Позначимо через $\mathcal{C}_\mathrm{q}$ підклас рівнянь із $\mathcal{C}$ з такими значеннями довільного елементу V. Підклас $\mathcal{C}_\mathrm{q}$ нормалізований, причому його можна розбити умовами $r_J = 0$ і $r_J = 1$ на два нормалізованих підкласи $\mathcal{C}^0_\mathrm{q}$ і $\mathcal{C}^1_\mathrm{q}$, а групи еквівалентності підкласів $\mathcal{C}_\mathrm{q}$, $\mathcal{C}^0_\mathrm{q}$ і $\mathcal{C}^1_\mathrm{q}$ співпадають з групою еквівалентності $G^\sim_\mathcal{C}$ всього класу $\mathcal{C}$. У термінах функції h підклас $\mathcal{C}^1_\mathrm{q}$ ($\mathcal{C}^0_\mathrm{q}$) виокремлено умовою $h^{12} = h^{21} = 0 \wedge$ $\wedge\, h^{11} = h^{22}$ (її запереченням).

Регулярний випадок класифікації для класу $\mathcal{C}^0_\mathrm{q}$ — це випадок 16. Тільки одновимірні розширення, що обов'язково залучають оператори вигляду $D(\tau)$, можливі у цьому класі (випадки 17 і 18).

Будь-яке рівняння з класу $\mathcal{C}^1_\mathrm{q}$ є $G^\sim_\mathcal{C}$-еквівалентним рівнянню з того ж класу, чий потенціал має вигляд $V = iW(t)$ з дійснозначною функцією $W = W(t)$. Підклас $\hat{\mathcal{C}}^1_\mathrm{q}$, що відповідає множині $\{V = iW(t)\}$, є нормалізованим. Регулярним випадком класифікації для цього підкласу є випадок 19. Група еквівалентності класу $\hat{\mathcal{C}}^1_\mathrm{q}$ складається з перетворень вигляду (3.15), де T — дробово-лінійна по t, $X^j = c^j_1 T + c^j_0$, $\Psi = \frac14 c^j_1 c^j_1 T + d_0$, а c^j_1, c^j_0 і d_0 — довільні сталі. Отже, нееквівалентні розширення в $\hat{\mathcal{C}}^1_\mathrm{q}$ вичерпуються нееквівалентними підалгебрами алгебри $\langle D(1), D(t), D(t^2)\rangle$, а саме, підалгебрами $\langle D(1)\rangle$, $\langle D(t)\rangle$,

$\langle D(t^2+1)\rangle$ і $\langle D(1), D(t), D(t^2)\rangle$ (випадки 20, 21, 22 і 23 відповідно). Алгебра $\langle D(1), D(t)\rangle$ не дає власного розширення, оскільки інваріантність рівняння з $\hat{\mathcal{C}}^1_{\mathrm{q}}$ відносно $D(1)$ і $D(t)$ приводить до умови $V=0$, а отже і інваріантності відносно $D(t^2)$. На множині потенціалів $i\nu t^{-1}$, $\nu\in\mathbb{R}$, існує дискретне перетворення еквівалентності $\mathcal{T}$, яке має вигляд (3.15) з $T=-t^{-1}$, $X^j=0$, $\Psi=0$. Його дія на ν еквівалентна зміні знаку ν. Аналогічно, вігнерівське відзеркалення часу I_t індукує заміну знаку ν у потенціалі $i\nu(t^2+1)^{-1}$. Отже, з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{C}}$-еквівалентності можна покласти $\nu>0$ у випадках 21 і 22.

Зауваження 3.17. Різні потенціали, що відповідають одному випадку класифікації, можуть бути еквівалентними. Цей тип еквівалентності можна використати для додаткового зв'язування параметрів. Зокрема, можна покласти $h^{11}+h^{22}=0$ у випадку 16. У випадках 17 і 18 параметри α і β можна масштабувати з точністю до перестановки, тобто можна вважати, що або $\alpha=1$ і $\beta\in[-1;1)$, або $\alpha=-1$ і $\beta\in(-1;1)$.

3.4. Рівняння Шрьодінгера з нелінійностями, залежними від ψ і ψ^*

Групову класифікацію нелінійних рівнянь Шрьодінгера вигляду

$$i\psi_t+\Delta\psi+F(\psi,\psi^*)=0 \tag{3.17}$$

для однієї комплексної функції $\psi=\psi(t,x)$ від $n+1$ дійсних незалежних змінних $t=x_0$ і $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $n\geqslant 1$, за довільним елементом — гладкою функцією $F=F(\psi,\psi^*)$ — можна виконати, використовуючи метод розгалуженого розщеплення, який можна вважати розвинутою версією стандартного методу групової класифікації.

Цей підхід ґрунтується на дослідженні сумісності класифікуючої системи рівнянь на довільні елементи у всіх можливих випадках, що виникають, і розщепленні за довільними елементами та їх похідними на многовиді розв'язків класифікуючої системи рівнянь з уникненням її інтегрування у загальному випадку.

Результат класифікації. Нехай оператор $Q = \xi^t\partial_t + \xi^j\partial_j + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}$ породжує однопараметричну групу симетрії рівняння (3.17). Тут η — комплекснозначна, а ξ^t, ξ^j — дійснозначні функції змінних t, x, ψ, ψ^*. Тоді з інфінітезімального критерію інваріантності випливають такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^t_\psi = \xi^t_{\psi^*} = \xi^t_j = \xi^j_\psi = \xi^j_{\psi^*} = \eta_{\psi^*} = 0, \quad \eta_{\psi\psi} = 0, \tag{3.18}$$

$$\xi^j_k + \xi^k_j = 0,\ j \neq k, \quad 2\eta_{j\psi} = i\xi^j_t, \quad 2\xi^1_1 = \cdots = 2\xi^n_n = \xi^t_t, \tag{3.19}$$

$$\eta F_\psi + \eta^* F_{\psi^*} + (\xi^t_t - \eta_\psi)F + i\eta_t + \eta_{jj} = 0. \tag{3.20}$$

Інтегруючи рівняння (3.18) і (3.19), отримаємо наступні вирази:

$$\xi^t = \xi^t(t), \quad \xi^j = \frac{1}{2}\xi^t_t(t) + \kappa_{jk}x_k + \chi^j(t),$$

$$\eta = \eta^1(t,x)\psi + \eta^0(t,x), \quad \eta^1 := \frac{i}{8}\xi^t_{tt}(t)x_jx_j + \frac{i}{2}\chi^j_t(t)x_j + \zeta(t),$$

де $\kappa_{jk} = -\kappa_{kj} = \mathrm{const}$, η^0, ζ — комплекснозначні, а χ^j — дійснозначні функції своїх змінних.

Рівняння (3.20) є класифікуючою умовою, що дає подальші обмеження на коефіцієнти оператора Q залежно від вигляду функції F. Якщо не фіксувати функцію F, то, розщеплюючи в (3.20) за "змінними" F, F_ψ, F_{ψ^*}, отримаємо $\eta = 0$, $\xi^t_t = 0$, $\chi^j_t = 0$. Отже, алгебра Лі $A^\cap$ ядра основних груп рівнянь з класу (3.17) є прямою сумою алгебр Евкліда в просторі змінної t та в просторі змінних x, тобто $A^\cap = e(1) \oplus e(n) = \langle\partial_t\rangle \oplus \langle\partial_j,\ J_{jk} = x_j\partial_k - x_k\partial_j\rangle$.

З теореми 3.2 випливає, що перетворення з групи еквівалентності $G^\sim$ класу (3.17), які нетривіально діють на F, мають вигляд

$$\tilde t = \varepsilon\delta^2 t, \quad \tilde x = \delta x, \quad \tilde\psi = \alpha\hat\psi + \beta, \quad \tilde F = \delta^{-2}\alpha\hat F, \tag{3.21}$$

де $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$ і дашок над комплексною величиною позначає тотожне перетворення (комплексне спряження) при

$\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$). Надалі вважаємо $\varepsilon = 1$, тобто вігнерівське віддзеркалення часу при класифікації не використовуємо. Його застосування дозволяє накласти лише обмеження на знак уявної частини одного параметра у виокремлених при класифікації значеннях довільного елементу F.

Звуження класу (3.17) може призводити до появи перетворень еквівалентності, відмінних від (3.21) (див. доведення).

Усі можливі випадки розширення МАІ рівняння (3.17) з точністю до перетворень еквівалентності (3.21) та їх умовних розширень вичерпуються перерахованими в табл. 3.1 і табл. 3.2 випадками, для яких наведено лише базисні елементи з доповнення до $A^{\cap}$. При конкретизації функції f у кожному з випадків, наведених у табл. 3.1, можливе подальше розширення МАІ, що відображено у табл. 3.2. Для запису результатів класифікації зручно користуватися амплітудою $\rho = |\psi|$ та фазою $\varphi = \frac{i}{2}\ln(\psi^*/\psi)$ функції ψ. Введемо позначення:

$$
\begin{aligned}
&I := \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*} = \rho\partial_\rho, \quad M := i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) = \partial_\varphi,\\
&D := t\partial_t + \frac{1}{2}x_j\partial_j, \quad G_j := t\partial_j + \frac{1}{2}x_jM,\\
&\Pi := t^2\partial_t + tx_j\partial_j - \frac{n}{2}tI + \frac{1}{4}x_jx_jM.
\end{aligned}
$$

Результат класифікації для підкласу з модульними нелінійностями. У класі (3.17) виокремлюється підклас галілей-інваріантних рівнянь з нелінійностями $F = f(|\psi|)\psi$, тобто рівнянь вигляду

$$i\psi_t + \Delta\psi + f(|\psi|)\psi = 0. \tag{3.22}$$

Клас (3.22) включає як частинні випадки відомі рівняння: вільне рівняння Шрьодінгера ($F = 0$), інтегровне (при $n = 1$) рівняння Шрьодінгера з кубічною нелінійністю ($F = \sigma|\psi|^2\psi$), рівняння Шрьодінгера з логарифмічною нелінійністю ($F = \sigma\ln|\psi|\,\psi$; при $\sigma \in \mathbb{R}$ еквівалентно рівнянню, запропонованому в [62, 63]) та ін. Симетрійні властивості таких рівнянь досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад, [42, 46, 104, 130]).

Таблиця 3.1

Випадки розширення, коли вираз для функції F містить довільну комплекснозначну гладку функцію f однієї дійсної змінної Ω. Тут γ, γ_1, γ_2, δ, δ_1, δ_2 — дійсні сталі, $\theta=\theta(x)\in\mathbb{R}$ — довільний розв'язок рівняння $\Delta\theta=\delta_2\theta$.

	F	Ω	Оператори розширення
1.1	$f(\Omega)\lvert\psi\rvert^{\gamma_1}e^{\gamma_2\varphi}\psi,\ \gamma_1^2+\gamma_2^2\neq 0$	$\lvert\psi\rvert^{\gamma_2}e^{-\gamma_1\varphi}$	$(\gamma_1^2+\gamma_2^2)D-\gamma_1 I-\gamma_2 M$
1.2	$(f(\Omega)+(\gamma-i)\delta\ln\lvert\psi\rvert)\psi$	$\lvert\psi\rvert^{\gamma}e^{-\varphi}$	$e^{\delta t}(I+\gamma M)$
1.3	$(f(\Omega)+\delta\varphi)\psi,\ \delta\neq 0$	$\lvert\psi\rvert$	$e^{\delta t}M,\ e^{\delta t}(\partial_j+\frac{1}{2}\delta x_j M)$
1.4	$f(\Omega)\psi$	$\lvert\psi\rvert$	$M,\ G_j$
1.5	$f(\Omega)e^{i\psi}$	$\mathrm{Re}\,\psi$	$D+i(\partial_\psi-\partial_{\psi^*})$
1.6	$f(\Omega)+i(\delta_1+i\delta_2)\psi$	$\mathrm{Re}\,\psi$	$ie^{-\delta_1 t}\theta(x)(\partial_\psi-\partial_{\psi^*})$

У той же час не було робот, в яких би містилися вичерпні результати групової класифікації в класі (3.22). Виокремимо їх з результатів попереднього підрозділу.

Теорема 3.13. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь з класу* (3.22) *є розширена алгебра Галілея* $A^{\cap}_{\mathrm{mod}}=\tilde{g}(1,n)=\langle\partial_t,\partial_j,J_{jk},G_j,M\rangle$. *Повний набір нееквівалентних (відносно точкових перетворень) випадків розширення МАІ рівнянь вигляду* (3.22) *вичерпується такими випадками (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до* $A^{\cap}_{\mathrm{mod}}$*;* $\sigma\in\mathbb{C}$, $\sigma\neq 0$, $|\sigma|=1 \bmod G^{\sim}$*;* $\gamma,\delta_1,\delta_2\in\mathbb{R}$*;* $\delta_2=\pm1 \bmod G^{\sim}$ *та* $\delta_1=\pm1 \bmod G^{\sim}$ *для випадків 3 і 4 відповідно):*

1. $f=\sigma|\psi|^{\gamma}$, *де* $\gamma\neq 0,\frac{4}{n}$*:* $\quad I-\gamma D$*;*
2. $f=\sigma|\psi|^{4/n}$*:* $\quad I-\frac{4}{n}D,\ \Pi$*;*
3. $f=-(\delta_1+i\delta_2)\ln|\psi|$, *де* $\delta_2\neq 0$*:* $\quad e^{\delta_2 t}(\delta_2 I-\delta_1 M)$*;*
4. $f=-\delta_1\ln|\psi|$, *де* $\delta_1\neq 0$*:* $\quad I-\delta_1 tM$*;*
5. $f=0$*:* $\quad I,\ D,\ \Pi,\ \eta^0\partial_\psi+\eta^{0*}\partial_{\psi^*}$,
   де $\eta^0=\eta^0(t,x)$ *— довільний розв'язок вихідного рівняння.*

Таблиця 3.2

Випадки розширення, коли вираз для функції F не містить довільних функцій. Тут γ, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 – дійсні сталі, $\sigma\in\mathbb{C}$, $\sigma\neq 0$ (при цьому $|\sigma| = 1 \bmod G^{\sim}$); $\eta^0=\eta^0(t,x)\in\mathbb{C}$ — довільний розв'язок вихідного рівняння, $\theta=\theta(x)\in\mathbb{R}$ — довільний розв'язок рівняння Лапласа $\Delta\theta=0$. У випадках 2.9–2.15 $\delta_j=\pm1 \bmod G^{\sim}$ для одного значення $j\in\{1;2;3;4\}$, якщо $\delta_j\neq 0$.

	F	Оператори розширення
2.1	0	$G_j,\ I,\ M,\ D,\ \Pi,\ \eta^0\partial_\psi+\eta^{0*}\partial_{\psi^*}$
2.2	$\gamma\psi+\psi^*$	$I,\ \eta^0\partial_\psi+\eta^{0*}\partial_{\psi^*}$
2.3	$\sigma\vert\operatorname{Re}\psi\vert^\gamma$, $\gamma\neq 0,1$	$I+(1-\gamma)D,\ i\theta(x)(\partial_\psi-\partial_{\psi^*})$
2.4	$\sigma\ln\vert\operatorname{Re}\psi\vert$	$I+D-i(t\operatorname{Re}\sigma+\frac{1}{2n}x_jx_j\operatorname{Im}\sigma)(\partial_\psi-\partial_{\psi^*})$, $i\theta(x)(\partial_\psi-\partial_{\psi^*})$
2.5	$\sigma e^{\operatorname{Re}\psi}$	$D-\partial_\psi-\partial_{\psi^*},\ i\theta(x)(\partial_\psi-\partial_{\psi^*})$
2.6	$\sigma\vert\psi\vert^{\gamma_1}e^{\gamma_2\varphi}\psi,\quad \gamma_2\neq 0$	$M-\gamma_2D,\ \gamma_2I-\gamma_1M$
2.7	$\sigma\vert\psi\vert^{\gamma}\psi,\quad \gamma\neq 0,\frac{4}{n}$	$G_j,\ M,\ I-\gamma D$
2.8	$\sigma\vert\psi\vert^{4/n}\psi,$	$G_j,\ M,\ I-\frac{4}{n}D,\ \Pi$
Надалі $\quad F=(-(\delta_1+i\delta_2)\ln\vert\psi\vert+(\delta_3-i\delta_4)\varphi)\psi,\quad \Delta=(\delta_2-\delta_3)^2-4\delta_1\delta_4$		
2.9	$\delta_4=0,\ \delta_3\neq 0,\ \delta_2\neq\delta_3$	$e^{\delta_3t}M,\ e^{\delta_3t}(\partial_j+\frac12\delta_3x_jM),\ e^{\delta_2t}(I-\frac{\delta_1}{\delta_2-\delta_3}M)$
2.10	$\delta_4=0,\ \delta_3\neq 0,\ \delta_2=\delta_3$	$e^{\delta_3t}M,\ e^{\delta_3t}(\partial_j+\frac12\delta_3x_jM),\ e^{\delta_2t}(I-\delta_1tM)$
2.11	$\delta_4=0,\ \delta_3=0,\ \delta_2\neq 0$	$M,\ G_j,\ e^{\delta_2t}(\delta_2I-\delta_1M)$
2.12	$\delta_4=0,\ \delta_3=0,\ \delta_2=0,\ \delta_1\neq 0$	$M,\ G_j,\ I-\delta_1tM$
2.13	$\delta_4\neq 0,\ \Delta>0$	$e^{\lambda_it}(\delta_4I+(\lambda_i-\delta_2)M),\ i=1,2,$ $\lambda_1=\frac12(\delta_2+\delta_3-\sqrt{\Delta}),\ \lambda_2=\frac12(\delta_2+\delta_3+\sqrt{\Delta})$
2.14	$\delta_4\neq 0,\ \Delta<0$	$e^{\mu t}(\delta_4\cos\nu t\,I+((\mu-\delta_2)\cos\nu t-\nu\sin\nu t)M),$ $e^{\mu t}(\delta_4\sin\nu t\,I+((\mu-\delta_2)\sin\nu t+\nu\cos\nu t)M),$ $\mu=\frac12(\delta_2+\delta_3),\ \nu=\frac12\sqrt{-\Delta}$
2.15	$\delta_4\neq 0,\ \Delta=0$	$e^{\mu t}(\delta_4tI+\frac12(\delta_3-\delta_2)tM+M),$ $e^{\mu t}(\delta_4I+\frac12(\delta_3-\delta_2)M),\ \mu=\frac12(\delta_2+\delta_3)$

Доведення. Нехай A_F — МАІ рівняння (3.17) з функцією $F = F(\psi, \psi^*)$. Якщо є розширення (тобто $A_F \neq A^\cap$), то в алгебрі A_F існують оператори, підстановка коефіцієнтів яких в умову (3.20) дає (нетотожні) рівняння на F. Кожне таке рівняння має вигляд

$$(a\psi + b)F_\psi + (a^*\psi^* + b^*)F_{\psi^*} + cF + d\psi + e = 0, \qquad (3.23)$$

де a, b, c, d, e — комплексні сталі. Диференціальні наслідки рівнянь вигляду (3.23), що мають (як диференціальні рівняння) перший порядок, також зводяться до вигляду (3.23). Отже, *якщо $A_F \neq A^\cap$, то функція F задовольняє k ($k \in \{1; 2; 3\}$) незалежних рівнянь вигляду* (3.23). Тут незалежність рівнянь означає лінійну незалежність відповідних наборів коефіцієнтів (a, b, c, d, e), яка еквівалентна лінійній незалежності відповідних трійок (a, b, c).

Зауважимо, що застосування стандартних методів групової класифікації в даній задачі зводиться до дослідження різних випадків інтегрування одного рівняння вигляду (3.23) (в залежності від значення сталих a, b, c, d, e) з наступним розщепленням на випадки більшого розширення групи симетрії, коли функція F задовольняє певні додаткові умови. Ця процедура приводить до громіздкого перебору з неодноразовим повторенням однакових випадків. Пропонований *метод розгалуженого розщеплення* у залежності від значення k дозволяє уникнути зайвого перебору і суттєво зменшити кількість випадків, які необхідно розглянути.

$\boldsymbol{k = 3}$. Тоді F — лінійна по (ψ, ψ^*) функція, тобто $F = \sigma_1\psi + \sigma_2\psi^* + \sigma_0$, де σ_0, σ_1, σ_2 — комплексні сталі. Сталу σ_0 завжди можна покласти рівною 0 за допомогою перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\psi} = \psi + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 x_j x_j$ з розширення $G^\sim$, де комплексні сталі ν_0, ν_1 та ν_2 визначаються з вигляду F. Тоді в залежності від значення сталої σ_2 ($\sigma_2 = 0$ або $\sigma_2 \neq 0$) функція F зводиться перетвореннями з $G^\sim$ та з розширення $G^\sim$ ($\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\psi} = \psi e^{i\sigma_1 t}$ або $\tilde{\psi} = \psi e^{-t\,\mathrm{Im}\,\sigma_1}$) до випадку 2.1 або 2.2 (де $\gamma = \mathrm{Re}\,\sigma_1$) відповідно.

Надалі F — нелінійна по (ψ, ψ^*) функція, тому в (3.23) $(a, b) \neq (0, 0)$.

$\boldsymbol{k = 1.}$ З (3.20) випливає, що

$$\eta^1 = \lambda a,\ \eta^0 = \lambda b,\ \xi^t_t - \eta^1 = \lambda c,\ i\eta^1_t + \Delta\eta^1 = \lambda d,\ i\eta^0_t + \Delta\eta^0 = \lambda e,$$

де $\lambda = \lambda(t, x) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ (інакше $A_F = A^\cap$).

При $a \neq 0$ $b = 0 \bmod G^\sim$, звідки $\eta^0 = 0$, $e = 0$, $d = -i\delta a$, де $\delta \in \mathbb{R}$. Якщо додатково $c + a \neq 0$, то $c + a = -|a|^2 \bmod G^\sim$, $\xi^t_{tt} = 0$, $\chi^j_t = 0$, $\zeta = \mathrm{const}$, $d = 0$ (випадок 1.1, де $\gamma_1 = \operatorname{Re} a$, $\gamma_2 = \operatorname{Im} a$). Якщо $c + {}$ $+ a = 0$, $\operatorname{Re} a \neq 0$, то $\operatorname{Re} a = 1 \bmod G^\sim$, $\xi^t_t = 0$, $\chi^j_t = 0$, $\lambda_j = 0$, $\lambda_t = \delta\lambda$ (випадок 1.2, де $\gamma = \operatorname{Im} a$). Якщо $c + a = 0$, $\operatorname{Re} a = 0$, то $\operatorname{Im} a \neq 0$ (причому $\operatorname{Im} a = 1 \bmod G^\sim$), $\xi^t_t = 0$, $\chi^j_{tt} = \delta\chi^j_t$, $\lambda = \frac{1}{2}\chi^j_t x_j + \operatorname{Im}\zeta$, $\operatorname{Re}\zeta = 0$ (випадки 1.3 і 1.4 при $\delta \neq 0$ і $\delta = 0$ відповідно).

Якщо $a = 0$, то $b \neq 0$ (причому $b = i \bmod G^\sim$), $\eta^1 = 0$ (отже, $d = 0$, $\xi^t_{tt} = 0$, $\chi^j_t = 0$), $c \in \mathbb{R}$. Тоді при $c \neq 0$ $c = 1 \bmod G^\sim$, $\lambda = \xi^t_t = \mathrm{const}$, $\eta^0 = i\xi^t_t$, $e = 0$, (випадок 1.5), а при $c = 0$ $\xi^t_t = 0$, $\eta^0 = ie^{-\delta_1 t}\theta(x)$, де $\Delta\theta = \delta_2\theta$, $\delta_1 = \operatorname{Re} e$, $\delta_2 = \operatorname{Im} e$ (випадок 1.6).

$\boldsymbol{k = 2.}$ Нехай існує функція F, нелінійна по (ψ, ψ^*), що задовольняє систему з двох незалежних рівнянь вигляду (3.23), тобто

$$(a_s\psi + b_s)F_\psi + (a^*_s\psi^* + b^*_s)F_{\psi^*} + c_sF + d_s\psi + e_s = 0, \tag{3.24}$$

де a_s, b_s, c_s, d_s, e_s — комплексні сталі, $s = 1, 2$, причому

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a^*_1 & b^*_1 \\ a_2 & b_2 & a^*_2 & b^*_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Лема 3.3. *З точністю до перетворень з $G^\sim$ та дійсних лінійних перетворень самих рівнянь повинна виконуватися одна з таких умов:*

1. $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = i$, $c_2 = 0$, $id_1 = e_2(c_1 + 1)$, $d_2(c_1 + 2) = 0$, $(c_1, e_1) \neq (0, 0)$;

2. $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $b_1 = b_2 = 0$, $d_1(c_2 + a_2) = d_2(c_1 + a_1)$, $c_1e_2 = c_2e_1$;

3. $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = i$, $d_1c_2 = d_2c_1$, $b_1d_2 + c_1e_2 = b_2d_1 + c_2e_1$.

Рівняння (3.20) як умова на F має залежати від рівнянь (3.24) для будь-якого фіксованого оператора з A_F, а тому для знаходження всіх додаткових до (3.18) і (3.19) визначальних рівнянь на ξ^t і η достатньо прирівняти до 0 мінори третього порядку розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.20), (3.24) відносно "невідомих" F_ψ, F_{ψ^*}, F:

$$\begin{vmatrix} a_1\psi + b_1 & a_1^*\psi^* + b_1^* & c_1 \\ a_2\psi + b_2 & a_2^*\psi^* + b_2^* & c_2 \\ \eta^1\psi + \eta^0 & \eta^{1*}\psi^* + \eta^{0*} & \xi^t_t - \eta^1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1\psi + b_1 & a_1^*\psi^* + b_1^* & d_1\psi + e_1 \\ a_2\psi + b_2 & a_2^*\psi^* + b_2^* & d_2\psi + e_2 \\ \eta^1\psi + \eta^0 & \eta^{1*}\psi^* + \eta^{0*} & (i\eta^1_t + \Delta\eta^1)\psi + i\eta^0_t + \Delta\eta^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.25}$$

(У (3.25) можна розщепити за змінними ψ та ψ^*.)

Розглянемо кожен випадок з леми 1 окремо, шукаючи лише додаткові (порівняно з наведеними в табл. 1) розширення алгебри інваріантності.

1. З (3.25) випливає, що $\eta^1 \in \mathbb{R}$ (тобто $\xi^t_{tt} = 0$, $\chi^j_t = 0$, $\zeta \in \mathbb{R}$), $\eta^0 = i\rho(t,x)$, де $\rho \in \mathbb{R}$, $-\rho_t + i\Delta\rho + e_1\zeta + e_2\rho = 0$, $i\zeta_t + d_1\zeta + d_2\rho = 0$. Додаткове розширення A_F є лише при $d_1 = d_2 = e_2 = 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_1 + 1 \neq 0$. За цих умов рівняння (3.17) перетворенням $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\psi} = \psi + \nu_0 + \nu_1 t + \nu_2 x_j x_j$ з розширення $G^\sim$, де дійсні сталі ν_0, ν_1 та ν_2 визначаються з вигляду F, зводиться до випадку 2.3 (якщо $c_1 \neq 0$), де $\gamma = -c_1$, або 2.4 (якщо $c_1 = 0$), де $\sigma = -e_1$.

2. З (3.25) випливає, що $\eta^0 = 0$, $\tilde{c}_1\eta^1 + \tilde{c}_2\eta^{1*} = \xi^t_t - \eta^1$, $\tilde{d}_1\eta^1 + \tilde{d}_2\eta^{1*} = i\eta^1_t + \Delta\eta^1$, $\tilde{e}_1\eta^1 + \tilde{e}_2\eta^{1*} = 0$, де

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \tfrac{1}{2}(c_1 - ic_2), \quad \tilde{d}_1 = \tfrac{1}{2}(d_1 - id_2), \quad \tilde{e}_1 = \tfrac{1}{2}(e_1 - ie_2), \\ \tilde{c}_2 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + ic_2), \quad \tilde{d}_2 = \tfrac{1}{2}(d_1 + id_2), \quad \tilde{e}_2 = \tfrac{1}{2}(e_1 + ie_2), \end{aligned} \tag{3.26}$$

звідки $\tilde{d}_1(\tilde{c}_2 + 1) = \tilde{d}_2\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_1\tilde{e}_2 = \tilde{c}_2\tilde{e}_1$. Систему (3.24) можна переписати у вигляді $\psi F_\psi + \tilde{c}_1 F + \tilde{d}_1\psi + \tilde{e}_1 = 0$, $\psi^* F_{\psi^*} + \tilde{c}_2 F + \tilde{d}_2\psi + \tilde{e}_2 = 0$. $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \neq (0,0)$ (інакше матимемо частинний випадок випадку 1.1).

Якщо $\tilde{c}_1 = -1$, $\tilde{c}_2 = 0$, то $\xi^t_t = 0$, $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = 0$ (інакше $A_F = A^{\cap}$), а тому $\chi^j_{tt} = (\delta_3 - i\delta_4)\chi^j_t$, $\zeta^1_t = \delta_2\zeta^1 + \delta_4\zeta^2$, $\zeta^2_t = -\delta_1\zeta^1 + \delta_3\zeta^2$, де $\delta_1 = \operatorname{Re} d_1$, $\delta_2 = \operatorname{Im} d_1$, $\delta_3 = -\operatorname{Re} d_2$, $\delta_4 = \operatorname{Im} d_2$. В залежності від значень сталих δ_l, $l = \overline{1,4}$, отримуємо випадки 2.9–2.15.

Якщо $\tilde{c}_1 = -1$, $\tilde{c}_2 = 0$, то додаткове розширення A_F існує лише за умов $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = 0$, $\tilde{c}_1 + 1 = \tilde{c}^*_2 \neq 0$. Тоді в залежності від значення $\tilde{c}_2$ рівняння (3.17) перетворенням з розширення $G^{\sim}$ зводиться до випадку 2.6 (якщо $\tilde{c}_2 \notin \mathbb{R}$), де $\gamma_1 = -2\operatorname{Re}\tilde{c}_2$, $\gamma_2 = -2\operatorname{Im}\tilde{c}_2$, 2.7 (якщо $\tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{c}_2 \neq -2/n$), де $\gamma = -2\tilde{c}_2$, або 2.8 (якщо $\tilde{c}_2 = -2/n$).

3. З (3.25) випливає, що $\eta^1 = 0$ (тобто $\xi^t_{tt} = 0$, $\chi^j_t = 0$, $\zeta = 0$), $\tilde{c}_1\eta^0 + \tilde{c}_2\eta^{0*} = \xi^t_t$, $\tilde{d}_1\eta^0 + \tilde{d}_2\eta^{0*} = 0$, $\tilde{e}_1\eta^0 + \tilde{e}_2\eta^{0*} = i\eta^0_t + \Delta\eta^0$, де сталі $\tilde{c}_j$, $\tilde{d}_j$, $\tilde{e}_j$ $(j = 1, 2)$ визначені в (3.26). Систему (3.24) можна переписати у вигляді $F_\psi + \tilde{c}_1 F + \tilde{d}_1\psi + \tilde{e}_1 = 0$, $F_{\psi^*} + \tilde{c}_2 F + \tilde{d}_2\psi + \tilde{e}_2 = 0$.

Для існування додаткового розширення A_F мають виконуватися умови $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 0$, $\tilde{c}^*_1 = \tilde{c}_2 \neq 0$, звідки $\tilde{c}^*_1 = \tilde{c}_2 = -1 \bmod G^{\sim}$. Тоді перетворенням $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\psi} = \psi + it\operatorname{Re} e_1 - \frac{i}{2n}x_jx_j\operatorname{Im} e_1$ з розширення $G^{\sim}$ рівняння (3.17) зводиться до випадку 2.5.

Класифікація в класі рівнянь (3.17) завершена. Окрім відомих частинних випадків [104, 130], знайдено повний набір нееквівалентних рівнянь (3.17), що допускають розширення ліївської симетрії.

Зауважимо, що групову класифікацію систем двох рівнянь дифузії (до класу яких входить і рівняння (3.17), якщо розглядати його як систему двох рівнянь для двох дійсних функцій) виконано в [208, 209]. Результати цих робіт узгоджуються з наведеними вище.

3.5. Системи двох нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа

Системи еліптичних рівнянь загального вигляду

$$\Delta u = F(u, v), \qquad \Delta v = G(u, v), \tag{3.27}$$

де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ — невідомі функції від двох змінних $x = (x_1, x_2)$, а F і G — довільні дійсні гладкі функції своїх аргументів, можна розглядати як стаціонарну версію систем двох $(1+2)$-вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії чи $(1+2)$-вимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Системи з класу (3.27) отримують, фіксуючи у різний спосіб залежність від часу розв'язків згаданих нестаціонарних рівнянь.

Виконаємо групову класифікацію цього класу. Випадок двох просторових змінних вибрано для класифікації, оскільки він є особливим.

Позначимо через $A^{\max} = A^{\max}(F, G)$ МАІ системи (3.27) з заданими функціями F і G. Згідно інфінітезімального критерію інваріантності, оператор $Q = \xi^i(x,u,v)\partial_i + \eta^1(x,u,v)\partial_u + \eta^2(x,u,v)\partial_v$ належить $A^{\max}$ тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти ξ^1, ξ^2, η^1, η^2 задовольняють визначальні рівняння

$$\begin{aligned} &\xi^i_u = \xi^i_v = 0, \quad \xi^1_1 = \xi^2_2, \quad \xi^1_2 + \xi^2_1 = 0, \\ &\eta^i_{uu} = \eta^i_{uv} = \eta^i_{vv} = 0, \quad \eta^i_{ju} = \eta^i_{jv} = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &\eta^1 F_u + \eta^2 F_v = \eta^1_u F + \eta^1_v G - 2\xi^1_1 F + \Delta\eta^1, \\ &\eta^1 G_u + \eta^2 G_v = \eta^2_u F + \eta^2_v G - 2\xi^1_1 G + \Delta\eta^2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Тут і нижче індекси i, j приймають значення 1, 2. З (3.28) випливає, що

$$\xi^i = \xi^i(x), \quad \eta^i = h_{i1}u + h_{i2}v + \eta^{i0}(x), \tag{3.30}$$

де (ξ^1, ξ^2) — розв'язок системи Коші–Рімана $\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 + \xi^2_1 = 0$ і h_{ij} — сталі. Підстановка виразів (3.30) у (3.29) дає класифікаційні умови

$$\begin{aligned} &(h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \eta^{10}(x))F_u + (h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \eta^{20}(x))F_v \\ &\qquad = h_{11}F + h_{12}G - 2\xi^1_1 F + \Delta\eta^{10}, \\ &(h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \eta^{10}(x))G_u + (h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \eta^{20}(x))G_v \\ &\qquad = h_{21}F + h_{22}G - 2\xi^1_1 G + \Delta\eta^{20}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Вважаючи функції F, G довільними і розщеплюючи систему (3.31) по значенням цих функцій і їх похідних, отримаємо рівняння $\xi^1_1 = \xi^2_2 = 0$,

$\xi^1_2+\xi^2_1=0$, $h_{ij}=0$, $\eta^{i0}=0$. Отже, алгебра Лі $A^\cap$ ядра основних груп рівнянь з класу (3.27) породжена операторами ∂_1, ∂_2, $J=x_1\partial_2-x_2\partial_1$ і тому ізоморфна тривимірній алгебрі Евкліда $e(2)$.

Базис алгебри Лі $A^\sim$ групи еквівалентності $G^\sim$ класу (3.27) утворюють оператори

$$\begin{gathered}\partial_1,\quad \partial_2,\quad J,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2-2F\partial_F-2G\partial_G,\quad \partial_u,\quad \partial_v,\\ u\partial_u+F\partial_F,\quad v\partial_u+G\partial_F,\quad u\partial_v+F\partial_G,\quad v\partial_v+G\partial_G.\end{gathered}\tag{3.32}$$

Група $G^\sim$ породжена однопараметричними групами перетворень, асоційованими з операторами з $A^\sim$, і дискретними перетвореннями заміни знаку x_1 (або x_2) і заміни знаку u (або v). Отже, перетворення з $G^\sim$, які нетривіальним чином діють на F і G, мають вигляд

$$\begin{gathered}\tilde x=\delta x,\quad \tilde u=a_{11}u+a_{12}v+b_1,\quad \tilde v=a_{21}u+a_{22}v+b_2,\\ \tilde F=\delta^{-2}(a_{11}F+a_{12}G),\quad \tilde G=\delta^{-2}(a_{21}F+a_{22}G),\end{gathered}\tag{3.33}$$

де $\delta, a_{ij}, b_i=\mathrm{const}$, $\delta\neq 0$, $\det(a_{ij})\neq 0$.

Для деяких підкласів класу (3.27) знайдено додаткові перетворення еквівалентності, що не містяться в $G^\sim$. Це дозволило суттєво спростити пошук і зменшити кількість нееквівалентних систем вигляду (3.27), які допускають розширення тривіальної алгебри $A^\cap$.

Результат класифікації. З точністю до перетворень еквівалентності існує 51 випадок розширення алгебри $A^\cap$ до $A^{\max}\neq A^\cap$, що природним чином розбиваються на чотири сім'ї і наводяться нижче разом з базисними операторами з розширень відповідних МАІ.

Сім'я 1. $\Delta u=a_{11}u+a_{12}v+b_1$, $\Delta v=a_{21}u+a_{22}v+b_2$.

Тут a_{ij}, b_i — довільні дійсні сталі. Лінійність системи спричиняє її інваріантність відносно операторів $\widehat{R}(\chi^1,\chi^2)=\chi^1(x_1,x_2)\partial_u+\chi^2(x_1,x_2)\partial_v$, $I=u\partial_u+v\partial_v$, де $\chi=(\chi^1,\chi^2)$ — довільний розв'язок цієї ж системи. Залежно від жорданової форми матриці $(a_{ij})^2_{i,j=1}$, отримуємо шість нееквівалентних класів таких систем.

1.1. $\Delta u=0,\ \Delta v=0$: $\quad\widehat{R}(\chi^1,\chi^2),\ \xi^i(x_1,x_2)\partial_i,\ u\partial_u,\ v\partial_v,\ v\partial_u,\ u\partial_v$;

1.2. $\Delta u=v,\ \Delta v=0$: $\quad\widehat{R}(\chi^1,\chi^2),\ I,\ x\partial_x-2v\partial_v,\ v\partial_u$;

1.3. $\Delta u=\varepsilon u,\ \Delta v=\varepsilon v$: $\quad\widehat{R}(\chi^1,\chi^2),\ u\partial_u,\ v\partial_v,\ v\partial_u,\ u\partial_v$;

1.4. $\Delta u=\varepsilon u,\ \Delta v=\gamma v,\ \gamma\neq\varepsilon$: $\quad\widehat{R}(\chi^1,\chi^2),\ u\partial_u,\ v\partial_v$;

1.5. $\Delta u=\gamma u+v,\ \Delta v=\gamma v,\ \gamma\neq 0$: $\quad\widehat{R}(\chi^1,\chi^2),\ I,\ v\partial_u$;

1.6. $\Delta u=\gamma u-v,\ \Delta v=u+\gamma v$: $\quad\widehat{R}(\chi^1,\chi^2),\ I,\ u\partial_v-v\partial_u$,

де $\varepsilon=\pm1$, а у випадку 1.1 (ξ^1,ξ^2) — довільний розв'язок системи Коші–Рімана $\xi^1_1=\xi^2_2$, $\xi^1_2=-\xi^2_1$. У випадках 1.1, 1.2 та 1.4 при $\gamma=0$ для прибирання параметрів b_i необхідно використовувати додаткові перетворення, які пов'язані з лінійністю відповідних рівнянь.

Сім'я 2. $\Delta u=f(v)e^u$, $\Delta v=g(v)e^u$.

Тут f і g — довільні дійсні гладкі функції, не рівні одночасно нулю, тобто $(f,g)\not\equiv(0,0)$. Системи такого вигляду завжди інваріантні відносно алгебри операторів $L(\xi)=\xi^i(x_1,x_2)\partial_i-2\xi^1_1(x_1,x_2)\partial_u$, характерних для рівняння Ліувіля $\Delta u=\lambda\exp u$, де $\xi=(\xi^1,\xi^2)$ — довільний розв'язок системи Коші–Рімана $\xi^1_1=\xi^2_2$, $\xi^1_2=-\xi^2_1$. У залежності від вигляду функцій f і g, отримуємо п'ять нееквівалентних класів систем.

2.1. $\Delta u=0,\ \Delta v=e^u$: $\quad L(\xi),\ R'(\chi),\ v\partial_v+\partial_u,\ u\partial_v$;

2.2. $\Delta u=\varepsilon e^u,\ \Delta v=0$: $\quad L(\xi),\ R'(\chi),\ v\partial_v$;

2.3. $\Delta u=C_1e^uv^\mu,\ \Delta v=C_2e^uv^{\mu+1},\ (\mu C_1,C_2)\neq(0,0)$:
$L(\xi),\ v\partial_v-\mu\partial_u$;

2.4. $\Delta u=(C_1-2\varepsilon C_2v)e^{u+\varepsilon v^2},\ \Delta v=C_2e^{u+\varepsilon v^2},\ (C_1,C_2)\neq(0,0)$:
$L(\xi),\ \partial_v-2\varepsilon v\partial_u$;

2.5. $\Delta u=f(v)e^u,\ \Delta v=g(v)e^u$, якщо вибрані функції f і g не зводять систему до однієї з перерахованих вище: $\quad L(\xi)$.

Тут $\varepsilon=\pm1$, $R'(\chi)=\chi(x)\partial_v$, де $\Delta\chi=0$.

Сім'я 3. $\Delta u = f(v) + \beta u$, $\Delta v = g(v)$.

Тут f і g — довільно задані дійсні гладкі функції, для яких $(f'', g'') \neq (0, 0)$ і система перетвореннями еквівалентності не зводиться до випадків 2.1 або 2.2 (останнє, зокрема, означає, що вектор-функції (f, g) і (f', g') — лінійно незалежні). Системи такого вигляду завжди допускають інфінітезімальний оператор $R(\chi) = \chi(x_1, x_2)\partial_u$, де $\chi = \chi(x)$ — довільний розв'язок рівняння Пуасона $\Delta\chi = \beta\chi$. У залежності від вигляду функцій f і g, отримуємо 26 нееквівалентних класів систем.

3.1. $\Delta u = v^\mu,\ \ \Delta v = 0,\ \ \mu \notin \{0, 1\}$:
$R(\chi),\ \ 2u\partial_u + x_i\partial_i,\ \ v\partial_u,\ \ 2v\partial_v - \mu x_i\partial_i$;

3.2. $\Delta u = \ln v,\ \ \Delta v = 0$: $\quad R(\chi),\ \ 2u\partial_u + x_i\partial_i,\ \ v\partial_u,\ \ 2v\partial_v + \frac{1}{2}x_ix_i\partial_u$;

3.3. $\Delta u = f(v),\ \ \Delta v = 0$: $\quad R(\chi),\ \ 2u\partial_u + x_i\partial_i,\ \ v\partial_u$;

3.4. $\Delta u = v^2 + \varepsilon u,\ \ \Delta v = 0$: $\quad R(\chi),\ \ 2u\partial_u + v\partial_v,\ \ 2v\partial_u - \varepsilon\partial_v$;

3.5. $\Delta u = v^\mu + \varepsilon u,\ \ \Delta v = \varepsilon v,\ \ \mu \notin \{0, 1\}$: $\quad R(\chi),\ \ \mu u\partial_u + v\partial_v,\ \ v\partial_u$;

3.6. $\Delta u = \ln v + \varepsilon u,\ \ \Delta v = \varepsilon v$: $\quad R(\chi),\ \ \varepsilon v\partial_v - \partial_u,\ \ v\partial_u$;

3.7. $\Delta u = v^\mu,\ \ \Delta v = \varepsilon,\ \ \mu \notin \{0, 1\}$:
$R(\chi),\ \ 2(1+\mu)u\partial_u + 2v\partial_v + x_i\partial_i,\ \ 2v\partial_u - \frac{1}{2}\varepsilon x_ix_i\partial_u$;

3.8. $\Delta u = \ln v,\ \ \Delta v = \varepsilon$:
$R(\chi),\ \ 2u\partial_u + 2v\partial_v + x_i\partial_i - \frac{1}{2}x_ix_i\partial_u,\ \ 2v\partial_u - \frac{1}{2}\varepsilon x_ix_i\partial_u$;

3.9. $\Delta u = e^v,\ \ \Delta v = \varepsilon$: $\quad R(\chi),\ \ u\partial_u + \partial_v,\ \ (2v - \frac{1}{2}\varepsilon x_ix_i)\partial_u$;

3.10. $\Delta u = 0,\ \ \Delta v = \varepsilon v^\mu,\ \ \mu \notin \{0, 1\}$: $\quad R(\chi),\ \ u\partial_u,\ \ 2v\partial_v + (1-\mu)x_i\partial_i$;

3.11. $\Delta u = v\ln v + \gamma_1 u,\ \ \Delta v = \gamma_2 v,\ \ \gamma_1 \neq \gamma_2$:
$R(\chi),\ \ u\partial_u + v\partial_v + (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}v\partial_u$;

3.12. $\Delta u = v^\mu \ln v,\ \ \Delta v = \varepsilon v^\mu,\ \ \mu \notin \{0, 1\}$:
$R(\chi),\ \ 2u\partial_u + 2v\partial_v + 2\varepsilon^{-1}v\partial_u + (1-\mu)x_i\partial_i$;

3.13. $\Delta u = \ln v,\ \ \Delta v = \varepsilon v^\mu,\ \ \mu \neq 0$:
$R(\chi),\ \ 2v\partial_v + 2(1-\mu)v\partial_u + \frac{1}{2}x_ix_i\partial_u + (1-\mu)x_i\partial_i$;

3.14. $\Delta u = \ln v + \varepsilon u,\ \ \Delta v = \gamma v,\ \ \gamma \neq \varepsilon$: $\quad R(\chi),\ \ \varepsilon v\partial_v - \partial_u$;

3.15. $\Delta u = v^\mu + \gamma_1 u,\ \ \Delta v = \gamma_2 v,\ \ \gamma_1 \neq \gamma_2,\ \ \mu \neq 0$: $\quad R(\chi),\ \ \mu u\partial_u + v\partial_v$;

3.16. $\Delta u = f(v) + \varepsilon u,\ \ \Delta v = \varepsilon v$: $\quad R(\chi),\ \ v\partial_u$;

3.17. $\Delta u = f(v),\ \ \Delta v = 1$: $\quad R(\chi),\ \ 2v\partial_u - \frac{1}{2}x_i x_i \partial_u$;

3.18. $\Delta u = v^2 + \varepsilon u,\ \ \Delta v = 1$: $\quad R(\chi),\ \ 2v\partial_u - \varepsilon\partial_v + 2\varepsilon^{-1}\partial_u$;

3.19. $\Delta u = ve^v,\ \ \Delta v = \varepsilon e^v$: $\quad R(\chi),\ \ 2v\partial_u + 2\varepsilon\partial_v - \varepsilon x_i\partial_i$;

3.20. $\Delta u = \varepsilon u,\ \ \Delta v = f(v),\ \ f'' \neq 0$: $\quad R(\chi),\ \ u\partial_u$;

3.21. $\Delta u = 0,\ \ \Delta v = f(v)$, функції vf', f', f — лінійно незалежні:
$R(\chi),\ \ u\partial_u$;

3.22. $\Delta u = e^{\mu v},\ \ \Delta v = \varepsilon e^v,\ \ \mu \neq 0$: $\quad R(\chi),\ \ 2(\mu - 1)u\partial_u + 2\partial_v - x_i\partial_i$;

3.23. $\Delta u = e^v + \varepsilon u,\ \ \Delta v = \gamma$: $\quad R(\chi),\ \ u\partial_u + \partial_v$;

3.24. $\Delta u = v,\ \ \Delta v = \varepsilon e^v$: $\quad R(\chi),\ \ 2u\partial_u - 2\partial_v + x_i\partial_i - \frac{1}{2}x_i x_i\partial_u$;

3.25. $\Delta u = v^\mu,\ \ \Delta v = \varepsilon v^\nu,\ \ \mu\nu \neq 0,\ \ \mu \neq \nu$:
$R(\chi),\ \ 2(1 + \mu - \nu)u\partial_u + 2v\partial_v + (1 - \nu)x_i\partial_i$;

3.26. $\Delta u = f(v) + \beta u,\ \ \Delta v = g(v)$, якщо вибрані функції f і g не зводять систему до однієї з перерахованих вище: $\quad R(\chi)$.

У випадках 3.3, 3.15, 3.16 функція $f = f(v)$ така, що функції vf', f', f, 1 — лінійно незалежні.

Сім'я 4 репрезентує системи вигляду (3.27) зі скінченновимірними МАІ розмірності 4, 5 та 6 ($\delta \in \{0; 1\}$).

4.1. $\Delta u = \varepsilon v^\mu u,\ \ \Delta v = \varepsilon v^{\mu+1},\ \ \mu \neq 0$: $\quad 2v\partial_v - \mu x_i\partial_i,\ \ u\partial_u,\ \ v\partial_u$;

4.2. $\Delta u = f(v)u,\ \ \Delta v = f(v)v,\ \ vf' + C$, f', f — лінійно незалежні при довільно вибраній $C = \text{const}$: $\quad u\partial_u,\ \ v\partial_u$;

4.3. $\Delta u = \varepsilon v^\mu(u + \ln v),\ \ \Delta v = \varepsilon v^{\mu+1},\ \ \mu \neq 0$:
$4u\partial_u + 2v\partial_v - (2\mu - 1)x_i\partial_i,\ \ v\partial_u + \partial_v,$;

4.4. $\Delta u = \varepsilon v^{\mu} u + v^{\nu+1},\ \ \Delta v = \varepsilon v^{\nu+1},\ \ \mu \notin \{\nu, \nu \pm 1, 0\}$:
$2(1+\nu-\mu)u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x_i\partial_i,\ \ v\partial_u$;

4.5. $\Delta u = C_2\omega^{\mu} v + C_1\omega^{\mu+1/2},\ \ \Delta v = C_2\omega^{\mu},\ \ \omega = v^2/2 - u$,
$(C_1(2\mu+1), C_2\mu) \neq (0,0),\ \ C_1^2 + C_2^2 = 1$:
$4u\partial_u + 2v\partial_v - (2\mu-1)x_i\partial_i,\ \ v\partial_u + \partial_v$;

4.6. $\Delta u = v^{\mu} e^{\delta u/v}(C_2 u + C_1 v),\quad \Delta v = v^{\mu} e^{\delta u/v} C_2 v,\quad C_1^2 + C_2^2 = 1$, $(\delta C_1, \delta C_2, \mu C_1 C_2) \neq (0,0,0)$: $\quad 2u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x_i\partial_i,\ \ 2v\partial_u - \delta x_i\partial_i$;

4.7. $\Delta u = u^{\mu} v^{\nu} C_1 u,\quad \Delta v = u^{\mu} v^{\nu} C_2 v,\quad (C_1(\mu+1),\ C_2\mu) \neq (0,0)$, $(C_1\nu, C_2(\nu+1)) \neq (0,0),\quad (\mu,\nu) \neq (0,0),\quad (\mu\nu, C_1 - C_2) \neq (0,0)$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$: $\quad 2u\partial_u - \mu x_i\partial_i,\ \ 2v\partial_v - \nu x_i\partial_i$;

4.8. $\Delta u = (u^2+v^2)^{\mu/2} e^{\nu \operatorname{arctg} v/u}(C_1 u - C_2 v),\quad (\mu,\nu) \neq (0,0)$,
$\Delta v = (u^2+v^2)^{\mu/2} e^{\nu \operatorname{arctg} v/u}(C_1 v + C_2 u),\quad C_1^2 + C_2^2 = 1$:
$2u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x_i\partial_i,\ \ u\partial_v - v\partial_u - \nu x_i\partial_i$;

4.9. $\Delta u = e^{\delta u/v}(g(v)u + f(v)),\ \ \Delta v = e^{\delta u/v} g(v) v$: $\quad 2v\partial_u - \delta x_i\partial_i$;

4.10. $\Delta u = e^{\delta u}(g(\omega)v + f(\omega)),\ \ \Delta v = e^{\delta u} g(\omega),\ \ \omega = v^2/2 - u$:
$2v\partial_u + 2\partial_v - \delta x_i\partial_i$;

4.11. $\Delta u = v^{\mu+1}(\gamma g(\omega)\ln v + f(\omega)),\quad \Delta v = v^{\mu+1} g(\omega),\quad \omega = u/v - \gamma \ln v$,
$\gamma \neq 0$: $\quad 2u\partial_u + 2v\partial_u + \gamma v\partial_u - \mu x_i\partial_i$;

4.12. $\Delta u = u^{\mu} f(\omega) u,\ \ \Delta v = u^{\mu} g(\omega),\ \ \omega = v - \ln u$: $\quad 2u\partial_u + 2\partial_v - \mu x_i\partial_i$;

4.13. $\Delta u = u^{\mu} f(\omega) u,\ \ \Delta v = u^{\mu} g(\omega) v,\ \ \omega = u^{-\nu} v$: $\quad 2u\partial_u + 2\nu\partial_v - \mu x_i\partial_i$;

4.14. $\Delta u = e^{\nu \operatorname{arctg} v/u}(f(\omega)u - g(\omega)v)$,
$\Delta v = e^{\nu \operatorname{arctg} v/u}(f(\omega)v + g(\omega)u),\ \ \omega = \ln(u^2+v^2) - 2\mu \operatorname{arctg} v/u$:
$u\partial_v - v\partial_u + \mu(u\partial_u + v\partial_v) - \nu x_i\partial_i$.

Схема доведення. З (3.30) випливає, що кожен оператор Q з $A^{\max}$ має вигляд $Q = \xi^i(x)\partial_i + (h_{11}u + h_{12}v + \eta^{10}(x))\partial_u + (h_{21}u + h_{22}v + \eta^{20}(x))\partial_v$. Нехай $\langle H\rangle_{(F,G)}$ позначає множину матриць $H = (h_{ij})_{i,j=1}^2$, для яких в $A^{\max} = A^{\max}(F,G)$ існують відповідні оператори. Використаний підхід до групової класифікації ґрунтується на таких лемах.

Лема 3.4. $\langle H\rangle_{(F,G)}$ *— підалгебра алгебри* $\mathrm{gl}(2,\mathbb{R})$*. Якщо системи вигляду* (3.27) *з довільними елементами* (F,G) *і* $(\widetilde{F},\widetilde{G})$ *еквівалентні, то* $\langle H\rangle_{(F,G)}$ *і* $\langle H\rangle_{(\widetilde{F},\widetilde{G})}$ *—* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$*-еквівалентні підалгебри алгебри* $\mathrm{gl}(2,\mathbb{R})$*.*

Лема 3.5. *Повну множину* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$*-нееквівалентних підалгебр алгебри* $\mathrm{gl}(2,\mathbb{R})$ *вичерпують алгебри*

$$
\begin{aligned}
&A^4=\mathrm{gl}(2,\mathbb{R})=\langle\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle,\\
&A^3_1=\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})=\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle,\ A^3_1=\langle\sigma_0,\sigma_1,\sigma_3\rangle,\\
&A^2_1=\langle\sigma_1,\sigma_3+\lambda\sigma_0\rangle,\ A^2_2=\langle\sigma_0,\sigma_1\rangle,\ A^2_3=\langle\sigma_0,\sigma_3\rangle,\\
&A^2_4=\langle\sigma_0,\sigma_2-\sigma_1\rangle,\ A^1_1=\langle\sigma_1+\lambda\sigma_0\rangle\ (\lambda\in\{0;1\}),\\
&A^1_2=\langle\sigma_3+\lambda\sigma_0\rangle,\ A^1_3=\langle\sigma_2-\sigma_1+\lambda\sigma_0\rangle,\ A^1_4=\langle\sigma_0\rangle,\ A^0=\{0\}.
\end{aligned}
$$

Лема 3.6. *Розмірність простору вектор-функцій*

$$\mathcal{M}=\left\langle\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F_u\\G_u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F_v\\G_v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

є класифікуючим значенням.

Припустимо, що $\dim\mathcal{M}\leq 3$. Тоді існують сталі α_i, β_{ij} такі, що

$$
\begin{aligned}
F_u&=\alpha_1F+\beta_{11},\quad F_v=\alpha_2F+\beta_{12},\\
G_u&=\alpha_1G+\beta_{21},\quad G_v=\alpha_2G+\beta_{22}.
\end{aligned}\tag{3.34}
$$

З сумісності системи (3.34) випливає, що $\alpha_1\beta_{i2}=\alpha_2\beta_{i1}$.

Якщо $\alpha_1=\alpha_2=0$, то функції F і G лінійні:

$$F=\beta_{11}u+\beta_{12}v+\gamma_1,\quad G=\beta_{21}u+\beta_{22}v+\gamma_2.$$

Можна занулити сталі γ_i і звести матрицю $(\beta_{ij})^2_{i,j=1}$ до жорданової форми за допомогою звичайних і умовних перетворень еквівалентності. В результаті отримаємо випадки 1.1–1.6.

Інші випадки розглядаються аналогічно.

3.6. Висновки

У цьому розділі описано множини допустимих точкових перетворень і виконано групову класифікацію класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Фактично, саме дослідження цих класів послужили поштовхом до введення нових понять і розробки ефективніших методів класифікації, представлених у попередньому розділі. Ці ж класи дали серію перших нетривіальних прикладів, що ілюструють запропоновані конструкції.

Побудовано ієрархію вкладених сильно нормалізованих класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера у випадку довільної кількості просторових змінних. Доведення нормалізованості дає повний опис допустимих перетворень у цих класах. Останній з побудованих класів (клас $\mathcal{S}$) містить клас $\mathcal{V}$ рівнянь Шрьодінгера з потенціалами та модульними нелінійностями і є зручним для виконання попередньої групової класифікації такого класу, що слугує ілюстрацією ефективності прийому вкладення ненормалізованого класу ($\mathcal{V}$) в нормалізований ($\mathcal{S}$).

Для повної групової класифікації класу $\mathcal{V}$ у (1+1)-вимірному випадку вперше використано метод з розбиттям на (сильно) нормалізовані підкласи. У кожному з підкласів, складених відповідно рівняннями з загальною, логарифмічною та степеневою нелінійностями, виконано класифікацію відносно своєї групи еквівалентності за допомогою алгебраїчного методу. Підкласи, що утворюють розбиття, є максимальними нормалізованими підкласами, а їх групи еквівалентності — максимальними умовними групами еквівалентності класу $\mathcal{V}$. Оскільки додатково рівняння з різних підкласів точково нееквівалентні, це розбиття вичерпно описує множину допустимих перетворень класу $\mathcal{V}$. При такому розгляді природно виникає об'єднаний підклас рівнянь зі степеневою нелінійністю як приклад класу з нетривіальною узагальненою групою еквівалентності. А підклас рівнянь зі степеневими нелінійностями фіксованого степеня і чисто уявними потенціалами, що залежать лише від часу, дає приклад нормалізованого класу зі скінченновимірною групою еквівалентності. Завдяки, зокрема, цьому прикладу можна стверджувати, що функціональна довільність у параметризації класу і його групі еквівалентності не є вирішальною для застосовності алгебраїчного методу групової класифікації. За наявності умови нормалізованості цей метод є особливо ефективним у випадку скінченновимірних груп еквівалентності.

Значно складніше, ніж у випадку двох незалежних змінних, досліджувати допустимі перетворення і нормалізаційні властивості класів багатовимірних ДРЧП, однак такі дослідження можливі. Вони створюють дієвий інструмент для розв'язання проблем групової класифікації у багатовимірному випадку. Групову класифікацію $(1+2)$-вимірних кубічних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами представлено у цьому розділі як, можливо, перший приклад використання алгебраїчного методу для групової класифікації дифренціальних рівнянь з більш ніж двома незалежними змінними. Відповідний клас також є сильно нормалізованим.

Для розв'язання задачі групової класифікації у ненормалізованому класі багатовимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера з довільною нелінійністю, залежною лише від ψ і ψ^*, розроблено метод розгалуженого розщеплення. Він виявився ефективним і для інших класів певної структури, для яких, як правило, застосовують метод прямого інтегрування визначальних рівнянь [4, 8, 9, 35, 163, 235, 275, 276].

Комбінований метод, що включає і дослідження різних випадків інтегрування системи визначальних рівнянь, і вивчення можливої структури алгебри інваріантності, застосовано для групової класифікації класу систем двох нелінійних рівнянь Лапласа на дві невідомі функції від двох незалежних змінних. Такі системи можна розглядати зокрема як зображення стаціонарних двовимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера. Під час виконання цієї класифікації вперше було використано поняття умовних груп еквівалентності (у термінах відповідних алгебр).

Результати цього розділу опубліковано у роботах [27, 38, 160, 227, 234, 237, 238, 240].

РОЗДІЛ 4

Закони збереження

Цей розділ присвячено дослідженню локальних і потенціальних законів збереження. У підрозділах 4.1 і 4.2 відомі результати про закони збереження та їх характеристики подано у вигляді, зручному для подальшого розгляду. Зокрема, поняття характеристики закону збереження введено за модифікованої умови цілковитої невиродженості системи диференціальних рівнянь. Вивчено перетворення законів збереження при точкових перетвореннях між відповідними початковими системами (підрозділ 4.3) та дію на закони збереження операторів узагальненої симетрії (підрозділ 4.4). У підрозділі 4.3 також сформульовано проблеми щодо класифікації законів збереження і потенціальних симетрій у класах диференціальних рівнянь.

Закони збереження (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку відносно контактної еквівалентності прокласифіковано у підрозділі 4.5. А саме, доведено таку теорему.

Теорема 4.1. *Для кожного* $(1+1)$*-вимірного еволюційного рівняння другого порядку* $\mathcal{L}$*:* $u_t = H(t,x,u,u_x,u_{xx})$ *розмірність простору* $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ *його законів збереження належить множині* $\{0,1,2,\infty\}$*. Рівняння* $\mathcal{L}$ *(локально) зводиться контактним перетворенням*

1) *до вигляду* $u_t = D_x\hat H(t,x,u,u_x)$*, де* $\hat H_{u_x} \neq 0$*, тоді і тільки тоді, коли* $\dim\mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 1$*;*
2) *до вигляду* $u_t = D_x^2\check H(t,x,u)$*, де* $\check H_u \neq 0$*, тоді і тільки тоді, коли* $\dim\mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 2$*;*

3) до лінійного рівняння з класу (4.6) *тоді і тільки тоді, коли* $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) = \infty$.

Якщо рівняння $\mathcal{L}$ *квазілінійне (тобто* $H_{u_{xx}u_{xx}} = 0$*), то контактне перетворення є продовженням точкового.*

Іншим важливим результатом цього ж розділу є теорема, формулювання якої об'єднує в собі дослідження законів збереження різних типів розширених систем, які включають вихідну систему як підсистему.

Теорема 4.2. *Наступні твердження про закон збереження двовимірної потенціальної системи (або системи, що визначає абелеве накриття, або багатовимірної стандартної потенціальної системи без калібрувань) еквівалентні:*

1) *цей закон збереження індуковано законом збереження відповідної вихідної система;*
2) *він містить вектор густини, не залежний від потенціалів;*
3) *деякі з його розширених характеристик індуковано характеристиками вихідної системи;*
4) *він має характеристику, не залежну від потенціалів.*

Еквівалентність трьох перших властивостей також має місце для законів збереження загальних розшарованих систем, включаючи багатовимірні калібровані потенціальні системи та накриваючі системи.

Для доведення теореми 4.2 у підрозділі 4.6 розроблено версії леми Адамара для розшарованих просторів і вивчено структури розшарованих систем алгебраїчних рівнянь. Потім (підрозділ 4.6) дано означення загальних розшарованих систем диференціальних рівнянь, що узагальнює властивості потенціальних чи псевдопотенціальних конструкцій над диференціальними рівняннями, і доведено теорему 4.2 у випадку таких систем. Доведення цієї теореми для двовимірних потенціальних систем разом з її наслідками наведено у підрозділі 4.8, а для інших потенціальних структур — винесено у додаток Б.

На основі теореми 4.2 у підрозділі 4.9 отримано критерій для визначення того, чи є закон збереження абелевого накриття еквівалентним локальному закону збереження вихідної системи. Цей критерій застосовано до аналізу ієрархії потенціальних законів збереження рівнянь конвекції–дифузії у додатку А. У підрозділі 4.10 знайдено цікавий зв'язок між невизначеністю потенціалів з абелевих накриттів та їх законами збереження, а у підрозділі 4.9 введено поняття потенціальної групи еквівалентності класу диференціальних рівнянь і розглянуто потенціальні перетворення еквівалентності рівнянь конвекції–дифузії.

4.1. Основні властивості законів збереження

Основні поняття, що стосуються законів збереження і потенціальних систем, наведено у $[7,14,31,236]$.

Означення 4.1. *Вектором, що зберігається,* системи $\mathcal{L}$ називають n-набір $F=(F^1[u],\dots,F^n[u])$, для якого повна дивергенція $\mathrm{Div}\,F:=D_iF^i$ дорівнює нулю на всіх розв'язках $\mathcal{L}$, тобто $\mathrm{Div}F|_{\mathcal{L}}=0$.

В означенні 4.1 і надалі $D_i=D_{x_i}$ позначає оператор повного диференціювання по змінній x_i, тобто $D_i=\partial_i+u^a_{\alpha+\delta_i}\partial_{u^a_\alpha}$, де δ_i — мультиіндекс, i-та компонента якого дорівнює 1, а всі інші — 0. Позначення $V|_{\mathcal{L}}$ означає, що значення V розглядаємо тільки на розв'язках системи $\mathcal{L}$.

Закон збереження системи $\mathcal{L}$ евристично визначають як вираз $\mathrm{Div}\,F$, що дорівнює нулю на її розв'язках. Більш строге означення законів збереження, що наведено нижче, ґрунтується на факторизації простору векторів, що зберігаються, по підпростору тривіальних векторів. Зауважимо, що існує також формалізоване означення законів збереження системи $\mathcal{L}$ як $(n-1)$-вимірних класів когомологій у так званому горизонтальному комплексі де Рама на нескінченному продовженні системи $\mathcal{L}$ $[7,274,279]$. Формалізоване означення є зручним для певних теоретичних міркувань і зводиться до звичайного, якщо локальні координати фіксовані.

Означення 4.2. Вектор F, що зберігається, називають *тривіальним*, якщо $F^i = \hat{F}^i + \check{F}^i$, де $\hat{F}^i$ і $\check{F}^i$ — диференціальні функції від u, $\hat{F}^i|_{\mathcal{L}} = 0$ і n-набір $\check{F} = (\check{F}^1, \dots, \check{F}^n)$ є нульовою дивергенцією (тобто $\mathrm{Div}\check{F} \equiv 0$).

Тривіальність, пов'язана з векторами, що дорівнюють нулю на розв'язках системи, можна легко виключити за допомогою обмеження на многовид системи, враховуючи всі її відповідні диференціальні наслідки. Характеризацію всіх нульових дивергенцій дає наступна теорема (див., наприклад [31, теорема 4.24]).

Теорема 4.3. *Набір $F = (F^1, \dots, F^n)$, $n \geq 2$, є нульовою дивергенцію ($\mathrm{Div}\, F \equiv 0$) тоді і тільки тоді, коли існують диференціальні функції $v^{ij}[u]$ такі, що $v^{ij} = -v^{ji}$ і $F^i = D_j v^{ij}$. При $n = 1$ будь-яка нульова дивергенція є сталою.*

Означення 4.3. Вектори F і F', що зберігаються, називають *еквівалентними*, якщо $F' - F$ є тривіальним вектором.

У випадку, коли $\mathcal{L}$ — система звичайних диференціальних рівнянь ($n = 1$), збережні величини (перші інтеграли) F і F' еквівалентні за означенням 4.3, якщо їх різниця стала на розв'язках системи $\mathcal{L}$.

Означення тривіальності й еквівалентності векторів, що зберігаються, природні з огляду на "емпіричне" означення законів збереження системи диференціальних рівнянь як дивергенції її векторів, що зберігаються, тобто дивергентних виразів, що дорівнюють нулю на всіх розв'язках системи. Наприклад, еквівалентним векторам відповідає один закон збереження. Це дозволяє сформулювати строге означення законів збереження (див., наприклад, [14]). А саме, для будь-якої системи $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь множина $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ її векторів, що зберігаються, — лінійний простір, а підмножина $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ тривіальних векторів — лінійний підпростір у $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Фактор-простір $\mathrm{CL}(\mathcal{L}) = \mathrm{CV}(\mathcal{L})/\,\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ співпадає з множиною класів еквівалентності в $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ по відношенню еквівалентності з означення 4.3.

Означення 4.4. Елементи з $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ називають *(локальними) законами збереження* системи $\mathcal{L}$, а сам фактор-простір $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ — *простором (локальних) законів збереження* системи $\mathcal{L}$.

Отже, визначення множини законів збереження системи $\mathcal{L}$ розглядають як знаходження простору $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$, що, у свою чергу, еквівалентно побудові або базису, якщо $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) < \infty$, або системи генераторів у нескінченновимірному випадку. Всі елементи з $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$, які лежать в одному класу еквівалентності, що визначає закон збереження $\mathcal{F}$, вважають *векторами густини* цього закону збереження. Причому елементи з $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ будемо додатково ототожнювати з їх представниками в $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$. Для $F \in \mathrm{CV}(\mathcal{L})$ і $\mathcal{F} \in \mathrm{CL}(\mathcal{L})$ позначення $F \in \mathcal{F}$ означає, що F є вектором густини закону збереження $\mathcal{F}$. На відміну від порядку $\operatorname{ord} F$ вектора густини F як максимального порядку похідних, що явно входять у F, *порядок* $\operatorname{ord} \mathcal{F}$ *закону збереження* $\mathcal{F}$ визначають як $\min\{\operatorname{ord} F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Поняття *ваги закону збереження* вводять аналогічно. Під лінійною залежністю законів збереження розуміємо їх лінійну залежність як елементів з $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$. Отже, в термінах "представників" закони збереження системи $\mathcal{L}$ вважають *лінійно залежними*, якщо існує лінійна комбінація їх представників, що є тривіальним вектором, що зберігається.

Підстановка будь-якого розв'язку u системи $\mathcal{L}$ у будь-який вектор F, що зберігається, приводить до нульової дивергенції, залежної тільки від x. Тоді функції v^{ij} від x, уведені згідно теореми 4.3 і неявно параметризовані функцією u, називають *потенціалами*, що відповідають вектору F. Рівняння $D_j v^{ij} = F^i$ визначає всі потенціали v^{ij} з точністю до нехтовного доданку $\breve{v}^{ij}$, де $\breve{v}^{ij} = -\breve{v}^{ji}$ і $D_j \breve{v}^{ij} = 0$. Діючи на потенціали, калібрувальне перетворення $\tilde{v}^{ij} = v^{ij} + \breve{v}^{ij}$ не впливає на відповідний вектор F. Це дає сталу і функціональну невизначеність у потенціалах при $n = 2$ і $n \geqslant 3$ відповідно.

Припустимо, що F і $\tilde{F}$ — еквівалентні збережні вектори, тобто існують нульова дивергенція $\check{F}$ і набір $\hat{F}$, що дорівнює нулю на розв'язках системи $\mathcal{L}$, причому $\tilde{F} = F + \check{F} + \hat{F}$. Внаслідок теореми 4.3 можемо зобразити $\check{F}$ у вигляді $\check{F}^i = D_j\check{v}^{ij}$ для деяких диференціальних функцій $\check{v}^{ij}[u] = -\check{v}^{ji}[u]$. Тоді набори потенціалів (v^{ij}) і $(\tilde{v}^{ij})$, відповідно асоційовані з F і $\tilde{F}$, зв'язані з точністю до нехтовних доданків $\check{v}^{ij}$ перетворенням $\tilde{v}^{ij} = v^{ij} + \check{v}^{ij}[u]$, що дозволяє вважати ці набори потенціалів еквівалентними. Отже, можна казати, що набір потенціалів (v^{ij}) (або $(\tilde{v}^{ij})$) асоційований із законом збереження, що містить вектори F і $\tilde{F}$.

4.2. Характеристики законів збереження

Нехай система $\mathcal{L}$ — цілком невироджена (у сенсі пункту 2.1.1). Застосовуючи лему Адамара до означення вектора, що зберігається, і інтегруючи по частинах, отримаємо, що дивергенцію будь-якого збережного вектора системи $\mathcal{L}$ можна завжди зобразити з точністю до відношення еквівалентності збережних векторів як лінійну комбінацію лівих частин незалежних рівнянь з $\mathcal{L}$ з коефіцієнтами λ^μ, які є функціями на підходящому просторі струменів $J^k(x|u)$:

$$\operatorname{Div} F = \lambda^\mu L^\mu. \tag{4.1}$$

Тут порядок k визначають системою $\mathcal{L}$ і порядком вектора F, $\mu = \overline{1, l}$.

Твердження 4.1. *Для будь-якого* $F \in \mathrm{CV}(\mathcal{L})$ *існують диференціальні функції* $\lambda^\mu[u]$ *і набір* $\hat{F} = (\hat{F}^1[u], \dots, \hat{F}^n[u])$*, що дорівнює нулю на розв'язках системи* $\mathcal{L}$*, такі, що* $\operatorname{Div} F = \lambda^\mu L^\mu + \operatorname{Div} \hat{F}$.

Якщо $F = (F^1[u], \dots, F^n[u])$ задовольняє рівність (4.1) для деяких $\lambda^\mu[u]$, то він очевидно є вектором, що зберігається, системи $\mathcal{L}$.

Означення 4.5. Формулу (4.1) і l-набір $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ називають відповідно *характеристичною формою* і *характеристикою* закону збереження, що містить вектор густини F.

Характеристика λ є *тривіальною*, якщо вона дорівнює нулю на всіх розв'язках системи $\mathcal{L}$. Оскільки $\mathcal{L}$ — невироджена, характеристики λ

і $\tilde{\lambda}$ задовольняють (4.1) для того ж F і, отже, називаються *еквівалентними* тоді і тільки тоді, коли $\lambda - \tilde{\lambda}$ — тривіальна характеристика. Подібно до векторів, що зберігаються, множина $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$ характеристик законів збереження системи $\mathcal{L}$ є лінійним простором, а підмножина $\mathrm{Ch}_0(\mathcal{L})$ тривіальних характеристик — лінійним підпростором у $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$. Фактор-простір $\mathrm{Ch}_\mathrm{f}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ch}(\mathcal{L})/\,\mathrm{Ch}_0(\mathcal{L})$ співпадає з множиною класів еквівалентності простору $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$ по відношенню еквівалентності характеристик.

Підкреслимо, що явна форма характеристик залежить від того, яку множину рівнянь вибрано для канонічного зображення системи $\mathcal{L}$.

Наступний результат [31] є наріжним для методів вивчення законів збереження, що ґрунтуються на формулі (4.1), включаючи теорему Ньотер і прямий метод у версії Анко і Блумена [54, 55].

Теорема 4.4. *Нехай $\mathcal{L}$ – нормальна цілком невироджена система диференціальних рівнянь. Тоді зображення законів збереження системи $\mathcal{L}$ у характеристичній формі* (4.1) *породжує лінійний ізоморфізм між* $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ *і* $\mathrm{Ch}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$.

Використовуючи властивості повної дивергенції, можемо виключити F з (4.1) і отримати умову лише для характеристики λ. А саме, диференціальна функція f є повною дивергенцією, тобто $f = \mathrm{Div}\, F$ для деякого n-набору F диференціальних функцій тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{E}(f) = 0$. Тут оператор Ейлера $\mathsf{E} = (\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_m)$ є m-набором диференціальних операторів

$$\mathsf{E}_a = (-D)^\alpha \partial_{u^a_\alpha}, \quad a = \overline{1, m},$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ пробігає множину мультиіндексів ($\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), $(-D)^\alpha = (-D_1)^{\alpha_1} \ldots (-D_m)^{\alpha_m}$. Отже, дія оператора Ейлера на (4.1) приводить до рівняння

$$\mathsf{E}(\lambda^\mu L^\mu) = \mathsf{D}^*_\lambda(L) + \mathsf{D}^*_L(\lambda) = 0, \tag{4.2}$$

що є необхідною і достатньою умовою на характеристики законів збереження системи $\mathcal{L}$. Матричні диференціальні оператори D_λ^* і D_L^* спряжені до похідних Фріше D_λ і D_L, тобто

$$\mathsf{D}_\lambda^*(L) = \left((-D)^\alpha \left(\frac{\partial \lambda^\mu}{\partial u_\alpha^a} L^\mu\right)\right), \qquad \mathsf{D}_L^*(\lambda) = \left((-D)^\alpha \left(\frac{\partial L^\mu}{\partial u_\alpha^a} \lambda^\mu\right)\right).$$

Оскільки завжди $\mathsf{D}_\lambda^*(L)\big|_{\mathcal{L}} = 0$, то з рівняння (4.2) випливає необхідна умова належності λ до $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$:

$$\mathsf{D}_L^*(\lambda)\big|_{\mathcal{L}} = 0. \tag{4.3}$$

Умову (4.3) можна розглядати як спряжену до критерію $\mathsf{D}_L(\eta)\big|_{\mathcal{L}} = 0$ інфінітезімальної інваріантності системи $\mathcal{L}$ відносно еволюційного векторного поля з характеристикою $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^m)$. Ось чому розв'язки рівняння (4.3) іноді називають *косиметріями* [67, 260] або *спряженими симетріями* [55].

Для дослідження зв'язку між характеристиками і векторами, що зберігаються, потрібно твердження про розв'язки рівняння $D_i F^i = H$, де $H = H[u]$ — задана диференціальна функція, $F^i = F^i[u]$ — невідомі (див. (5.151) і теорему 5.104 з [31]).

Теорема 4.5. *Будь-який розв'язок $F = (F^1, \dots, F^n)$ рівняння $D_i F^i[u] = H[u]$ можна зобразити у вигляді $F = \check{F} + \tilde{F}$, де n-набір $\check{F}[u]$ — нульова дивергенція ($D_i \check{F}^i = 0$), а n-набір $\tilde{F}[u]$ — частинний розв'язок цього рівняння з компонентами*

$$\tilde{F}^i = \int_0^1 \frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} D^\alpha\big(u^a\, \mathsf{E}_a^{\alpha+\delta_i}(H)[\kappa u]\big) d\kappa + \int_0^1 x^i H(\kappa x, 0, \dots, 0)\, d\kappa.$$

Тут E_a^α — оператор Ейлера вищих порядків, що діє на довільну диференціальну функцію $P[u]$ згідно

$$\mathsf{E}_a^\alpha(P) = \sum_{\beta \geqslant \alpha} \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!} (-D)^{\beta-\alpha} \frac{\partial P}{\partial u_\beta^a}.$$

Нагадаємо, що для будь-якого мультиіндекса α з компонентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, а символ δ_i пояснено після означення 4.1. Умова $\beta \geqslant \alpha$ для мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ означає, що $\beta_1 \geqslant \alpha_1, \dots, \beta_n \geqslant \alpha_n$.

У дійсності потрібним надалі є лише наслідок теореми 4.5. Легко показати: якщо H не залежить від похідних функції u^a для деякого фіксованого значення a, то набір $\tilde{F}$ з теореми 4.5 має ту ж властивість з тим самим значенням a.

Наслідок 4.1. *Нехай вектор F, що зберігається, системи $\mathcal{L}$ задовольняє рівність $D_iF^i = H$, де диференціальна функція $H[u]$ не залежить від похідних функцій $u^{a_1}, \dots, u^{a_q}$ для фіксованих значень $a_1, \dots, a_q$. Тоді вектор F еквівалентний деякому вектору, що зберігається, системи $\mathcal{L}$, не залежному від похідних функцій $u^{a_1}, \dots, u^{a_q}$.*

4.3. Еквівалентності законів збереження

Класифікацію законів збереження можна суттєво спростити і систематизувати, додатково враховуючи перетворення симетрії досліджуваної системи або перетворення еквівалентності цілого класу систем. Ця проблема подібна до групової класифікації диференціальних рівнянь. Справедливе наступне твердження про перетворення рівнянь у збережній формі (див., наприклад, [236, 241]).

Твердження 4.2. *Будь-яке точкове перетворення $\mathcal{T}$ відображає клас рівнянь у збережній формі на себе. Більш точно, перетворення $\mathcal{T}$: $\tilde{x} = \mathcal{T}^x(x,u)$, $\tilde{u} = \mathcal{T}^u(x,u)$, продовжене на простір струменів J^{r+1}, перетворює рівняння $D_iF^i = 0$ у рівняння $\tilde{D}_i\tilde{F}^i = 0$. Перетворений вектор $\tilde{F} = \mathcal{T}^F(x, u_{(r)}, F)$ визначають за формулою*

$$\tilde{F}^i(\tilde{x}, \tilde{u}_{(r)}) = \frac{D_{x_j}\tilde{x}_i}{|D_x\tilde{x}|} F^j(x, u_{(r)}). \tag{4.4}$$

Тут $|D_x\tilde{x}|$ — визначник матриці $D_x\tilde{x} = (D_{x_j}\tilde{x}_i)$.

Зауваження 4.1. У випадку однієї залежної змінної ($m = 1$) $\mathcal{T}$ може бути контактним перетворенням: $\tilde{x} = \mathcal{T}^x(x, u_{(1)})$, $\tilde{u}_{(1)} = \mathrm{pr}_{(1)}\mathcal{T}^u(x, u_{(1)})$.

Доведення повністю аналогічне. Подібні зауваження мають місце для усіх наведених нижче тверджень.

Означення 4.6. Нехай G — група симетрій системи $\mathcal{L}$. Два закони збереження з векторами густини F і F' назвемо *G-еквівалентними*, якщо існує таке перетворення $\mathcal{T} \in G$, що вектори $\tilde{F} = \mathcal{T}^F$ і F' еквівалентні в сенсі означення 4.3.

Будь-яке перетворення $\mathcal{T} \in G$ індукує лінійне взаємно-однозначне відображення $\mathcal{T}_*$ у $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$, яке перетворює тривіальні вектори у тривіальні (тобто підпростір $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ інваріантний відносно $\mathcal{T}_*$) і, отже, індукує лінійне взаємно-однозначне відображення $\mathcal{T}_\mathrm{f}$ в $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$. Очевидно, що $\mathcal{T}_\mathrm{f}$ зберігає лінійну (не)залежність елементів у $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ і відображає базис (множину генераторів) простору $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ у базис (множину генераторів) того самого простору. Отже, можна розглянути *відношення G-еквівалентності законів збереження*, добре визначене на $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$, і використати його для класифікації законів збереження.

Твердження 4.3. *Будь-яке точкове перетворення $\mathcal{T}$ між системами $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ індукує лінійне взаємно-однозначне відображення $\mathcal{T}_*$ з $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ на $\mathrm{CV}(\tilde{\mathcal{L}})$, яке відображає $\mathrm{CV}_0(\mathcal{L})$ на $\mathrm{CV}_0(\tilde{\mathcal{L}})$ і породжує лінійне взаємно-однозначне відображення $\mathcal{T}_\mathrm{f}$ з $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ на $\mathrm{CL}(\tilde{\mathcal{L}})$.*

Наслідок 4.2. *Будь-яке точкове перетворення $\mathcal{T}$ між системами $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ індукує лінійне взаємно-однозначне відображення з $\mathrm{Ch}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$ на $\mathrm{Ch}_\mathrm{f}(\tilde{\mathcal{L}})$.*

Можна отримати явну формулу для відповідності між характеристиками систем $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$, що очевидно залежить від зображення систем $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ як систем диференціальних рівнянь [236, 241].

Твердження 4.4. *Нехай $\mathcal{T}$ — точкове перетворення системи $\mathcal{L}$ у систему $\tilde{\mathcal{L}}$ і $\tilde{L}^\mu = \Lambda^{\mu\nu}L^\nu$, де $\Lambda^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu\alpha}D^\alpha$, $\Lambda^{\mu\nu\alpha}$ — диференціальні функції, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ пробігає мультиіндекси ($\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), $\mu, \nu = \overline{1, l}$.*

(Кількість мультиіндексів α, для яких $\Lambda^{\mu\nu\alpha} \neq 0$, скінченна.) Тоді перетворення $\mathcal{T}$ індукує лінійне взаємно-однозначне відображення з $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$ на $\mathrm{Ch}(\tilde{\mathcal{L}})$, обернене до якого визначається за формулою

$$\lambda^{\mu} = \Lambda^{\mu\nu *}(|D_x\tilde{x}|\tilde{\lambda}^{\nu}),$$

де $\Lambda^{\mu\nu *} = (-D)^{\alpha} \cdot \Lambda^{\nu\mu\alpha}$ — диференціальний оператор, формально спряжений до $\Lambda^{\nu\mu}$.

Зауваження 4.2. $\Lambda^{\mu\nu\alpha} = 0$ для $|\alpha| > 0$ у багатьох випадках, наприклад, якщо $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ — окремі диференціальні рівняння ($l = 1$). Тоді оператори $\Lambda^{\mu\nu}$ — просто диференціальні функції (більш точно, оператори множення на диференціальні функції), тому $\Lambda^{\mu\nu *} = \Lambda^{\nu\mu}$.

Для деякого класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ систем диференціальних рівнянь розглянемо $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{(\theta, \mathrm{CL}(\mathcal{L}_\theta)) \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ і $P(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{(\theta, \mathcal{F}) \mid \theta \in \mathcal{S}, \mathcal{F} \in \mathrm{CL}(\mathcal{L}_\theta)\}$. Згідно твердження 4.3 дія $G^{\sim} = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ на $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\{\mathrm{CV}(\mathcal{L}_\theta) \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ разом з чистим відношенням еквівалентності збережних векторів природно породжує відношення еквівалентності на $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ і $P(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. (Замість окремого закону збереження можна розглядати підпростори законів збереження фіксованої розмірності.)

Означення 4.7. Нехай $\theta, \theta' \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F} \in \mathrm{CL}(\mathcal{L}_\theta)$, $\mathcal{F}' \in \mathrm{CL}(\mathcal{L}_{\theta'})$, $F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}'$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, \mathcal{F})$ і $(\mathcal{L}_{\theta'}, \mathcal{F}')$ називають $G^{\sim}$*-еквівалентними*, якщо існує перетворення $\mathcal{T} \in G^{\sim}$, що переводить систему $\mathcal{L}_\theta$ у систему $\mathcal{L}_{\theta'}$, причому вектори $\tilde{F} = \mathcal{T}^F$ і F' еквівалентні у сенсі означення 4.3.

Класифікацію законів збереження по $G^{\sim}$ можна розуміти як класифікацію в $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ (або $P(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$) по визначеному відношенню еквівалентності. Цю проблему можна дослідити у спосіб, подібний до групової класифікації класів систем диференціальних рівнянь, особливо, якщо вона сформульована у термінах характеристик. А саме, побудуємо спочатку закони збереження, визначені для всіх значень довільних елементів. (Відповідні вектори густини можуть залежати від довільних елементів.) Потім довільні елементи, для кожного з яких система допускає додаткові закони збереження, прокласифікуємо по групі еквівалентності.

Аналогічно на множинах $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ і $P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ можна ввести відношення еквівалентності, породжені або узагальненнями звичайних груп еквівалентності, або всіма допустимими точковими або контактними перетвореннями в парах рівнянь з $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Усі введені відношення дійсно є відношеннями еквівалентності, тобто мають властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

4.4. Дія операторів симетрії на закони збереження

Якщо система $\mathcal{L}$ допускає однопараметричну групу перетворень, то інфінітезімальний генератор $Q = \xi^i\partial_i + \eta^a\partial_{u^a}$ цієї групи можна використати для побудови нових законів збереження з відомих. А саме, диференціюючи рівняння (4.4) по параметру ε і підставляючи $\varepsilon = 0$, отримаємо новий вектор, що зберігається, виражений через коефіцієнти оператора Q і відомий вектор.

Твердження 4.5. *Нехай* $Q = \xi^i\partial_i+\eta^a\partial_{u^a}$ *— оператор лїївської симетрії системи* $\mathcal{L}$ *і* $F \in \mathrm{CV}(\mathcal{L})$*. Тоді диференціальні функції*

$$\widetilde{F}^i = -Q_{(r)}F^i + (D_j\xi^i)F^j - (D_j\xi^j)F^i \tag{4.5}$$

також утворюють вектор, що зберігається, системи $\mathcal{L}$*.*

На відміну від (4.4), формула (4.5) добре відома і допускає пряме розширення на узагальнені симетрії. Див., наприклад, [15,31,51] для узагальнених симетрій в еволюційному вигляді ($\xi^i = 0$) і [101] для загального випадку. Покажемо, що в дійсності достатньо обмежитися версією формули (4.5) для еволюційного вигляду симетрій.

Існує добре визначене відношення еквівалентності на просторі $\mathrm{GS}(\mathcal{L})$ узагальнених симетрій системи $\mathcal{L}$ [214]. А саме, оператори узагальненої симетрії Q і Q' системи $\mathcal{L}$ називають еквівалентними, якщо різниця їх еволюційних форм дорівнює нулю на розв'язках системи $\mathcal{L}$. Відповідний фактор-простір позначимо $\mathrm{GS}_\mathrm{f}(\mathcal{L})$. Відношення еквівалентності на $\mathrm{GS}(\mathcal{L})$ і $\mathrm{CV}(\mathcal{L})$ узгоджені в силу наступного твердження.

Твердження 4.6. *Дія еквівалентних операторів узагальненої симетрії на еквівалентні вектори, що зберігаються, породжує еквівалентні вектори.*

Доведення. Покажемо спочатку, що оператор узагальненої симетрії Q і його еволюційний вигляд $\hat{Q}$, діючи на той самий збережний вектор, породжують еквівалентні збережні вектори. Дійсно, оскільки $Q_{(\infty)} = \hat{Q}_{(\infty)} + \xi^i D_i$, то

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^i &= -\hat{Q}_{(\infty)}F^i + (D_j\xi^i)F^j - (D_j\xi^j)F^i - \xi^j D_j F^i \\ &= -\hat{Q}_{(r)}F^i + D_j(\xi^i F^j - \xi^j F^i) - \xi^i D_j F^j = -\hat{Q}_{(r)}F^i + \check{F}^i + \hat{F}^i,\end{aligned}$$

де $\widetilde{F}^i$ — компоненти збережного вектора $\widetilde{F} = Q[F]$, визначені в (4.5), $Q_{(\infty)}$ і $\hat{Q}_{(\infty)}$ — формальні нескінченні продовження операторів Q і $\hat{Q}$ відповідно. Диференціальні функції $\check{F}^i = D_j(\xi^i F^j - \xi^j F^i)$ є компонентами нульової дивергенції і $\hat{F}^i = -\xi^i D_j F^j$ дорівнюють нулю на розв'язках системи $\mathcal{L}$. Отже, $\widetilde{F}$ і $\hat{Q}[F] = -\hat{Q}_{(r)}F$ еквівалентні.

Якщо різниця операторів узагальненої симетрії в еволюційному вигляді дорівнює нулю на розв'язках системи $\mathcal{L}$, то різниця їх дій на збережний вектор очевидно має ту ж властивість.

Дія будь-якого оператора узагальненої симетрії в еволюційному вигляді на тривіальний збережний вектор дає тривіальний вектор. Дійсно, розглянемо оператор $\hat{Q} \in \mathrm{GS}(\mathcal{L})$ в еволюційному вигляді порядку $\hat{r}$ і тривіальний збережний вектор F системи $\mathcal{L}$, тобто $F = \hat{F} + \check{F}$, де $\hat{F}\big|_{\mathcal{L}} = 0$ і $\operatorname{Div}\check{F} = 0$. В силу леми Адамара і умови $\hat{F}\big|_{\mathcal{L}} = 0$, кожну компоненту вектора $\hat{F}$ можна представити у вигляді $\hat{F}^i = \lambda^{i\mu}L^{r\mu}$. Тут r — порядок вектора $\hat{F}$, $\lambda^{i\mu}$ і $L^{r\mu}$, $\mu = 1, \dots, l_r$, — гладкі функції в просторі струменів $J^{(r)}$, набір $(L^{r1}, \dots, L^{rl_r})$ визначає многовид $\mathcal{L}_{(r)}$ у $J^{(r)}$. Тоді $\hat{Q}_{(r)}\hat{F}^i = L^{r\mu}\hat{Q}_{(r)}\lambda^{i\mu} + \lambda^{i\mu}\hat{Q}_{(r)}L^{r\mu} = 0$ на $\mathcal{L}_{(r')}$, де $r' = r + \hat{r}$, оскільки $\hat{Q} \in \mathrm{GS}(\mathcal{L})$. Це означає, що $\hat{Q}[\hat{F}]\big|_{\mathcal{L}} = 0$. Компоненти нульової дивергенції $\check{F}$ зображено у вигляді $\check{F}^i = D_j v^{ij}$, де v^{ij} — диференціальні функції від u, для яких $v^{ij} = -v^{ji}$. З рівності

$$\hat{Q}[\check{F}] = -\hat{Q}_{(\infty)} D_j v^{ij} = -D_j \hat{Q}_{(\infty)} v^{ij} = -D_j \hat{v}^{ij}$$

випливає, що $\hat{Q}[\check{F}]$ — також нульова дивергенція, оскільки $\hat{v}^{ij} = \hat{Q}_{(\infty)} v^{ij}$ є диференціальними функціями від u і $\hat{v}^{ij} = -\hat{v}^{ji}$. Отже, вектор $\hat{Q}[F] = \hat{Q}[\hat{F}] + \hat{Q}[\check{F}]$ тривіальний як сума набору $\hat{Q}[\hat{F}]$, що дорівнює нулю на розв'язках системи $\mathcal{L}$, і нульової дивергенції $\hat{Q}[\check{F}]$.

Нехай $Q, Q' \in \mathrm{GS}(\mathcal{L})$, $F, F' \in \mathrm{CV}(\mathcal{L})$, $Q \sim Q'$ і $F \sim F'$. Тоді $Q[F] \sim Q'[F']$, оскільки

$$Q'[F'] - Q[F] = (Q' - \hat{Q}')[F'] - (Q - \hat{Q})[F] + (\hat{Q}' - \hat{Q})[F'] + \hat{Q}[F' - F]$$

є тривіальним збережним вектором системи $\mathcal{L}$ внаслідок наведених міркувань. $\square$

Наслідок 4.3. *Для будь-якої системи $\mathcal{L}$ формула* (4.5) *дає добре визначену дію елементів з* $\mathrm{GS_f}(\mathcal{L})$ *на закони збереження системи $\mathcal{L}$.*

Ось чому формулу (4.5) зазвичай наводять лише для операторів узагальненої симетрії в еволюційному вигляді ($\xi^i = 0$) і тільки нееквівалентні оператори узагальненої симетрії можуть породжувати нові закони збереження з відомих. Зауважимо додатково, що застосування формули (4.5) не гарантує побудови нетривіальних векторів, що зберігаються, з нетривіального вектору [15, 31, 51].

4.5. Закони збереження еволюційних рівнянь другого порядку

У відомій статті [89] про закони збереження параболічних рівнянь досліджено, зокрема, закони збереження $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку з правими частинами, незалежними від t. Доведено, що можливими розмірностями просторів законів збереження для таких рівняння є 0, 1, 2 і ∞. Для кожного із значень 1, 2 і ∞ описано рівняння, що мають простори законів збереження цієї розмірністі. Зокрема стверджувалось, що еволюційне рівняння $u_t = H(x, u, u_x, u_{xx})$ з трьома незалежними законами збереження лінеаризовне.

Ці результати можна легко поширити на загальний клас $(1 + 1)$-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку, що мають вигляд

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}), \tag{4.6}$$

де $H_{u_{xx}} \neq 0$. Більш того, зняття обмеження, що праві частини рівняння не залежать від t, приводить до розширення множини допустимих перетворень і поліпшення трансформаційних властивостей класу. (А саме, клас (4.6) є нормалізованим відносно і точкових, і контактних перетворень, див. підрозділ 2.4.) Це дозволяє суттєво спростити представлення результатів і сформулювати їх стисло.

Доведемо деякі допоміжні твердження про умови на рівняння з розглядуваного класу, що мають ненульові закони збереження, порядки законів збереження і канонічну форму їх векторів густини.

Лема 4.1. *Будь-який закон збереження $(1+1)$-вимірного еволюційного рівняння $\mathcal{L}$ другого порядку містить вектор густини (F, G) з компонентами $F = F(t, x, u, u_x)$ і $G = -F_{u_x}H + G^1$, де $G^1 = G^1(t, x, u, u_x)$.*

Доведення. Нехай $(F, G) \in \mathrm{CV}(\mathcal{L})$ і $\mathrm{ord}(F, G) = r$. У силу рівняння $\mathcal{L}$ та його диференціальних наслідків і з точністю до еквівалентності векторів, що зберігаються, можна вважати, що F і G залежать тільки від t, x і $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = 0, \dots, r'$, де $r' \leq 2r$. Припустимо, що $r' > 2$. Розвинемо повні похідні у визначальному співвідношенні $(D_tF + D_xG)|_{\mathcal{L}} = 0$ для векторів, що зберігаються, і врахуємо диференціальні наслідки рівняння $\mathcal{L}$, що мають вигляд $u_{tj} = D_x^j H$, де $u_{tj} = \partial^{j+1}u/\partial t\partial x^k$, $j = 0, \dots, r'$. Потім розщепимо отриману умову

$$F_t + F_{u_j} D_x^j H + G_x + G_{u_j} u_{j+1} = 0 \tag{4.7}$$

відносно найвищих похідних, що виникають у ній. (Тут за індексами, що повторюються, йде підсумовування.) Так, коефіцієнти при $u_{r'+2}$ і $u_{r'+1}$ дають рівняння $F_{u_{r'}} = 0$, $G_{u_{r'}} + H_{u_2}F_{u_{r'-1}} = 0$, звідки

$$F = \hat{F}, \quad G = -S\hat{F}_{u_{r'-1}}u_{r'} + \hat{G},$$

де $\hat{F}$ і $\hat{G}$ — функції від t, x, u, u_1, …, $u_{r'-1}$. Зібравши члени з $u_{r'}^2$, додатково отримаємо $\hat{F}_{u_{r'-1}u_{r'-1}} = 0$, тобто $\hat{F} = \check{F}^1 u_{r'-1} + \check{F}^0$, де $\check{F}^1$ і $\check{F}^0$ залежать щонайбільше від t, x, u, u_1, …, $u_{r'-2}$. Розглянемо вектор з густиною $\tilde{F} = F - D_x\Phi$ і потоком $\tilde{G} = G + D_t\Phi$, де $\Phi = \int \check{F}^1 du_{r'-2}$. Він еквівалентний вихідному вектору, причому

$$\tilde{F} = \tilde{F}(t, x, u, u_1, \ldots, u_{r'-2}), \quad \tilde{G} = \tilde{G}(t, x, u, u_1, \ldots, u_{r'-1}).$$

Повторюючи описану вище процедуру необхідну кількість разів, отримаємо вектор, що зберігається, еквівалентний вектору (F, G) і залежний тільки від t, x, u, u_1 і u_2. Отже, можна одразу вважати, що $r' \leq 2$. Тоді коефіцієнти біля u_4 і u_3 у (4.7) дають рівняння $F_{u_2} = 0$ і $G_{u_2} + H_{u_2}F_u = 0$, з яких випливає потрібне твердження. □

Наслідок 4.4. *Будь-який ненульовий закон збереження рівняння $\mathcal{L}$ має порядок 1.*

Доведення. У силу леми 4.1, будь-який закон збереження рівняння $\mathcal{L}$ містить вектор густини (F, G) з компонентами $F = F(t, x, u, u_x)$ і $G = -F_{u_x}u_t + G^1$, де $G^1 = G^1(t, x, u, u_x)$. $(F_{u_x}, G^1_{u_x}) \neq (0, 0)$, оскільки інакше з умови (4.7) випливало б, що $F_u = G^1_u = 0$ і, отже, (F, G) був би тривіальним вектором, що зберігається. Всі тривіальні вектори, що зберігаються, належать нульовому закону збереження. □

Нижче розглянемо тільки вектори, що зберігаються, у *зведеному вигляді*, який виникає у лемі 4.1. Для таких векторів умову (4.7) можна уточнити і розвинути у

$$H(F_u - F_{xu_x} - F_{uu_x}u_x - F_{u_xu_x}u_{xx}) + F_t + G^1_x + G^1_u u_x + G^1_{u_x}u_{xx} = 0. \quad (4.8)$$

Зауваження 4.3. Вектор у зведеному вигляді є тривіальним тоді і тільки тоді, коли його компоненти залежать щонайбільше від t і x. Якщо одна з компонент вектора у зведеному вигляді залежить щонайбільше від t і x, то те саме справедливе і для іншої компоненти.

Лема 4.2. *Припустимо, що рівняння вигляду* (4.6) *має нетривіальний збережний вектор* (F, G) *у зведеному вигляді, де додатково* $F_{u_x u_x} = 0$. *Тоді вектор* (F, G) *еквівалентний вектору* $(\tilde{F}, \tilde{G})$ *з* $\tilde{F} = \tilde{F}(t, x, u)$ *і* $\tilde{G} = \tilde{G}(t, x, u, u_x)$, *де* $\tilde{F}_u \neq 0$. *Більш того, у цьому випадку маємо* $H_{u_{xx}u_{xx}} = 0$.

Доведення. За припущенням, $F = F^1 u_x + F^0$ і $G = -F^1 H + G^1$, де $F^1 = F^1(t, x, u)$, $F^0 = F^0(t, x, u)$ і $G^1 = G^1(t, x, u, u_x)$. Покладемо $\tilde{F} = F - D_x \Phi$ і $\tilde{G} = G + D_t \Phi$, де $\Phi = \int \check{F}^1 du$. Тоді $\tilde{F}_{u_x} = 0$, $\tilde{G}_{u_{xx}} = 0$ і $(\tilde{F}, \tilde{G})$ — вектор, що зберігається, еквівалентний вектору (F, G). $\tilde{F}_u \neq 0$ оскільки інакше вектор $(\tilde{F}, \tilde{G})$ тривіальний (див. зауваження 4.3). Підставляючи $(\tilde{F}, \tilde{G})$ в умову (4.8) і розв'язуючи її відносно H, отримаємо лінійну функцію від u_x з коефіцієнтами, залежними від t, x і u. □

Наслідок 4.5. *Будь-який закон збереження рівняння* $\mathcal{L}$ *вигляду* (4.6), *де* $H_{u_{xx}u_{xx}} = 0$, *містить вектор густини* (F, G) *з* $F = F(t, x, u)$ *і* $G = G(t, x, u, u_x)$.

Доведення. З умови (4.8) і $H_{u_{xx}u_{xx}} = 0$ випливає, що будь-який збережний вектор у зведеному вигляді рівняння $\mathcal{L}$ має густину, лінійну по u_x. Тоді потрібне твердження випливає з леми 4.2. □

Лема 4.3. *Якщо рівняння* $\mathcal{L}$ *вигляду* (4.6) *має ненульовий закон збереження, то* H *— дробово-лінійна функція від* u_{xx}.

Доведення. Припустимо, що H не є дробово-лінійною функцією від u_{xx}. Фіксуємо будь-який нетривіальний збережний вектор (F, G) у зведеному вигляді рівняння $\mathcal{L}$. Такий вектор обов'язково існує згідно леми 4.1. Розщеплення умови (4.8) по u_{xx} дає $F_{u_x u_x} = 0$. Тоді у силу леми 4.2 або функція H лінійна по u_{xx}, або вектор (F, G) тривіальний. Обидві можливості суперечать зробленим припущенням. □

Контактні перетворення еквівалентності можна використати для зведення рівнянь з класу (4.6), що мають ненульові закони збереження, до спеціального вигляду в залежності від розмірностей відповідних просторів законів збереження. Насправді зведення рівнянь здійснюється через зведення законів збереження.

Нагадаємо, що $G^{\sim}_{\mathrm{c}}$ і $G^{\sim}_{\mathrm{p}}$ позначають відповідно контактну і точкову групи еквівалентності класу (4.6) (див. підрозділ 2.4).

Лема 4.4. *Будь-яка пара $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, де $\mathcal{L}$ — рівняння вигляду* (4.6) *і $\mathcal{F}$ — його ненульовий закон збереження, $G^{\sim}_{\mathrm{c}}$-еквівалентна парі $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{F}})$, де $\tilde{\mathcal{L}}$ — рівняння того ж вигляду, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — його закон збереження з характеристикою 1.*

Доведення. Нехай рівняння $\mathcal{L}$ з класу (4.6) має ненульовий закон збереження $\tilde{\mathcal{F}}$. Будь-яке перетворення $\mathcal{T}$ з $G^{\sim}_{\mathrm{c}}$ відображає $\mathcal{L}$ у рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ з того ж класу (4.6) і індукує відображення з $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ у $\mathrm{CL}(\tilde{\mathcal{L}})$. При цьому вектори, що зберігаються, рівняння $\mathcal{L}$ переходять у вектори, що зберігаються, рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ за формулою [236, 241]

$$\tilde{F} = \frac{F}{D_xX}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{T_t} + \frac{D_tX}{D_xX}\frac{F}{T_t}.$$

Зафіксуємо ненульовий закон збереження $\mathcal{F}$ рівняння $\mathcal{L}$ і збережний вектор (F, G) у зведеному вигляді, що належить $\mathcal{F}$, та одразу покладемо $T = t$. Компоненти відповідного збережного вектора $(\tilde{F}, \tilde{G})$ перетвореного рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ залежать щонайбільше від $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}}$. Вектор $(\tilde{F}, \tilde{G})$ асоційований з характеристикою 1 тоді і тільки тоді, коли існує функція $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{x}})$ така, що $\tilde{F} = \tilde{u} + D_{\tilde{x}}\tilde{\Phi}$, тобто у старих координатах $D_x\Phi + UD_xX = F$, де $\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{x}}) = \Phi(t, x, u, u_x)$. Після розщеплення останнього рівняння по u_{xx} отримаємо систему

$$\Phi_x + UX_x + (\Phi_u + UX_u)u_x = F, \quad \Phi_{u_x} + UX_{u_x} = 0. \tag{4.9}$$

Диференціальним наслідком системи (4.9), доповненої контактною умовою (2.4), є рівняння $\Phi_u + UX_u = F_{u_x}$. Щоб вивести його, потрібно подіяти на перше і друге рівняння системи (4.9) відповідно операторами ∂_{u_x} і $\partial_x + u_x\partial_u$ і відняти другий наслідок від першого, враховуючи контактну умову (2.4). Тоді з системи (4.9) випливає також рівняння $\Phi_x + UX_x = F - u_xF_{u_x}$. У результаті маємо систему

$$\begin{aligned}&\Phi_x + UX_x = F - u_xF_{u_x}, \quad \Phi_u + UX_u = F_{u_x},\\ &\Phi_{u_x} + UX_{u_x} = 0.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Обернені міркування показують, що з (4.10) випливають рівняння (2.4) і (4.9). Отже, об'єднана система (2.4), (4.9) еквівалентна системі (4.10).

Для завершення доведення достатньо перевірити, що для будь-якої функції $F = F(t, x, u, u_x)$ з $(F_u, F_{u_x}) \neq (0, 0)$ система (4.10) має розв'язок (X, U, Φ), який додатково задовольняє другу умову з (2.3).

Спочатку розглянемо випадок $F_{u_xu_x} \neq 0$ і шукатимемо розв'язки з $X_{u_x} \neq 0$. Тоді третє рівняння з (4.10) означає, що $\Phi_{u_x} \neq 0$ і $U = -\Phi_{u_x}/X_{u_x}$, а два перші рівняння набувають вигляду

$$\Phi_x - \frac{X_x}{X_{u_x}}\Phi_{u_x} = F - u_xF_{u_x}, \quad \Phi_u - \frac{X_u}{X_{u_x}}\Phi_{u_x} = F_{u_x}. \tag{4.11}$$

Умовою сумісності системи (4.11) як перевизначеної системи відносно Φ є рівняння

$$u_xF_{u_xu_x}X_x + F_{u_xu_x}X_u + (F_x - u_xF_{xu_x} - F_{uu_x})X_{u_x} = 0$$

відносно X. Оскільки $F_{u_xu_x} \neq 0$, це рівняння має розв'язок X^0 з $X^0_{u_x} \neq 0$. Підстановка X^0 у (4.11) дає сумісну систему відносно Φ. Візьмемо розв'язок Φ^0 цієї система і покладемо $U^0 = -\Phi^0_{u_x}/X^0_{u_x}$. Вибраний набір (X^0, U^0, Φ^0) задовольняє систему (4.10). Умова невиродженості (2.3) також задовільнено. Дійсно, нехай це невірно. Тоді $U = \Psi(t, X)$ для деякої функції Ψ двох аргументів і з системи (4.9) випливає рівність

$$F = \Phi_x + \Psi X_x + (\Phi_u + \Psi X_u)u_x + (\Phi_{u_x} + \Psi X_{u_x})u_{xx} = D_x(\Phi + \textstyle\int \Psi\, dX),$$

тобто (F, G) — тривіальний вектор, що зберігається. Це суперечить початковому припущенню на (F, G).

Якщо $F_{u_x u_x} = 0$, то в силу леми 4.2 без обмеження загальності можна вважати, що $F_{u_x} = 0$. Тоді $F_u \neq 0$. (Інакше (F, G) був би тривіальним вектором, що зберігається, див. зауваження 4.3.) Очевидно, що набір $(X, U, \Phi) = (x, F, 0)$ задовольняє (4.10) і другу умову з (2.3). $\square$

Наслідок 4.6. *Кожна пара* $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$*, де* $\mathcal{L}$ *— квазілінійне рівняння вигляду* (4.6)*, а* $\mathcal{F}$ *— його ненульовий закон збереження,* $G^{\sim}_{\mathrm{p}}$*-еквівалентна парі* $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{F}})$*, де* $\tilde{\mathcal{L}}$ *— також квазілінійне рівняння вигляду* (4.6)*, а* $\tilde{\mathcal{F}}$ *— його закон збереження з характеристикою 1.*

Доведення. Згідно наслідку 4.5, будь-який закон збереження квазілінійного рівняння вигляду (4.6) містить вектор густини (F, G) з $F = F(t, x, u)$. Тоді потрібне твердження випливає з доведення леми 4.4 для випадку $F_{u_x} = 0$. $\square$

Наслідок 4.7. $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 1$ *тоді і тільки тоді, коли рівняння* $\mathcal{L}$ *можна (локально) звести контактним перетворенням до вигляду* $u_t = D_x \hat{H}(t, x, u, u_x)$*, де* $\hat{H}_{u_x} \neq 0$*. Рівняння* $\mathcal{L}$ *квазілінійне тоді і тільки тоді, коли це контактне перетворення є продовженням точкового перетворення.*

Доведення. Припустимо, що $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 1$. Фіксуємо ненульовий закон збереження $\mathcal{F}$ рівняння $\mathcal{L}$. У силу леми 4.4 пару $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ можна звести контактним перетворенням $\mathcal{T}$ до пари $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{F}})$, де рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ має вигляд $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{H}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{x}}, \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}})$, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — його закон збереження з характеристикою 1. Якщо рівняння $\mathcal{L}$ квазілінійне, перетворення $\mathcal{T}$ є продовженням точкового перетворення (див. наслідок 4.7). Наявність характеристики 1 означає, що для деякого вектора $(\tilde{F}, \tilde{G})$ з $\tilde{\mathcal{F}}$ виконується рівність $D_{\tilde{t}}\tilde{F} + D_{\tilde{x}}\tilde{G} = \tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{H}$. Отже, з точністю до доданку, що є нульовою дивергенцією, маємо $\tilde{F} = \tilde{u}$ і $\tilde{H} = -D_{\tilde{x}}\tilde{G}$. Для завершення доведення достатньо покласти $\hat{H} = -\tilde{G}$.

Навпаки, нехай рівняння $\mathcal{L}$ (локально) зводиться контактним перетворенням $\mathcal{T}$ до рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = D_{\tilde{x}}\hat{H}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u},\tilde{u}_{\tilde{x}})$, де $\hat{H}_{\tilde{u}_{\tilde{x}}} \neq 0$. Перетворене рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = D_{\tilde{x}}\hat{H}$ має щонайменше один ненульовий закон збереження. Це закон збереження $\tilde{\mathcal{F}}$, що має характеристику 1. Прообраз закону збереження $\tilde{\mathcal{F}}$ відносно $\mathcal{T}$ є ненульовим законом збереження рівняння $\mathcal{L}$, тобто $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 1$. Якщо $\mathcal{T}$ — точкове перетворення, то рівняння $\mathcal{L}$ повинно бути квазілінійним як прообраз квазілінійного рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = D_{\tilde{x}}\hat{H}$ відносно цього перетворення. $\square$

Зауваження 4.4. Будь-який закон збереження рівняння $u_t = D_x\hat{H}(t,x,u,u_x)$ містить вектор густини (F,G), де $F = F(t,x,u)$ і $G = -F_u\hat{H} + G^0$ з $G^0 = G^0(t,x,u)$. Для такого вектору умова (4.8) набуває вигляду $F_t - (F_{xu} + F_{uu}u_x)\hat{H} + G^0_x + G^0_u u_x = 0$.

Зокрема, якщо додатково $F_{xu} = F_{uu} = 0$, то з умови (4.8) випливають рівняння $G^0_u = 0$ і $F_t + G^0_x = 0$, а тому $F_{tu} = 0$. В результаті $F = cu + F^0(t,x)$ для деякої сталої c і деякої функції $F^0 = F^0(t,x)$. Це означає, що вектор (F,G) при таких додаткових обмеженнях належить закону збереження, лінійно залежному з законом збереження, що має характеристику 1.

З наведених міркувань також випливає, що простір законів збереження рівняння $u_t = D_x\hat{H}(t,x,u,u_x)$ одновимірний, якщо права частина $\hat{H}$ не є дробово-лінійною функцією від u_x.

Лема 4.5. *Будь-яка трійка $(\mathcal{L},\mathcal{F}^1,\mathcal{F}^2)$, де $\mathcal{L}$ — рівняння вигляду* (4.6)*, а $\mathcal{F}^1$ і $\mathcal{F}^2$ — його лінійно незалежний закони збереження, $G^\sim_\mathrm{c}$-еквівалентна трійці $(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mathcal{F}}^1,\tilde{\mathcal{F}}^2)$, де $\tilde{\mathcal{L}}$ — рівняння того ж вигляду, а $\tilde{\mathcal{F}}^1$ і $\tilde{\mathcal{F}}^2$ — його закони збереження з характеристиками 1 і $\tilde{x}$.*

Доведення. Нехай рівняння $\mathcal{L}$ має два лінійно незалежних закони збереження $\mathcal{F}^1$ і $\mathcal{F}^2$. Фіксуємо збережний вектор (F^1,G^1) у зведеному вигляді, що належить $\mathcal{F}^1$. У силу леми 4.4 з точністю до $G^\sim_\mathrm{c}$-еквівалентності можна вважати, що $F^1 = u$. Тоді з леми 4.2 випливає, що $H_{u_{xx}u_{xx}} = 0$, а тому закон збереження $\mathcal{F}^2$ містить вектор густини (F^2, G^2) з $F^2 = F^2(t,x,u)$ і $G^2 = G^2(t,x,u,u_x)$

Покажемо, що існує точкове перетворення еквівалентності вигляду (2.6) з $T(t) = t$ таке, що образи $(\tilde F^1, \tilde G^1)$ і $(\tilde F^2, \tilde G^2)$ векторів (F^1, G^1) і (F^2, G^2) еквівалентні збережним векторам з густинами $\tilde u$ і $\tilde x \tilde u$ відповідно. Іншими словами, збережні вектори необхідно перетворити так, щоб $\tilde F^1 = \tilde u + D_{\tilde x}\Phi$ і $\tilde F^2 = \tilde x\tilde u + D_{\tilde x}\Psi$ для деяких функцій $\Phi = \Phi(t,x,u)$ і $\Psi = \Psi(t,x,u)$. У старих координатах умови на $\tilde F^1$ і $\tilde F^2$ набувають вигляду $D_x\Phi + UD_xX = u$ і $D_x\Psi + XUD_xX = F^2$ і їх можна розщепити відносно u_x до систем

$$\begin{aligned} &\Phi_x + UX_x = u, \\ &\Phi_u + UX_u = 0 \end{aligned} \quad \text{і} \quad \begin{aligned} &\Psi_x + XUX_x = F^2, \\ &\Psi_u + XUX_u = 0. \end{aligned}$$

Після виключення Φ і Ψ з цих систем перехресним диференціюванням, отримаємо умови $X_xU_u - X_uU_x = 1$ і $X = F^2_u$. $(F^2_{xu}, F^2_{uu}) \neq (0,0)$, оскільки інакше закони збереження $\mathcal{F}^1$ і $\mathcal{F}^2$ були б лінійно залежними (див. зауваження 4.4). Отже, взявши значення $X = F^2_u$, маємо $(X_x, X_u) \neq (0,0)$. Це гарантує існування функції $U = U(t,x,u)$, що задовольняє рівняння $X_xU_u - X_uU_x = 1$. Вибрані функції X і U очевидно є функціонально незалежними. Для таких X і U наведені вище системи сумісні відносно Φ і Ψ. $\square$

Наслідок 4.8. *Будь-яка трійка $(\mathcal{L}, \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$, де $\mathcal{L}$ — квазілінійне рівняння вигляду* (4.6)*, а $\mathcal{F}^1$ і $\mathcal{F}^2$ — його лінійно незалежні закони збереження, $G^\sim_{\mathrm{p}}$-еквівалентна трійці $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{F}}^1, \tilde{\mathcal{F}}^2)$, де $\tilde{\mathcal{L}}$ — квазілінійне рівняння вигляду* (4.6)*, а $\tilde{\mathcal{F}}^1$ і $\tilde{\mathcal{F}}^2$ — його закони збереження з характеристиками 1 і $\tilde x$.*

Наслідок 4.9. $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 2$ *тоді і тільки тоді, коли рівняння $\mathcal{L}$ можна (локально) звести контактним перетворенням до вигляду $u_t = D_x^2\check H(t,x,u)$, де $\hat H_u \neq 0$. Рівняння $\mathcal{L}$ квазілінійне тоді і тільки тоді, коли контактне перетворення є продовженням точкового перетворення.*

Доведення. Згідно леми 4.5 з точністю до контактної еквівалентності можна вважати, що рівняння $\mathcal{L}$ має закони збереження $\mathcal{F}^1$ і $\mathcal{F}^2$ з характеристиками 1 і x відповідно. (Тут $G^\sim_{\mathrm{c}}$-еквівалентність можна замінити $G^\sim_{\mathrm{p}}$-еквівалентністю, якщо рівняння L квазілінійне, див. наслідок 4.8.) Тоді існують вектори густини $(F^1, G^1) \in \mathcal{F}^1$ і $(F^2, G^2) \in \mathcal{F}^2$ такі, що

$$D_tF^1 + D_xG^1 = u_t - H, \quad D_tF^2 + D_xG^2 = x(u_t - H).$$

З точністю до еквівалентності збережних векторів, породженої додаванням нульових дивергенцій, маємо, що $F^1 = u$ і $F^2 = xu$. Тому $D_xG^1 = -H$ і $D_xG^2 = -xH$. Комбінуючи ці рівності, отримаємо $G^1 = -D_x(G^2 - xG^1)$, тобто $H = D_x^2(G^2 - xG^1)$. У результаті, рівняння $\mathcal{L}$ буде зображено у вигляді $u_t = D_x^2\check{H}(t, x, u)$, де $\check{H} = G^2 - xG^1$.

Навпаки, нехай рівняння $\mathcal{L}$ зводиться контактним перетворенням $\mathcal{T}$ до рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = D^2_{\tilde{x}}\check{H}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u})$, де $\hat{H}_{\tilde{u}} \neq 0$. Перетворене рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = D^2_{\tilde{x}}\check{H}$ має щонайменше два лінійно незалежних закони збереження, наприклад, закони збереження з характеристиками 1 і x відповідно. Їх прообрази відносно $\mathcal{T}$ є лінійно незалежними законами збереження рівняння $\mathcal{L}$, тобто $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 2$. Якщо $\mathcal{T}$ — точкове перетворення, то рівняння $\mathcal{L}$ повинно бути квазілінійним як прообраз квазілінійного рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} = D^2_{\tilde{x}}\check{H}$ відносно цього перетворення. □

Лема 4.6. $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 3$ *тоді і тільки тоді, коли рівняння* $\mathcal{L}$ *можна (локально) звести контактним перетворенням до лінійного рівняння з класу* (4.6). *Рівняння* $\mathcal{L}$ *квазілінійне тоді і тільки тоді, коли таке контактне перетворення є продовженням точкового.*

Доведення. Нехай $\dim \mathrm{CL}(\mathcal{L}) \geqslant 3$. Згідно наслідку 4.8 з точністю до $G^\sim_{\mathrm{c}}$-еквівалентності рівняння $\mathcal{L}$ можна взяти у вигляді $u_t = D_x^2\check{H}(t, x, u)$, де $\hat{H}_u \neq 0$. $G^\sim_{\mathrm{c}}$-еквівалентність можна замінити $G^\sim_{\mathrm{p}}$-еквівалентністю, якщо рівняння $\mathcal{L}$ квазілінійне. Тоді з умови (4.8) випливає, що кожен закон збереження рівняння $\mathcal{L}$ містить вектор густини (F, G), де $F = F(t, x, u)$

і $G=-F_u\hat H+G^0$ з $G^0=G^0(t,x,u)$ (див. зауваження 4.4). Додатково, функції F і G^0 повинні задовольняти рівняння

$$F_{uu}=0,\quad F_u\check H_{xu}-F_{xu}\check H_u+G^0_u=0,\quad F_t+F_u\check H_{xx}+G^0_x=0.$$

Перше рівняння означає, що з точністю до еквівалентності збережних векторів, породженої додаванням нульових дивергенцій, $F=fu$ для деякої функції $f=f(t,x)$. Виключення функції G^0 з інших рівнянь перехресним диференціюванням приводить до умови $f_t+f_{xx}\check H_u=0$. Якщо б $\check H_{uu}\neq 0$, то з цієї умови випливало б, що $f_t=f_{xx}=0$, тобто $f\in\langle 1,x\rangle$. Іншими словами, за такої умови будь-який закон збереження рівняння $\mathcal L$ був би лінійною комбінацією законів збереження з характеристиками 1 і x. Оскільки $\dim\mathrm{CL}(\mathcal L)\geqslant 3$, то випадок $\check H_{uu}\neq 0$ неможливий. Умова $\check H_{uu}=0$ еквівалентна лінійності рівняння $u_t=D_x^2\check H(t,x,u)$.

Навпаки, припустимо, що рівняння $\mathcal L$ можна звести контактним перетворенням $\mathcal T$ до лінійного рівняння $\tilde{\mathcal L}$ з класу (4.6). Простір законів збереження будь-якого лінійного рівняння (з достатньо гладкими коефіцієнтами) нескінченновимірний. Отже, простір $\mathrm{CL}(\mathcal L)$ нескінченно-вимірний як прообраз нескінченно-вимірного простору $\mathrm{CL}(\tilde{\mathcal L})$ відносно взаємно-однозначного відображення з $\mathrm{CL}(\mathcal L)$ на $\mathrm{CL}(\tilde{\mathcal L})$, породженого перетворенням $\mathcal T$. Якщо $\mathcal T$ — точкове перетворення, то рівняння $\mathcal L$ повинно бути квазілінійним як прообраз лінійного рівняння $\tilde{\mathcal L}$ відносно цього перетворення. □

4.6. Лема Адамара для розшарувань

Модифікуємо відому лему Адамара (див., наприклад, [31, твердження 2.10]) для випадку розшарувань. Це потрібно для дослідження потенціальних законів збереження. Надалі $k,\kappa\in\mathbb N$, індекс s змінюється від 1 до k, індекс S — від 1 до K, індекс σ — від 1 до κ.

Щоб пояснити основні ідеї, вивчимо спочатку простий, але практично значущий випадок загального результату.

Припустимо, що B і N — многовиди. (N може складатися з одного елементу.) Позначимо многовид $B \times N \times \mathbb{R}^\kappa$ через M. Розглянемо гладкі функції $g\colon B \to \mathbb{R}^k$, $\zeta\colon B \times N \to \mathbb{R}^\kappa$ і $f\colon B \to \mathbb{R}$. Пов'яжемо функцію f з функцією $\hat{f}\colon M \to \mathbb{R}$, визначеною співвідношенням

$$\hat{f}(y, z', z'') = f(y) \quad \forall (y, z', z'') \in M.$$

Лема 4.7. *Нехай $g\colon B \to \mathbb{R}^k$ — відображення максимального рангу на підмноговиді $B_g = \{y \in B \mid g(y) = 0\}$. Функція $\hat{f}$ рівна нулю на підмноговиді $M_{g,h} = \{(y, z', z'') \in M \mid g(y) = 0,\, h(y, z', z'') := z'' - \zeta(y, z') = 0\}$ тоді і тільки тоді, коли існує гладка функція $\lambda\colon B \to \mathbb{R}^k$ така, що $\forall y \in B$: $f(y) = \lambda^s(y) g^s(y)$.*

Доведення. Припустимо, що функція $\hat{f}$ дорівнює нулю на $M_{g,h}$. Зафіксуємо довільну точку y_0 з B_g і деяку точку z'_0 з N. Покладемо $z''_0 = \zeta(y_0, z'_0)$. Точка (y_0, z'_0, z''_0) множини M належить $M_{g,h}$, а тому $f(y_0) = \hat{f}(y_0, z'_0, z''_0) = 0$. Іншими словами, функція f щезає на всьому підмноговиді B_g. Тоді з леми Адамара випливає бажаний результат.

Обернене твердження очевидне. □

У лемі 4.7 у дійсності йдеться про системи алгебраїчних рівнянь на тривіальних розшаруваннях, кожна з яких розбита на дві підсистеми. Рівняння першої підсистеми є підняттям рівнянь з бази B розглядуваного розшарування. Рівняння другої підсистеми суттєво залежать від "шарових змінних", тобто будь-яка їх ненульова комбінація не є рівнянням першого типу. Будемо називати таку систему *тривіально розшарованою*, оскільки її розбиття є однаковим для усіх точок розшарування. Насправді, умову тривіального розшарування можна послабити і вимагати, щоб системи мали принаймні локальне зображення у вигляді пар підсистем з описаними властивостями. Для розширення результату на загальні розшарування введемо деякі позначення (див., наприклад, [113]).

Розглянемо гладке розшарування (M, B, π, F), де M — повний простір розшарування, B — базовий простір, F — шар, $\pi\colon M \to B$ — відображення проекції. Будемо писати (U, φ) для локальних тривіалізацій (або розшарованих мап) розшарування M, $\pi^{-1}(U) \overset{\varphi}{\simeq} U \times F$. Будь-якій точці $x \in \pi^{-1}(U)$ відповідає пара $(y, z) = \varphi(x) \in B \times F$, тобто $y = \pi(x) = \mathrm{pr}_1(\varphi(x)) \in B$ і $z = \mathrm{pr}_2(\varphi(x)) \in F$.

Нехай $H\colon M \to \mathbb{R}^K$, $g\colon B \to \mathbb{R}^k$ і $f\colon B \to \mathbb{R}$ — гладкі відображення, $B_g = \{y \in B \mid g(y) = 0\}$ і $M_H = \{x \in M \mid H(x) = 0\}$ — множини розв'язків систем $g(y) = 0$ і $H(x) = 0$ відповідно. Функціям f і g поставимо у відповідність їх підняття $f \circ \pi\colon M \to \mathbb{R}$ і $g \circ \pi\colon M \to \mathbb{R}^k$ відносно π.

Лема 4.8. *Припустимо, що $\pi(M_H) = B_g$ і відображення $g\colon B \to \mathbb{R}^k$ має максимальний ранг на B_g. Тоді функція $f \circ \pi$ рівна нулю на M_H тоді і тільки тоді, коли існує гладке відображення $\lambda\colon B \to \mathbb{R}^k$ таке, що*

$$f(y) = \lambda^s(y) g^s(y) \quad \forall y \in B. \tag{4.12}$$

Доведення. Припустимо, що функція $f \circ \pi$ щезає на M_H. Зафіксуємо довільну точку y_0 з B_g. З умови $\pi(M_H) \supset B_g$ випливає, що $M_H \cap \pi^{-1}(y_0) \neq \varnothing$. Нехай $x_0 \in M_H \cap \pi^{-1}(y_0)$. Тоді $f(y_0) = f \circ \pi(x_0) = 0$. Іншими словами, функція f щезає на всій множині B_g. З леми Адамара отримаємо рівність (4.12).

Навпаки, якщо функція f допускає зображення у вигляді (4.12), то вона щезає на B_g, а тому функція $f \circ \pi$ щезає на $\pi^{-1}(B_g) \supset M_H$. $\square$

Означення 4.8. Нехай гладкі відображення $H\colon M \to \mathbb{R}^K$ і $g\colon B \to \mathbb{R}^k$ мають максимальні ранги на M_H і B_g відповідно. Систему $H(x) = 0$ назвемо *розшарованою над базовою системою* $g(y) = 0$, якщо $\pi(M_H) = B_g$.

Означення 4.8 можна переформулювати у термінах зв'язку між системами $H(x) = 0$ і $g(y) = 0$. Це переформулювання виправдовує назву "розшарована система".

Так, умова $\pi(M_H) \subset B_g$ еквівалентна тому, що підняття системи $g(y) = 0$ є наслідком системи $H(x) = 0$. Дійсно, умову $\pi(M_H) \subset B_g$ можна записати як $M_H \subset \pi^{-1}(B_g)$, тобто підняття $g \circ \pi$ щезає на M_H. Згідно леми Адамара, за умови максимальності рангу відображення H на M_H

існують гладкі функції $\Lambda^{sS}\colon M \to \mathbb{R}$ такі, що $g^s \circ \pi(x) = \Lambda^{sS}(x) H^S(x)$. Звідси випливає, що кожне з рівнянь $g^s(y) = 0$ є комбінацією рівнянь системи $H(x) = 0$. Навпаки, якщо система $g \circ \pi(x) = 0$ є наслідком системи $H(x) = 0$, то $\pi(M_H) \subset B_g$.

Умова $\pi(M_H) \supset B_g$ означає, що для будь-якого розв'язку y_0 системи $g(y) = 0$ існує розв'язок x_0 системи $H(x) = 0$ з $\pi(x_0) = y_0$. Розглянемо функцію $f\colon B \to \mathbb{R}$, підняття $f \circ \pi$ якої щезає на M_H. Тоді $f(y_0) = f \circ \pi(x_0) = 0$. У результаті f щезає на B_g і, оскільки функція g має максимальний ранг на B_g, в силу леми Адамара отримаємо, що $f(y) = \lambda^s(y) g^s(y)$ для деяких гладких функцій $\lambda^s\colon B \to \mathbb{R}$, тобто рівняння $f(y) = 0$ є комбінацією рівнянь системи $g(y) = 0$.

Наведені вище аргументи підсумуємо в наступному твердженні.

Твердження 4.7. *Припустимо, що $g\colon B \to \mathbb{R}^k$ і $H\colon M \to \mathbb{R}^K$ — гладкі відображення, що мають максимальні ранги на множинах B_g і M_H відповідно. Тоді система $H(x) = 0$ розшарована над базовою системою $g(y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли підняття $g(\pi(x)) = 0$ системи $g(y) = 0$ (по проекції π) є наслідком системи $H(x) = 0$ і для будь-якого розв'язку y_0 системи $g(y) = 0$ існує розв'язок x_0 системи $H(x) = 0$ такий, що $\pi(x_0) = y_0$. З розшарованості також випливає, що проекція будь-якої комбінації рівнянь системи $H(x) = 0$, що є підняттям рівняння на B, є наслідком системи $g(y) = 0$.*

Нехай $h\colon M \to \mathbb{R}^\kappa$ — гладке відображення. Під *вертикальним рангом* відображення h у точці $x \in M$ розуміємо ранг обмеження дотичного відображення $T_x h$ до h на вертикальний підпростір дотичного простору $T_x M$ многовиду M у точці x. (Цей вертикальний підпростір — дотичний простір до шару в x.) Якщо (U, φ) — будь-яка тривіалізація в околі точки x і $\varphi(x) = (y, z)$, то вертикальний ранг відображення h у x співпадає з рангом матриці $\partial_z (h \circ \varphi^{-1})(y, z)$.

Теорема 4.6. *Нехай система $H(x) = 0$ розшарована над системою $g(y) = 0$, де $g\colon B \to \mathbb{R}^k$, $H\colon M \to \mathbb{R}^K$, $k \leqslant \dim B$ і $K \leqslant \dim M$. Припус-*

тимо, що $x_0 \in M_H$*,* $y_0 = \pi(x_0)$ *і* H *має сталий вертикальний ранг* κ *в околі точки* $\pi^{-1}(y_0) \cap M_H$ *у* M*. Тоді* $K = k + \kappa$ *і в околі* O_0 *точки* x_0 *у* M *система* $H(x) = 0$ *еквівалентна об'єднанню систем* $g(\pi(x)) = 0$ *і* $h(x) = 0$*, де* $h\colon O_0 \to \mathbb{R}^\kappa$ *— гладка функція з вертикальним рангом* κ*.*

Доведення. Виберемо розшаровану мапу (U, φ) в околі точки y_0 і покладемо $z_0 = \mathrm{pr}_2(\varphi(x_0))$. Нехай $(y^1, \dots, y^n, z^1, \dots, z^m)$ — локальні координати в околі точки (y_0, z_0) в $U \times F$, де $n = \dim B$ і $m = \dim F$. Надалі можна припускати, що B і F — відкриті підмножини просторів $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ відповідно. Позначимо $y'' = (y^1, \dots, y^{K-\kappa})$, $y' = (y^{K-\kappa+1}, \dots, y^n)$, $z'' = (z^1, \dots, z^\kappa)$ і $z' = (z^{\kappa+1}, \dots, z^m)$. З точністю до перенумерації y- і z-змінних можна вважати, що $|\partial(H \circ \varphi^{-1})/\partial(y'', z'')| \neq 0$ у точці (y_0, z_0). $H \circ \varphi^{-1}(y_0, z_0) = 0$. За теоремою про неявну функцію існують околи V', V'', W', W'' точок y_0', y_0'', z_0', z_0'' у проекціях множини $U \times F$ на змінні y', y'', z', z'' відповідно і гладкі відображення $\theta\colon V' \times W' \to V''$, $\zeta\colon V' \times W' \to W''$ такі, що $H \circ \varphi^{-1}(y, z) = 0$ у $\tilde{O} = V'' \times V' \times W'' \times W'$ тоді і тільки тоді, коли $y'' = \theta(y', z')$ і $z'' = \zeta(y', z')$. Похідна $\partial\theta/\partial z'$ тотожно щезає, оскільки інакше $\operatorname{rank} \partial H/\partial z > \kappa$ для деяких точок у $\tilde{O}$, тобто у дійсності $\theta\colon V' \to V''$ і $y'' = \theta(y')$. Зауважимо, що $y_0'' = \theta(y_0')$ і $z_0'' = \zeta(y_0', z_0')$.

Оскільки для будь-якого розв'язку (в $V'' \times V'$) системи $y'' = \theta(y')$ існує розв'язок системи $z'' = \zeta(y', z')$ у $W'' \times W'$ (наприклад, $z' = z_0'$ і $z'' = \zeta(y', z_0')$), то $\pi(M_H \cap O_0) = \{y \in \pi(O_0) \mid y'' = \theta(y')\} \subset B_g \cap \pi(O_0)$, де $O_0 = \varphi^{-1}(\tilde{O})$, а тому $\pi(O_0) = V'' \times V'$. Отже, множина проекцій дотичних векторів до M_H у точках з $\pi^{-1}(y_0) \cap M_H \cap O_0$ співпадає з дотичним простором до $\pi(M_H \cap O_0)$ у y_0, який має розмірність $n - K + \kappa$.

У результаті для будь-якого $x \in \pi^{-1}(y_0) \cap M_H$ можна побудувати окіл O точки x у M такий, що $\pi(M_H \cap O) \subset B_g \cap \pi(O)$ і множина проекцій дотичних векторів до M_H у точках з $\pi^{-1}(y_0) \cap M_H \cap O$ є $(n - K + \kappa)$-вимірним векторним простором. Можна вибрати скінченну або зліченну множину $\{O_i\}$ таких околів, що накривають $\pi^{-1}(y_0) \cap M_H$. Тому множина проекцій дотичних векторів до M_H у точках з $\pi^{-1}(y_0) \cap M_H$

є щонайбільше зліченним об'єднанням $(n - K + \kappa)$-вимірних векторних просторів. У той же час, вона має співпадати з $(n-k)$-вимірним дотичним простором до B_g у y_0, оскільки $\pi(M_H) = B_g$. З цього випливає[1], що $k = K - \kappa$, а тому $\pi(M_H \cap O_0) = B_g \cap \pi(O_0)$, тобто в силу леми Адамара системи $y'' = \theta(y')$ і $g(y) = 0$ еквівалентні на $\pi(O_0)$. Остаточно, система $H(x) = 0$ еквівалентна об'єднанню систем $g(\pi(x)) = 0$ і $h(x) = 0$ на O_0, де $h\colon O_0 \to \mathbb{R}^\kappa$ — гладка функція, що задана співвідношенням $h \circ \circ\, \varphi^{-1}(y, z) = z'' - \zeta(y', z')$ і тому має вертикальний ранг κ. □

Зауваження 4.5. З доведення теореми 4.6 випливає, що будь-яка розшарована система (за умови сталого вертикального рангу відповідного відображення на підмноговиді її розв'язків) локально має структуру тривіально розшарованої системи, про яку йдеться у лемі 4.7.

4.7. Розшаровані системи диференціальних рівнянь

Усі потенціальні фрейми над системами диференціальних рівнянь, які досліджено у наступних підрозділах, є частковими випадками більш загального поняття розшарування систем диференціальних рівнянь.

Нехай $\bar{\mathcal{L}}$ — система $\bar{L}(x, u_{(\bar\rho)}, v_{(\bar\rho)}) = 0$ $\bar{l}$ диференціальних рівнянь $\bar{L}^1 = 0, \ldots, \bar{L}^{\bar{l}} = 0$ для $m + p$ невідомих функцій $u = (u^1, \ldots, u^m)$ і $v = (v^1, \ldots, v^p)$ від n незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а $\mathcal{L}$ — система $L(x, u_{(\rho)}) = 0$ l диференціальних рівнянь $L^1 = 0, \ldots, L^l = 0$ для m невідомих функцій u.

Для кожного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ розглянемо проекцію $\varpi_k\colon J^k(x|u, v) \to \to J^k(x|u)$: $\varpi_k(x, u_{(k)}, v_{(k)}) = (x, u_{(k)})$. Будь-яка диференціальна функція $G = G[u]\colon J^k(x|u) \to \mathbb{R}$ природно пов'язана зі своїм підняттям

[1] Якщо $n - K + \kappa < n - k$, то міра Лебега (у дотичному просторі $T_{y_0}B_g$) кожного із зліченної кількості $(n - K + \kappa)$-вимірних підпросторів дорівнює 0. Це суперечить факту, що їх об'єднання співпадає з $T_{y_0}B_g$.

$G[u,v]\circ\varpi_k\colon J^k(x|u,v)\to\mathbb{R}$ відносно ϖ_k: $G\circ\varpi_k(x,u_{(k)},v_{(k)})=G(x,u_{(k)})$. Можна також розглядати проекцію $\varpi\colon J^\infty(x|u,v)\to J^\infty(x|u)$, обмеження якої на $J^k(x|u,v)$ співпадає з ϖ_k і індукує підняття диференціальних функцій від u довільного (скінченного) порядку. Надалі операцію підняття зазвичай не будемо вказувати явно. Щоб застосувати, зокрема, звичайну і розширену характеристичні форми законів збереження і лему Адамара, необхідно накласти обмеження, що обидві системи $\mathcal{L}$ і $\bar{\mathcal{L}}$ цілком невироджені. Означення розшарованих систем диференціальних рівнянь добре узгоджується з загальним поняттям розшарування і геометричною інтерпретацією систем диференціальних рівнянь як многовидів у просторі струменів.

Означення 4.9. Систему $\bar{\mathcal{L}}$ назвемо *розшарованою над базовою системою* $\mathcal{L}$, якщо $\mathcal{L}$ і $\bar{\mathcal{L}}$ цілком невироджені і $\varpi_k(\bar{\mathcal{L}}_{(k)})=\mathcal{L}_{(k)}$ для кожного $k\in\mathbb{N}$.

Природно позначити це співвідношення між $\bar{\mathcal{L}}$ і $\mathcal{L}$ через $\varpi\bar{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$. Подібно алгебраїчному випадку (див. попередній підрозділ), означення 4.9 допускає переформулювання, яке обґрунтовує назву "розшарована система", у термінах зв'язку між системами $\bar{\mathcal{L}}$ і $\mathcal{L}$. А саме, система $\bar{\mathcal{L}}$ розшарована над системою $\mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли кожне рівняння системи $\mathcal{L}$ (точніше, його підняття) є диференціальним наслідком системи $\bar{\mathcal{L}}$ і для будь-якого локального розв'язку $u=u^0(x)$ системи $\mathcal{L}$ існують локальні розв'язки системи $\bar{L}|_{u=u^0}=0$ відносно v. З розшарованості також випливає, що будь-який диференціальний наслідок системи $\bar{\mathcal{L}}$, який не залежить від функцій v^s та їх похідних, є диференціальним наслідком (точніше, підняттям диференціального наслідку) системи $\mathcal{L}$. У термінах множин розв'язків, лист $u=u^0(x)$, де $u^0(x)$ — фіксований розв'язок системи $\mathcal{L}$, є множиною розв'язків системи $\bar{L}(x,u^0_{(\bar\rho)},v_{(\bar\rho)})=0$.

Означення 4.10. Система $\bar{\mathcal{L}}$ є *сильно розшарованою* над базовою системою $\mathcal{L}$, якщо $\bar{\mathcal{L}}$ розшарована над $\mathcal{L}$ і кожне з рівнянь, що зображають $\mathcal{L}$, можна включити у мінімальну множину рівнянь, що утворюють $\bar{\mathcal{L}}$.

Існують розшаровані системи, які не є сильно розшарованими. Наприклад, система $\bar{\mathcal{L}}$, утворена рівняннями $u^2_x = u^1$, $v_x = u^2$ і $v_t = u^1$, розшарована, але не сильно розшарована над системою $\mathcal{L}$, що складається з рівнянь $u^2_x = u^1$ і $u^2_t = u^1_x$. Дійсно, рівняння $u^2_t = u^1_x$ є диференціальним наслідком системи $\bar{\mathcal{L}}$ і його не можна включити у мінімальну множину рівнянь, що зображають $\bar{\mathcal{L}}$. Перехресне диференціювання двох останніх рівнянь системи $\bar{\mathcal{L}}$ є єдиним способом виключення похідних від v з $\bar{\mathcal{L}}$. Отже, будь-який диференціальний наслідок системи $\bar{\mathcal{L}}$, в якому не зустрічається v, є диференціальним наслідком системи $\mathcal{L}$. Цей приклад прямо пов'язаний з основним предметом подальшого розгляду, оскільки обидві системи є потенціальними системами $(1+1)$-вимірного лінійного рівняння теплопровідності, див. системи (A.1) і (A.3) при $A = 1$.

Якщо система $\bar{\mathcal{L}}$ розшарована над $\mathcal{L}$, завжди вважаємо, що максимально можливу кількість $\hat{l}$ рівнянь системи $\mathcal{L}$ включено у мінімальну множину рівнянь, що утворюють і канонічно зображають $\bar{\mathcal{L}}$. Без обмеження загальності також можна вважати, що ці рівняння є першими $\hat{l}$ рівняннями обох систем. Таке зображення систем $\bar{\mathcal{L}}$ і $\mathcal{L}$ назвемо *канонічним розшаруванням* системи $\bar{\mathcal{L}}$ над $\mathcal{L}$. Розшарування є сильним тоді і тільки тоді, коли $\hat{l} = l$.

У попередньому прикладі маємо $\hat{l} = 1$, оскільки множина рівнянь $u^2_x = u^1$, $v_x = u^2$ і $v_t = u^1$, що канонічно зображають $\bar{\mathcal{L}}$, включає тільки одне рівняння ($u^2_x = u^1$) з $\mathcal{L}$ і не може включати більше рівнянь з $\mathcal{L}$.

Підняття будь-якого збережного вектора системи $\mathcal{L}$ по ϖ очевидно є збережним вектором системи $\bar{\mathcal{L}}$, який додатково не залежить від похідних функцій v. У силу леми 4.8, справедливе також обернене твердження. А саме, будь-який збережний вектор системи $\bar{\mathcal{L}}$, що не залежить від похідних функцій v, є підняттям вектора системи $\mathcal{L}$ по ϖ. Це обґрунтовує наступне означення.

Означення 4.11. Закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ системи $\bar{\mathcal{L}}$ назвемо підняттям по ϖ закону збереження $\mathcal{F}$ системи $\mathcal{L}$ (тобто $\bar{\mathcal{F}} = \varpi^*\mathcal{F}$) або *індукованим* цим законом збереження, якщо існує вектор густини $\bar{F} \in \bar{\mathcal{F}}$, який є підняттям вектора густини $F \in \mathcal{F}$.

Використовуючи означення 4.11, можна переформулювати наведені результати про підняття векторів, що зберігаються.

Твердження 4.8. *Закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ системи $\bar{\mathcal{L}}$ індуковано законом збереження $\mathcal{F}$ системи $\mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{\mathcal{F}}$ містить вектор густини, не залежний від похідних функцій v. Цей вектор обов'язково є підняттям вектора густини з $\mathcal{F}$.*

Означення 4.12. Нехай $\bar{\mathcal{L}}$ — канонічно розшарована над $\mathcal{L}$. Набір $\lambda = (\lambda^1[u,v], \dots, \lambda^{l+\bar{l}-\hat{l}}[u,v])$ називають *розширеною характеристикою* закону збереження $\bar{\mathcal{F}}$ системи $\bar{\mathcal{L}}$, якщо деякий вектор густини $\bar{F} \in \bar{\mathcal{F}}$ задовольняє умову

$$D_i \bar{F}^i = \sum_{\mu=1}^{l} \lambda^\mu L^\mu + \sum_{\nu=1}^{\bar{l}-\hat{l}} \lambda^{l+\nu} \bar{L}^{\hat{l}+\nu}. \tag{4.13}$$

На відміну від означення звичайної характеристики, в якому використовують мінімальну множину канонічних рівнянь, що зображають розглядувану систему, в означенні розширеної характеристики канонічно розшарованої системи мінімальну множину доповнюють рівняннями, які канонічно зображають базову систему і не належать мінімальній множині рівнянь розшарованої системи.

Означення 4.13. Звичайну або розширену характеристику системи $\bar{\mathcal{L}}$ назвемо *індукованою* характеристикою системи $\mathcal{L}$, якщо набір компонент характеристики, що відповідають підняттям рівнянь з $\mathcal{L}$, є підняттям характеристики системи $\mathcal{L}$, а інші компоненти характеристики щезають.

Якщо розширена характеристика λ індукована характеристикою системи $\mathcal{L}$, визначальна рівність (4.13) набуває вигляду $D_i \bar{F}^i = \lambda^\mu[u] L^\mu[u]$, тобто повна дивергенція відповідного вектора густини $\bar{F}$ є функцією тільки від x і похідних функцій u.

Теорема 4.7. *Нехай система $\bar{\mathcal{L}}$ — канонічно розшарована з базовою системою $\mathcal{L}$. Закон збереження системи $\bar{\mathcal{L}}$ індукується законом збереження системи $\mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли він має розширену характеристику, індуковану характеристикою системи $\mathcal{L}$.*

Доведення. Припустимо, що $\bar{\mathcal{F}}$ — закон збереження системи $\bar{\mathcal{L}}$, індукований законом збереження системи $\mathcal{L}$. В силу твердження 4.8 він містить вектор густини $\bar{F}$, який не залежить від похідних функцій v. Умова $D_i\bar{F}^i|_{\bar{\mathcal{L}}} = 0$ означає, що диференціальна функція $D_i\bar{F}^i$ (порядку $r \leqslant \operatorname{ord}(\bar{F}^1, \dots, \bar{F}^n) + 1$) щезає на многовиді $\bar{\mathcal{L}}_{(r)}$, визначеному в просторі струменів $J^r(x\,|\,u, v)$ системою $\bar{\mathcal{L}}$ та її диференціальними наслідками. Оскільки $\bar{\mathcal{L}}$ розшарована над $\mathcal{L}$, то $\varpi_r(\bar{\mathcal{L}}_{(r)}) = \mathcal{L}_{(r)}$. В силу леми 4.8 існують такі функції $\breve{\lambda}^{\breve{\mu}}$ тільки від x і похідних функцій u до порядку r включно, що $D_i\bar{F}^i = \breve{\lambda}^{\breve{\mu}}\breve{L}^{\breve{\mu}}$. Тут рівняння $\breve{L}^{\breve{\mu}} = 0$, $\breve{\mu} = 1, \dots, \breve{l}$ утворюють відповідну множину диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$ і мають (як диференціальні рівняння) порядок не вище r. Використовуючи стандартний метод виведення характеристичної форми законів збереження [31], інтегруємо по частинах праву частину останньої рівності і отримуємо $D_i\tilde{F}^i = \lambda^\mu L^\mu$, де $\tilde{F}^i$ і λ^μ — функції від x і похідних функцій u. Вектори $\bar{F}$ і $\tilde{F}$, що зберігаються, еквівалентні, оскільки їх різниця щезає на $\mathcal{L}$. Тому набір $(\lambda^1[u], \dots, \lambda^l[u])$ є характеристикою системи $\mathcal{L}$, асоційованою з вектором $\tilde{F}$, який належить закону збереження системи $\mathcal{L}$, індукованому законом збереження $\bar{\mathcal{F}}$. Отже, набір $(\lambda^1[u], \dots, \lambda^l[u], \lambda^{l+1} = 0, \dots, \lambda^{l+\bar{l}-\hat{l}} = 0)$ є розширеною характеристикою розшарованої системи $\bar{\mathcal{L}}$, асоційованої з законом збереження $\bar{\mathcal{F}}$ і індукованої характеристикою $(\lambda^1[u], \dots, \lambda^l[u])$ базової системи $\mathcal{L}$.

Навпаки, нехай набір $(\lambda^1, \dots, \lambda^{l+\bar{l}-\hat{l}})$ — розширена характеристика розшарованої системи $\bar{\mathcal{L}}$, асоційована із законом збереження $\bar{\mathcal{F}}$ та індукована характеристикою $(\lambda^1, \dots, \lambda^l)$ базової системи $\mathcal{L}$. Це означає, що $\lambda^1 = \lambda^1[u]$, …, $\lambda^l = \lambda^l[u]$, $\lambda^{l+1} = 0$, …, $\lambda^{l+\bar{l}-\hat{l}} = 0$, а $\bar{\mathcal{F}}$ має такий вектор густини $\bar{F} = \bar{F}[u, v]$, що $D_i\bar{F}^i = \lambda^\mu L^\mu$. Оскільки права частина $\lambda^\mu L^\mu$ залежить тільки від x і похідних функцій u, то із рівності $D_i\bar{F}^i = \lambda^\mu L^\mu$ і наслідку 4.1 випливає, що існує збережний вектор $\tilde{F}$ системи $\bar{\mathcal{L}}$, який залежить тільки від x і похідних функцій u і є еквівалентним вектору $\bar{F}$. Отже, закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ містить вектор $\tilde{F}$ і тому, в силу твердження 4.8, він індукований законом збереження базової системи $\mathcal{L}$. □

Із доведення теореми 4.7 також випливає наступне твердження.

Наслідок 4.10. *Розширену характеристику системи $\bar{\mathcal{L}}$ індуковано характеристикою системи $\mathcal{L}$, якщо її компоненти, що відповідають підняттям рівнянь системи $\mathcal{L}$, не залежать від похідних функцій v, а інші її компоненти щезають.*

У загальному випадку рівність $D_i\tilde{F}^i = \lambda^\mu L^\mu$ не є характеристичною формою закону збереження системи $\bar{\mathcal{L}}$, що містить вектор густини F, оскільки деякі рівняння, що канонічно зображають $\mathcal{L}$, відсутні у канонічному розшаруванні системи $\bar{\mathcal{L}}$. Сильна розшарованість гарантує включення всіх рівнянь $L^1 = 0, \dots, L^l = 0$ у канонічне розшарування.

Наслідок 4.11. *Закон збереження канонічно сильно розшарованої системи $\bar{\mathcal{L}}$ індуковано законом збереження базової системи $\mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли він має характеристику, індуковану характеристикою системи $\mathcal{L}$.*

4.8. Двовимірні потенціальні системи

Щоб простіше пояснити деякі необхідні поняття та ідеї доведень, розглянемо випадок двох незалежних змінних. Для такого розгляду існує кілька додаткових причин. Цей випадок є особливим, зокрема, щодо можливої (сталої) невизначеності після введення потенціалів і завдяки високій ефективності застосування потенціальних симетрій. Тільки в цьому випадку просте введення, згідно теореми 4.3, потенціалів за довільною скінченною множиною законів збереження приводить до абелевого накриття розглядуваної системи, і будь-яке абелеве накриття можна отримати у такий спосіб.

Позначимо незалежні змінні через t і x. Збережний вектор системи $\mathcal{L}$ від двох незалежних змінних t і x — це пара (F, G) диференціальних функцій від u, повна дивергенція якої щезає на всіх розв'язках системи $\mathcal{L}$, тобто $(D_tF + D_xG)|_{\mathcal{L}} = 0$. Тут D_t і D_x — оператори повного диференціювання по t і x. Компоненти F і G називають відповідно *густиною* і *потоком* збережного вектора (F, G). Збережні вектори (F, G) і (F', G') *еквівалентні* і тому асоційовані з тим самим законом збереження, якщо існують такі диференціальні функції $\hat{F}$, $\hat{G}$ і H від u, що $\hat{F}$ ($\hat{G}$) щезає на $\mathcal{L}_{(k)}$, де $k = \operatorname{ord} F$ ($k = \operatorname{ord} G$), $F' = F + \hat{F} + D_xH$, $G' = G + \hat{G} - D_tH$.

Будь-який збережний вектор (F, G) системи $\mathcal{L}$ дозволяє ввести нову залежну (потенціальну) змінну v за допомогою співвідношень $v_x = F$, $v_t = -G$. Щоб побудувати декілька потенціалів за один крок, необхідно використати декілька збережних векторів, асоційованих з лінійно незалежними законами збереження, оскільки інакше потенціали будуть залежними у наступному сенсі: існує лінійна комбінація потенціалів, яка, з точністю до нехтовного сталого доданку, є диференціальною функцією тільки від u (див. твердження (4.9) нижче). У випадку двох незалежних змінних можна також ввести більш загальне поняття залежності потенціалів [236].

Нехай v^1, …, v^p — потенціали системи $\mathcal{L}$. Через $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ позначимо систему, скомбіновану з $\mathcal{L}$ і рівнянь, що визначають потенціали v^1, …, v^p.

Означення 4.14. Потенціали v^1, …, v^p назвемо *залежними на множині розв'язків системи* $\mathcal{L}$ (або скорочено *залежними*), якщо існують $r' \in \mathbb{N}$ і функція Ω змінних t, x, $u_{(r')}$, v^1, …, v^p такі, що $\Omega_{v^s} \neq 0$ для деякого s, $1 \leqslant s \leqslant p$, і $\Omega(t, x, u_{(r')}, v^1, \dots, v^p) = 0$ для будь-якого розв'язку $(u, v^1, \dots, v^p)$ системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ (з точністю до калібрувальних перетворень, тобто з точністю до додавання сталих до потенціалів).

Доведення локальної залежності або незалежності потенціалів здається неможливим для загальних класів диференціальних рівнянь, оскільки це тісно пов'язано з точним описом структури відповідних законів збереження. Приклади такого доведення для часткових класів диференціальних рівнянь (рівнянь конвекції–дифузії і лінійних параболічних рівнянь) наведено в [236, 241].

Твердження 4.9. *Якщо вектори, що зберігаються, системи $\mathcal{L}$ належать лінійно залежним законам збереження, то асоційовані потенціали локально залежні на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$.*

Доведення. Нехай (F^s, G^s), $s=\overline{1,p}$, — вектори, що зберігаються, системи $\mathcal{L}$ такі, що відповідні закони збереження лінійно залежні. Це означає, що $c_sF^s = \hat{F} + D_xH$, $c_sG^s = \hat{G} - D_tH$ для деяких сталих c_s, деяких диференціальних функцій $\hat{F}$, $\hat{G}$ і H від u, де $\hat{F}$ і $\hat{G}$ щезають на $\mathcal{L}_{(k)}$ для деякого k. Для кожного s потенціал v^s, асоційований з вектором (F^s, G^s), задовольняє рівняння $v^s_x = F^s$ і $v^s_t = -G^s$. Отже, $c_sv^s_x = D_xH + \hat{F}$ і $c_sv^s_t = D_tH - \hat{G}$, тобто $c_sv^s - H = c = \mathrm{const}$ на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. У результаті потенціали v^s локально залежні з $\Omega = c_sv^s - H$. (Стала c нехтовна завдяки калібрувальним перетворенням потенціалів.) □

Твердження 4.10. *Припустимо, що два набори потенціалів асоційовані з наборами векторів, що зберігаються, які еквівалентні у такому сенсі: будь-який вектор кожного набору еквівалентний лінійній комбінації векторів з іншого набору. Тоді потенціали в цих наборах одночасно або локально залежні, або локально незалежні на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Будь-який потенціал з кожного набору є лінійною комбінацією потенціалів з іншого набору з додатковим доданком, що є диференціальною функцією залежних змінних вихідної системи.*

Набори потенціалів, що задовольняють умови твердження 4.10, природно назвати *еквівалентними.* З твердження 4.10 випливає, що, з точністю до еквівалентності наборів потенціалів, будь-яка потенціальна система асоційована з підпростором простору законів збереження вихідної системи і не залежить від вибору базису в цьому підпросторі або векторів густини, що зображають елементи базису.

У випадку, коли $\mathcal{L}$ — окреме рівняння, пари рівнянь, що визначають потенціали, утворюють повну потенціальну систему, якщо щонайменше одна з них відповідає неособливій характеристиці (оскільки в цьому випадку $\mathcal{L}$ — диференціальний наслідок цієї пари). Як правило, потенціальні системи такого типу допускають багато нетривіальних симетрій, а тому є цікавими. Зауважимо, що у випадку $l = 1$ характеристику $\lambda = \lambda[u]$ називають особливою, якщо диференціальне рівняння $\lambda[u] = 0$ має розв'язок $u = u(x)$. Важливість розрізнення особливих і неособливих характеристик відзначено в [70].

Припустимо, що система $\mathcal{L}$ має p лінійно незалежних локальних законів збереження з векторами густини (F^s, G^s), $s = \overline{1,p}$. Введемо потенціали v^1, ..., v^p, асоційовані з цим набором векторів, за формулами

$$v^s_x = F^s[u], \quad v^s_t = -G^s[u], \tag{4.14}$$

вважаючи додатково, що ці потенціали локально незалежні на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Канонічне зображення відповідної потенціальної системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ складається з потенціальної частини (4.14) і системи $\mathcal{L}$, з якої виключено підсистему рівнянь, що є диференціальними наслідками інших рівнянь системи $\mathcal{L}$ і потенціальної частини, узятих разом. Це зображення дає канонічне розшарування системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ над системою $\mathcal{L}$. Надалі індекс ν пробігає множину $\mathcal{N}$ номерів рівнянь з $\mathcal{L}$, що входять до канонічного зображення системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$. Зауважимо, що повна кількість таких рівнянь більше або дорівнює $l - p$, причому далеко не завжди дорівнює $l - p$. Індекс ν' пробігає множину $\mathcal{N}' = \{1, \ldots, l\} \backslash \mathcal{N}$.

Як зазначено, набори потенціалів $v = (v^1, \ldots, v^p)$ і $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^p)$, асоційовані з одним і тим самим p-вимірним підпростором законів збереження $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$ системи $\mathcal{L}$, можна вважати еквівалентними. Іншими словами, набори потенціалів v і $\tilde{v}$ еквівалентні, якщо існують такі диференціальні функції $\Phi^s[u]$ і сталі $c_{s\sigma}$, що визначник $|c_{s\sigma}| \neq 0$ і перетворення

$\tilde{v}^s = c_{s\sigma}v^\sigma + \Phi^s[u]$ (змінні x і похідні функцій u не перетворюють) відображає систему $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, асоційовану з v, у систему $\tilde{\mathcal{L}}_\mathrm{p}$, асоційовану з $\tilde{v}$. Набори $(F^s, G^s, s = \overline{1,p})$ і $(\tilde{F}^s, \tilde{G}^s, s = \overline{1,p})$ з потенціальних частин цих систем пов'язані формулами $(\tilde{F}^s - c_{s\sigma}F^\sigma - D_t\Phi^s)\big|_\mathcal{L} = 0$ і $(\tilde{G}^s - c_{s\sigma}G^\sigma + D_x\Phi^s)\big|_\mathcal{L} = 0$. Будемо також казати, що $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_\mathrm{p}$ *еквівалентні як потенціальні системи* системи $\mathcal{L}$.

Для коректного використання характеристичної форми (4.1) законів збереження системи $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ мають бути цілком невиродженими у деякому сенсі. У загальному випадку достатньо важко вивести цілковиту невиродженість системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ у звичайному сенсі [31] із відповідної властивості системи $\mathcal{L}$. Тому використаємо наступний прийом, що ґрунтується на спеціальній структурі потенціальної частини (4.14) системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$. Для будь-якого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ замінимо звичайні простори струменів $J^k(x|u)$ і $J^k(x|u, v)$ навантаженим простором струменів $J^k_\varrho(x|u)$ з наперед визначеною вагою ϱ і навантаженим простором струменів $J^k_\varrho(x|u, v)$, у якому вагу ϱ розширено на похідні потенціалів v за правилом

$$\varrho(v^s_\alpha) = \max\bigl(0, \varrho(F^s) - 1, \varrho(G^s) - 1\bigr) + |\alpha|.$$

Зауважимо, що окрім цього правила існує багато різних способів такого розширення. Основне правило для навантаження потенціалів полягає у тому, що ваги лівих частин рівняння (4.14) мають бути більшими або рівними, ніж ваги відповідних правих частин. Нагадаємо, що вага $\varrho(H)$ будь-якої диференціальної функції H дорівнює максимальній вазі змінних, що явно виникають у H. Для того, щоб розширення ваги ϱ було канонічним (з точністю до перестановки потенціалів) у класі потенціальних систем, еквівалентних системі $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, потрібно вибирати той з еквівалентних наборів потенціалів, який має мінімальну суму $\sum_s \varrho(v^s)$. Струмені над простором $(x|u)$ необхідно навантажувати для дослідження ієрархій потенціальних систем, оскільки система $\mathcal{L}$ може бути потенціальною системою деякої системи для частини невідомих функцій u^a, де інші u^a є потенціалами попереднього рівня. На першому кроці цієї рекурсивної процедури всім залежним змінним будь-якої вихідної системи в ієрархії потенціальних систем приписують ваги 0.

Лема 4.9. *Система $\mathcal{L}$ цілком невироджена за деякою вагою тоді і тільки тоді, коли потенціальна система $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ цілком невироджена за цією вагою, розширеною на похідні потенціалів.*

Доведення. Повну множину $L_{\mathrm{p}[k]}$ незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, які мають розширені ваги не вище k, вичерпують рівняння

$$\breve{L}^{\breve{\mu}} = 0,\ \breve{\mu} = 1, \dots, \breve{l}, \quad v^s_{(0,j'+1)} = D_x^{j'} F^s, \quad v^s_{(i+1,j)} = -D_t^i D_x^j G^s.$$

Тут рівняння $\breve{L}^{\breve{\mu}} = 0,\ \breve{\mu} = 1, \dots, \breve{l}$, утворюють повну множину $L_{[k]}$ незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$ з вагами не вище k, $v^s_{(i,j)} = \partial^{i+j} v^s / \partial t^i \partial x^j$, $i, j \geqslant 0$. Для кожного s індекси j' і (i, j) пробігають множини $i, j, j' \geqslant 0$, $\varrho(v^s) + j' < k$ і $\varrho(v^s) + i + j < k$.

Очевидно, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ система $L_{\mathrm{p}[k]}$ має максимальний ранг на многовиді $\mathcal{L}_{\mathrm{p}[k]}$ у навантаженому просторі струменів $J^k_\varrho(x|u, v)$ тоді і тільки тоді, коли система $L_{[k]}$ має максимальний ранг на многовиді $\mathcal{L}_{[k]}$. Локальна розв'язність системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ випливає з локальної розв'язності системи $\mathcal{L}$ та умов сумісності для потенціальної частини і зумовлює локальну розв'язність системи $\mathcal{L}$, оскільки $\mathcal{L}$ — підсистема $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$. □

Більш того, $\varpi_{[k]}(\mathcal{L}_{p[k]}) = \mathcal{L}_{[k]}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, оскільки $L_{p[k]}$ — тривіально розшарована система алгебраїчних рівнянь над базовою системою $L_{[k]}$. Отже, двовимірні потенціальні системи утворюють частковий випадок розшарованих систем диференціальних рівнянь, а тому всі твердження підрозділу 4.7 справедливі для законів збереження таких систем. (Тільки в доведені теорем 4.7 порядки і звичайні простори струменів потрібно замінити вагами тих самих об'єктів і навантаженими просторами струменів відповідно.) У той же час, завдяки спеціальній структурі двовимірних потенціальних систем можна довести більш сильні твердження про зв'язок між законами збереження, індукованими законами збереження відповідних вихідних систем, і локальністю асоційованих характеристик.

Лема 4.10. *Якщо характеристика двовимірної потенціальної системи залежить тільки від локальних (тобто незалежних і непотенціальних залежних) змінних, то асоційований закон збереження потенціальної системи має вектор густини, який також не залежить від потенціалів.*

Доведення. Припустимо, що потенціальна система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має характеристику $(\alpha^s, \beta^s, \gamma^\nu,\ s=\overline{1,p},\ \nu\in\mathcal{N})$, яка не залежить від потенціалів $v^1,\dots,v^p$. (Завдяки системі (4.14) залежністю характеристики від похідних потенціалів ненульового порядку можна знехтувати з точністю до відношення еквівалентності характеристик.) Компоненти α^s, β^s і γ^ν є диференціальними функціями від u і відповідають рівнянням $v^s_t=-G^s$, $v^s_x=F^s$ і $L^\nu=0$. Отже, існує вектор (F,G), що зберігається, потенціальної системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ такий, що

$$D_tF+D_xG=\alpha^s(v^s_t+G^s)+\beta^s(v^s_x-F^s)+\gamma^\nu L^\nu =: V. \tag{4.15}$$

Оскільки диференціальна функція $V=V[u,v]$ — повна дивергенція, то значення розширеного оператора Ейлера $\mathsf{E}=(\mathsf{E}_{u^1},\dots,\mathsf{E}_{u^m},\ \mathsf{E}_{v^1},\dots,\mathsf{E}_{v^p})$ на V є набором з $m+p$ нулів. Зокрема,

$$-\,\mathsf{E}_{v^s}V=D_t\alpha^s+D_x\beta^s=0,$$

тобто набір $(\alpha^s[u],\beta^s[u])$ є нульовою дивергенцією. Згідно теореми 4.3 для кожного s існує диференціальна функція $\Phi^s[u]$ така, що $\alpha^s=D_x\Phi^s$ і $\beta^s=-D_t\Phi^s$. Покладемо

$$\hat F=F+\Phi^s(v^s_x-F^s),\quad \hat G=G-\Phi^s(v^s_t+G^s).$$

Тоді рівняння (4.15) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}D_t\hat F+D_x\hat G&=\Phi^sD_t(v^s_x-F^s)-\Phi^sD_x(v^s_t+G^s)+\gamma^\nu L^\nu=\\&=-\Phi^s(D_tF^s+D_xG^s)+\gamma^\nu L^\nu,\end{aligned}$$

причому вектор $(\hat F,\hat G)$, що зберігається, еквівалентний вихідному вектору (F,G). Права частина останньої рівності є диференціальною функцією від u і щезає на многовиді $\mathcal{L}_{[k]}$ простору струменів $J^k_\varrho(x|u)$, де k — найвища вага змінних у цьому виразі. Застосовуючи лему Адамара і "інтегрування по частинах", як при виведенні загальної характеристичної форми законів збереження, отримаємо, що $D_t\check F + D_x\check G = \check\gamma^\mu L^\mu$ для деяких диференціальних функцій $\check\gamma^\mu[u]$, де збережний вектор $(\check F,\check G)$ еквівалентний вектору $(\hat F,\hat G)$, а отже і вектору (F,G), оскільки він відрізняється від $(\hat F,\hat G)$ на вектор, що щезає на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Оскільки права частина $\check\gamma^\mu L^\mu$ залежить тільки від t, x і похідних функцій u, з цієї рівності в силу наслідку 4.1 випливає, що існує збережний вектор $(\tilde F,\tilde G)$ системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, який також залежить тільки від t, x та похідних функцій u і є еквівалентним векторам $(\check F,\check G)$ і, отже, (F,G). □

Лема 4.11. *Якщо розширена характеристика двовимірної потенціальної системи індукована характеристикою відповідної вихідної системи, то асоційований закон збереження потенціальної системи має характеристики, які не залежать від потенціалів.*

Доведення. Припустимо, що потенціальна система $\mathcal{L}_{\rm p}$ має розширену характеристику, індуковану характеристикою λ вихідної системи $\mathcal{L}$, тобто існує збережний вектор (F,G) системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ такий, що $D_tF + D_xG = \lambda^\mu[u]L^\mu[u]$. У загальному випадку ця рівність не є характеристичною формою закону збереження системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ з вектором густини (F,G), оскільки деякі рівняння системи $\mathcal{L}$ можуть не входити до мінімальної множини рівнянь, що утворюють потенціальну систему $\mathcal{L}_{\rm p}$. Індекси таких рівнянь складають множину $\mathcal{N}'=\{\nu'\}$. Якщо $\mathcal{N}'=\varnothing$, одразу маємо характеристичну форму.

Нехай $\mathcal{N}'\neq\varnothing$. Зобразимо кожне рівняння $L^{\nu'}$ у вигляді диференціального наслідку системи $\mathcal{L}_{\rm p}$. У силу леми 4.7 це зображення має вигляд

$$L^{\nu'} = A^{\nu'\nu}L^\nu + B^{\nu's}(D_tF^s + D_xG^s),$$

де $A^{\nu'\nu}$ і $B^{\nu's}$ — многочлени від операторів D_t і D_x з коефіцієнтами, залежними від t, x і похідних функцій u. Зауважимо, що

$$D_tF^s + D_xG^s = D_x(v_t^s + G^s) - D_t(v_x^s - F^s).$$

Отже,

$$D_tF + D_xG = \lambda^\nu L^\nu + \lambda^{\nu'} A^{\nu'\nu} L^\nu + \lambda^{\nu'} B^{\nu's} D_x(v^s + G^s) - \\ - \lambda^{\nu'} B^{\nu's} D_t(v_x^s - F^s).$$

Інтегруючи по частинах справа, отримаємо рівність

$$D_t\tilde{F} + D_x\tilde{G} = \alpha^s(v_t^s + G^s) + \beta^s(v_x^s - F^s) + \gamma^\nu L^\nu,$$

де $\alpha^s = -D_xB^{s\nu'*}\lambda^{\nu'}$, $\beta^s = D_tB^{s\nu'*}\lambda^{\nu'}$ і $\gamma^\nu = \lambda^\nu + A^{\nu\nu'*}\lambda^{\nu'}$ — функції від t, x і похідних функцій u, $A^{\nu\nu'*}$ і $B^{s\nu'*}$ позначають оператори, формально спряжені до $A^{\nu'\nu}$ і $B^{\nu's}$ відповідно. Вектори (F, G) і $(\tilde{F}, \tilde{G})$, що зберігаються, еквівалентні, оскільки їх різниця щезає на $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$.

Таким чином, побудовано характеристику

$$(\alpha^s, \beta^s, \gamma^\nu,\ s = \overline{1, p},\ \nu \in \mathcal{N})$$

закону збереження з вектором густини (F, G), що залежить тільки від t, x і похідних функцій u. □

Об'єднання твердження 4.8, теореми 4.7 і лем 4.10, 4.11 дає версію теореми 4.2 для двовимірних потенціальних систем.

Зауваження 4.6. Якщо $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{p}}$ еквівалентні як потенціальні системи вихідної системи $\mathcal{L}$, то відповідне перетворення еквівалентності відображає будь-який закон збереження системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, що має властивості локальності 1–4 з теореми 4.2, у закон збереження системи $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{p}}$ з тими самими властивостями. Іншими словами, властивості локальності законів збереження є стійкими відносно еквівалентності потенціальних систем.

Зауваження 4.7. При доведенні теореми 4.2 використано теорему 4.7, що ґрунтується на загальній версії леми Адамара для розшарувань (лема 4.8). У дійсності ж завдяки спеціальному розшаруванню структури двовимірної потенціальної системи для прямого доведення теореми 4.2 достатньою є найпростіша версія цієї леми (лема 4.7). Ті ж самі зауваження справедливі для абелевих накриттів і стандартних потенціальних систем без калібрувань у багатовимірному випадку.

Розглянемо *башту* $\{\mathcal{L}^k_{\rm p},\ k\in K\}$ *потенціальних систем* над системою $\mathcal{L}=\mathcal{L}^0_{\rm p}$. (Тут або $K=\{0,\dots,N\}$ для деякого $N\in\mathbb{N}$, або $K=\mathbb{N}\cup\{0\}$.) Це означає, що для будь-якого $k\in K\backslash\{0\}$ система $\mathcal{L}^k_{\rm p}$ є потенціальною системою для $\mathcal{L}^{k-1}_{\rm p}$. Систему $\mathcal{L}^k_{\rm p}$ назвемо *потенціальної системою k-го рівня*, асоційованою з $\mathcal{L}$. Будемо казати, що потенціальна система $\mathcal{L}^k_{\rm p}$ є *строго k-го рівня*, якщо її не можна включити як потенціальну систему нижчого рівня до іншої башти потенціальних систем над $\mathcal{L}$. Для будь-яких $k,k'\in K$, де $k'<k$, система $\mathcal{L}^k_{\rm p}$ розшарована над системою $\mathcal{L}^{k'}_{\rm p}$.

Закон збереження потенціальної системи k-го рівня є потенціальним законом збереження k-го рівня системи $\mathcal{L}$. Закон збереження потенціальної системи строго k-го рівня, не індукований законом збереження нижчого рівня, називають *потенціальним законом збереження строго k-го рівня*. Потенціал у башті потенціальних систем є *строго k-го рівня*, якщо він введений за законом збереження строго $(k-1)$-го рівня. За допомогою лінійного комбінування потенціалів і максимально можливого пониження їх рівнів будь-яку скінченну башту потенціальних систем над $\mathcal{L}$ можна перетворити на башту, в якій для будь-якого k залежні змінні системи $\mathcal{L}^k_{\rm p}$, що не є залежними змінними системи $\mathcal{L}^{k-1}_{\rm p}$, є потенціалами строго $(k-1)$-го рівня. Інший підхід до упорядкування башти потенціальних систем полягає у тому, щоб розглядати тільки одновимірні розширення просторів залежних змінних для кожного кроку між рівнями (див., наприклад, [193]).

Ітеративне застосування теореми 4.2 до башти потенціальних систем призводить до двох тверджень про потенціальні закони збереження (у термінах фіксованої башти і в термінах рівнів).

Наслідок 4.12. *Нехай* $\{\mathcal{L}_\mathrm{p}^k,\ k \in K\}$ *— башта потенціальних систем над системою* $\mathcal{L}$ *з двома незалежними змінними. Для будь-якого* $k \in K\backslash\{0\}$ *наступні твердження про закон збереження системи* $\mathcal{L}_\mathrm{p}^k$ *еквівалентні:*

1) його індуковано законом збереження системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}^{k'}$, $k' < k$;

2) він містить вектор густини, залежний тільки від змінних, що виникають у $\mathcal{L}_\mathrm{p}^{k'}$, *і їх похідних;*

3) деякі з його розширених характеристик індуковано характеристиками системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}^{k'}$;

4) він має характеристику, не залежну від потенціалів, що не є залежними змінними системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}^{k'}$.

Наслідок 4.13. *Для будь-якої системи з двома незалежними змінними наступні твердження еквівалентні:*

1) її потенціальний закон збереження k*-го рівня індуковано законом збереження нижчого рівня;*

2) цей закон збереження містить вектор густини, не залежний від потенціалів, строгий рівень яких більше, ніж $k-1$;

3) деякі його розширені характеристики індуковано характеристиками потенціальної системи нижчого рівня;

4) він має характеристики, не залежні від потенціалів, строгий рівень яких більше, ніж $k-1$.

4.9. Критерій для чисто потенціальних законів збереження

Основні застосування результатів, зібраних у теоремі 4.2, пов'язані з побудовою нелокальних (потенціальних) законів збереження і ієрархій потенціальних систем. На перший погляд здається, що вони важливі в основному для методів відшукання законів збереження, які використовують характеристичну форму (4.1) законів збереження або її наслідки (4.2) і (4.3), включаючи симетрійний підхід Ньотер [7, 31, 54, 55]. (Детальний порівняльний аналіз різних методів знаходження законів збереження і їх реалізацій наведено в [289].) Ретельніший аналіз показує, що ці результати також важливі для прямого методу, що ґрунтується на означеннях збережних векторів і законів збереження [236]. Якщо збережний вектор залежить від похідних потенціалів, зазвичай важко визначити, чи еквівалентний цей вектор вектору, що зберігається, не залежному від потенціалів. Причина труднощів полягає у двоїстості відношення еквівалентності векторів, що зберігаються, яке породжене доданками двох типів — нульовими дивергенціями і наборами диференціальних функцій, що тотожно щезають на множині розв'язків відповідної системи диференціальних рівнянь. Ось чому видається неможливим сформулювати беспосередньо у термінах збережних векторів дієвий критерій для перевірки того, чи є закон збереження потенціальної системи індукованим законом збереження відповідної вихідної системи. Водночас, такий критерій легко сформулювати у термінах характеристик.

Твердження 4.11. *Нехай система $\mathcal{L}$ цілком невироджена по деякій вазі, $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ — система, що визначає абелеве накриття системи $\mathcal{L}$ (відповідно потенціальна система системи $\mathcal{L}$ у двовимірному випадку). Крім того, нехай характеристика λ системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ повністю зведена, тобто похідні потенціалів порядків більше 0 виключено з λ завдяки диференціальним наслідкам потенціальної частини системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, а потім зв'язані похідні функцій и виключено з λ завдяки диференціальним наслідкам системи $\mathcal{L}$. Тоді характеристика λ асоційована з законом збереження системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, не індукованим законом збереження системи $\mathcal{L}$, тоді і тільки тоді, коли вона залежить від потенціалів.*

Доведення. Якщо характеристика λ системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ повністю зведена і залежить від потенціалів, то вона безумовно нееквівалентна будь-якій характеристиці, вільній від усіх похідних потенціалів. Ось чому необхідне твердження прямо випливає з теореми 4.2. $\square$

Розглянемо детальніше двовимірний випадок, використовуючи позначення з підрозділу 4.8. Припустимо, що збережний вектор (F, G) потенціальної системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ асоційований з характеристикою

$$\lambda = (\alpha^s[u], \beta^s[u], \gamma^\nu[u],\ s = \overline{1,p},\ \nu \in \mathcal{N}),$$

не залежною від похідних потенціалів. Тоді можна алгоритмічно знайти збережний вектор $(\tilde F, \tilde G)$, що еквівалентний (F, G) і додатково не залежить від похідних потенціалів, уникаючи прямого застосування складної формули з теореми 4.5. Алгоритм ґрунтується на доведенні леми 4.10. Оскільки набір (α^s, β^s) для кожного s є нульовою дивергенцією, існують диференціальні функції $\Phi^s[u]$ такі, що $D_x\Phi^s = \alpha^s$ і $D_t\Phi^s = -\beta^s$. Тоді збережний вектор з компонентами

$$\hat F = F + \Phi^s(v^s_x - F^s), \quad \hat G = G - \Phi^s(v^s_t + G^s)$$

еквівалентний вихідному вектору (F, G), оскільки різниця між (F, G) і $(\hat F, \hat G)$ щезає на множині розв'язків системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, причому повна дивергенція вектора $(\hat F, \hat G)$ є диференціальною функцією від u. Отже, вектор $(\tilde F, \tilde G)$ відрізняється від $(\hat F, \hat G)$ на нульову дивергенцію, компоненти якої в загальному випадку є диференціальними функціями від u і v.

Припустимо, що потенціальна система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має q лінійно незалежних законів збереження, індукованих законами збереження вихідної системи $\mathcal{L}$. Нехай набори $(\tilde F^\varsigma, \tilde G^\varsigma)$, $\varsigma = \overline{1,q}$, є векторами густини цих законів збереження, не залежними від похідних потенціалів. Потенціальна система другого рівня (див. [236] для означень), побудована з $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ за векторами $(\tilde F^\varsigma, \tilde G^\varsigma)$, $\varsigma = \overline{1,q}$, еквівалентна (відносно локальних перетворень, що змінюють лише потенціали) потенціальній системі першого рівня $\mathcal{L}'_\mathrm{p}$, побудованій з системи $\mathcal{L}$ за векторами (F^s, G^s), $s = \overline{1,p}$, і $(\tilde F^\varsigma, \tilde G^\varsigma)$, $\varsigma = \overline{1,q}$ (див. закінчення підрозділу 4.1). Потенціальна частина системи $\mathcal{L}'_\mathrm{p}$ відрізняється від потенціальної частини системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ на рівняння $v^{p+\varsigma}_x = \tilde F^\varsigma$, $v^{p+\varsigma}_t = -\tilde G^\varsigma$, $\varsigma = 1, \dots, q$. Аналогічний аргумент має місце для потенціальних систем довільного рівня.

4.10. Невизначеність потенціалів і потенціальні закони збереження

Припустимо, що $\mathcal{L}_{\rm p}$ — система, що визначає абелеве накриття системи $\mathcal{L}$ (відповідно потенціальна система системи $\mathcal{L}$ у двовимірному випадку). Потенціальна частина системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, що складається з рівнянь (Б.1), визначає потенціали $v^1, \ldots, v^p$ з точністю до довільного сталого доданку. Це означає, що система $\mathcal{L}_{\rm p}$ інваріантна відносно калібрувального перетворення вигляду $\tilde x_i = x_i$, $\tilde u^a = u^a$ і $\tilde v^s = v^s + c_s$, де $c_s = \mathrm{const}$, тобто оператори ∂_{v^s} належать максимальній групі ліївської інваріантності системи $\mathcal{L}_{\rm p}$. Добре відомо, що дія відповідно продовженого оператора узагальненої симетрії системи диференціальних рівнянь на збережний вектор тієї самої системи дає збережний вектор цієї ж системи (див. [31, твердження 5.64]). Завдяки спеціальній структурі системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, твердження про дію операторів ∂_{v^s} на збережні вектори системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ можна уточнити.

Твердження 4.12. *Будь-яка похідна збережного вектора системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ по потенціалах є збережним вектором цієї системи. Та сама похідна характеристики закону збереження, що містить вихідний вектор, є характеристикою, асоційованою з диференційованим вектором.*

Доведення. Нехай $F \in \mathrm{CV}(\mathcal{L}_{\rm p})$. У силу твердження 4.1, існують такі диференціальні функції $\bar\lambda^{si}[u,v]$ та $\lambda^\nu[u,v]$ і n-набір $\hat F$, який щезає на розв'язках системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, що

$$D_iF^i = \bar\lambda^{si}(v^s_i - G^{si}) + \lambda^\nu L^\nu + D_i\hat F^i.$$

Функції $\bar\lambda^{si}$ і λ^ν є компонентами характеристики закону збереження, що містить F. Фіксуючи значення s, подіємо на цю рівність нескінченно продовженим оператором ∂_{v^s}, який формально співпадає з ∂_{v^s}, і використаємо властивість комутування будь-якого нескінченно продовженого оператора з кожним оператором повного диференціювання:

$$D_iF^i_{v^s} = \bar\lambda^{si}_{v^s}(v^s_i - G^{si}) + \lambda^\nu_{v^s}L^\nu + D_i\hat F^i_{v^s}.$$

Оскільки ∂_{v^s} є оператором симетрії системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, то $\hat{F}^i_{v^s}$ щезає на розв'язках системи $\mathcal{L}_{\rm p}$. Отже, F_{v^s} — збережний вектор системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ і $(\bar\lambda^{si}_{v^s},\lambda^\nu_{v^s})$ — характеристика закону збереження, що містить цей вектор. □

Більш того, існує цікавий зв'язок між збережними векторами і характеристиками потенціальної системи, яка визначає абелеве накриття.

Твердження 4.13. *Для кожного значення s компоненти довільної характеристики λ закону збереження системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, які відповідають рівнянням на потенціал v^s, утворюють збережний вектор системи $\mathcal{L}_{\rm p}$, що належить закону збереження з характеристикою $-\lambda_{v^s}$.*

Доведення. Оскільки $\lambda\in\mathrm{Ch}(\mathcal{L}_{\rm p})$, то існує вектор $F\in\mathrm{CV}(\mathcal{L}_{\rm p})$ такий, що

$$\bar\lambda^{si}(v^s_i-G^{si})+\lambda^\nu L^\nu=D_iF^i.$$

Застосовуючи компоненти E_{v^s} розширеного оператора Ейлера до цього рівняння, отримаємо

$$0=D_i\bar\lambda^{si}+D^\alpha(\bar\lambda^{\sigma i}_{v^\sigma_\alpha}(v^\sigma_i-G^{\sigma i}))+D^\alpha(\lambda^\nu_{v^\sigma_\alpha}L^\nu),$$

де α пробігає множину мультиіндексів. З виведених рівнянь випливає, що $(\bar\lambda^{s1},\dots,\bar\lambda^{sn})\in\mathrm{CV}(\mathcal{L}_{\rm p})$, оскільки всі доданки за вийнятком $D_i\bar\lambda^{si}$ очевидно щезають на розв'язках $\mathcal{L}_{\rm p}$. Цю рівність можна записати у вигляді характеристичної форми закону збереження $\mathcal{L}_{\rm p}$:

$$\begin{aligned}D_i\bar\lambda^{si}={}&-\bar\lambda^{\sigma i}_{v^\sigma}(v^\sigma_i-G^{\sigma i})-\lambda^\nu_{v^\sigma}L^\nu-\\&-\sum_{|\alpha|>0}D^\alpha(\bar\lambda^{\sigma i}_{v^\sigma_\alpha}(v^\sigma_i-G^{\sigma i}))-\sum_{|\alpha|>0}D^\alpha(\lambda^\nu_{v^\sigma_\alpha}L^\nu),\end{aligned}$$

яка пов'язує вектор густини $(\bar\lambda^{s1},\dots,\bar\lambda^{sn})$ з характеристикою $(-\bar\lambda^{\sigma i}_{v^s},-\lambda^\nu_{v^s})$. Отже, вектор $(\bar\lambda^{s1},\dots,\bar\lambda^{sn})$ еквівалентний вектору $-F_{v^s}$. □

Наведені твердження проілюстровано на прикладі лінеаризовних рівнянь конвекції–дифузії у підрозділі А.1.

4.11. Перетворення потенціальних систем

З твердження 4.3 випливає наступне твердження [236].

Твердження 4.14. *Будь-яке точкове перетворення між системами $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ ДРЧП з двома незалежними змінними породжує взаємно-однозначне відображення між множинами потенціальних систем, відповідних $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$. Це відображення індуковане тривіальним продовженням на простір введених потенціальних змінних, тобто можна вважати, що потенціали не перетворюються.*

Наслідок 4.14. *Група ліївських симетрій системи $\mathcal{L}$ породжує групу еквівалентності на множині потенціальних систем, асоційованих з $\mathcal{L}$.*

Наслідок 4.15. *Нехай $\widehat{\mathcal{L}}|_{\mathcal{S}}$ — множина потенціальних систем, побудованих для систем з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ за їх законами збереження. Дія перетворень з $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ разом з відношенням еквівалентності потенціалів природно породжує відношення еквівалентності на $\widehat{\mathcal{L}}|_{\mathcal{S}}$.*

У всіх наведених твердженнях можна зафіксувати кількість незалежних законів збереження, за якими будуємо потенціальні системи.

Зауваження 4.8. З твердження 4.14 і його наслідків випливає, що групу еквівалентності для класу систем або групу симетрій для окремої системи можна продовжити на потенціальні змінні будь-якого рівня. Тому природно використовувати продовжені групи еквівалентності і групи симетрій при класифікації потенціальних законів збереження, потенціальних систем і потенціальних симетрій на кожному рівні [236, 239, 241].

Означення 4.15. Ліївські симетрії потенціальної системи називають *потенціальними симетріями* вихідної системи, асоційованими з цією потенціальною системою. Оператор потенціальної симетрії є *нетривіальним*, якщо він не проектовний у простір незалежних і вихідних залежних змінних, тобто якщо деякі коефіцієнти, відповідні цим змінним, явно залежать від потенціалів. Потенціальний рівень (порядок) потенціальної системи є рівнем (порядком) асоційованих потенціальних симетрій.

Поняття дискретних (узагальнених, некласичних, умовних, наближених тощо) потенціальних симетрій визначають аналогічно.

Кожний набір p незалежних законів збереження насправді породжує нескінченну серію потенціальних систем, асоційованих з еквівалентними наборами збережних векторів. Ці системи пов'язані через перетворення потенціалів вигляду $\tilde{v}^s = v^s + H^s[u]$. Отже, вони еквівалентні щодо дослідження узагальнених симетрій довільного порядку. Водночас вибір представників з множини еквівалентних збережних векторів стає істотним при розгляді узагальнених симетрій фіксованого порядку, наприклад лієвських симетрій (їх порядок рівний 0), і потребує окремого дослідження.

Нехай $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ — клас систем ДРЧП з двома незалежними змінними та залежними змінними u, а p пар $\theta \in \mathcal{S}$ $(F^{\theta s}, G^{\theta s})$, параметризованих θ, — збережні вектори системи $\mathcal{L}_\theta$, що відповідають лінійно незалежним законам збереження. Вважаємо, що параметризація локальна, тобто $F^{\theta s}$ і $G^{\theta s}$ залежать від θ як диференціальні функції. У випадку, якщо виникають інтеграли від довільних елементів, можна використати їх як нові довільні елементи класу, додаючи нові зв'язки до системи S. Для кожної системи $\mathcal{L}_\theta$, $\theta \in \mathcal{S}$, побудуємо потенціальну систему $\mathcal{L}_{\theta \mathrm{p}}$, асоційовану зі збережними векторами $(F^{\theta s}, G^{\theta s})$. Позначимо через $\mathcal{L}_\mathrm{p}|_\mathcal{S}$ клас, утворений системами $\mathcal{L}_{\theta \mathrm{p}}$, $\theta \in \mathcal{S}$.

Означення 4.16. Групу еквівалентності класу $\mathcal{L}_\mathrm{p}|_\mathcal{S}$ назвемо *потенціальною групою еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, що відповідає параметризованій сім'ї наборів збережних векторів $\{(F^{\theta s}, G^{\theta s}), s = \overline{1,p} \mid \theta \in \mathcal{S}\}$.

Це означення узагальнюється на довільні абелеві і загальні накриття. Аналогічна конструкція для підкласу у $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ приводить до поняття *умовної потенціальної групи еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Допустимі точкові перетворення класу $\mathcal{L}_\mathrm{p}|_\mathcal{S}$ будуть допустимими потенціальними перетвореннями класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ (асоційованими з зафіксованими потенціалами).

Як приклад розглянемо клас рівнянь конвекції–дифузії вигляду

$$u_t = (A(u)u_x)_x + B(u)u_x, \tag{4.16}$$

де $A = A(u)$ і $B = B(u)$ — довільні гладкі функції від u, $A \neq 0$. Кожне таке рівняння має збережний вектор $(u, -Au_x - \int B)$, асоційований з характеристикою 1. Надалі будемо розглядати $K = -\int B$ як довільний елемент замість B і перепишемо рівняння (4.16) у збережній формі $u_t = (Au_x - K)_x$. Відповідна потенціальна система має вигляд

$$v_x = u, \quad v_t = Au_x - K. \tag{4.17}$$

З неї випливає, що потенціал v задовольняє рівняння

$$v_t = A(v_x)v_{xx} - K(v_x), \tag{4.18}$$

яке називають *потенціальним рівнянням*, асоційованим з рівнянням (4.16). Систему (4.17) можна розглядати як перетворення Лі–Беклунда між рівняннями (4.16) і (4.18). Група еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}$ класу рівнянь у збережній формі складається з перетворень

$$\tilde{t} = \varepsilon_4 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_5 x + \varepsilon_7 t + \varepsilon_2, \quad \tilde{u} = \varepsilon_6 u + \varepsilon_3,$$
$$\tilde{A} = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5^2 A, \quad \tilde{K} = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5\varepsilon_6 K + \varepsilon_7 u + \varepsilon_8,$$

де $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$ — довільні сталі, $\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 \neq 0$.

У [189] Я.Дж. Ліль знайшов алгебру Лі групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathrm{pot}}$ класу систем (4.17), побудував зв'язану компоненту одиниці в $G^{\sim}_{\mathrm{pot}}$ і приєднав до неї деякі дискретні перетворення еквівалентності. В [239] доведено прямим методом, що група перетворень, отримана у такий спосіб, співпадає з усією групою еквівалентності $G^{\sim}_{\mathrm{pot}}$.

Теорема 4.8. *Група $G^{\sim}_{\mathrm{pot}}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \varepsilon_1 t + \varepsilon_2, \quad \tilde{x} = \varepsilon'_1 x + \varepsilon'_2 v + \varepsilon'_3 t + \varepsilon'_4, \quad \tilde{v} = \varepsilon''_1 x + \varepsilon''_2 v + \varepsilon''_3 t + \varepsilon''_4,$$
$$\tilde{u} = \frac{\varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 u}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 u}, \quad \tilde{K} = \frac{\varepsilon'_1\varepsilon''_2 - \varepsilon'_2\varepsilon''_1}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 u}\frac{K}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon''_3}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon'_3}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 u}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 u},$$
$$\tilde{A} = \varepsilon_1^{-1}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 u)^2 A,$$

де ε_1, ε_2, ε'_i, ε''_i, $i = \overline{1,4}$, *— довільні сталі,* $\varepsilon_1(\varepsilon'_1\varepsilon''_2 - \varepsilon'_2\varepsilon''_1) \neq 0$.

Теорема 4.9. *Множина $G^{\sim}_{\rm triv.pot}$ потенціальних перетворень еквівалентності, які діють на довільні елементи A і K тривіально по модулю $\widehat{G}^{\sim}$, є нормальною підгрупою групи $G^{\sim}_{\rm pot}$. Відповідну фактор-групу можна ототожнити з групою, що складається з перетворень*

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = x + \varepsilon v, \quad \tilde v = v,$$
$$\tilde u = \frac{u}{1+\varepsilon u}, \quad \tilde A = (1+\varepsilon u)^2 A, \quad \tilde K = \frac{K}{1+\varepsilon u},$$

де ε — довільна стала, і перетворення годографа змінних x і v

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = v, \quad \tilde u = u^{-1}, \quad \tilde v = x, \quad \tilde A = u^2 A, \quad \tilde K = -u^{-1} K.$$

Перетворення з теореми 4.9 будемо називати *чисто потенціальними перетвореннями еквівалентності* для класу (4.16).

Вивчення потенціальних симетрій класу (4.16), асоційованих з характеристикою 1, еквівалентне розв'язанню проблеми групової класифікації у класі систем (4.17) відносно (неповної) групи еквівалентності $G^{\sim}_{\rm triv.pot}$. Потенціальні симетрії рівнянь вигляду (4.16) розглянуто в [264]. Використання перетворень з $G^{\sim}_{\rm triv.pot}$ у [239] дозволило суттєво спростити, упорядкувати і поповнити ці результати.

4.12. Висновки

У цьому розділі вивчено перетворення законів збереження і потенціальних систем при точкових перетвореннях між відповідними початковими системами та дію на закони збереження операторів узагальненої симетрії. На основі цього поставлено задачі про класифікацію законів збереження і потенціальних симетрій відносно різних типів еквівалентності.

З точністю до контактної еквівалентності описано закони збереження (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку. Властивість контактної нормалізованості класу таких рівнянь виявилась принципово важливою для повного розв'язання цієї проблеми і лаконічного формулювання кінцевого результату. Це значно узагальнює і в той же час спрощує результати Брайанта і Гріфітса [89] щодо класифікації законів збереження у (ненормалізованому) підкласі рівнянь, праві частини яких не залежать явно від часу.

Використовуючи версію леми Адамара для розшарованих просторів та навантажені простори струменів і модифікуючи поняття цілковитої невиродженості систем диференціальних рівнянь, обґрунтовано коректність методів обчислення потенціальних законів збереження, що залучають характеристичну форму законів збереження. Хоча такі методи інтенсивно використовувалися, наприклад, Дж. Блуменом з співавторами [73, 77], питання їх коректності досі не досліджувалися.

Доведено теорему про закони збереження двовимірних потенціальних систем, що індуковані законами збереження вихідних систем. Її узагальнено на багатовимірні абелеві накриття, (не)калібровані потенціальні, псевдопотенціальні та загальні розшаровані системи. До цього відомою була лише теорема Дж. Блумена, Н. Іванової і А. Шевякова [77], яка еквівалентна частковому випадку імплікації 4) $\Rightarrow$ 2) з теореми 4.2 для стандартних потенціальних систем, коли характеристика є функцією лише незалежних змінних відповідної системи.

На основі теореми 4.2 запропоновано необхідний і достатній критерій для визначення у термінах характеристик того, чи є закон збереження абелевого накриття чисто потенціальним законом збереження вихідної системи. Ефективність цього критерію продемонстровано у додатку А на прикладі потенціальних законів збереження рівнянь конвекції–дифузії.

Введено поняття потенціальної групи еквівалентності класу диференціальних рівнянь і вивчено потенціальні перетворення еквівалентності рівнянь конвекції–дифузії.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [161, 162, 165, 166, 181, 229, 236, 239, 241, 242, 275].

РОЗДІЛ 5

Оператори редукції

У цьому розділі розглянуто оператори редукції диференціальних рівнянь (які в літературі називають некласичними або умовними симетріями). Для них сформульовано задачі класифікації відносно різних типів точкової еквівалентності у класах диференціальних рівнянь і показано можливість застосування відображень між окремими рівняннями або класами рівнянь до розв'язання таких задач (підрозділ 5.1). У підрозділі 5.3 прокласифіковано оператори редукції нелінійних рівнянь фільтрації, всі з яких можна вважати потенціальними операторами редукції для нелінійних рівнянь дифузії. Встановлено зв'язок між звичайними і потенціальними операторами редукції загальних (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії. У підрозділі 5.4 вивчено оператори редукції лінійного рівняння теплопровідності з довільною кількістю просторових змінних.

Результати щодо сингулярних операторів редукції ДРЧП з двома незалежними змінними зібрано у підрозділі 5.2. Введено низку понять, необхідних для розбиття множини операторів редукції на сингулярні і регулярні та подальшого дослідження сингулярних операторів. Описано диференціальні функції і диференціальні рівняння, що допускають сингулярні модулі векторних полів. Особливі випадки операторів редукції зв'язано з пониженням порядку рівнянь на інваріантних поверхнях у просторі струменів. Досліджено сингулярні оператори редукції (1+1)-вимірних еволюційних і хвильових рівнянь. Ці результати узагальнено на диференціальні рівняння, що допускають модулі векторних полів першого копорядку сингулярності.

5.1. Основні властивості операторів редукції

Наведемо необхідні поняття і результати щодо некласичних (умовних) симетрій диференціальних рівнянь, слідуючи [135, 139, 244, 297]. Після представлення різних аргументів будемо використовувати термін "сім'ї операторів редукції" замість терміну "інволютивні сім'ї операторів некласичної (умовної) симетрії".

5.1.1. Інволютивні сім'ї векторних полів. Розглянемо інволютивну сім'ю $Q=\{Q^1,\dots,Q^p\}$ p $(1\leqslant p\leqslant n)$ диференціальних операторів першого порядку (векторних полів) $Q^s=\xi^{si}(x,u)\partial_i+\eta^s(x,u)\partial_u$, де $\operatorname{rank}\|\xi^{si}(x,u)\|=p$, у просторі змінних x і u. Тут x позначає набір n незалежних змінних $(x_1,\dots,x_n)$, u трактуємо як залежну змінну. Умова інволютивності сім'ї Q означає, що $\forall\, s,s'\ \exists\,\zeta^{ss'\sigma}=\zeta^{ss'\sigma}(x,u)$: $[Q^s,Q^{s'}]=\zeta^{ss'\sigma}Q^\sigma$. Множину таких сімей позначимо $\mathfrak{Q}^p$.

Якщо оператори $Q^1,\dots,Q^p$ утворюють інволютивну сім'ю Q, то сім'я $\widetilde{Q}$ операторів $\widetilde{Q}^s=\lambda^{s\sigma}Q^\sigma$, де $\lambda^{s\sigma}=\lambda^{s\sigma}(x,u)$, $\det\|\lambda^{s\sigma}\|\neq 0$, є також інволютивною і її називають *еквівалентною* сім'ї Q, що позначається як $\widetilde{Q}=\{\widetilde{Q}^s\}\sim Q=\{Q^s\}$. Позначимо також результат факторизації множини $\mathfrak{Q}^p$ за цим відношенням еквівалентності через $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$, причому елементи з $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$ ототожнюємо з їх представниками в $\mathfrak{Q}^p$.

При $p=1$ умова інволютивності стає тотожністю, тому можна опускати слова "інволютивна сім'я" і казати тільки про оператори. Так, два диференціальні оператори еквівалентні, якщо вони відрізняються на ненульовий множник $\lambda=\lambda(x,u)$. Індекс p у цьому випадку будемо опускати.

Диференціальну функцію $Q^s[u]:=\eta^s(x,u)-\xi^{si}(x,u)u_i$ називають *характеристикою* оператора Q^s. Згідно теореми Фробеніуса, умова інволютивності еквівалентна тому, що характеристична система $Q[u]=0$ ДРЧП $Q^s[u]=0$ (яку називають також *умовою інваріантної поверхні*) має $n+1-p$ функціонально незалежних інтегралів $\omega^0(x,u),\dots,\omega^{n-p}(x,u)$. Отже, її загальний розв'язок можна неявно зобразити у вигляді $F(\omega^0,\dots,\omega^{n-p})=0$, де F — довільна гладка функція своїх аргументів.

Характеристичні системи еквівалентних сімей операторів мають однакові множини розв'язків. І навпаки, кожна сім'я $n+1-p$ функціонально незалежних функцій від (x,u) є повною множиною інтегралів характеристичної системи деякої інволютивної сім'ї p диференціальних операторів першого порядку. Отже, існує бієкція між $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$ і множиною сімей $n+1-p$ функціонально незалежних функцій від (x,u), факторизованою по відповідному відношенню еквівалентності. (Дві сім'ї однакової кількості функціонально незалежних функцій тих самих аргументів вважаємо еквівалентними, якщо кожна функція з одної з сімей функціонально залежить від функцій з іншої сім'ї.)

Функцію $u=f(x)$ називають *інваріантною відносно інволютивної сім'ї операторів* Q (або стисло Q-*інваріантною*), якщо вона є розв'язком характеристичної системи $Q[u]=0$. Ця назва обґрунтована наступними фактами. Будь-яка інволютивна сім'я з p операторів еквівалентна базису $\widetilde{Q}=\{\widetilde{Q}^s\}$ p-вимірної (абелевої) алгебри Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів у просторі (x,u). Кожен розв'язок $u=f(x)$ асоційованої характеристичної системи $Q[u]=0$ задовольняє характеристичну систему $\widetilde{Q}[u]=0$, з чого випливає, що графік функції $u=f(x)$ інваріантний відносно p-параметричної локальної групи перетворень, породженої алгеброю $\mathfrak{g}$.

Оскільки $\operatorname{rank}\|\xi^{si}(x,u)\|=p$, без обмеження загальності можна вважати, що $\omega^0_u\neq 0$ і $F_{\omega^0}\neq 0$, і розв'язати рівняння $F=0$ відносно ω^0: $\omega^0=\varphi(\omega^1,\dots,\omega^{n-p})$. Таке зображення функції u (неявне у загальному випадку) називають *анзацом*, відповідним сім'ї Q.

5.1.2. Означення операторів редукції. Розглянемо диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L(x,u_{(r)})=0$ r-го порядку для невідомої функції u від n незалежних змінних $x=(x_1,\dots,x_n)$. Позначимо многовид, визначений множиною всіх диференціальних наслідків характеристичної системи $Q[u]=0$ у $J^r=J^r(x|u)$, через $\mathcal{Q}_{(r)}$, тобто

$$\mathcal{Q}_{(r)}=\{(x,u_{(r)})\in J^r\mid D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}Q^s[u]=0,\ \alpha_i\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ |\alpha|<r\}.$$

Означення 5.1. Рівняння $\mathcal{L}$ називають *умовно інваріантним* відносно інволютивної сім'ї Q, якщо виконується так званий *критерій умовної інваріантності* $Q^s_{(r)}L(x,u_{(r)})\big|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}}=0$. Тоді Q називають *інволютивною сім'єю операторів умовної симетрії* (або Q-умовної симетрії, некласичної симетрії тощо) рівняння $\mathcal{L}$.

Тут $Q^s_{(r)}$ — r-те продовження оператора Q^s: $Q^s_{(r)}=Q^s+\sum\limits_{0<|\alpha|\leqslant r}\eta^{s\alpha}\partial_{u_\alpha}$, де $\eta^{s\alpha}=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}Q^s[u]+\xi^{si}u_{\alpha,i}$.

Умовна інваріантність рівняння $\mathcal{L}$ відносно сім'ї Q еквівалентна тому, що анзац, побудований за Q, редукує $\mathcal{L}$ до диференціального рівняння з $n-p$ незалежними змінними [297]. Отже, інволютивні сім'ї операторів умовної симетрії будемо називати також *сім'ями операторів редукції* рівняння $\mathcal{L}$. Інше трактування умовної інваріантності полягає у тому, що система $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}$ сумісна у сенсі відсутності нетривіальних диференціальних наслідків [212].

Лема 5.1 ([139, 297]). *Якщо рівняння $\mathcal{L}$ умовно інваріантне відносно сім'ї Q, то воно умовно інваріантне відносно будь-якої сім'ї операторів, еквівалентної Q.*

Множина інволютивних сімей p операторів редукції рівняння $\mathcal{L}$ є підмножиною в $\mathfrak{Q}^p$. Будемо позначати її $\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$. Згідно леми 5.1 з $Q\in\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$ і $\widetilde{Q}\sim Q$ випливає, що $\widetilde{Q}\in\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$, тобто $\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$ замкнута відносно відношення еквівалентності на $\mathfrak{Q}^p$. Отже, факторизацію множини $\mathfrak{Q}^p$ по цьому відношенню еквівалентності можна природно обмежити на $\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$, що приводить до підмножини $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$ у $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$. Подібно усій множині $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$, ототожнимо елементи з $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$ з їх представниками в $\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$. Повний опис сімей з p операторів редукції для рівняння $\mathcal{L}$ означає не що інше, як знаходження $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$. Для елементів з $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$ використовують різні назви. Так, можна розглядати кожен елемент з $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm{f}}$ як C^∞-модуль розмірності p, замкнутий відносно комутування [281].

Існують сім'ї операторів редукції, асоційовані з ліївськими симетріями. Нехай $\mathfrak{g}$ — така p-вимірна підалгебра МАІ рівняння $\mathcal{L}$, що оператори з її базису задовольняють умову $\operatorname{rank}\|\xi^{si}\| = \operatorname{rank}\|\xi^{si},\eta^s\| := p' \leqslant p$. Сім'ї, що складаються з p' операторів з $\mathfrak{g}$, лінійно незалежних над кільцем гладких функцій від (x,u), належать $\mathfrak{Q}^{p'}(\mathcal{L})$ і еквівалентні одна іншій. Сім'ї такого типу і еквівалентні їм будемо називати *ліївськими сім'ями операторів редукції*, а інші — *неліївськими*.

5.1.3. Еквівалентність операторів редукції відносно груп перетворень. Класифікацію операторів редукції можна суттєво спростити і впорядкувати, додатково враховуючи перетворення точкової симетрії окремого рівняння або перетворення еквівалентності класу рівнянь. Тоді проблема стає подібною до проблеми групової класифікації диференціальних рівнянь.

Лема 5.2. *Будь-яке точкове перетворення g: $\tilde x = X(x,u)$, $\tilde u = U(x,u)$ породжує взаємно-однозначне відображення $g^p_*\colon \mathfrak{Q}^p \to \mathfrak{Q}^p$ таке, що образом інволютивної сім'ї Q є інволютивна сім'я g^p_*Q, утворена операторами $g_*Q^s = \tilde\xi^{si}\partial_{\tilde x_i} + \tilde\eta^s\partial_{\tilde u}$, де $\tilde\xi^{si}(\tilde x,\tilde u) = Q^sX^i(x,u)$, $\tilde\eta^s(\tilde x,\tilde u) = Q^sU(x,u)$. Якщо $Q' \sim Q$, то $g^p_*Q' \sim g^p_*Q$. Отже, відповідне факторизоване відображення $g^p_{\mathrm f}\colon \mathfrak{Q}^p_{\mathrm f} \to \mathfrak{Q}^p_{\mathrm f}$ також є добре визначеним і взаємно-однозначним.*

Означення 5.2. Інволютивні сім'ї Q і $\widetilde Q$ однакової кількості p векторних полів назвемо *еквівалентними відносно групи G точкових перетворень*, якщо існує перетворення g з G, для якого сім'ї Q і $g^p_*\widetilde Q$ еквівалентні. *Позначення:* $Q \sim \widetilde Q \bmod G$.

Лема 5.3. *Для будь-якого точкового перетворення g рівняння $\mathcal{L}$ у рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ асоційоване перетворення векторних полів g^p_* взаємно-однозначно відображає $\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$ на $\mathfrak{Q}^p(\tilde{\mathcal{L}})$, а відповідне факторизоване перетворення $g^p_{\mathrm f}$ — $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm f}(\mathcal{L})$ на $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm f}(\tilde{\mathcal{L}})$.*

Наслідок 5.1. *Нехай G— деяка група точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}$. Тоді відношення еквівалентності в $\mathfrak{Q}^p$ відносно групи G породжує відношення еквівалентності в $\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L})$ і в $\mathfrak{Q}^p_{\mathrm f}(\mathcal{L})$.*

Для класу рівнянь $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і фіксованого значення p розглянемо множини $P(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{(\theta, Q) \mid \theta \in \mathcal{S}, Q \in \mathfrak{Q}^p(\mathcal{L}_\theta)\}$ і $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \{(\theta, \mathfrak{Q}^p_\mathrm{f}(\mathcal{L}_\theta)) \mid \theta \in \mathcal{S}\}$. Згідно леми 5.3 дія перетворень з $G^\sim = G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ на $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і $\{\mathfrak{Q}^p(\mathcal{L}_\theta) \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ разом із звичайним відношенням еквівалентності в $\mathfrak{Q}^p$ природно породжує відношення еквівалентності на $P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ і на $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$.

Означення 5.3. Нехай $\theta, \theta' \in \mathcal{S}$, $Q \in \mathfrak{Q}^p(\mathcal{L}_\theta)$, $Q' \in \mathfrak{Q}^p(\mathcal{L}_{\theta'})$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, Q)$ і $(\mathcal{L}_{\theta'}, Q')$ назвемо $G^\sim$-*еквівалентними*, якщо існує перетворення $g \in G^\sim$ яке відображає рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у рівняння $\mathcal{L}_{\theta'}$, і $Q' \sim g^p_* Q$.

Під класифікацією сімей з p операторів редукції відносно $G^\sim$ будемо розуміти класифікацію в $P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ або $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ відносно відповідного відношення еквівалентності. Цю проблему можна вивчати у спосіб, подібний до звичайної групової класифікації у класах диференціальних рівнянь. А саме, побудуємо спочатку оператори редукції, визначені для всіх значень довільних елементів і, можливо, параметризовані ними. Тоді класифікуємо, відносно групи еквівалентності, значення довільних елементів, для кожного з яких відповідне рівняння допускає додаткові сім'ї операторів редукції.

Аналогічно можна також ввести відношення еквівалентності на $P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ і $\mathfrak{P}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$, породжені або узагальненнями звичайної групи еквівалентності, або множиною всіх допустимий точкових перетворень у класі $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

5.1.4. Оператори редукції і відображення між класами рівнянь.

Наслідок 5.2. *Подібні класи мають подібні множини операторів редукції. Будь-яке перетворення подібності Ψ між класами $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ породжує біекцію $\bar\Psi\colon P(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) \to P(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ за правилом $(\theta', Q') = \bar\Psi(\theta, Q)$, якщо $\theta' = \Psi\theta$ і $Q' = (\Psi|_{(x,u)})_* Q$. Тут $(\theta, Q) \in P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$, $(\theta', Q') \in P(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$.*

Наслідок 5.3. *Відображення між класами диференціальних рівнянь, породжене сім'єю точкових перетворень, індукує відображення між відповідними множинами операторів редукції. Так, якщо клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ є образом класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ відносно сім'ї точкових перетворень $\varphi_\theta\colon (x, u) \to$*

$\to (x', u')$, $\theta \in \mathcal{S}$, то образом $(\theta, Q) \in P(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ є $(\theta', Q') \in P(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$, де $\mathcal{L}'_{\theta'} = \mathrm{pr}_r\varphi_\theta\,\mathcal{L}_\theta$ і $Q' = (\varphi_{\tilde\theta})_*Q$.

Аналогічне твердження у зворотному напрямі також є вірним.

Твердження 5.1. *Множину операторів редукції вихідного класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ можна відновити за множиною операторів редукції його образу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ відносно сім'ї точкових перетворень.*

Застосування перетворень еквівалентності і калібрувальних перетворень та відображень може суттєво спростити проблему пошуку некласичних симетрій. Більш того, воно може виявитись вирішальним у розв'язанні проблеми. Наприклад, проблема групової класифікації для класу (A.17) стає ручною тільки після калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності і відображеннями у інші класи. Кожний оператор ліївської симетрії є оператором редукції. Тому при класифікації некласичних симетрій щонайменше потрібно подолати перепони, подібні до перепон при груповій класифікації. Насправді ж перепони є значно більшими, оскільки система визначальних рівнянь для некласичних симетрій є нелінійною і менш перевизначеною.

5.2. Сингулярні оператори редукції

У цьому підрозділі для простоти обмежимося випадком однієї залежної і двох незалежних змінних та окремими операторами редукції.

5.2.1. Сингулярні векторні поля диференціальних функцій. Розглянемо векторне поле $Q = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta(x,u)\partial_u$ з $(\xi^1, \xi^2) \neq (0,0)$, визначене у просторі (x,u), і диференціальну функцію $L = L[u]$ порядку $\operatorname{ord} L = r$ (тобто гладку функцію від $x = (x_1, x_2)$ і похідних функції u до порядку r включно).

Означення 5.4. Векторне поле Q назвемо *сингулярним* для диференціальної функції L, якщо існує диференціальна функція $\tilde L = \tilde L[u]$ меншого порядку така, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = \tilde{L}|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. Інакше Q назвемо *регулярним* векторним полем для L. Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, чиї обмеження на $\mathcal{Q}_{(r)}$ співпадають з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$, дорівнює k, то векторне поле Q має відносно L *копорядок сингулярності* k. Векторне поле Q назвемо *ультрасингулярним* для диференціальної функції L, якщо $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} \equiv 0$.

Для зручності копорядок сингулярності ультрасингулярних векторних полів і порядок тотожно нульових диференціальних функцій покладемо за означенням рівними -1. Регулярні векторні поля для диференціальної функції L за означенням мають копорядок сингулярності $r = \operatorname{ord} L$. Копорядок сингулярності векторного поля Q відносно диференціальної функції L позначимо $\operatorname{sco}_L Q$.

Якщо Q — сингулярне векторне поле для L, то будь-яке векторне поле, еквівалентне Q, є сингулярним для L з таким же копорядком сингулярності.

Функцію $\tilde{L}$, що задовольняє умови означення 5.4, можна знайти конструктивно. А саме, без обмеження загальності можна припустити, що коефіцієнт ξ^2 у Q ненульовий. Тоді будь-яку похідну u порядку не вище, ніж r, можна виразити на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ через похідні u тільки по x_1. Наприклад, для похідних першого і другого порядку маємо

$$\begin{aligned}
&u_2 = \hat{\eta} - \hat{\xi} u_1, \\
&u_{12} = \hat{\eta}_1 - \hat{\xi}_1 u_1 + \hat{\eta}_u u_1 - \hat{\xi}_u u_1^2 - \hat{\xi} u_{11}, \\
&u_{22} = \hat{\eta}_2 - \hat{\xi}_2 u_1 + (\hat{\eta}_u - \hat{\xi}_u u_1)(\hat{\eta} - \hat{\xi} u_1) \\
&\qquad\quad - \hat{\xi}(\hat{\eta}_1 - \hat{\xi}_1 u_1 + \hat{\eta}_u u_1 - \hat{\xi}_u u_1^2 - \hat{\xi} u_{11}),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

де $\hat{\xi} = \xi^1/\xi^2$ і $\hat{\eta} = \eta/\xi^2$. Після підстановки виразів для похідних у L отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}$, залежну тільки від x, u і похідних u по x_1. Назвемо $\hat{L}$ *диференціальною функцією, асоційованою з* L *на многовиді* $\mathcal{Q}_{(r)}$. Векторне поле Q сингулярне для L тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{ord} \hat{L} < r$, причому $\operatorname{sco}_L Q = \operatorname{ord} \hat{L}$. Векторне поле Q ультрасингулярне тоді і тільки тоді, коли $\hat{L} \equiv 0$.

Розглянемо двовимірний модуль $\{Q^\theta = \theta^i Q^i\}$ векторних полів над кільцем гладких функцій від (x,u), породжений векторними полями $Q^i = \xi^{ij}(x,u)\partial_j + \eta^i(x,u)\partial_u$, де $\operatorname{rank}(\xi^{i1},\xi^{i2},\eta^i) = 2$. До кінця цього підрозділу набір параметрів $\theta = (\theta^1,\theta^2)$ пробігає множину пар гладких функцій від (x,u), а індекси i і j змінюються від 1 до 2.

Означення 5.5. Модуль $\{Q^\theta\}$ назвемо *сингулярним* для диференціальної функції L, якщо для будь-якого θ з $(\theta^i\xi^{i1},\theta^i\xi^{i2}) \neq (0,0)$ векторне поле Q^θ сингулярне для L. *Копорядок сингулярності модуля* $\{Q^\theta\}$ співпадає з максимальним копорядком сингулярності його елементів.

Перетворюючи L разом з Q^1 і Q^2 точковим перетворенням (x,u), одне з базисних векторних полів, наприклад Q^2, можна звести до ∂_u. Тоді $(\xi^{11},\xi^{12}) \neq (0,0)$, і з точністю до перестановки незалежних змінних можна вважати $\xi^{12} \neq 0$ і покласти $\eta^1 = 0$ і $\xi^{12} = 1$ через заміну базису. Будь-яке векторне поле з модуля $\{Q^\theta\}$ з ненульовим значенням θ^1 еквівалентне векторному полю $Q^1 + \zeta Q^2$, де $\zeta = \theta^2/\theta^1$. Усі інші векторні поля з $\{Q^\theta\}$ (які мають $\theta^1 = 0$, а тому еквівалентні ∂_u) можна нехтувати, оскільки кожне з них приводить до рівняння $\theta^2(x,u) = 0$, яке повністю визначає u, а не дає анзац для u.

Це пояснює, чому з точністю до точкових перетворень достатньо вивчати тільки сингулярні множини векторних полів вигляду $\{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$, де ξ — фіксована гладка функція від (x,u), а ζ пробігає всі такі функції. Такий вигляд сингулярних множин векторних полів назвемо *зведеним.*

Подальше спрощення залежить від того, чи є модуль замкненим відносно дужки Лі. Якщо так, його можна вважати породженим двома комутуючими векторними полями, які можна разом звести точковим перетворенням до операторів зсувів, наприклад, $Q^1 = \partial_2$ і $Q^2 = \partial_u$. Це означає, що у зведеній формі ξ можна занулити. У випадку незамкненості маємо $\xi_u \neq 0$ у зведеній формі. Після точкового перетворення $\tilde x_i = x_i$, $\tilde u = \xi$ і заміни базису, отримаємо базис $\tilde Q^1 = \tilde u\partial_{\tilde 1} + \partial_{\tilde 2}$ і $\tilde Q^2 = \partial_{\tilde u}$.

Твердження 5.2. *У будь-якому двовимірному модулі векторних полів у просторі трьох змінних (x_1, x_2, u) з точністю до точкових перетворень можна вибрати базис з векторних полів $Q^1 = \partial_2$ $(Q^1 = u\partial_1 + \partial_2)$ і $Q^2 = \partial_u$, якщо модуль замкнений (незамкнений) відносно дужки Лі.*

Теорема 5.1. *Диференціальна функція L має двовимірний модуль векторних полів k-го копорядку сингулярності тоді і тільки тоді, коли з точністю до точкових перетворень її можна зобразити у вигляді*

$$L = \check{L}(x, \Omega_{r,k}), \tag{5.2}$$

де $\Omega_{r,k} = \big(\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant k, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big)$, $\xi \in \{0, u\}$, і $\check{L}_{\omega_\alpha} \neq 0$ для деякого ω_α з $\alpha_1 = k$.

Доведення. Припустимо, що диференціальна функція L має двовимірний модуль векторних полів k-го копорядку сингулярності $\{Q^\theta = \theta^i Q^i\}$. Після точкового перетворення і заміни базису зобразимо базисні елементи у зведеній формі $Q^1 = \xi\partial_1 + \partial_2$ і $Q^2 = \partial_u$, де $\xi \in \{0, u\}$, і виберемо підмножину $\{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$ у $\{Q^\theta\}$, де ζ пробігає множину гладких функції від (x, u). Вихідна диференціальна функція також змінюється при цих перетвореннях, але надалі для всіх нових величин використовуємо старі позначення.

Фіксуємо довільну точку $z^0 = (x^0, u^0_{(r)}) \in J^r$ і розглянемо векторні поля з $\{Q^\zeta\}$, для яких $z^0 \in \mathcal{Q}^\zeta_{(r)}$. За таких умов значення похідних ζ тільки по x_1 і x_2 у точці (x^0, u^0) можна виразити через $u^0_{(r)}$ і значення похідних ζ у (x^0, u^0), що містять диференціювання по u. Останні значення не є зв'язаними.

Введемо нові координати $\{x_i, \omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2}u, |\alpha| \leqslant r\}$ у J^r замість стандартних $\{x_i, u_\alpha, |\alpha| \leqslant r\}$. Заміна координат коректна, оскільки матриця Якобі $(\partial\omega_\alpha/\partial u_{\alpha'})$ невироджена. Дійсно, це трикутна матриця з одиницями на діагоналі, якщо використати наступний порядок на множині мультиіндексів: $\alpha < \beta :\Leftrightarrow |\alpha| < |\beta| \vee (|\alpha| = |\beta| \wedge \alpha_2 < \beta_2)$. Зауважимо, що $\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2}u = D_1^{\alpha_1}(Q^\zeta)^{\alpha_2}u$ на $\mathcal{Q}^\zeta_{(r)}$.

Розглянемо диференціальну функцію $\hat{L}$, отриману з L виключенням на многовиді $\mathcal{Q}^{\zeta}_{(r)}$ похідних u, що містять диференціювання по x_2 (див. (5.1)). Оскільки $\operatorname{sco}_L Q^{\zeta} = k$, функція $\hat{L}$ не залежить від похідних $u_{(\kappa,0)}$, $\kappa = k+1, \dots, r$. Застосуємо цю умову крок за кроком, починаючи з найбільших значень κ і переписуючи похідні в нових координатах на J^r і у термінах L.

Так, у нових координатах рівняння $\hat{L}_{u_{(r,0)}}(z^0) = 0$ має вигляд $L_{\omega_{(r,0)}}(z^0) = 0$. Це завершує перший крок. Тоді на другому кроці з рівняння $\hat{L}_{u_{(r-1,0)}}(z^0) = 0$ випливає, що $L_{\omega_{(r-1,0)}}(z^0) + L_{\omega_{(r-1,1)}}(z^0)\zeta_u(x^0, u^0) = 0$. Розщепимо по $\zeta_u(x^0, u^0)$, оскільки ця величина незв'язана. У результаті отримаємо рівняння $L_{\omega_{(r-1,0)}}(z^0) = 0$ і $L_{\omega_{(r-1,1)}}(z^0) = 0$.

Ітеруючи процедуру, перед μ-им кроком, $\mu \in \{1, \dots, r-k\}$, виведемо рівняння $L_{\omega_{(r-\mu',\nu)}}(z^0) = 0$, $\mu' = 0, \dots, \mu-2$, $\nu = 0, \dots, \mu'$. Тоді з рівняння $\hat{L}_{u_{(r-\mu+1,0)}}(z^0) = 0$ випливає, що

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} L_{\omega_{(r-\mu+1,\nu)}}(z^0)\big(\partial_u (Q^{\zeta})^{\nu} u\big)\big|_{(x,u)=(x^0,u^0)} = 0.$$

Значення $\partial_u^{\nu+1}\zeta(x^0, u^0)$, $\nu = 0, \dots, \mu-1$, є незв'язаними. Розщеплення по них, яке еквівалентне розщепленню по $\big(\partial_u (Q^{\zeta})^{\nu} u\big)\big|_{(x,u)=(x^0,u^0)}$, $\nu = 0, \dots, \mu-1$, дає рівняння $L_{\omega_{(r-\mu+1,\nu)}}(z^0) = 0$, $\nu = 0, \dots, \mu-1$.

Остаточно, після $(r-k)$-го кроку виведемо систему $L_{\omega_{(r-\mu',\nu)}}(z^0) = 0$, $\mu' = 0, \dots, r-k+1$, $\nu = 0, \dots, \mu'$, яка спричиняє умову (5.2).

Навпаки, нехай диференціальна функція L після деякого точкового перетворення набуває вигляду (5.2). Для довільної гладкої функції $\zeta = \zeta(x,u)$ розглянемо векторне поле $Q^{\zeta} = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u$ і диференціальну функцію $\tilde{L} = \check{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,k})$, де $\tilde{\Omega}_{r,k} = \big(\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(Q^{\zeta})^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant k, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big)$. Тоді $\operatorname{ord}\tilde{L} = k$ і $L|_{\mathcal{Q}^{\zeta}_{(r)}} = \tilde{L}|_{\mathcal{Q}^{\zeta}_{(r)}}$, тобто множина $\{Q^{\zeta} = Q^1 + \zeta Q^2\}$, де $Q^1 = \xi\partial_1 + \partial_2$, $Q^2 = \partial_u$ і ζ — довільна гладка функція від (x,u), має k-ий копорядок сингулярності відносно L. Поповнимо множину $\{Q^{\zeta}\}$ векторними полями, еквівалентними її елементам або ∂_u, і повернемося до старих змінних. У результаті побудуємо двовимірний модуль векторних полів $\{Q^\theta = \theta^i Q^i\}$, причому $\mathrm{sco}_L\{Q^\theta\} = k$. $\square$

Наслідок 5.4. *Диференціальна функція допускає сингулярний двовимірний модуль копорядку k, породжений комутуючими векторними полями, тоді і тільки тоді, коли точковими перетвореннями змінних її можна звести до диференціальної функції, в якій всі диференціювання відносно однієї з незалежних змінних мають порядок не вище k.*

Наслідок 5.5. *Диференціальна функція, що не рівна тотожно нулю, не має ультрасингулярних двовимірних модулів векторних полів.*

Зауваження 5.1. Сингулярний модуль може містити векторні поля, копорядки сингулярності яких менше, ніж копорядок сингулярності всього модуля. Нехай $\{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$ — сингулярна множина векторних полів диференціальної функції L, причому $\mathrm{sco}_L\{Q^\zeta\} = k$. Тоді значення ζ, для яких $\mathrm{sco}_L\, Q^\zeta < k$, є розв'язками рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{r-k} \check{L}_{\omega_{(k,\nu)}}(x, \tilde{\Omega}_{r,k})\big(\partial_u (Q^\zeta)^\nu u\big) = 0,$$

де $\tilde{\Omega}_{r,k} = \big(D_1^{\alpha_1}(Q^\zeta)^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant k, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big)$ і $\check{L}$ визначено як у теоремі 5.1.

5.2.2. Сингулярні векторні поля диференціальних рівнянь. Векторне поле Q назвемо *(сильно) сингулярним для диференціального рівняння $\mathcal{L}$*, якщо воно сингулярне для диференціальної функції $L[u]$, що є лівою частиною канонічного зображення $L[u] = 0$ рівняння $\mathcal{L}$. Зазвичай атрибут "сильно" будемо опускати. Оскільки ліві частини диференціальних рівнянь визначено з точністю до множників, які є ненульовими диференціальними функціями, умови означення 5.4 можна послабити при розгляді диференціальних рівнянь.

Означення 5.6. Векторне поле Q назвемо *слабо сингулярним* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$, якщо існують диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку менше r і ненульова диференціальна функція

$\lambda=\lambda[u]$ порядку не вище r такі, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}=\lambda\,\tilde{L}|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. Інакше Q назвемо *слабо регулярним* векторним полем для $\mathcal{L}$. Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, чиї обмеження на $\mathcal{Q}_{(r)}$ співпадають з точністю до ненульового функціонального множника з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$, рівний k $(k<r)$, то векторне поле Q є *слабо сингулярним копорядку* k для $\mathcal{L}$.

Слабкий копорядок сингулярності векторного поля Q відносно $\mathcal{L}$ позначимо як $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$. Поняття ультрасингулярності у слабкому і сильному сенсі співпадають. Аналогічно випадку сильної регулярності вважатимемо $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q=r=\operatorname{ord} L$, якщо Q — слабо регулярне векторне поле диференціального рівняння $\mathcal{L}$.

Зауважимо, що сильна сингулярність спричиняє слабку, а тому слабка регулярність спричиняє сильну. Очевидно, що слабкий копорядок сингулярності завжди не більше і може бути менше, ніж сильний копорядок сингулярності. Зокрема, сильно регулярні векторні поля можуть бути сингулярними у слабкому сенсі. Наприклад, рівняння $u_{ttt}=e^{u_{xx}}(u_x+u)$ має сингулярне векторне поле ∂_t, чиї сильний і слабкий копорядок сингулярності дорівнюють 2 і 1 відповідно. Те ж саме векторне поле ∂_t є сильно регулярним і має слабкий копорядок сингулярності 1 для рівняння $u_t=e^{u_{xx}}(u_x+u)$.

Якщо Q — слабо сингулярне векторне поле для $\mathcal{L}$, то кожне векторне поле, еквівалентне Q, є слабо сингулярним для $\mathcal{L}$ і має той самий копорядок слабкої сингулярності.

Слабо сингулярні векторні поля пов'язані з характеристичними напрямами (див. означення в [211]). Якщо векторне поле $Q=\xi^i(x,u)\partial_i+$ $+\,\eta(x,u)\partial_u$ слабо сингулярне для диференціального рівняння $\mathcal{L}$, то у кожній точці многовиду $\mathcal{L}$ вектор (ξ^1,ξ^2) ортогональний до деякого характеристичного напряму рівняння $\mathcal{L}$ у цій точці.

Нехай $\hat{L}$ — диференціальна функція, асоційована з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$, а саме, отримана з L виключенням похідних u, які містять диференціювання по x_2, в силу рівнянь, що визначають $\mathcal{Q}_{(r)}$. Припустимо додатково, що $\hat{L}$ має максимальний ранг по похідній $u_{(k,0)}$ порядку $k = \operatorname{ord}\hat{L}$, тобто $\hat{L}_{u_{(k,0)}} \neq 0$ на многовиді розв'язків рівняння $\hat{L} = 0$. Тоді $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = k = \operatorname{ord}\hat{L} = \operatorname{sco}_L Q$. Отже, у цьому випадку перевірку слабкої сингулярності можна реалізувати через алгоритмічну процедуру.

Теорема 5.2. *Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ порядку r максимального рангу допускає двовимірний модуль векторних полів k-го копорядку слабкої сингулярності тоді і тільки тоді, коли з точністю до точкових перетворень L можна зобразити у вигляді*

$$L = \Lambda[u]\check{L}(x, \Omega_{r,k}), \tag{5.3}$$

де Λ — ненульова диференціальна функція порядку не вище r, $\Omega_{r,k} = \big(\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant k, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big)$, $\xi \in \{0, u\}$, і $\check{L}_{\omega_\alpha} \neq 0$ для деякого ω_α з $\alpha_1 = k$.

Доведення. Використаємо позначення і поняття з доведення теореми 5.1.

Нехай диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ є максимального рангу і допускає двовимірний модуль векторних полів k-го копорядку слабкої сингулярності. З точністю до точкових перетворень і заміни базису в модулі, можна розглядати тільки множину $\{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$ сингулярних векторних полів у зведеній формі. Фіксуємо довільну точку $z^0 = (x^0, u^0_{(r)}) \in \mathcal{L} \subset J^r$ і виберемо векторні поля з $\{Q^\zeta\}$, для яких $z^0 \in \mathcal{Q}^\zeta_{(r)}$. Значення похідних від ζ тільки по x_1 і x_2 у точці (x^0, u^0) виражаються через $u^0_{(r)}$ і значення похідних від ζ у (x^0, u^0), що містять диференціювання по u. Останні значення не є зв'язаними. Диференціальну функцію $\hat{L}$ отримано з L виключенням на многовиді $\mathcal{Q}^\zeta_{(r)}$ похідних u, що містять диференціювання по x_2 (див. (5.1)). З $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q \leqslant k$ випливає, що $\hat{L}_{u_{(\kappa,0)}}(z_0) = 0$, $\kappa = k+1, \dots, r$. Використаємо цю умову поступово, як у доведенні теореми 5.1, починаючи з найбільшого значення κ і переписуючи похідні в нових координатах $\{x_i, \omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2}u, |\alpha| \leqslant r\}$ у J^r і у термінах L. Отже, $L_{\omega_{(r-\mu',\nu)}}(z^0) = 0$, $\mu' = 0, \dots, r-k+1$, $\nu = 0, \dots, \mu'$, для будь-якого $z^0 \in \mathcal{L}$. Застосовуючи лему Адамара до кожного з цих рівнянь і потім інтегруючи їх разом, отримаємо (5.3) (див. доведення теореми 1 у [297]).

Навпаки, нехай після точкового перетворення диференціальна функція L порядку r має вигляд (5.3). Для довільної гладкої функції ζ від (x,u) розглянемо векторне поле $Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u$ і диференціальну функцію $\tilde L = \check L(x,\tilde\Omega_{r,k})$, де $\tilde\Omega_{r,k} = \big(\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(Q^\zeta)^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant k, \alpha_1+\alpha_2 \leqslant r\big)$. Тоді $\operatorname{ord}\tilde L = k$ і $L|_{\mathcal{Q}^\zeta_{(r)}} = \Lambda\tilde L|_{\mathcal{Q}^\zeta_{(r)}}$, тобто $\{Q^\zeta = Q^1 + \zeta Q^2\}$, де $Q^1 = \xi\partial_1 + \partial_2$, $Q^2 = \partial_u$ і ζ пробігає множину гладких функцій від (x,u), є слабо сингулярною множиною k-го копорядку для $\mathcal{L}$ у нових змінних. Поповнимо цю множину векторними полями, еквівалентними її елементам або ∂_u, і повернемося до старих змінних, побудувавши таким чином слабо сингулярний двовимірний модуль k-го копорядку $\{Q^\theta = \theta^i Q^i\}$ для $\mathcal{L}$. $\square$

Наслідок 5.6. *Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ максимального рангу має слабо сингулярний двовимірний модуль векторних полів k-го копорядку тоді і тільки тоді, коли цей модуль є сильно сингулярним для $\mathcal{L}$ k-го копорядку (можливо, в зображенні, отриманому з канонічного множенням на ненульову диференціальну функцію).*

Означення 5.7. Векторне поле Q назвемо *сингулярним оператором редукції* рівняння $\mathcal{L}$, якщо Q є і оператором редукції, і слабо сингулярним векторним полем для $\mathcal{L}$ (тобто $Q \in \mathfrak{Q}(\mathcal{L})$ і $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q < \operatorname{ord}\mathcal{L}$.

5.2.3. Приклад: еволюційні рівняння. Вивчимо сингулярні оператори редукції $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = H(t,x,u_{(r,x)}), \tag{5.4}$$

де $r > 1$, $u_0 := u$, $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $u_{(r,x)} = (u_0, u_1, \dots, u_r)$ і $H_{u_r} \neq 0$. (У цьому пункті використано позначення t і x для x_1 і x_2 і відповідно змінено позначення похідних.) Еволюційні рівняння є досить особливими з точки зору сингулярних векторних полів і сингулярних операторів редукції.

Твердження 5.3. *$Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$ — сингулярне векторне поле для диференціальної функції $L = u_t - H(t,x,u_{(r,x)})$ порядку $r > 1$ тоді і тільки тоді, коли $\tau = 0$. При цьому $\operatorname{sco}_L Q = 1$.*

Наслідок 5.7. *Диференціальна функція, відповідна $(1+1)$-вимірному еволюційному рівнянню, має точно одну множину $S = \{\partial_x + \zeta(x,u)\partial_u\}$ сингулярних векторних полів у зведеній формі, причому $\operatorname{sco}_L S = 1$.*

За умови $H_{u_r} \neq 0$ векторне поле сингулярне для диференціальної функції $u_t - H(t,x,u_{(r,x)})$ тоді і тільки тоді, коли воно слабо сингулярне для рівняння $u_t = H(t,x,u_{(r,x)})$. Тому для еволюційних рівнянь можна не розрізняти сильну і слабку сингулярність (див. наслідок 5.6).

Фіксуємо довільне рівняння $\mathcal{L}$ вигляду (5.4) і позначимо через $\mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$ множину його операторів редукції, що належать S. Для $Q \in \mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$ критерій умовної інваріантності дає тільки одне рівняння r-го порядку

$$\begin{aligned}&\zeta_t + \zeta_u\tilde{H} = \tilde{H}_x + \zeta\tilde{H}_u,\\ &\tilde{H} := H(t,x,u,\zeta,\zeta_x + \zeta\zeta_u,\ldots,(\partial_x + \zeta\partial_u)^{r-1}\zeta)\end{aligned}$$

відносно однієї невідомої функції ζ з трьома незалежними змінними t, x і u, яке позначимо $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$. Іншими словами, система визначальних рівнянь у цьому випадку складається з одного рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$, а тому не є перевизначеною. $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ є умовою сумісності рівнянь $u_x = \zeta$ і $\mathcal{L}$.

Теорема 5.3. *З точністю до еквівалентностей на множинах операторів і сімей розв'язків, для довільного рівняння вигляду (5.4) існує бієкція між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його операторами редукції з нульовими коефіцієнтами при ∂_t. А саме, кожному оператору такого типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно цього оператора. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння (5.4) і вичерпного опису його операторів редукції з нульовими коефіцієнтами при ∂_t повністю еквівалентні.*

Доведення. Нехай $\mathcal{L}$ — рівняння з класу (5.4) і $Q = \partial_x + \zeta\partial_u \in \mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$, тобто коефіцієнт $\zeta = \zeta(t,x,u)$ задовольняє рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$. Анзац, побудований за Q, має вигляд $u = f(t,x,\varphi(\omega))$, де $f = f(t,x,\varphi)$ — деяка задана функція, $f_\varphi \neq 0$, $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція і $\omega = t$ — інваріантна незалежна змінна. Цей анзац редукує $\mathcal{L}$ до ЗДР $\mathcal{L}'$ на φ першого порядку, розв'язне відносно φ'. Загальний розв'язок редукованого рівняння $\mathcal{L}'$ можна зобразити у вигляді $\varphi = \varphi(\omega,\varkappa)$, де $\varphi_\varkappa \neq 0$, $\varkappa$ — довільна стала. Підстановка цього розв'язку в анзац дає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ розв'язків $u = \tilde f(t,x,\varkappa)$ рівняння $\mathcal{L}$ з $\tilde f = f(t,x,\varphi(t,\varkappa))$. Виражаючи параметр $\varkappa$ з рівності $u = \tilde f(t,x,\varkappa)$, отримаємо, що $\varkappa = \Phi(t,x,u)$, де $\Phi_u \neq 0$. Тоді $\zeta = u_x = -\Phi_x/\Phi_u$ для довільного $u \in \mathcal{F}$, тобто для будь-яких допустимих значень $(t,x,\varkappa)$. Звідси $\zeta = -\Phi_x/\Phi_u$ для будь-яких допустимих значень (t,x,u).

Навпаки, припустимо, що $\mathcal{F} = \{u = f(t,x,\varkappa)\}$ — однопараметрична сім'я розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Похідна $f_\varkappa$ ненульова, оскільки параметр $\varkappa$ суттєвий. Виразимо $\varkappa$ з рівності $u = f(t,x,\varkappa)$: $\varkappa = \Phi(t,x,u)$ для деякої функції $\Phi = \Phi(t,x,u)$ з $\Phi_u \neq 0$. Розглянемо оператор $Q = \partial_x + \zeta\partial_u$, де коефіцієнт $\zeta = \zeta(t,x,u)$ визначено як $\zeta = -\Phi_x/\Phi_u$. $Q[u] = 0$ для будь-якого $u \in \mathcal{F}$. Анзац $u = f(t,x,\varphi(\omega))$, де $\omega = t$, асоційований з Q, редукує $\mathcal{L}$ до рівняння $\varphi_\omega = 0$. Отже [297], $Q \in \mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$, а тому функція ζ задовольняє $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$. □

Наслідок 5.8. *Нелінійне $(1+2)$-вимірне еволюційне рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ зводиться композицією нелокальної підстановки $\zeta = -\Phi_x/\Phi_u$, де Φ — функція від (t,x,u), і перетворення годографа*

нові незалежні змінні: $\quad \tilde t = t, \quad \tilde x = x, \quad \varkappa = \Phi,$

нова залежна змінна: $\quad \tilde u = u$

до рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde u = \tilde u(\tilde t,\tilde x,\varkappa)$ з $\varkappa$ у якості параметра.

Зауваження 5.2. За означенням однопараметричні сім'ї $u = f(t,x,\varkappa)$ і $u = \tilde f(t,x,\tilde\varkappa)$ еквівалентні, якщо вони складаються з тих самих функцій і відрізняються тільки параметризацією, тобто якщо існує функція

$\zeta = \zeta(\varkappa)$ така, що $\zeta_\varkappa \neq 0$ і $\tilde{f}(t, x, \zeta(\varkappa)) = f(t, x, \varkappa)$. Еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків асоційовані з одним і тим самим оператором з $\mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$ і їх можна ототожнити.

Можна зробити висновок, що для будь-якого еволюційного рівняння $\mathcal{L}$ традиційне розбиття множини $\mathfrak{Q}(\mathcal{L})$ його операторів редукції за умовами $\tau \neq 0$ і $\tau = 0$ є природним, оскільки воно співпадає з розбиттям $\mathfrak{Q}(\mathcal{L})$ на сингулярну і регулярну підмножини. *Це особлива властивість еволюційних рівнянь, яка не має місця для загальних ДРЧП з двома незалежними змінними.* Після факторизації підмножин відносно звичайного відношення еквівалентності операторів отримаємо два різних випадки нееквівалентних операторів редукції (регулярний випадок $\tau = 1$ і сингулярний випадок $\tau = 0$, $\xi = 1$), які потрібно вивчати окремо.

Сингулярні оператори редукції рівняння $\mathcal{L}$ описано в уніфікований "no-go" спосіб. Всі вони мають однаковий копорядок сингулярності, рівний 1, і тому редукують $\mathcal{L}$ ЗДР до першого порядку. Однаковість сингулярних копорядків гарантує існування бієкції між множиною сингулярних операторів редукції рівняння $\mathcal{L}$ і множиною однопараметричних сімей його розв'язків (з точністю до природних відношень еквівалентності у цих множинах). У результаті у випадку $\tau = 0$ і $\xi = 1$ визначальне рівняння для коефіцієнта при ∂_u без додаткових припущень і умов нелокальним перетворенням зведено до вихідного рівняння $\mathcal{L}$ [34, 291, 292] (див. наслідок 5.8).

Регулярний випадок $\tau = 1$ значно складніший за сингулярний. Він суттєво залежить від структури рівняння, включаючи порядок, тип нелінійності тощо. Дотепер немає вичерпних результатів щодо регулярних операторів редукції навіть для еволюційних рівнянь другого порядку. Досліджено тільки деякі підкласи таких рівнянь. Див., наприклад, [59, 108, 231, 244] та підрозділ 5.3 щодо повної класифікації регулярних операторів редукції для деяких підкласів еволюційних рівнянь другого порядку, параметризованих функціями одного аргументу. Наприклад, навіть для класу нелінійних рівнянь дифузії загального вигляду $u_t = (f(u)u_x)_x$ (що репрезентує класичний приклад розв'язання проблеми групової класифікації для ДРЧП [30]) дотепер не знайдено множину значень параметр-функції f, при яких відповідні рівняння мають неліївські регулярні оператори редукції. Більшість еволюційних рівнянь не допускають регулярних операторів редукції. Простий приклад дає рівняння $u_t = u_{xx} + ue^{u_x} + xe^{2u_x} + te^{3u_x} + e^{4u_x} + e^{5u_x}$. Деякі еволюційні рівняння (лінійні [134, 231], рівняння Бюргерса [192] тощо) мають так багато регулярних операторів редукції, що "no-go" твердження справедливі і для них, але природа цього "no-go" відрізняється від "no-go" сингулярного випадку і пов'язана з властивістю лінійності або лінеаризовності відповідних еволюційних рівнянь.

Зауваження 5.3. Наведені результати узагальнюються на інволютивні сім'ї операторів редукції багатовимірних еволюційних рівнянь [34] і навіть систем таких рівнянь [10].

5.2.4. Приклад: нелінійні хвильові рівняння. Наступний приклад, докладно вивчений щодо сингулярних операторів редукції [180], дає клас нелінійних хвильових рівнянь (у конусних змінних) загального вигляду

$$u_{12} = F(u). \tag{5.5}$$

Тут F — довільна гладка функція від u. Цей клас суттєво відрізняється від класу еволюційних рівнянь стосовно сингулярних векторних полів. Основною різницею є те, що кожна диференціальна функція, асоційована з деяким рівнянням з класу (5.5), має дві сингулярні множини векторних полів, причому ці множини містять векторні поля нижчого копорядку сингулярності, ніж копорядки сингулярності цілих множин. Так, для будь-якого F векторне поле $Q = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta(x,u)\partial_u$ сингулярне для диференціальної функції $L = u_{12} - F(u)$ тоді і тільки тоді, коли $\xi^1\xi^2 = 0$. Більш того, для рівнянь з класу (5.5) немає різниці між сильною і слабкою сингулярністю векторних полів. Дійсно, припустимо, що

$\xi^2 \neq 0$. Виключення похідних u_2 і u_{12} з L згідно (5.1) приводить до диференціальної функції $\tilde{L}$ з коефіцієнтом $-\xi^1/\xi^2$ при u_{11}. Тому $\operatorname{ord}\tilde{L} < 2$ тоді і тільки тоді, коли $\xi^1 = 0$.

Отже, *для будь-якого F диференціальна функція $L = u_{12} - F(u)$ має точно дві множини сингулярних векторних полів у зведеній формі*: $S = \{\partial_2 + \zeta(x,u)\partial_u\}$ і $S^* = \{\partial_1 + \zeta^*(x,u)\partial_u\}$. Векторні поля, еквівалентні ∂_u, не є підхожими як оператори редукції. Будь-яке сингулярне векторне поле для L еквівалентне одному з наведених полів. Більш того, кожне рівняння вигляду (5.5) допускає дискретне перетворення симетрії — перестановку змінних x_1 і x_2, що породжує взаємно-однозначне відображення між S і S^* (див. наслідок 5.1). Тому достатньо, з точністю до еквівалентності векторних полів (і перестановки x_1 і x_2), дослідити тільки сингулярні оператори редукції з множини S.

Для рівняння $\mathcal{L}$ з класу (5.5) і оператора $Q = \partial_2 + \zeta\partial_u$ критерій умовної інваріантності набуває вигляду

$$(\zeta_{12} + \zeta_{1u}u_2 + \zeta_{2u}u_1 + \zeta_{uu}u_1u_2 + \zeta_u u_{12})|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(2)}} = \zeta F_u.$$

Перетин $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(2)}$ виокремлено з J^2 рівняннями $u_2 = \zeta$, $u_{12} = F$ і $\zeta_1 + \zeta_u u_1 = F$. Тому подальший розгляд залежить від значень ζ_u і F_u. Проаналізуємо можливі випадки.

Нехай $\zeta_u = 0$ і $F_u = 0$. Тоді Q — ультрасингулярне векторне поле для L. Третє рівняння з тих, що визначають $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(2)}$, набуває вигляду $\zeta_1 = F$ і не містить похідних від u. Його потрібно розглядати як умову відносно ζ, а тому критерій умовної інваріантності у цьому випадку виконується тотожно. Анзацом, побудованим за оператором Q, є $u = \varphi(\omega) + \int\zeta\,dx_2$, де $\omega = x_1$. Він редукує рівняння (5.5) до тотожності, що пояснюється ультрасингулярністю оператора редукції Q.

Якщо $\zeta_u = 0$ і $F_u \neq 0$, то $\operatorname{sco}_L Q = 0$. Третє рівняння з тих, що визначають $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(2)}$, знову набуває вигляду $\zeta_1 = F$, але тепер його можна розв'язати відносно u: $u = \check{F}(\zeta_1)$, де $\check{F}$ — обернена функція до F. Тоді критерій умовної інваріантності еквівалентний рівнянню

$\zeta_{12} = \zeta F_u(\check{F}(\zeta_1))$ відносно ζ. Анзац, побудований за оператором Q, редукує $\mathcal{L}$ до алгебраїчного рівняння $F(\varphi + \int\zeta\, dx_2) = \zeta_1$ для функції φ, що узгоджується з умовою $\mathrm{sco}_L\, Q = 0$. Дійсно, обертаючи F, отримаємо рівність $\varphi = \check{F}(\zeta_1) - \int\zeta\, dx_2$, права частина якої не залежить від x_2 в силу рівняння на ζ. Навпаки, зафіксуємо розв'язок $u = f(x)$ рівняння (5.5) і покладемо $\zeta = f_2$. Тоді $\zeta_{12} = \zeta F_u(\check{F}(\zeta_1))$, тобто в силу критерію умовної інваріантності $Q = \partial_2 + \zeta\partial_u$ є оператором редукції рівняння (5.5), причому $\zeta_u = 0$. Розв'язок $u = f(x)$ інваріантний відносно Q. Підсумовуючи, сформулюємо теорему.

Теорема 5.4. *Для довільного рівняння з класу* (5.5) *з* $F_u \neq 0$ *існує взаємно-однозначна відповідність між його розв'язками і операторами редукції вигляду* $Q = \partial_2 + \zeta(x)\partial_u$ *(або* $Q^* = \partial_1 + \zeta^*(x)\partial_u$*). А саме, кожен оператор цього типу має копорядок сингулярності* 0 *і відповідає єдиному розв'язку, інваріантному відносно нього. Проблеми розв'язання рівнянь з класу* (5.5) *з* $F_u \neq 0$ *і вичерпного опису їх операторів редукції такого вигляду повністю еквівалентні.*

Наслідок 5.9. *Будь-який розв'язок* $u = f(x)$ *рівняння* (5.5) *з* $F_u \neq 0$ *інваріантний відносно двох операторів редукції* $Q = \partial_2 + \zeta(x)\partial_u$ *і* $Q^* = \partial_1 + \zeta^*(x)\partial_u$ *рівняння* (5.5)*, причому їх копорядок сингулярності рівний 0. Тут* $\zeta = f_2$ *і* $\zeta^* = f_1$*. Властивість мати той самий інваріантний розв'язок рівняння* (5.5) *встановлює канонічну бієкцію* $Q \leftrightarrow Q^*$ *між множинами операторів редукції копорядку сингулярності* 0*. Відповідні значення* ζ *і* ζ^* *пов'язані формулами*

$$\zeta^* = \frac{\zeta_{11}}{F_u(\check{F}(\zeta_1))}, \qquad \zeta = \frac{\zeta^*_{22}}{F_u(\check{F}(\zeta^*_2))}.$$

Регулярні значення ζ, для яких $\mathrm{sco}_L\, Q = \mathrm{sco}_L\, S = 1$, задовольняють умову $\zeta_u \neq 0$. Тоді з рівняння $\zeta_1 + \zeta_u u_1 = F$ випливає, що

$$u_1 = \frac{F - \zeta_1}{\zeta_u} =: \zeta^*.$$

Критерій умовної інваріантності дає тільки одне рівняння

$$\zeta_{12}+\zeta\zeta_{1u}+(\zeta_{2u}+\zeta\zeta_{uu})\frac{F-\zeta_1}{\zeta_u}+\zeta_u F=\zeta F_u \tag{5.6}$$

відносно однієї функції ζ, тобто система визначальних рівнянь добре визначена. Рівняння (5.6) можна переписати як умову сумісності

$$\zeta_1+\zeta^*\zeta_u=\zeta_2^*+\zeta\zeta_u^*=F$$

рівнянь $u_1=\zeta^*$, $u_2=\zeta$ і $u_{12}=F$. Очевидно, що $\zeta_u^*\neq 0$. Завдяки симетрії відносно перестановки x_1 і x_2 отримаємо наступне твердження.

Твердження 5.4. *Для будь-якого рівняння з класу* (5.5) *існує канонічна бієкція $Q\leftrightarrow Q^*$ між множинами його сингулярних операторів редукції вигляду $Q=\partial_2+\zeta(x,u)\partial_u$ і $Q^*=\partial_1+\zeta^*(x,u)\partial_u$, де $\zeta_u\neq 0$ і $\zeta_u^*\neq 0$. Ця бієкція задається формулами*

$$Q\to Q^*\colon\quad \zeta^*=\frac{F-\zeta_1}{\zeta_u},\qquad Q^*\to Q\colon\quad \zeta=\frac{F-\zeta_2^*}{\zeta_u^*}.$$

Розв'язок рівняння (5.5) *Q-інваріантний тоді і тільки тоді, коли він Q^*-інваріантний.*

Теорема 5.5. *З точністю до еквівалентності сімей розв'язків, для довільного рівняння з класу* (5.5) *з $F_u\neq 0$ існує взаємно-однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і операторами редукції вигляду $Q=\partial_2+\zeta(x,u)\partial_u$, де $\zeta_u\neq 0$ (або $Q^*=\partial_1+\zeta^*(x,u)\partial_u$, де $\zeta_u^*\neq 0$). А саме, будь-якому такому оператору відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно нього. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівнянь з класу* (5.5) *з $F_u\neq 0$ і вичерпного опису їх операторів редукції зазначеного вигляду повністю еквівалентні.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 5.3.

Наслідок 5.10. *Спряжені сингулярні оператори редукції $Q=\partial_2+\zeta(x,u)\partial_u$ і $Q^*=\partial_1+\zeta^*(x,u)\partial_u$ рівняння* (5.5) *(де обов'язково $\zeta_u\neq 0$ і $\zeta_u^*\neq 0$) асоційовані з однією й тією ж однопараметричною сім'єю розв'язків цього рівняння.*

Наслідок 5.11. *Нелінійне тривимірне рівняння* (5.6) *зводиться композицією перетворення Беклунда* $\zeta = -\Phi_2/\Phi_u$, $\zeta^* = -\Phi_1/\Phi_u$, *де* Φ *— функція від* (x,u), *і перетворення годографа*

нові незалежні змінні: $\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \varkappa = \Phi,$

нова залежна змінна: $\tilde{u} = u$

до рівняння (5.5) *для функції* $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$ *з* $\varkappa$ *у якості параметра.*

Зауваження 5.4. Для будь-якого рівняння з класу (5.5) з $F_u = 0$ оператори редукції вигляду $Q = \partial_2 + \zeta(x,u)\partial_u$, де $\zeta_u \neq 0$ ($Q^* = \partial_1 + \zeta^*(x,u)\partial_u$, де $\zeta^*_u \neq 0$), також бієктивно асоційовані з однопараметричними сім'ями його розв'язків, що мають вигляд $\{u = f(x,\varkappa)\}$, де $f_{1\varkappa} \neq 0$ ($f_{2\varkappa} \neq 0$). Однопараметричні сім'ї з $f_{1\varkappa} = 0$ ($f_{2\varkappa} = 0$) відповідають ультрасингулярним операторам редукції з $\zeta_u = 0$ ($\zeta^*_u = 0$), причому ця відповідність не є взаємно-однозначною.

Наведене вище дослідження сингулярних операторів редукції нелінійних хвильових рівнянь вигляду (5.5) показує, що для таких рівнянь природним є розбиття відповідних множин операторів редукції на трійки підмножин, виокремлених умовами

$$1)\ \xi^1 = 0;\ 2)\ \xi^2 = 0;\ 3)\ \xi^1\xi^2 \neq 0.$$

Після факторизації за відношенням еквівалентності векторних полів отримаємо три підмножини операторів редукції, визначені умовами

$$1)\ \xi^1 = 0,\ \xi^2 = 1; \quad 2)\ \xi^2 = 0,\ \xi^1 = 1; \quad 3)\ \xi^1 \neq 0,\ \xi^2 = 1.$$

Кожну підмножину потрібно дослідити окремо. Завдяки точковій симетрії перестановки x_1 і x_2, другий випадок зводиться до першого і його можна опустити. Остаточно маємо два суттєво різні випадки після факторизації: сингулярний випадок $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 1$ і регулярний випадок $\xi^1 \neq 0$, $\xi^2 = 1$. Калібрування $\xi^2 = 1$ не є єдиним можливим і природним у регулярному випадку.

Розглянемо іншу стандартну форму

$$u_{11} - u_{22} = F(u) \tag{5.7}$$

нелінійних хвильових рівнянь, отриману з (5.5) точковим перетворенням $\tilde{x}_1 = x_1 - x_2$, $\tilde{x}_2 = x_1 + x_2$, $\tilde{u} = u$. Використовуючи це перетворення, всі результати, отримані для класу (5.5), можна легко поширити на клас (5.7). Так, будь-яке рівняння вигляду (5.7) має дві сингулярних множини операторів редукції, виокремлених умовами $\xi^1 = -\xi^2$ і $\xi^1 = \xi^2$, і одну регулярну множину операторів редукції, асоційовану з умовою $\xi^1 \neq \pm\xi^2$. Сингулярні множини відображаються одна в іншу заміною знаку x_2, а тому одну з них можна виключити з розгляду. Після факторизації за відношенням еквівалентності векторних полів, маємо два випадки для подальшого вивчення: сингулярний випадок $\xi^1 = \xi^2 = 1$ і регулярний випадок $\xi^1 \neq \pm 1$, $\xi^2 = 1$.

Для нелінійних хвильових рівнянь більш загального вигляду

$$u_{11} - (G(u)u_2)_2 = F(u),$$

де $G(u) > 0$, природне розбиття множин операторів редукції визначено складнішими умовами, залежними від параметр-функції G. Так сингулярні підмножини асоційовані з умовами $\xi^2 = \sqrt{G}\xi^1$ і $\xi^2 = -\sqrt{G}\xi^1$.

Наведені приклади показують, що застосування традиційного розбиття множин операторів редукції для факторизації часто приводить до розщеплення однорідних і комбінування суттєво різних випадків. У результаті виведені системи визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів редукції є далекими від оптимальних і складними для дослідження. Отже, необхідно використовувати природні розбиття, що ґрунтуються на врахуванні структури сингулярних сімей операторів редукції.

5.2.5. Оператори редукції і параметричні сім'ї розв'язків.

Твердження 5.5. *Слабкий копорядок сингулярності оператора редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ рівний суттєвому порядку відповідного редукованого ЗДР.*

Доведення. Виконаємо таке точкове перетворення, щоб у нових змінних $Q=\partial_{x_2}$. (Для зручності, для нових змінних використовуємо ті ж позначення, що і для старих.) Тоді анзацом, побудованим за Q, є $u=\varphi(\omega)$, де $\varphi=\varphi(\omega)$ — нова невідома функція і $\omega=x_1$ — інваріантна незалежна змінна. Многовид $\mathcal{Q}_{(r)}$ задано системою $u_\alpha=0$, де $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2\leqslant r=\operatorname{ord}L$.

Оскільки $Q\in\mathfrak{Q}(\mathcal{L})$, існують диференціальні функції $\check\lambda=\check\lambda[\varphi]$ і $\check L=\check L[\varphi]$ порядку, не вище ніж r, такі, що $L|_{u=\varphi(\omega)}=\check\lambda\check L$ (див. [297]). Функція $\check\lambda$ ненульова і може залежати від x_2 як параметра. Функцію $\check L$ виберемо мінімального порядку $\check r$, якого можна досягти з точністю до еквівалентності, породженої ненульовими диференціальними функціями-множниками. Тоді редуковане рівняння $\check{\mathcal{L}}$: $\check L=0$ має суттєвий порядок $\check r$.

Умова $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}}Q=k$ означає, що існують диференціальні функції $\tilde L$ і $\tilde\lambda$, залежні щонайбільше від x і похідних від u по x_1, причому $\operatorname{ord}\tilde L=k$, $\operatorname{ord}\tilde\lambda\leqslant r$, такі, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}=\tilde\lambda\tilde L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$.

Якби $\check r<k$, можна було б використати $\tilde\lambda_{\rm new}=\check\lambda|_{u\rightsquigarrow\varphi}$ і $\tilde L_{\rm new}=\check L|_{u\rightsquigarrow\varphi}$ в означенні слабкої сингулярності замість $\tilde\lambda$ і $\tilde L$, що привело б до суперечності $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}}Q\leqslant\operatorname{ord}\tilde L_{\rm new}=\check r<k$. Отже, $\check r\geqslant k$. (Тут “$y\rightsquigarrow z$” позначає, що величину y потрібно підставити замість величини z.)

Припустимо, що $\check r>k$. Маємо рівність $\check\lambda\check L=(\tilde\lambda\tilde L)|_{u=\varphi(\omega)}$, в якій змінна x_2 відіграє роль параметра. Фіксуючи значення x_2^0 змінної x_2, отримаємо зображення

$$\check L=\Lambda[\varphi]\,\tilde L\Big|_{u=\varphi(\omega),\,x_2=x_2^0},\quad \Lambda:=\frac{\tilde\lambda|_{u=\varphi(\omega)}}{\check\lambda}\Bigg|_{x_2=x_2^0}\neq0.$$

Оскільки $\operatorname{ord}\tilde L|_{u=\varphi(\omega),\,x_2=x_2^0}\leqslant k<\check r$, це зображення суперечить умові, що $\check r$ — суттєвий порядок редукованого рівняння $\check{\mathcal{L}}$. Отже, $\check r=k$. обернене перетворення змінних зберігає цю рівність. $\square$

Наслідок 5.12. *Слабкий копорядок сингулярності оператора редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ дорівнює максимальній кількості суттєвих параметрів у сім'ях Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$.*

Наслідок 5.13. *Нехай $Q \in \mathfrak{Q}(\mathcal{L})$ і $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = k$, а диференціальна функція k-го порядку, асоційована з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ з точністю до ненульового множника, є максимального рангу по похідній від u порядку k. Тоді $\mathcal{L}$ має k-параметричну сім'ю Q-інваріантних розв'язків, і будь-який Q-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї.*

Наслідок 5.14. *Припустимо, що диференціальна функція мінімального порядку, асоційована з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ з точністю до ненульового множника, є максимального рангу за похідною від u найвищого порядку, що виникає в цій диференціальній функції. Якщо максимальна кількість суттєвих параметрів у сім'ї Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ не менше, ніж $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$, то Q — оператор редукції рівняння $\mathcal{L}$.*

Зауваження 5.5. Для будь-якого оператора Q максимальна кількість суттєвих параметрів у сім'ї Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ не перевищує $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$.

Наведений вище розгляд підсумовує наступне твердження.

Твердження 5.6. *Припустимо, що диференціальна функція мінімального порядку, асоційована з диференціальною функцією $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ ($r = \operatorname{ord} L$) з точністю до ненульового множника, є максимального рангу за похідною від u найвищого порядку, що виникає в цій диференціальній функції. Тоді з будь-яких двох наступних властивостей випливає третя.*

1) Q — оператор редукції рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$.

2) $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = k$ ($0 \leqslant k \leqslant r$).

3) Рівняння $\mathcal{L}$ має k-параметричну сім'ю Q-інваріантних розв'язків, і будь-який Q-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї.

Властивості ультрасингулярних векторних полів як операторів редукції очевидні.

Твердження 5.7. *1) Будь-яке ультрасингулярне векторне поле Q рівняння $\mathcal{L}$ є оператором редукції цього рівняння. Анзац, побудований за Q, редукує $\mathcal{L}$ до тотожності. Отже, сім'я Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризована довільною функцією від однієї Q-інваріантної змінної.*

2) Якщо сім'я Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризована довільною функцією однієї Q-інваріантної змінної, то Q — ультрасингулярне векторне поле для $\mathcal{L}$.

5.2.6. Оператори редукції копорядку сингулярності 1. Результати, отримані для еволюційних і хвильових рівнянь, можна частково поширити на сингулярні оператори редукції копорядку один загальних ДРЧП з двома незалежними і однією залежною змінною.

Розглянемо рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$, де $L = L[u]$ — диференціальна функція порядку $r > 1$. Припустимо, що функція L допускає сингулярний модуль векторних полів першого копорядку. (В силу наслідку 5.6 можна обмежитися розглядом тільки сильної сингулярності модулів векторних полів для диференціальних рівнянь.) Без обмеження загальності з точністю до заміни змінних можна вважати, що модуль містить сингулярну множину $S = \{Q^\zeta\}$ першого копорядку векторних полів у зведеному вигляді, тобто $Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u$ для будь-якої гладкої функції ζ і фіксованої гладкої функції ξ від (x, u). Додатково можна покласти $\xi \in \{0, u\}$.

Згідно теореми 5.1 диференціальну функцію L можна зобразити як $L = \check{L}(x, \Omega_{r,1})$, де $\Omega_{r,1} = \big(\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant 1, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big)$, причому $\check{L}_{\omega_\alpha} \neq 0$ для деякого ω_α з $\alpha_1 = 1$. Тоді обмеження L на $\mathcal{Q}^\zeta_{(r)}$ співпадає з обмеженням на той же многовид функції $\tilde{L}^\zeta = \check{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,1})$, де

$$\tilde{\Omega}_{r,1} = \big(D_1^{\alpha_1}(Q^\zeta)^{\alpha_2}u, \alpha_1 \leqslant 1, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big).$$

Отже, вигляд $\tilde{L}^\zeta$ визначено виглядом L та ξ і вибраним значенням параметр-функції ζ. Залежно від значення ζ, диференціальна функція $\tilde{L}^\zeta$ може або тотожно щезати, або мати порядок 0 або 1. Це означає, що або векторне поле Q^ζ ультрасингулярне, або $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 0$ або $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 1$ відповідно. Вивчимо кожен з перерахованих випадків окремо. Нижче додатково припустимо, що функція $\tilde{L}^\zeta$ має максимальний ранг відносно u (u_1), якщо $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 0$ $(\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 1)$.

Значення ζ, при яких Q^ζ ультрасингулярне для $\mathcal{L}$, виокремлені умовою $\tilde{L}^\zeta = 0$, де u і u_1 потрібно вважати незалежними змінними. Розщеплення цієї умови по u_1 дає систему $\mathcal{S}_{-1}$ ДРЧП на ζ порядків менше, ніж r, яка може бути несумісною у загальному випадку. Несумісність системи $\mathcal{S}_{-1}$ означає, що множина S не містить ультрасингулярних векторних полів. Наприклад, еволюційні рівняння порядків вище, ніж 1, і нелінійні хвильові рівняння вигляду (5.5) з $F_u \neq 0$, на відміну від рівнянь вигляду (5.5) з $F_u = 0$, не допускають ультрасингулярних векторних полів (див. підрозділи 5.2.3 і 5.2.4). Умова ультрасингулярності на ζ гарантує, що $Q^\zeta \in \mathfrak{Q}(\mathcal{L})$ і сім'я Q^ζ-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризована довільною функцією однієї Q^ζ-інваріантної змінної.

Якщо $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 0$, параметр-функція ζ задовольняє умову $\tilde{L}^\zeta_{u_1} = 0$, де u і u_1 вважаємо незалежними змінними. Ця умова слабша за умову ультрасингулярності. Отже, відповідна система $\mathcal{S}_0$ ДРЧП на ζ (порядків менше, ніж r), отримана розщепленням умови $\tilde{L}^\zeta_{u_1} = 0$ по u_1, має більше шансів на сумісність, ніж $\mathcal{S}_{-1}$. Наприклад, будь-яке нелінійне хвильове рівняння вигляду (5.5) з $F_u \neq 0$ допускає векторні поля нульового копорядку сингулярності, хоча це не так щодо ультрасингулярних векторних полів. Водночас еволюційні рівняння не мають векторних полів нульового копорядку сингулярності.

Можна сформулювати певні умови, достатні для сумісності $\mathcal{S}_0$. Так, якщо $\check{L}_{\omega_{(1,0)}} = 0$ і $\xi_u = 0$, то система $\mathcal{S}_0$ сумісна, оскільки її задовольняє будь-яке ζ з $\zeta_u = 0$. Іншими словами, $\operatorname{sco}_L Q^\zeta \leqslant 0$ для будь-якого $\zeta = \zeta(x)$. Розглянемо цей частковий випадок докладніше. (Нагадаємо, що за умови $\xi_u = 0$ коефіцієнт ξ можна вважати, з точністю до точкових перетворень, рівним 0, але цю можливість використовувати не будемо.)

Якщо додатково $\check{L}_{\omega_{(0,0)}} = 0$, умова $\tilde{L}^\zeta = 0$ при $\zeta = \zeta(x)$ приводить тільки до одного ДРЧП відносно ζ. Кожен його розв'язок задовольняє систему $\mathcal{S}_{-1}$, а тому відповідне векторне поле Q^ζ ультрасингулярне для L.

Інакше $\mathrm{sco}_L\, Q^\zeta = 0$ і рівняння $\tilde{L}^\zeta = 0$ можна розв'язати відносно u: $u = G^\zeta(x)$, де вираз для функції G^ζ залежить від параметр-функції $\zeta = \zeta(x)$ і її похідних до порядку $r-1$ включно. Тоді критерій умовної інваріантності еквівалентний ДРЧП r-го порядку $\zeta = \xi G_1^\zeta + G_2^\zeta$ відносно ζ. Якщо ζ — розв'язок цього рівняння, то $Q^\zeta \in \mathfrak{Q}(\mathcal{L})$. Анзац, побудований за оператором Q^ζ, можна записати у вигляді $u = \varphi(\omega) + G^\zeta(x)$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція і $\omega = \omega(x)$ — інваріантна незалежна змінна, що задовольняє рівняння $\xi\omega_1 + \omega_2 = 0$. Він редукує вихідне рівняння $\mathcal{L}$ до тривіального алгебраїчного рівняння $\varphi = 0$, тобто функція $u = G^\zeta(x)$ є єдиним Q^ζ-інваріантним розв'язком рівняння $\mathcal{L}$. Навпаки, фіксуємо розв'язок $u = f(x)$ рівняння $\mathcal{L}$ і покладемо $\zeta = \xi f_1 + f_2$. Тоді $f = G^\zeta(x)$, а тому $\zeta = \xi G_1^\zeta + G_2^\zeta$, тобто в силу критерію умовної інваріантності $Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u \in \mathfrak{Q}(\mathcal{L})$, причому $\zeta_u = 0$. Розв'язок $u = f(x)$ Q^ζ-інваріантний за побудовою. У результаті маємо таке твердження.

Теорема 5.6. *Нехай рівняння $\mathcal{L}$ має множину $S = \{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$ першого копорядку сингулярності векторних полів у зведеній формі з $\xi_u = 0$, тобто його ліва частина L допускає зображення $L = \check{L}(x, \Omega_{r,1})$, де $\Omega_{r,1} = \big(\omega_\alpha = D_1^{\alpha_1}(\xi D_1 + D_2)^{\alpha_2} u, \alpha_1 \leqslant 1, \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant r\big)$, $\check{L}_{\omega_\alpha} \neq 0$ для деякого α з $\alpha_1 = 1$, і додатково $\check{L}_{\omega_{(1,0)}} = 0$ і $\check{L}_{\omega_{(0,0)}} \neq 0$. Тоді існує бієкція між розв'язками рівняння $\mathcal{L}$ і його операторами редукції з S із $\zeta_u = 0$. А саме, будь-який такий оператор має нульовий копорядок сингулярності і відповідає єдиному розв'язку, інваріантному відносно нього. Проблеми розв'язання рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису таких його операторів редукції повністю еквівалентні.*

Розглянемо тепер регулярні значення ζ, для яких $\mathrm{sco}_L\, Q^\zeta = 1$. Такі значення задовольняють умову регулярності $\tilde{L}^\zeta_{u_1} \neq 0$. Отже, рівняння $\tilde{L}^\zeta = 0$, еквівалентне $\mathcal{L}$ на многовиді $\mathcal{Q}^\zeta_{(r)}$, можна розв'язати відносно u_1:

$u_1 = G^\zeta(x,u)$, де вираз для функції G^ζ залежить від параметр-функції ζ і її похідних до порядку $r-1$ включно. Для рівняння $\mathcal{L}$ і оператора Q^ζ критерій умовної інваріантності дає визначальне рівняння

$$\zeta_1 + \zeta_u G^\zeta - (\xi_1 + \xi_u G^\zeta)G^\zeta = \xi G^\zeta_1 + G^\zeta_2 + \zeta G^\zeta_u \tag{5.8}$$

відносно функції ζ, яке можна переписати як умову сумісності

$$\zeta_1 + \zeta_u G^\zeta - (\xi_1 + \xi_u G^\zeta)G^\zeta - \xi(G^\zeta_1 + G^\zeta_u G^\zeta) = G^\zeta_2 + (\zeta - \xi G^\zeta)G^\zeta_u$$

рівнянь $u_1 = G^\zeta$ і $\xi u_1 + u_2 = \zeta$ відносно u. Порядок рівняння (5.8) дорівнює r, тобто він більше за порядок системи $\mathcal{S}_0$. Це гарантує (при певних умовах гладкості, наприклад, в аналітичному випадку), що рівняння (5.8) має розв'язки, які не є розв'язками системи $\mathcal{S}_0$. Іншими словами, *рівняння $\mathcal{L}$ обов'язково має оператори редукції першого копорядку сингулярності з множини S.*

З результатів пункту 5.2.5 випливає, що для кожного оператора редукції Q першого копорядку сингулярності рівняння $\mathcal{L}$ існує однопараметрична сім'я Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Якщо $\mathcal{L}$ допускає сингулярний модуль векторних полів копорядку 1, то зворотне твердження також є вірним.

Теорема 5.7. *Нехай рівняння $\mathcal{L}$ має множину $S = \{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$ першого копорядку сингулярності векторних полів у зведеній формі. Тоді для будь-якої однопараметричної сім'ї $\mathcal{F}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ існує значення параметр-функції $\zeta = \zeta(x,u)$ таке, що Q^ζ є оператором редукції для $\mathcal{L}$ і кожен розв'язок з $\mathcal{F}$ є Q^ζ-інваріантним.*

Доведення. Розглянемо однопараметричну сім'ю $\mathcal{F} = \{u = f(x,\varkappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Тут $f_\varkappa \neq 0$, оскільки параметр $\varkappa$ суттєвий. Розв'язуючи $u = f(x,\varkappa)$ відносно $\varkappa$, маємо $\varkappa = \Phi(x,u)$ з деякою функцією $\Phi = \Phi(x,u)$, де $\Phi_u \neq 0$, а тоді визначаємо $\zeta = \zeta(x,u)$ за формулою

$$\zeta = -\frac{\xi\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_u}.$$

Оскільки $f_i = -(\Phi_i/\Phi_u)|_{u=f}$, $i = 1, 2$, то $\xi|_{u=f} f_1 + f_2 = \zeta|_{u=f}$, тобто будь-який розв'язок з $\mathcal{F}$ є Q^ζ-інваріантним. Тоді або Q^ζ — ультрасингулярне векторне поле для L, або $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 1$. (Випадок $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 0$ неможливий, оскільки інакше рівняння $\mathcal{L}$ не могло б мати однопараметричну сім'ю Q^ζ-інваріантних розв'язків.) Кожне ультрасингулярне векторне поле для L є оператором редукції для $\mathcal{L}$. Якщо $\operatorname{sco}_L Q^\zeta = 1$, то $Q \in \mathfrak{Q}(\mathcal{L})$ в силу наслідку 5.14. □

Наслідок 5.15. *Нехай* $S = \{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$, $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} S = 1$ *і жоден елемент з* S *не є ультрасингулярним для* $\mathcal{L}$. *Тоді з точністю до еквівалентності сімей розв'язків існує бієкція між однопараметричними сім'ями розв'язків рівняння* $\mathcal{L}$ *і його операторами редукції першого копорядку сингулярності, що належать* S. *А саме, кожному оператору такого типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно нього. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння* $\mathcal{L}$ *і вичерпного опису таких його операторів редукції повністю еквівалентні.*

Бієкція руйнується за наявності ультрасингулярних векторних полів. Зазначена відповідність приводить до зв'язку між вихідним рівнянням $\mathcal{L}$ і визначальним рівнянням (5.8).

Наслідок 5.16. *Нехай* $S = \{Q^\zeta = \xi\partial_1 + \partial_2 + \zeta\partial_u\}$ *і* $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} S = 1$. *Тоді визначальне рівняння для значень* ζ, *для яких* $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q^\zeta = 1$, *зводиться композицією перетворення Беклунда* $\xi\Phi_1 + \Phi_2 + \zeta\Phi_u = 0$, $\Phi_1 + G^\zeta\Phi_u = 0$, *де* Φ *— функція від* (x, u), *і перетворення годографа*

нові незалежні змінні: $\quad \tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \varkappa = \Phi,$

нова залежна змінна: $\quad \tilde{u} = u$

до вихідного рівняння $\mathcal{L}$ *для функції* $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$ *з* $\varkappa$ *у якості параметра.*

Доведення. Фіксуємо довільний розв'язок ζ рівняння (5.8), який додатково задовольняє умову $\tilde{L}^\zeta_{u_1} \neq 0$. За теоремою Фробеніуса рівняння

$\xi\Phi_1+\Phi_2+\zeta\Phi_u=0$ і $\Phi_1+G^\zeta\Phi_u=0$ сумісні відносно функції $\Phi=\Phi(x,u)$, оскільки умова їх сумісності співпадає з (5.8) і тому виконується тотожно. Виберемо несталий розв'язок Φ обох цих рівнянь. Тоді $\Phi_u\neq 0$ і

$$\zeta=-\xi\frac{\Phi_1}{\Phi_u}+\frac{\Phi_2}{\Phi_u},\quad G^\zeta=-\frac{\Phi_1}{\Phi_u}.$$

Після перетворення годографа останні рівняння набувають вигляду $\xi\tilde u_{\tilde x_1}+\tilde u_{\tilde x_2}=\zeta(\tilde x,\tilde u)$ і $\tilde u_{\tilde x_1}=G^\zeta(\tilde x,\tilde u)$. З цього прямо випливає, що для кожного значення $\varkappa$ функція $\tilde u=\tilde u(\tilde x,\varkappa)$ задовольняє рівняння $\mathcal{L}$. Параметр $\varkappa$ суттєвий в $\tilde u$, оскільки $\tilde u_\varkappa=1/\Phi_u\neq 0$.

З доведення теореми 5.7 випливає, що застосування оберненого перетворення до однопараметричної сім'ї розв'язків вихідного рівняння $\mathcal{L}$ приводить до розв'язку рівняння (5.8), якщо визначене значення ζ задовольняє умову регулярності $\tilde L^\zeta_{u_1}\neq 0$. □

5.3. Оператори редукції нелінійних рівнянь фільтрації

Розглянемо клас нелінійних рівнянь фільтрації загального вигляду

$$v_t=f(v_x)v_{xx}, \tag{5.9}$$

де $f=f(v_x)$ — довільна ненульова гладка функція від v_x. Його група еквівалентності $G^\sim$ складається з перетворень

$$\tilde t=\varepsilon_1 t+\varepsilon_2,\quad \tilde x=\varepsilon'_1x+\varepsilon'_2v+\varepsilon'_3,\quad \tilde v=\varepsilon''_1x+\varepsilon''_2v+\varepsilon''_3,$$
$$\tilde f=\varepsilon_1^{-1}(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2v_x)^2 f,$$

де ε_1, ε_2, ε'_i, ε''_i, $i=1,2,3,$ — довільні сталі, $\varepsilon_1(\varepsilon'_1\varepsilon''_2-\varepsilon'_2\varepsilon''_1)\neq 0$.

Прокласифікуємо оператори редукції рівнянь з класу (5.9). А саме, знайдемо всі $G^\sim$-нееквівалентні значення довільного елемента f, при яких рівняння (5.9) допускають неліївські оператори редукції з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t. Оператори редукції з нульовими коефіцієнтами при ∂_t не розглядаємо, оскільки вони є сингулярними для рівнянь з класу (5.9), а вичерпний опис сингулярних операторів редукції вже виконано для загального класу $(1+1)$-вимірних еволюційних рівнянь (див. підрозділ 5.2.3). Під неліївськими розуміємо оператори редукції, що нееквівалентні ліївським операторам.

Теорема 5.8. *Нелінійні рівняння фільтрації* (5.9) *допускають неліївські оператори редукції з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t тільки у випадку нелінійностей типу Фуджити $f=(a{v_x}^2+bv_x+c)^{-1}$, де a, b, c — довільні сталі, не рівні одночасно нулю.*

Цю теорему вперше представлено в [244], її стисле доведення наведено в [8]. Зауважимо, що існують рівно три $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки "нелінійностей" типу Фуджити: $f(v_x)=1$, $f(v_x)=v_x^{-1}$, $f(v_x)=(v_x^2+1)^{-1}$. Оператори редукції $(1+1)$-вимірного лінійного рівняння теплопровідності ($f=1$) вичерпно досліджено в [134]. Рівняння з $f=(v_x^2+1)^{-1}$ зводиться до рівняння з $\tilde f=\tilde v_{\tilde x}^{-1}$ над полем комплексних чисел за допомогою перетворення $\tilde t=t$, $\tilde x=x+iv$, $\tilde v=x-iv$. Тому можливим методом вивчення цього рівняння є виконання вказаної комплексної заміни в операторах редукції для випадку $f=v_x^{-1}$ та подальше дослідження їх дійсної форми. Отже, для того, щоб завершити класифікацію операторів редукції нелінійних рівнянь фільтрації вигляду (5.9), достатньо описати оператори редукції рівняння з нелінійністю $f=v_x^{-1}$, тобто рівняння

$$v_t={v_x}^{-1}v_{xx}. \tag{5.10}$$

Воно має достатньо звичайні для нелінійних рівнянь фільтрації МАІ $A=\langle\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,t\partial_t+v\partial_v,\,x\partial_x-v\partial_v\rangle$ та відповідну групу ліївських симетрій. Однак, це рівняння вирізняється своїми дискретними симетріями. Окрім двох звичайних перетворень заміни знаку в множинах $\{t,v\}$ та $\{x,v\}$, воно допускає також перетворення годографа $\tilde t=t$, $\tilde x=v$, $\tilde v=x$. Ці інволютивні перетворення разом з однопараметричними групами неперервних перетворень, інфінітезимальні оператори яких належать алгебрі A, породжують повну групу G точкових симетрій рівняння (5.10), що складається з перетворень

$$\tilde t=\varepsilon_3t+\varepsilon_1,\quad \tilde x=\varepsilon_4x+\varepsilon_2,\quad \tilde v=\varepsilon_3{\varepsilon_4}^{-1}v\quad\text{та}$$
$$\tilde t=\varepsilon_3t+\varepsilon_1,\quad \tilde x=\varepsilon_3{\varepsilon_4}^{-1}v,\quad \tilde v=\varepsilon_4x+\varepsilon_2,$$

де $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_4$ — довільні сталі, $\varepsilon_3\varepsilon_4\neq0$.

Опишемо неліївські оператори редукції рівняння (5.10) з точністю до G-еквівалентності. Оскільки це еволюційне рівняння, достатньо обмежитися розглядом операторів вигляду $Q=\partial_t+\xi\partial_x+\theta\partial_v$, де ξ та θ — функції змінних t, x, v. З критерію умовної інваріантності випливає система визначальних рівнянь на коефіцієнти ξ та θ

$$\xi_{vv}=\xi\xi_v,\quad \xi_t=2\xi_{xv}-\theta_{vv}-\theta_v\xi+\theta\xi_v-\xi\xi_x,$$
$$\theta_{xx}=\theta\theta_x,\quad \theta_t=2\theta_{xv}-\xi_{xx}-\xi_x\theta+\xi\theta_x-\theta\theta_v,$$

розв'язавши яку, отримуємо наступне твердження [244].

Теорема 5.9. *G-нееквівалентні неліївські оператори редукції рівняння (5.10) вичерпуються такими операторами:*

1. $\partial_t+\varepsilon\partial_x+f(\omega)\partial_v,\quad$ *де* $\quad\omega=x+\varepsilon t,\quad \varepsilon\in\{0,1\}$;
2. $\partial_t+f(\omega)(\partial_x+\partial_v),\quad$ *де* $\quad\omega=x+v$;
3. $\partial_t+\xi\partial_x+(\varphi_t+\varphi_x\xi)\partial_v,\quad$ *де* $\quad\xi=\dfrac{-2}{v+\varphi},\quad \varphi\in\{t+e^x,\ tf(x)\}$;
4. $\partial_t+\xi\partial_x-\dfrac{\chi_t+\chi_x\xi}{1+\chi^2}\partial_v,\quad$ *де* $\quad\xi=-\dfrac{1+\chi\operatorname{tg}(v/2)}{\operatorname{tg}(v/2)-\chi}$,
   $\chi\in\{-\operatorname{tg}x\operatorname{th}t,\ \operatorname{th}x\operatorname{tg}t\}$;
5. $\partial_t+\xi\partial_x+\dfrac{\chi_t+\chi_x\xi}{\chi}\partial_v,\quad$ *де* $\quad\xi=\dfrac{1-\chi e^v}{1+\chi e^v}$,
   $$\chi\in\left\{\pm\frac{e^{2x}-e^{2t}}{2},\ \frac{e^{2x}+e^{2t}}{2},\ \pm\frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{sh}(x+t)},\ \frac{\operatorname{sh}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)},\ \frac{\operatorname{ch}(x-t)}{\operatorname{ch}(x+t)}\right\}.$$

Тут f — довільний несталий розв'язок ЗДР $f_{\omega\omega}=ff_\omega$, тобто

$$f\in\left\{-\frac{2}{\omega},\ -\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2},\ -\operatorname{th}\frac{\omega}{2},\ -\operatorname{cth}\frac{\omega}{2}\right\}\bmod G.$$

Оператори редукції нелінійного рівняння фільтрації (5.9) є *потенціальними некласичними симетріями* нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = (f(u)u_x)_x, \tag{5.11}$$

оскільки (5.9) є рівнянням на потенціал v, визначений потенціальною системою $v_x = u$, $v_t = f(u)u_x$. Ця система відповідає закону збереження рівняння (5.11) з характеристикою 1.

Між операторами редукції рівнянь (5.9) та (5.11) існує зв'язок, який можна узагальнити до зв'язку між операторами редукції пари рівнянь

$$u_t = (f(t,x,u)u_x + g(t,x,u))_x, \tag{5.12}$$

$$v_t = f(t,x,v_x)v_{xx} + g(t,x,v_x) \tag{5.13}$$

з однаковими функціями f і g. Рівняння (5.13) є потенціальним рівнянням для рівняння (5.12), асоційованим з потенціальною системою

$$v_x = u, \quad v_t = f(t,x,u)u_x + g(t,x,u), \tag{5.14}$$

що відповідає закону збереження рівняння (5.12) з характеристикою 1. Тому зазначений зв'язок можна інтерпретувати як зв'язок між звичайними і потенціальними операторами редукції рівняння (5.12).

Розглянемо оператори редукції $Q = \partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_v$ та $Q' = \partial_x + \eta\partial_u$ рівняння (5.13) і (5.12) відповідно. Тут ξ і θ залежать тільки від t та x, а коефіцієнт η визначається формулою

$$\eta = \frac{\theta(t,x) - \xi(t,x)u - g(t,x,u)}{f(t,x,u)}. \tag{5.15}$$

З критерію умовної інваріантності для рівняння (5.13) та оператора Q випливає умова на функції ξ і θ

$$\begin{aligned}&(f_t + \xi f_x + \theta_x f_{v_x} - \xi_x v_x f_{v_x} - 2\xi_x f)(\theta - \xi v_x - g) + \\ &+ f(g_t + \xi g_x + \theta g_{v_x} - \theta_t - \xi_t v_x) + f^2(\theta_{xx} - \xi_{xx}v_x) = 0,\end{aligned}$$

яку треба додатково розщепити за змінною v_x. Для рівняння (5.12) та оператора Q' критерій умовної інваріантності з точністю до перепозначення v_x через u дає таку ж умову η^1 і η^2, яку теж потрібно розщепити за змінною u. Системи, отримані в обох випадках, після розщеплення співпадають. Характеристичне рівняння $Q[v] = \theta - v_t - \xi v_x = 0$, яке можна переписати на многовиді розв'язків потенціальної системи у вигляді

$$u_x - \frac{\theta - \xi u - g}{f} = 0,$$

співпадає з характеристичним рівнянням $Q'[u] = 0$.

Отже, отримуємо наступне твердження.

Твердження 5.8. *Оператор* $Q = \partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_v$, *де* $\xi = \xi(t,x)$, $\theta = \theta(t,x)$, *є оператором редукції рівняння* (5.13) *тоді і тільки тоді, коли оператор*

$$Q' = \partial_x + \frac{\theta - \xi u - g}{f}\partial_u$$

є оператором редукції рівняння (5.12). *Система* (5.14) *встановлює зв'язок між відповідними множинами інваріантних розв'язків.*

5.4. Оператори редукції багатовимірного лінійного рівняння теплопровідності

Вивчимо оператори редукції n-вимірного ($n \geq 2$) лінійного однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{aa}, \quad \text{де} \quad u = u(t,\vec{x}), \quad t = x_0, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{5.16}$$

У (5.16) і надалі індекси a, b, c і d змінюються від 1 до n, індекси i і j — від 1 до $n-1$.

МАІ A_{LHE} рівняння (5.16) добре відома. Її породжують оператори

$$\begin{gathered}\partial_t = \partial/\partial_t, \quad \partial_a = \partial/\partial_{x_a}, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a, \\ G_a = t\partial_a - \tfrac{1}{2}x_a u\partial_u, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \ (a<b), \quad I = u\partial_u, \\ \Pi = 4t^2 + 4tx_a\partial_a - (x_ax_a + 2t)u\partial_u, \quad f(t,\vec{x})\partial_u,\end{gathered} \tag{5.17}$$

де $f = f(t,\vec{x})$ — довільний розв'язок рівняння (5.16). Позначимо через $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{G}(1,n)$ та $G^{\infty}_{\mathrm{LHE}}$ підгрупи поворотів, перетворень Галілея та перетворень лінійної суперпозиції розв'язків з групи точкових симетрій рівняння (5.16).

Теорема 5.10. *Для будь-якого оператора Q редукції рівняння* (5.16) *виконується одне з співвідношень:*

1. $Q \sim \widetilde{Q}^0$, *де* $\widetilde{Q}^0 \in A_{\mathrm{LHE}}$;
2. $Q \sim \widetilde{Q}^1 = \partial_n + g_n g^{-1} u\partial_u \mod \mathrm{SO}(n) \times G^{\infty}_{\mathrm{LHE}}$,
   де $g = g(t,x_n)$ *— ненульовий розв'язок рівняння* $g_t = g_{nn}$;
3. $Q \sim \widetilde{Q}^2 = J_{12} + \varphi(\theta)u\partial_u \mod \mathrm{G}(1,n) \times G^{\infty}_{\mathrm{LHE}}$,
   де $\varphi = \varphi(\theta)$ *— розв'язок рівняння* $\varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0$, $\varphi_\theta \neq 0$.

Зауваження 5.6. У теоремі 5.10 і надалі (r,θ) — полярні координати в площині (x_1,x_2), тобто $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\theta = \operatorname{arctg} x_2/x_1$. Для функції φ існує чотири суттєво різні (відносно зсувів по θ) випадки (тут $\varkappa$ — ненульова стала):

$$\text{а) } \varphi = -\varkappa \operatorname{tg} \varkappa\theta, \quad \text{б) } \varphi = \varkappa \operatorname{th} \varkappa\theta, \quad \text{в) } \varphi = \varkappa \operatorname{cth} \varkappa\theta, \quad \text{г) } \varphi = \theta^{-1}.$$

Зауваження 5.7. Анзаци і редуковані рівняння, побудовані за операторами $\widetilde{Q}^1$ і $\widetilde{Q}^2$, мають відповідно вигляд:

1) $u = g(t,x_n)v(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1})$, де $\omega_0 = t$, $\omega_i = x_i$; $\quad v_0 = v_{ii}$;

2) $u = e^{\int\varphi(\theta)d\theta}v(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1})$, де $\omega_0 = t,\ \omega_1 = r$,
   $\omega_s = x_{s+1},\ s = \overline{2,n-1}; \quad v_0 = v_{11} + \omega_1^{-1}v_1 - \lambda\omega_1^{-2}v + v_{ss}$.

У 2) $\lambda = -\varphi_\theta - \varphi^2 = \mathrm{const}$. В силу зауваження 5.6 другий анзац об'єднує в собі чотири суттєво різні відносно $A^{\infty}_{\mathrm{LHE}}$ анзаци:

а) $\varphi = -\varkappa \operatorname{tg} \varkappa\theta\colon \quad u = v(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}) \cos \varkappa\theta, \quad \lambda = \varkappa^2$;

б) $\varphi = \varkappa \operatorname{th} \varkappa\theta\colon \quad u = v(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}) \operatorname{ch} \varkappa\theta, \quad \lambda = -\varkappa^2$;

в) $\varphi = \varkappa \operatorname{cth} \varkappa\theta\colon \quad u = v(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}) \operatorname{sh} \varkappa\theta, \quad \lambda = -\varkappa^2$;

г) $\varphi = \theta^{-1}\colon \quad u = v(\omega_0,\ldots,\omega_{n-1})\theta, \quad \lambda = 0$.

У доведенні теореми 5.10 використовуються наступні твердження.

Лема 5.4. *Функція $z = z(t, \vec{x})$ задовольняє рівняння*

$$z_t - z_{aa} - 2h_n z = 0, \ \ \text{де} \ h = h(t, x_n): \ h_t - h_{nn} - 2h_n h = 0 \qquad (5.18)$$

тоді і тільки тоді, коли має місце зображення

$$z = f_n - hf, \quad \text{де} \quad f = f(t, \vec{x}): \ f_t = f_{aa}. \qquad (5.19)$$

Лема 5.5. *Функція $z = z(t, \vec{x})$ задовольняє рівняння*

$$z_t - z_{aa} - 2\frac{\varphi_\theta}{r^2} z = 0, \ \ \text{де} \ \varphi = \varphi(\theta): \ \varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0, \ \varphi_\theta \neq 0 \qquad (5.20)$$

тоді і тільки тоді, коли має місце зображення

$$z = x_1 f_2 - x_2 f_1 - \varphi f, \quad \text{де} \quad f = f(t, \vec{x}): \ f_t = f_{aa}. \qquad (5.21)$$

Доведення теореми 5.10. Нехай $Q = \xi^0\partial_t + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u$ — оператор редукції рівняння (5.16). Розглянемо окремо два суттєво різних випадки: $\xi^0 \neq 0$ і $\xi^0 = 0$.

I. $\xi^0 \neq 0$. У силу існування відношення еквівалентності можна вважати, що $\xi^0 = 1$, тобто $Q = \partial_t + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u$. Критерій умовної інваріантності для такого оператора і рівняння (5.16) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\eta_t - \xi^a_t u_a - (\eta_{aa} + 2\eta_{au}u_a + \eta_{uu}u_a u_a) + \\ &\qquad + (\xi^b_{aa} + 2\xi^b_{au}u_a + \xi^b_{uu}u_a u_a)u_b + (\xi^b_a + \xi^b_u u_a)u_{ab} = 0 \end{aligned} \qquad (5.22)$$

при $u_{nn} = \eta - \xi^a u_a - u_{ii}$. Розщеплюючи в (5.22) по змінним u_{ab}, $a \neq b$, u_{ii}, u_a, після спрощення отримаємо наступну систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q :

$$\xi^a_u = 0, \ \eta_{uu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^a = \xi^a(t, \vec{x}), \ \eta = \eta^1(t, \vec{x})u + \eta^0(t, \vec{x})$$

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0, \quad a \neq b, \qquad \xi^1_1 = \cdots = \xi^n_n, \qquad (5.23)$$

$$2\eta^1_a = -(\xi^a_t - \xi^a_{cc} + 2\xi^n_n \xi^a), \qquad (5.24)$$

$$\eta^1_t - \eta^1_{aa} + 2\xi^n_n \eta^1 = 0, \qquad (5.25)$$

$$\eta^0 t - \eta^0_{aa} + 2\xi^n_n \eta^0 = 0. \qquad (5.26)$$

Лема 5.6. *Розв'язки системи* (5.23)–(5.25) *мають вигляд*

$$\xi^a = \mu^{ab}x_b + \nu x_a + \chi^a, \tag{5.27}$$

$$\eta^1 = -\tfrac{1}{4}(\nu_t + 2\nu^2)x_a x_a - \tfrac{1}{2}(\chi^a_t + 2\nu\chi^a)x_a + \sigma, \tag{5.28}$$

де $\mu^{ab} = -\mu^{ba}$, ν, χ^a, σ *— функції від* t, *що задовольняють систему ЗДР*

$$\begin{aligned} &\nu_{tt} + 6\nu\nu_t + 4\nu^3 = 0, \quad (\chi^a_t + 2\nu\chi^a)_t + 2\nu(\chi^a_t + 2\nu\chi^a) = 0,\\ &\mu^{ab}_t + 2\nu\mu^{ab} = 0, \quad \sigma_t + 2\nu\sigma + \tfrac{1}{2}n(\nu_t + 2\nu^2) = 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Інтегрування першого рівняння з системи (5.29) дає три сім'ї розв'язків для функції ν :

$$\nu = \frac{t + C_1}{(t + C_1)^2 + C_2}, \qquad \nu = \frac{1}{2(t + C_1)}, \qquad \nu = 0.$$

Для кожної з цих сімей розв'яжемо інші рівняння системи (5.29), а рівняння (5.26) зведемо до (5.16). У результаті побудуємо набори операторів редукції, в яких будь-який оператор еквівалентний оператору з A_{LHE}:

$$\begin{aligned} &Q^1 = \big((t + C_1)^2 + C_2\big)^{-1}\big[\Pi + C_1 D + (C_1^2 + C_2)\partial_t + \widehat{Q}^1\big],\\ &Q^2 = \big(t + C_1\big)^{-1}\big[\tfrac{1}{2}D + C_1\partial_t + \widehat{Q}^2\big],\\ &Q^3 = \partial_t + \widehat{Q}^3, \end{aligned}$$

де $\widehat{Q}^1$, $\widehat{Q}^2$, $\widehat{Q}^3$ — довільні оператори з $\langle J_{ab},\ G_a,\ \partial_a,\ I\rangle \oplus A^{\infty}_{\mathrm{LHE}}$.

Отже, *для лінійного* n*-вимірного* ($n \geqslant 2$) *рівняння теплопровідності будь-який оператор редукції з* $\xi^0 \neq 0$ *еквівалентний оператору лiївської симетрії цього рівняння.*

II. $\xi^0 = 0$. З точністю до SO(n)-еквівалентності операторів редукції можна покласти $\xi^n = 1$, тобто $Q = \partial_n + \xi^i\partial_i + \eta\partial_u$. Критерій умовної інваріантності для такого оператора і рівняння (5.16) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\eta_t - \xi^i_t u_i - (\eta_{aa} + 2\eta_{au}u_a + \eta_{uu}u_a u_a) +\\ &+ (\xi^i_{aa} + 2\xi^i_{au}u_a + \xi^i_{uu}u_a u_a)u_i + (\xi^i_a + \xi^i_u u_a)u_{ai} = 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

при $u_n = \eta - \xi^i u_i$, $u_{jn} = \eta_j + \eta_u u_j - (\xi^i_j + \xi^i_u u_j)u_i - \xi^i u_{ij}$. Розщеплюючи в (5.30) по змінним u_{ij} та u_i, після спрощення отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^i_u = 0,\ \eta_{uu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^i = \xi^i(t,\vec{x}),\ \eta = \eta^1(t,\vec{x})u + \eta^0(t,\vec{x})$$

$$\xi^i_i - \xi^i\xi^i_n = 0, \qquad \xi^i_j + \xi^j_i - \xi^i\xi^j_n - \xi^j\xi^i_n = 0, \quad i \neq j, \tag{5.31}$$

$$\eta^1_i - (\xi^i\eta^1)_n = -\tfrac{1}{2}(\xi^i_t - \xi^i_{aa} + 2\xi^j_n\xi^i_j), \tag{5.32}$$

$$\eta^1_t - \eta^1_{aa} - 2\eta^1_n\eta^1 + 2\xi^j_n\eta^1_j = 0, \tag{5.33}$$

$$\eta^0_t - \eta^0_{aa} - 2\eta^1_n\eta^0 + 2\xi^j_n\eta^0_j = 0. \tag{5.34}$$

(Підсумовування по i в (5.31) немає.)

Інтегруючи систему (5.31)–(5.34), необхідно дослідити окремо такі випадки: А. $\xi^i = \mathrm{const}$; Б. $\xi^i_n = 0$ і $\exists i:\ \xi^i \neq \mathrm{const}$; В. $\exists i:\ \xi^i_n \neq 0$.

А. $\xi^i = \mathrm{const}$. Перейдемо до еквівалентного (відносно поворотів) оператора, у якого $\widetilde{\xi}^i = 0$. Тоді система (5.31)–(5.34) набуває вигляду

$$\eta^1_i = 0, \qquad \eta^1_t - \eta^1_{nn} - 2\eta^1_n\eta^1 = 0, \qquad \eta^0_t - \eta^0_{aa} - 2\eta^1_n\eta^0 = 0,$$

звідки в силу леми 5.4 $\eta^0 = f_n - \eta^1 f$, де $f = f(t,\vec{x})$ — розв'язок рівняння (5.16), а тому цей оператор еквівалентний відносно $\langle f\partial_u\rangle$ оператору з $\widetilde{\eta}^0 = 0$. Рівняння Бюргерса на η^1 заміною Коула–Хопфа $\eta^1 = g_n/g$ зведемо до рівняння теплопровідності на функцію $g = g(t,x_n)$. У результаті отримаємо оператор $\widetilde{Q}^1$ (випадок 2 теореми 5.10).

Б. $\xi^i_n = 0$ і $\exists i$: $\xi^i \neq \mathrm{const}$. З (5.31) за цих умов випливає, що $\xi^i = \mu^{ij}x^j + \nu^i$, де $\mu^{ij} = \mu^{ij}(t)$, $\nu^i = \nu^i(t)$ — гладкі функції змінної t, $\mu^{ij} = -\mu^{ji}$, причому $\exists(i,j)$: $\mu^{ij} \neq 0$ або $\exists i$: $\nu^i_t \neq 0$. З системи (5.32)–(5.33) після підстановки виразів для ξ^i і диференціювання та алгебраїчних перетворень отримаємо рівняння $\mu^{ij}_t = 2\eta^1_n\mu^{ij}$, $\nu^i_{tt} = 4\eta^1_n\nu^i_t$, звідки $\mu^{ij}\eta^1_{na} = \nu^i_t\eta^1_{na} = 0$. Отже, $\eta^1_{na} = 0$, тобто $\exists\alpha = \alpha(t)$: $\eta^1_n = \frac{1}{2}\alpha$. Продиференцюємо (5.33) по x_n і домножимо на $\frac{1}{2}$: $\alpha_t = \alpha^2$, а тому $\alpha = -\varepsilon/(\varepsilon t + C)$, де $\varepsilon \in \{0;1\}$, C — довільна стала, якщо $\varepsilon = 1$, і $C = 1$, якщо $\varepsilon = 0$. Тоді

$$\mu^{ij} = \frac{M_{ij}}{\varepsilon t + C}, \qquad \nu^i = \frac{A_i t + B_i}{\varepsilon t + C}, \qquad \eta^0 = \frac{f(t,\vec{x})}{\varepsilon t + C},$$

де M_{ij}, A_i, B_i — константи інтегрування, $M_{ij}=-M_{ji}$, $f=f(t,\vec{x})$ — розв'язок рівняння (5.16). Враховуючи виведені умови, рівняння (5.32), (5.33) можна переписати у вигляді $\eta^1_i=-\frac{1}{2}(\nu^i_t-\alpha\nu^i)$, $\eta^1_t=\alpha\eta^1$, звідки $\eta^1=(\varepsilon t+C)^{-1}[-\frac{1}{2}A_ix_i-\frac{1}{2}\varepsilon x_n+E]$, де $E=\mathrm{const}$. Отже, в силу доведеного

$$Q=(\varepsilon t+C)^{-1}\left[\varepsilon G_n+C\partial_n+\sum_{i<j}M_{ij}J_{ij}+A_iG_i+B_i\partial_i+EI+f\partial_u\right],$$

тобто оператор Q еквівалентний оператору з A_{LHE}.

B. $\exists i\colon \xi^i_n\neq 0$. Зважаючи на відношення еквівалентності операторів редукції відносно $\mathrm{SO}(n)$, без обмеження загальності можна покласти $\xi^1_n\neq 0$. Виконаємо в системі (5.31)–(5.33) перетворення годографа:

$$\tau=t,\quad y_i=x_i,\quad y_n=\xi^1\quad \text{— нові незалежні змінні,}$$
$$\psi^1=x_n,\quad \psi^s=\xi^s,\ s=\overline{2,n-1},\quad \zeta=-2\eta^1\quad \text{— нові залежні змінні.}$$

Проінтегруємо в нових змінних визначальні рівняння, дотримуючись такого порядку: $(5.31, i=1)$, $(5.31, i>1)$, $(5.32, i=1)$, $(5.32, i>1)$, (5.33). У процесі інтегрування рівнянь $(5.31, i=1)$ і $(5.32, i=1)$ змінна y_1 виділяється у виразах для ψ^i і ζ в явному вигляді, а тому в інших рівняннях по цій змінній можна розщепити. Після інтегрування повернемося до старих змінних. У результаті отримаємо наступний вираз для Q:

$$\begin{aligned}Q=Z^{-1}[&J_{n1}+M_{1s}J_{1s}+M_{sn}J_{sn}\\&+\textstyle\sum_{s<p}(M_{sp}+M_{sn}M_{1p}-M_{pn}M_{1s})J_{sp}\\&+A_1G_1+A_nG_n+(A_s-M_{sn}A_1-M_{1s}A_n)G_s\\&+B_1\partial_1+B_n\partial_n+(B_s-M_{sn}B_1-M_{1s}B_n)\partial_s\\&+\tfrac{1}{2}(A_1B_n-A_nB_1)u\partial_u+\varphi(\omega)u\partial_u+\chi(t,\vec{x})\partial_u],\end{aligned}$$

де $M_{ab}=-M_{ba}$ $((a,b)\neq(1,n)$ або $(n,1))$, A_a, B_a — довільні сталі, $Z=$ $=-x_1+M_{sn}x_s+A_nt+B_n$, $\omega=Z^{-1}(x_n-M_{1s}x_s+A_1t+B_1)$, $\chi=Z^{-1}\eta^0$, а тому $\chi_t-\chi_{aa}-2\varphi_\omega Z^{-2}\chi=0$, індекси s і p змінюються від 2 до $n-1$,

$\varphi = \varphi(\omega)$ — розв'язок рівняння

$$\big(\sigma(\omega)\varphi_\omega\big)_\omega + 2\varphi\varphi_\omega = 0, \quad \sigma(\omega) := 1 + \omega^2 + \sum_{s=2}^{n-1}(M_{sn}\omega + M_{1s})^2,$$

для якого $M_{sp}\varphi_\omega = A_s\varphi_\omega = B_s\varphi_\omega = 0$.

Якщо серед сталих M_{sp}, A_s та B_s є хоча б одна ненульова, то $\varphi_\omega = 0$ і оператор Q еквівалентний оператору з A_{LHE}.

Нехай $M_{sp} = A_s = B_s = 0$. Домножимо оператор Q на Z, послідовно подіємо на нього приєднаними зображеннями перетворень $\exp(A_nG_1 - - A_1G_n)$ і $\exp(B_n\partial_1 - B_1\partial_n)$ та поворотів так, що $A_1 = A_n = B_1 = B_n = 0$, $M_{1s} = M_{sn} = 0$ і виконаємо циклічну перестановку змінних $x_i \to x_{i+1}$, $x_n \to x_1$. У результаті отримаємо оператор $\widehat{Q}$, еквівалентний вихідному відносно $\mathrm{G}(1,n)$:

$$\widehat{Q} = J_{12} + \varphi(\omega)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u,$$

де $((1+\omega^2)\varphi_\omega)_\omega + 2\varphi\varphi_\omega = 0$, $\omega = -x_1/x_2$, $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\omega x_2^{-2}\chi = 0$. Заміняючи змінні (x_1, x_2) на (r, θ) маємо

$$\widehat{Q} = J_{12} + \varphi(\theta)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u, \tag{5.35}$$

де $\varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0$, $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\theta r^{-2}\chi = 0$. У силу леми 5.5 $\chi = x_1f_2 - - x_2f_1 - \varphi f$, де $f = f(t,\vec{x})$ — розв'язок рівняння (5.16), а тому оператор (5.35) еквівалентний відносно групи перетворень $u \to u + \varepsilon f$ оператору з $\widetilde{\chi} = 0$. У результаті отримаємо оператор $\widetilde{Q}^2$ (випадок 3 теореми 5.10).

Доведення теореми 5.10 завершено.

5.5. Висновки

У цьому розділі введено поняття еквівалентності операторів редукції відносно групи перетворень, поставлено задачі про класифікацію операторів редукції у класах диференціальних рівнянь відносно різних типів точкової еквівалентності і показано можливість застосування відображень між окремими рівняннями або класами рівнянь до розв'язання таких задач. До цього проблеми щодо операторів редукції не розглядалися явно як класифікаційні задачі, а можливість використання перетворень для їх розв'язання було мимохідь згадано лише стосовно груп ліївської симетрії окремих рівнянь без будь-яких суттєвих застосувань [185, 281].

Знайдено всі оператори редукції багатовимірного лінійного рівняння теплопровідності. Це єдиний у літературі приклад обрахунку некласичних симетрій, коли кількість змінних довільна. Існуючі результати стосуються випадку, як правило, двох чи зрідка трьох незалежних змінних.

Також прокласифіковано оператори редукції нелінійних рівнянь фільтрації, що дає один з небагатьох відомих прикладів вичерпного опису операторів редукції для важливого класу диференціальних рівнянь. Оператори редукції нелінійних рівнянь фільтрації можна інтерпретувати як потенціальні оператори редукції для нелінійних рівнянь дифузії. Тому, наприклад, можна сказати, що в теоремі 5.9 прокласифіковано потенціальні некласичні симетрії рівняння швидкої дифузії $u_t = (u^{-1}u_x)_x$, асоційовані з характеристикою 1. Спробу розв'язати таку задачу зроблено раніше в [80]. Встановлено зв'язок між звичайними і потенціальними операторами редукції загальних (1+1)-вимірних рівнянь конвекції–дифузії.

Запропоновано поняття сингулярних і регулярних операторів редукції. Введено низку понять, необхідних для розбиття множини операторів редукції на сингулярні і регулярні та подальшого дослідження сингулярних операторів (сингулярне векторне поле і сингулярний модуль векторних полів, слабкий і сильний копорядок сингулярності та ін.). Показано, що особливі випадки редукції спричинені пониженням порядку розглядуваного рівняння на многовидах, заданих відповідними умовами інваріантної поверхні у просторі струменів.

Описано сингулярні оператори редукції (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку вище першого і знайдено зв'язок таких операторів з однопараметричними сім'ями розв'язків відповідних рівнянь. Саме існування цього зв'язку приводить до відомої "no-go" теореми Р.З. Жданова і В.І. Лагна [291, 292] про умовні симетрії (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь. Її переформулювання наведено у розділі як наслідок 5.8.

Аналогічні результати отримано і для класу (1+1)-вимірних хвильових рівнянь, що дає перший приклад у певному сенсі вичерпного дослідження сингулярних операторів редукції рівнянь, що не є еволюційними. Для них зв'язок між сингулярними операторами редукції і сім'ями розв'язків значно складніший, ніж у випадку еволюційних рівнянь. Показано, що традиційне розбиття множини операторів редукції для факторизації є природним для еволюційних рівнянь і не є таким для хвильових.

Доведено "no-go" теорему про сингулярні оператори редукції копорядку 1 диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними, що допускають модулі векторних полів першого копорядку сингулярності. Вона істотно узагальнює згадану "no-go" теорему Р.З. Жданова і В.І. Лагна [291, 292].

Результати цього розділу опубліковано у роботах [10, 34, 37, 180, 224, 225, 244, 277, 297].

РОЗДІЛ 6

Розширений симетрійний аналіз лінійних еволюційних рівнянь

Використаємо клас (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку загального вигляду

$$u_t = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_x + C(t,x)u, \tag{6.1}$$

де A, B, C — довільні гладкі функції змінних (t,x), $A \neq 0$, як нетривіальний приклад для ілюстрації результатів, отриманих у попередніх розділах. Розширений симетрійний аналіз класу (6.1), представлений нижче, включає докладне дослідження структури нормалізованих і напівнормалізованих підкласів (підрозділ 6.1), локальних і потенціальних законів збереження та потенціальних систем (підрозділ 6.2), звичайних і узагальнений потенціальних симетрій довільних потенціальних порядків (підрозділ 6.3) та операторів редукції (підрозділ 6.4).

6.1. Групова класифікація та допустимі перетворення

Для початку розглянемо відповідний клас неоднорідних рівнянь

$$u_t = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_x + C(t,x)u + D(t,x), \tag{6.2}$$

де A, B, C, D — довільні гладкі функції змінних (t,x), $A \neq 0$. Мотивацією тимчасового розширення класу для дослідження є те, що клас (6.2) має кращі нормалізаційні властивості, ніж вихідний клас (6.1).

Лема 6.1. *Точкове перетворення* $\mathcal{T}$ *у просторі змінних* (t,x,u) *пов'язує два рівняння з класу* (6.2) *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{T}^t_x=\mathcal{T}^t_u=0$, $\mathcal{T}^x_u=0$, $\mathcal{T}^u_{uu}=0$, *тобто*

$$\mathcal{T}^t=T(t),\quad \mathcal{T}^x=X(t,x),\quad \mathcal{T}^u=U^1(t,x)u+U^0(t,x), \tag{6.3}$$

де T, X, U^1 *і* U^0 *— довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що* $T_tX_xU^1\neq 0$. *Довільні елементи перетворюються за формулами*

$$\tilde A=\frac{X_x^2}{T_t}A,\ \tilde B=\frac{X_x}{T_t}\left(B-2\frac{U^1_x}{U^1}A\right)-\frac{X_t-AX_{xx}}{T_t},\ \tilde C=-\frac{U^1}{T_t}L\frac{1}{U^1}, \tag{6.4}$$

$$\tilde D=\frac{U^1}{T_t}\left(D+L\frac{U^0}{U^1}\right). \tag{6.5}$$

Тут $L=\partial_t-A\partial_{xx}-B\partial_x-C$ *— лінійний диференціальний оператор другого порядку, асоційований з вихідним (нетільдованим) рівнянням.*

Наслідок 6.1. *Клас* (6.2) *сильно нормалізований. Група еквівалентності* $G^\sim_{\rm inh}$ *класу* (6.2) *складається з точкових перетворень у просторі змінних і довільних елементів, визначених у лемі 6.1.*

Використовуючи перетворення з $G^\sim_{\rm inh}$, можна калібрувати довільні елементи класу (6.2). Так, застосовуючи перетворення еквівалентності з $T=t$, $X=x$, $U^1=1$ і U^0, що є розв'язком рівняння $LU^0=-D$, отримаємо стандартний перехід від неоднорідного рівняння $Lu=D$ до однорідного $Lu=0$. У результаті, клас (6.2) відображається у клас (6.1). На жаль, нормалізаційні властивості при цьому відображенні руйнуються.

Наслідок 6.2. *Точкове перетворення* $\mathcal{T}$ *пов'язує два рівняння з класу* (6.1) *тоді і тільки тоді, коли його компоненти мають вигляд* (6.3), *де* T, X, U^1 *і* U^0 *— довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що* $T_tX_xU^1\neq 0$ *і додатково* U^0/U^1 *— розв'язок вихідного рівняння. Довільні елементи перетворюються за формулами* (6.4).

Наслідок 6.3. *Клас* (6.1) *сильно напівнормалізований. Група еквівалентності* $G^\sim$ *класу* (6.1) *складається з точкових перетворень у просторі змінних і довільних елементів, визначених у лемі 6.1, в яких додатково* $U^0=0$.

Інша можливість полягає у калібруванні довільного елементу A у класі (6.2) в 1 перетвореннями вигляду (6.3), де

$$T_t = \operatorname{sign} A, \quad X_x = |A|^{-1/2}, \quad U^1 = 1, \quad U^0 = 0.$$

Допустимими перетвореннями у підкласі, виокремленому з класу (6.2) умовою $A = 1$, є такі перетворення (6.3), які зберігають умову $A = 1$, тобто додатково задовольняють умову $\mathcal{T}^t_t = (\mathcal{T}^x_x)^2$.

Наслідок 6.4. *Точкове перетворення* $\mathcal{T}$ *пов'язує два рівняння з класу* (6.2) *з* $A = \tilde{A} = 1$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}^t = T(t), \quad \mathcal{T}^x = X = \pm\sqrt{T_t(t)}\,x + \zeta(t),\\ &\mathcal{T}^u = U^1(t,x)u + U^0(t,x), \end{aligned} \tag{6.6}$$

де T, ζ, U^1 *і* U^0 *— довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що* $T_t > 0$ *і* $U^1 \neq 0$. *Перетворення цього вигляду, продовжені на довільні елементи* B, C *і* D *за формулами* (6.4) *і* (6.5), *складають групу еквівалентності підкласу рівнянь* (6.2) *з* $A = 1$. *Цей підклас сильно нормалізований.*

Аналогічно випадку всього класу (6.2), можна перевести неоднорідні рівняння з $A = 1$ в однорідні. У результаті, підклас рівнянь (6.2) з $A = 1$ відображається у підклас рівнянь (6.1), що задовольняють таку ж умову. Нормалізаційні властивості при цьому відображенні знову руйнуються. Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує два рівняння з класу (6.1) з $A = \tilde{A} = 1$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд, поданий у наслідку 6.4, і додатково U^0/U^1 — розв'язок вихідного рівняння. Підклас рівнянь (6.1) з $A = 1$ сильно напівнормалізований. Його група еквівалентності складається з перетворень (6.6) з $U^0 = 0$, продовжених на довільні елементи B і C за формулами (6.4).

Довільні елементи A і B можна разом калібрувати у 1 і 0. Підклас рівнянь (6.2) з $(A, B) = (1, 0)$ є обмеженням підкласу рівнянь (6.2) з $A = 1$ і досліджується аналогічно.

Наслідок 6.5. *Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує два рівняння з класу* (6.2) *з* $A = \tilde{A} = 1$ *і* $B = \tilde{B} = 0$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд* (6.6), *де додатково*

$$U^1 = \theta(t) \exp\left(-\frac{T_{tt}}{8T_t}x^2 \mp \frac{\zeta_t}{2{T_t}^{1/2}}x\right)$$

і T, ζ, θ *і* U^0 *— довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що* $T_t > 0$ *і* $\theta \neq 0$. *Перетворення такого вигляду, продовжені на довільні елементи* C *і* D *за формулами* (6.4) *і* (6.5), *складають групу еквівалентності підкласу рівнянь* (6.2) *з* $A = 1$ *і* $B = 0$. *Цей підклас сильно нормалізований.*

Неоднорідні рівняння з $A = 1$ і $B = 0$ відображаються в однорідні стандартним способом. Тому будь-яке рівняння з класу (6.2) або класу (6.1) можна звести перетворенням з відповідної групи еквівалентності до рівняння загального вигляду

$$u_t - u_{xx} + V(t,x)u = 0. \tag{6.7}$$

Властивість нормалізації руйнується для класу (6.7). Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує два рівняння з класу (6.7) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд, наведений у наслідку 6.5, і додатково U^0/U^1 — розв'язок вихідного рівняння. Водночас клас (6.7) сильно напівнормалізований. Його група еквівалентності $G_1^{\sim}$ складається з перетворень з $U^0 = 0$, продовжених на довільний елемент $V = -C$ за формулами (6.4). Отже, функції, що параметризують $G_1^{\sim}$, залежать тільки від t.

Вужча група еквівалентності при збереженні певних властивостей нормалізації наводить на думку, що клас (6.7) найбільш придатний для групової класифікація. Більш того, розв'язання проблеми групової класифікації для будь-якого з класів, наведених вище, зводиться до розв'язання проблеми групової класифікації у класі (6.7). Тому сформулюємо основний результат про допустимі перетворення у класі (6.7) у вигляді теореми.

Теорема 6.1. *Клас* (6.7) *сильно напівнормалізований. Будь-яке перетворення з групи еквівалентності* $G_1^{\sim}$ *класу* (6.7) *має вигляд*

$$\tilde{t} = \int \sigma^2 dt, \quad \tilde{x} = \sigma x + \zeta, \quad \tilde{u} = u\theta \exp\left(-\frac{\sigma_t}{4\sigma}x^2 - \frac{\zeta_t}{2\sigma}x\right),$$
$$\tilde{V} = \frac{1}{\sigma^2}\left(V + \frac{\sigma\sigma_{tt} - 2{\sigma_t}^2}{4\sigma^2}x^2 + \frac{\sigma\zeta_{tt} - 2\sigma_t\zeta_t}{2\sigma^2}x - \frac{\theta_t}{\theta} - \frac{\sigma_t}{2\sigma} - \frac{{\zeta_t}^2}{4\sigma^2}\right),$$

де $\sigma = \sigma(t)$, $\zeta = \zeta(t)$ *і* $\theta = \theta(t)$ *— довільні гладкі функції,* $\sigma\theta \neq 0$.

МАІ $\mathfrak{g}(\mathcal{L})$ будь-якого лінійного (однорідного) ДРЧП $\mathcal{L}$ порядку вище 1 відносно функції u допускає зображення $\mathfrak{g}(\mathcal{L}) = \mathfrak{g}^{\rm ess}(\mathcal{L}) \ni \mathfrak{g}^{\infty}(\mathcal{L})$. Тут $\mathfrak{g}^{\infty}(\mathcal{L}) = \langle f\partial_u \rangle$, де f пробігає множину розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, — нескінченновимірний абелів ідеал у $\mathfrak{g}(\mathcal{L})$, а $\mathfrak{g}^{\rm ess}(\mathcal{L})$, як правило, — скінченновимірна підалгебра у $\mathfrak{g}(\mathcal{L})$, натянута на оператори з $\mathfrak{g}(\mathcal{L})$, які є проектовними на множину незалежних змінних і коефіцієнти при ∂_u яких лінійно і однорідно залежать від u. Оператори з $\mathfrak{g}^{\rm ess}(\mathcal{L})$ називають суттєвими операторами ліївської симетрії, саму алгебру $\mathfrak{g}^{\rm ess}(\mathcal{L})$ — суттєвою алгеброю ліївської інваріантності, а алгебру $\mathfrak{g}^{\rm triv}(\mathcal{L}) = \mathfrak{g}^{\infty}(\mathcal{L}) \oplus \langle u\partial_u \rangle$ — тривіальною алгеброю інваріантності рівняння $\mathcal{L}$. Перетин $\langle u\partial_u \rangle$ цих алгебр міститься у центрі алгебри $\mathfrak{g}^{\rm ess}(\mathcal{L})$; $\dim \mathfrak{g}^{\rm ess}(\mathcal{L})/\langle u\partial_u \rangle$ називають кількістю незалежних нетривіальних операторів ліївської симетрії.

В означених термінах наслідок 6.3 і подібні твердження можна сформулювати більш точно. Будь-яке точкове перетворення між двома рівняннями з класу (6.1) є композицією тривіального перетворення симетрії з G^{∞} вихідного рівняння і перетворення з $G^{\sim}$.

Результати групової класифікації класу (6.7) можна сформулювати у вигляді наступної теореми [30, 187].

Теорема 6.2. *Перетином МАІ рівнянь з класу* (6.7) *є алгебра* $\langle u\partial_u \rangle$. *Кожне рівняння з класу* (6.7) *інваріантне відносно операторів* $f\partial_u$, *де параметр-функція* $f = f(t, x)$ *пробігає множину розв'язків цього рівняння. Всі можливі* $G_1^{\sim}$*-нееквівалентні випадки розширення МАІ вичерпують наступні (значення* V *наведено разом з відповідними МАІ):*

1. $V = V(x)$: $\langle \partial_t,\ u\partial_u,\ f\partial_u \rangle$;
2. $V = \mu x^{-2},\ \mu \neq 0$: $\langle \partial_t,\ D,\ \Pi,\ u\partial_u,\ f\partial_u \rangle$;
3. $V = 0$: $\langle \partial_t,\ \partial_x,\ G,\ D,\ \Pi,\ u\partial_u,\ f\partial_u \rangle$.

Тут $D = 2t\partial_t + x\partial_x,\ \Pi = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u,\ G = 2t\partial_x - xu\partial_u$. *У випадку 1 вважаємо, що* $V \neq \mu x^{-2} \bmod G_1^{\sim}$*, де* $\mu \in \mathbb{R}$.

Зауваження 6.1. Теорему 6.2 можна переформулювати для цілих класів (6.1) і (6.2), якщо $G_1^{\sim}$-еквівалентність замінити $G^{\sim}$- і $G_{\mathrm{inh}}^{\sim}$-еквівалентностями відповідно. Подібні переформулювання можливі також для підкласів з $A = 1$. Підкреслимо, що групова класифікація в напівнормалізованому класі відносно його групи еквівалентності співпадає з класифікацією з точністю до всіх допустимих точкових перетворень.

Наслідок 6.6. *Для будь-якого рівняння* $\mathcal{L}$ *з класу* (6.1) $\dim \mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}) \in \{1, 2, 4, 6\}$*, тобто кількість незалежних нетривіальних симетрій належить* $\{0, 1, 3, 5\}$*. Якщо* $\dim \mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}) = 6$*, то рівняння* $\mathcal{L}$ $G^{\sim}$*-еквівалентне лінійному рівнянню теплопровідності* $u_t = u_{xx}$*.*

Зауваження 6.2. Використаний спосіб калібрування довільних елементів оптимальний для групової класифікації. Побудовано ієрархію нормалізованих класів неоднорідних рівнянь і відповідних напівнормалізованих класів однорідних рівнянь. Завдяки своїм властивостям кінцевий підклас (6.7) оптимальний для розв'язання проблеми групової класифікації. Отримані результати можна поширити в очевидний спосіб на всі класи з ієрархії. Вибір інших калібрувань для довільних елементів (наприклад, зведення до форми Колмогорова або Фокера–Планка) призводить до значного ускладнення проблеми [241].

6.2. Закони збереження і потенціальні системи

6.2.1. Локальні закони збереження. Використовуючи наслідок 4.5 і прямий метод, можна довести таку теорему.

Теорема 6.3. *Для довільного рівняння вигляду* (6.1) *простір всіх його локальних законів збереження породжено збережними векторами*

$$\big(\alpha u,\ -\alpha A u_x + ((\alpha A)_x - \alpha B)u\big), \tag{6.8}$$

де характеристика $\alpha = \alpha(t,x)$ *пробігає множину розв'язків спряженого рівняння*

$$\alpha_t + (A\alpha)_{xx} - (B\alpha)_x + C\alpha = 0. \tag{6.9}$$

Наслідок 6.7. *Існує взаємно-однозначна відповідність між локальними законами збереження і приєднаними симетріями нульового порядку рівняння* (6.1).

З твердження 4.2, наслідку 6.3 і теореми 6.3 випливає наступне твердження.

Твердження 6.1. *Будь-яке точкове перетворення між рівняннями з класу* (6.1) *канонічно продовжується на характеристики їх законів збереження за формулою* $\tilde\alpha = \alpha/(X_x U^1)$.

Зауваження 6.3. Кожне рівняння (6.1) зводиться перетвореннями еквівалентності до рівняння вигляду (6.7). Згідно твердження 4.3 це дозволяє обмежитись дослідженням законів збереження для простішого зведеного вигляду (6.7). Простір локальних законів збереження рівняння вигляду (6.7) породжений збережними векторами $(\alpha u,\ -\alpha u_x + \alpha_x u)$, де характеристика $\alpha = \alpha(t,x)$ пробігає множину розв'язків асоційованого спряженого рівняння $\alpha_t + \alpha_{xx} - V\alpha = 0$. Водночас сказане не означає, що для подальшого вивчення потенціальних законів збереження, і особливо потенціальних симетрій, достатньо розглядати тільки зведений вигляд. Це вимагає додаткового дослідження.

Твердження 6.2. *Будь-яка пара* $(\mathcal{L},\mathcal{F})$, *де* $\mathcal{L}$ *— рівняння з класу* (6.1) *і* $\mathcal{F} \in \mathrm{CL}(\mathcal{L})$, *зводиться точковим перетворенням з групи еквівалентності класу* (6.1) *до пари* $(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mathcal{F}})$, *де* $\tilde{\mathcal{L}}$ *— рівняння Фокера–Планка* $u_t = u_{xx} + (\tilde B u)_x$ *і* $\tilde{\mathcal{F}}$ *— його закон збереження з характеристикою* $\tilde\alpha = 1$, *тобто* $(u, -u_x - \tilde B u) \in \tilde{\mathcal{F}}$.

6.2.2. Потенціальні закони збереження. Вивчаючи потенціальні закони збереження першого рівня рівнянь з класу (6.1), у силу зауваження 6.3 і твердження 4.14 можна обмежитись рівняннями зведеного вигляду (6.7). Фіксуючи довільне $p \in \mathbb{N}$ і вибираючи p лінійно незалежних розв'язків $\bar{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^p)$ асоційованого спряженого рівняння

$$\alpha_t + \alpha_{xx} - V\alpha = 0, \tag{6.10}$$

отримаємо p лінійно незалежних законів збереження рівняння (6.7) зі збережними векторами $(F^s, G^s) = (\alpha^s u, \alpha^s_x u - \alpha^s u_x)$.

Потенціали $\bar{v} = (v^1, \dots, v^p)$, асоційовані з цими збережними векторами за формулами

$$v^s_x = \alpha^s u, \quad v^s_t = \alpha^s u_x - \alpha^s_x u, \tag{6.11}$$

незалежні у сенсі означення 4.14 згідно наступної леми.

Лема 6.2. *Для будь-якого рівняння* (6.7) *потенціали локально залежні на його многовиді тоді і тільки тоді, коли відповідні закони збереження, а отже і відповідні розв'язки рівняння* (6.10)*, лінійно залежні.*

Доведення. Оскільки зворотне твердження очевидне, доведемо (від супротивного) тільки пряме твердження. Припустимо, що потенціали v^1, …, v^p, введені за лінійно незалежними розв'язками α^1, …, α^p рівняння (6.10), локально залежні. У випадку $p = 1$ маємо локальну тривіальність v^1 як потенціалу, тобто v^1 можна виразити у термінах локальних змінних, а тому відповідний закон збереження тривіальний. Отже, достатньо досліджувати випадок, коли кількість незалежних законів збереження більше, ніж 1.

Без обмеження загальності можна вважати, що існують $r \in \mathbb{N}$, фіксована функція P від t, x, $\check{v} = (v^2, \dots, v^p)$ і $u_{(r)}$ такі, що $v^1 = H(t, x, \check{v}, u_{(r)})$ для будь-якого розв'язку об'єднаної системи, що визначає всю множину потенціалів v^1, …, v^p. У силу рівняння (6.7) і його диференціальних наслідків можна припустити, що H залежить тільки від t, x, $\check{v}$ і

$u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = \overline{0, r'}$, де $r' \leqslant 2r$. Застосуємо оператор D_x до умови $v^1 = H(t, x, \check{v}, u, u_1, \ldots, u_{r'})$: $v^1_x = H_x + H_{v^{s'}} v^{s'}_x + H_{u_k} u_{k+1}$. (Тут індекс s' змінюється від 2 до p.) Враховуючи рівняння $v^s_x = \alpha^s u$, розщепимо продиференційовану умову відносно u_k крок за кроком, починаючи з найвищої похідної. У результаті отримаємо $H_{u_k} = 0$, $H_x = 0$ і $\alpha^1 = H_{v^{s'}} \alpha^{s'}$, тобто функції α^1, …, α^p лінійно залежні над кільцем гладких функцій від t. Згідно наслідку 6.8 (див. нижче) це означає, що функції α^1, …, α^p лінійно залежні у звичайному сенсі, що суперечить припущенню про незалежність законів збереження. □

Нехай $W(\varphi^1, \ldots, \varphi^l)$ позначає Вронськіан функцій $\varphi^1, \ldots, \varphi^l$ відносно змінної x, тобто $W(\varphi^1, \ldots, \varphi^l) = \det(\varphi^j_{i-1})^l_{i,j=1}$.

Лема 6.3. *Розв'язки $\varphi^1 = \varphi^1(t, x)$, …, $\varphi^l = \varphi^l(t, x)$ $(1+1)$-вимірного лінійного еволюційного рівняння $L\varphi = 0$ довільного порядку лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли $W(\varphi^1, \ldots, \varphi^l) = 0$.*

Наслідок 6.8. *Розв'язки $(1+1)$-вимірного лінійного еволюційного рівняння довільного порядку лінійно залежні у звичайному сенсі тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні над кільцем гладких функцій від t.*

Для рівняння (6.7) повна множина потенціальних законів збереження першого рівня є об'єднанням законів збереження систем вигляду (6.11), відповідних всім можливим значенням p і p-наборам $\bar{\alpha}$.

Теорема 6.4. *Будь-який локальний збережний вектор системи (6.11) еквівалентний на многовиді системи (6.11) локальному збережному вектору рівняння (6.7).*

Наслідок 6.9. *Для кожного лінійного $(1+1)$-вимірного еволюційного рівняння другого порядку потенціальні збережні вектори будь-якого рівня еквівалентні локальним на многовиді відповідної потенціальної системи, потенціали будь-якого рівня можна локально виразити через локальні змінні t, x, $u_{(r)}$ (для деякого r) і потенціали тільки пер-*

шого рівня, а будь-яка потенціальна система вищого рівня еквівалентна, відносно точкових перетворень, що нетривіально діють тільки на потенціальні змінні, потенціальній системі першого рівня.

Іншими словами, множина потенціальних законів збереження кожного лінійного $(1+1)$-вимірного еволюційного рівняння другого порядку вичерпується його локальними законами збереження, а множина локально незалежних потенціалів — потенціалами першого рівня.

Слідуючи [181, 236], представимо доведення теореми 6.4 у вигляді послідовності лем. Надалі нижні індекси i та j відповідно позначають похідні по x порядків i та j.

Лема 6.4. *Кожен локальний закон збереження системи* (6.11) *містить збережний вектор вигляду* $(Ku, K_xu - Ku_x)$*, де функція* $K = K(t,x,\bar v)$ *— розв'язок системи*

$$K_t + K_{xx} - VK = 0, \qquad \alpha^s K_{xv^s} - \alpha^s_x K_{v^s} = 0. \tag{6.12}$$

Доведення. Фіксуємо локальний закон збереження системи (6.11) і візьмемо його збережний вектор у найзагальнішому вигляді вектор-функції від t, x і похідних функцій u і v^s порядків від нуля до деякого скінченного числа. З огляду на систему (6.11) і її диференціальні наслідки можна виключати залежність збережного вектора від будь-яких похідних функцій v^s (ненульового порядку) і похідних функції u, що містять диференціювання по t. Подібно лемі 4.2 можна довести, що зведений збережний вектор (F,G) не залежить від похідних функції u (ненульового порядку) і, більш того, $F = F(t,x,\bar v)$, $G = -\alpha^s F_{v^s}(t,x,\bar v)u + G^0(t,x,\bar v)$. Функції F і G^0 задовольняють систему $\alpha^s\alpha^\sigma F_{v^s v^\sigma} = 0$, $\alpha^s G^0_{v^s} = 2\alpha^s_x F_{v^s} + \alpha^s F_{xv^s}$, $F_t + G^0_x = 0$. Перейдемо до еквівалентного збережного вектора $(\widetilde F, \widetilde G)$, де $\widetilde F = F + D_xH$, $\widetilde G = G - D_tH$ і $H = H(t,x,\bar v)$ — розв'язок рівнянь $H_x = -F$, $H_t = G$. (У цих рівняннях змінні v^s вважаємо параметрами.) Тоді $\widetilde F = Ku$, $\widetilde G = K_xu - Ku_x$. Функція $K = \alpha^s H_{v^s}$ залежить від t, x і $\bar v$ та задовольняє систему (6.12). $\square$

Лема 6.5. *Нехай розв'язки* $\alpha^s = \alpha^s(t,x)$ *і* $\beta^s = \beta^s(t,x)$ *рівняння* (6.10) *задовольняють додаткову умову* $\alpha^s_x\beta^s - \alpha^s\beta^s_x = 0$. *Тоді для будь-яких* $i, j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *маємо* $\alpha^s_i\beta^s_j - \alpha^s_j\beta^s_i = 0$.

Лема 6.6. *Якщо* $\alpha^s_i\beta^s_j - \alpha^s_j\beta^s_i = 0$ *для* $0 \leqslant i < j \leqslant p$, *то для кожного* σ $W(\alpha^1,\ldots,\alpha^p,\beta^\sigma) = 0$.

Лема 6.7. *Загальний розв'язок системи* (6.12) *можна зобразити у вигляді* $K = \alpha^s H_{v^s} + \beta^0$, *де* H *— довільна гладка функція від* $\bar v$, *а* $\beta^0 = \beta^0(t,x)$ *— довільний розв'язок рівняння* (6.10).

Доведення. Згідно леми 6.4 функції α^s і $\beta^s = K_{v^s}$ задовольняють умови леми 6.5, а отже, і леми 6.6, причому змінні $\bar v$ вважаємо параметрами. З лінійної незалежності α^s випливає, що $K_{v^\sigma} = C^{\sigma s}\alpha^s$, де $C^{\sigma s}$ — гладкі функції тільки змінних $\bar v$. Вирази для змішаних похідних $K_{v^\sigma v^\varsigma} = C^{\sigma s}_{v^\varsigma}\alpha^s = C^{\varsigma s}_{v^\sigma}\alpha^s$ приводять до рівнянь $C^{\sigma s}_{v^\varsigma} = C^{\varsigma s}_{v^\sigma}$, які легко інтегруються: $C^{\sigma s} = P^s_{v^\sigma}$ для деякої гладкої функції P^s змінних $\bar v$. Підставляючи вирази для $C^{\sigma s}$ у рівняння на K і інтегруючи, отримаємо $K = \alpha^s P^s + \beta^0$, де $\beta^0 = \beta^0(t,x)$ — розв'язок рівняння (6.10). Остання рівність і рівняння $\alpha^s K_{xv^s} - \alpha^s_x K_{v^s} = 0$ разом приводять до рівняння $(\alpha^\sigma_x\alpha^\varsigma - \alpha^\sigma\alpha^\varsigma_x)(P^\varsigma_{v^\sigma} - P^\sigma_{v^\varsigma}) = 0$. Аналогічно лемі 6.6 можна стверджувати, що $(\alpha^\sigma_i\alpha^\varsigma_j - \alpha^\sigma_j\alpha^\varsigma_i)(P^\varsigma_{v^\sigma} - P^\sigma_{v^\varsigma}) = 0$ для будь-яких $i, j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Домножимо це рівняння на $(-1)^{i+j+\sigma'+\varsigma'}M^{\sigma'\varsigma'}_{ij}$ і згорнемо відносно пари індексів (i,j). Тут $M^{\sigma'\varsigma'}_{ij}$ позначає мінор матриці $W(\bar\alpha)$ $(p-2)$-го порядку, отриманий викресленням σ'-го і ς'-го стовпчиків та i-го і j-го рядків, де $0 \leqslant i < j \leqslant p-1$, причому для зручності рядки нумеруємо, починаючи з 0. З теореми Лапласа про розклад визначника випливає, що $W\big(\bar\alpha|_{\alpha^\sigma\rightsquigarrow\alpha^{\sigma'},\,\alpha^\varsigma\rightsquigarrow\alpha^{\varsigma'}}\big)(P^\varsigma_{v^\sigma} - P^\sigma_{v^\varsigma}) = 0$. Тут символ "$\rightsquigarrow$" означає, що функції α^σ і α^ς потрібно підставити замість функцій $\alpha^{\sigma'}$ і $\alpha^{\varsigma'}$ відповідно. Оскільки $W\big(\bar\alpha|_{\alpha^\sigma\rightsquigarrow\alpha^{\sigma'},\,\alpha^\varsigma\rightsquigarrow\alpha^{\varsigma'}}\big) = 0$ для будь-яких фіксованих $\sigma \neq \sigma'$ і $\varsigma \neq \varsigma'$ та $W(\bar\alpha) \neq 0$, це рівняння приводить до умови $P^{\varsigma'}_{v^{\sigma'}} - P^{\sigma'}_{v^{\varsigma'}} = 0$, тобто $P^s = H_{v^s}$ для деякої гладкої функції H від $\bar v$. □

Згідно леми 6.7 збережний вектор $(Ku, K_x u - Ku_x)$ з леми 6.4 має вигляд $(\beta^0 u + D_x H, \beta^0_x u - \beta^0 u_x - D_t H)$. Тому він еквівалентний збережному вектору $(\beta^0 u, \beta^0_x u - \beta^0 u_x)$, який також є локальним збережним вектором рівняння (6.7). Це завершує доведення теореми 6.4.

6.2.3. Найпростіші потенціальні системи. Зафіксуємо рівняння $u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu$ з класу (6.1) і ненульовий розв'язок α спряженого рівняння (6.9). Вводячи *потенціал* v за канонічним збережним вектором (6.8), асоційованим з характеристикою α, отримаємо потенціальну систему

$$\begin{aligned} &v_x = \alpha u, \\ &v_t = \alpha A u_x - ((\alpha A)_x - \alpha B)u. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Вихідне рівняння (6.1) для u є диференціальним наслідком системи (6.13). Іншим її диференціальним наслідком є рівняння

$$v_t = Av_{xx} + \left(B - A_x - 2A\frac{\alpha_x}{\alpha}\right) v_x \tag{6.14}$$

на потенціал v, яке називають *потенціальним рівнянням*, асоційованим з рівнянням (6.1) і характеристикою α. Існує взаємно-однозначна відповідність між розв'язками потенціальної системи і потенціального рівняння через проекцію $(u, v) \to v$ в одну сторону і формулу $u = v_x/\alpha$ — в іншу. Відповідність між розв'язками вихідного рівняння і потенціальної системи взаємно-однозначна тільки з точністю до сталого доданку до v.

У подальшому розгляді замість v зручно використовувати іншу залежну змінну $w = v/\alpha$, яку назвемо *модифікованим потенціалом*, асоційованим з характеристикою α. Відповідне *модифіковане потенціальне рівняння* на w має вигляд

$$\begin{aligned} &w_t = \widehat{A} w_{xx} + \widehat{B} w_x + \widehat{C} w, \\ &\widehat{A} := A, \quad \widehat{B} := B - A_x, \quad \widehat{C} := \frac{\psi_t - A\psi_{xx} - (B - A_x)\psi_x}{\psi}, \end{aligned} \tag{6.15}$$

тобто функція $\psi := 1/\alpha$ задовольняє рівняння на w. Систему (6.13) також можна переписати у термінах w і ψ замість v і α:

$$w_x - \frac{\psi_x}{\psi}w = u, \quad w_t - \frac{\psi_t}{\psi}w = Au_x + \left(A\frac{\psi_x}{\psi} + B - A_x\right)u. \tag{6.16}$$

Зображення (6.14) і (6.13) потенціальних рівнянь і системи зручніші, ніж вихідні зображення, для класифікації ліївських симетрій. Крім того, перше рівняння системи (6.16) є перетворенням Дарбу [194] з (6.15) у (6.1).

Перетворення Дарбу має корисну властивість двоїстості, яку сформулюємо у спосіб, відмінний від [194]. Позначимо перетворення Дарбу, побудоване за ненульовою функцією ψ, через $\mathrm{DT}[\psi]$, тобто

$$\mathrm{DT}[\psi](w) = w_x - \frac{\psi_x}{\psi}w.$$

Лема 6.8. *Нехай* w^0 *— фіксований ненульовий розв'язок рівняння* (6.15), *і нехай перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[w^0]$ *відображає* (6.15) *у* (6.1). *Тоді* $\alpha^0 = 1/w^0$ *задовольняє рівняння* (6.9), *спряжене до* (6.1), *і* $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ *відображає* (6.9) *у рівняння, спряжене до* (6.15), *тобто*

$$\begin{array}{ccc}
u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu & \xleftarrow{\mathrm{DT}[w^0]} & w_t = \widehat{A}w_{xx} + \widehat{B}w_x + \widehat{C}w \\
 & \Updownarrow & \\
\alpha_t + (A\alpha)_{xx} - (B\alpha)_x + C\alpha = 0 & \xrightarrow{\mathrm{DT}[\alpha^0]} & \hat{\alpha}_t + (\widehat{A}\hat{\alpha})_{xx} - (\widehat{B}\hat{\alpha})_x + \widehat{C}\hat{\alpha} = 0.
\end{array}$$

Зауваження 6.4. Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ будемо називати спряженим до $\mathrm{DT}[w^0]$. Двічі спряжене перетворення Дарбу співпадає з вихідним. Тому "тоді" в лемі можна посилити до "тоді і тільки тоді".

6.2.4. Загальні потенціальні системи. Фіксуємо рівняння вигляду (6.1), довільне $p \in \mathbb{N}$ і p лінійно незалежних розв'язків $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$ спряженого рівняння (6.9). Закони збереження, відповідні цим характеристикам, лінійно незалежні. Для кожного s введемо потенціал v^s за збережним вектором канонічного вигляду (6.8), асоційованим з α^s. Вибір збережних векторів обґрунтовано нижче у наслідку 6.21. У результаті отримаємо потенціальну систему, що відповідає набору характеристик $\bar{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^p)$:

$$v^s_x = \alpha^s u, \quad v^s_t = \alpha^s A u_x - ((\alpha^s A)_x - \alpha^s B)u, \tag{6.17}$$

Якщо вихідне рівняння пробігає клас (6.1) і α^1, $\ldots$, α^p пробігають лінійно незалежні розв'язки спряженого рівняння, то асоційовані потенціальні системи утворюють *потенціальний фрейм порядку* p (і першого рівня) над класом (6.1). Загалом, (потенціальним) порядком деякого об'єкту будемо називати кількість незалежних потенціалів першого рівня, від яких залежить цей об'єкт.

Система (6.17) однорідна за індексом s і складається з p подібних блоків. Кожен з них є парою рівнянь на потенціал і вихідну невідому функцію u і має структуру найпростішої потенціальної системи. Всі потенціали v^1, $\ldots$, v^p рівноправні. На перший погляд ці властивості здаються перевагами такого зображення потенціальних систем, але після ретельного розгляду виявляється багато недоліків. Кількість невідомих функцій у системі (6.17) дорівнює $p{+}1$, а рівнянь — $2p$. Водночас система не є "занадто" перевизначеною, оскільки вона не має нетривіальних диференціальних наслідків. Для кожного фіксованого s з відповідної пари рівнянь випливає рівняння тільки на v^s і диференціальний наслідок, еквівалентний вихідному рівнянню. Насправді система (6.17) містить тільки $p+1$ незалежних рівнянь, але кількість рівнянь не можна зменшити до мінімальної у симетричний спосіб. Не очевидно, яким є потенціальне рівняння, що відповідає цілій системі (6.17).

Інший аргумент щодо необхідності модифікувати систему (6.17) надає груповий аналіз. Розглянемо оператор ліївської симетрії $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \theta^s\partial_{v^s}$ системи (6.17). Його коефіцієнти є функціями від t, x, u і v^σ. З інфінітезімального критерію інваріантності, застосованого до системи (6.17), зокрема виливають такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q: $\tau_u = \tau_x = \tau_{v^s} = 0$, $\xi_u = \xi_{v^s} = 0$, $\theta^s_u = 0$. Порівняно з випадком однієї характеристики, вивід цих найпростіших визначальних рівнянь для довільної кількості потенціалів є набагато складнішим, при цьому потрібно нетривіальним чином використовувати лінійну незалежність характеристик α^1, …, α^p. Знаходження інших простих визначальних рівнянь, типових для лінійних систем (наприклад, $\eta_{uu}=0$, $\eta_{uv^s}=0$, $\theta^s_{v^\sigma v^\varsigma}=0$), вимагає ще більших обчислень і прийомів. Повний аналіз всієї системи визначальних рівнянь здається неможливим.

Нижче після певної ітераційної процедури отримаємо іншу потенціальну систему, асоційовану з набором характеристик $\bar\alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^p)$. Вона еквівалентна системі (6.17), але є прийнятною для дослідження потенціальних симетрій вихідного рівняння. Для зручності рівняння на невідому функцію φ позначимо через $\lceil\varphi\rfloor$.

Крок 1. Перепозначимо $u\to w^0$, $B\to B^0$, $C\to C^0$, $v^1\to f^1$, $\alpha\to\beta^0$ і $\alpha^s\to\beta^{0,s}$. (Старі і нові позначення будемо використати паралельно.) Розглянемо потенціальну систему (першого рівня)

$$f^1_x=\beta^{0,1}w^0,\quad f^1_t=\beta^{0,1}Aw^0_x-((\beta^{0,1}A)_x-\beta^{0,1}B^0)w^0,$$

асоційовану з окремою характеристикою $\alpha^1=\beta^{0,1}$. Набір (w^0,f^1) є розв'язком цієї системи тоді і тільки тоді, коли модифікований потенціал $w^1=f^1/\beta^{0,1}$ задовольняє рівняння $w^1_t=Aw^1_{xx}+B^1w^1_x+C^1w^1$, де $B^1=B^0-A_x$ і

$$\begin{aligned}C^1&=C-B_x+A_{xx}+A_x\frac{\beta^{0,1}_x}{\beta^{0,1}}+2A\left(\frac{\beta^{0,1}_x}{\beta^{0,1}}\right)_x=\\&=C-B_x+A_{xx}+A_x\frac{W^1_x}{W^1}+2A\left(\frac{W^1_x}{W^1}\right)_x.\end{aligned}$$

Тут і нижче використано позначення W^s для Вронськіана $W(\alpha^1,\dots,\alpha^s)$. Функція $w^{1,1}=1/\beta^{0,1}$ — розв'язок рівняння $\lceil w^1\rfloor$. Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[w^{1,1}]$ відображає $\lceil w^1\rfloor$ у $\lceil w^0\rfloor=\lceil u\rfloor$. Згідно леми 6.8 спряжене перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[\beta^{0,1}]$ відображає $\lceil\alpha\rfloor=\lceil\beta^{0,1}\rfloor$ у рівняння, спряжене до $\lceil w^1\rfloor$. Отже, функції

$$\beta^{1,s}=\mathrm{DT}[\beta^{0,1}](\beta^{0,s})=\alpha^s_x-\frac{\alpha^1_x}{\alpha^1}\alpha^s=\frac{W(\alpha^1,\alpha^s)}{W(\alpha^1)}$$

задовольняють рівняння $\lceil \beta^1 \rfloor$ і $\beta^{1,s} \in \mathrm{Ch_f}(\lceil w^1 \rfloor)$, тобто це характеристики законів збереження рівняння $\lceil w^1 \rfloor$. Зауважимо, що $\beta^{1,1} = 0$.

Припустимо, що виконано $s-1$ кроків.

Крок s. Використовуючи закон збереження з характеристикою $\beta^{s-1,s}$ модифікованого потенціального рівняння $\lceil w^{s-1} \rfloor$ з попереднього кроку, введемо потенціал f^s і отримаємо потенціальну систему

$$\begin{aligned} &f^s_x = \beta^{s-1,s} w^{s-1}, \\ &f^s_t = \beta^{s-1,s} A w^{s-1}_x - ((\beta^{s-1,s} A)_x - \beta^{s-1,s} B^{s-1}) w^{s-1}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

(Її об'єднання з потенціальною системою $(s-1)$-го рівня, побудованою під час попередньої ітерації, веде до потенціальної системи s-рівня 6.1.) Пара (w^{s-1}, f^s) задовольняє систему (6.18) тоді і тільки тоді, коли модифікований потенціал $w^s = f^s/\beta^{s-1,s}$ є розв'язком рівняння $w^s_t = A w^s_{xx} + B^s w^s_x + C^s w^s$, де $B^s = B^{s-1} - A_x = B - sA_x$ і

$$\begin{aligned} C^s &= C^{s-1} - B^{s-1}_x + A_{xx} + A_x \frac{\beta^{s-1,s}_x}{\beta^{s-1,s}} + 2A \left(\frac{\beta^{s-1,s}_x}{\beta^{s-1,s}} \right)_x \\ &= C - sB_x + \frac{s(s-1)}{2} A_{xx} + A_x \frac{W^s_x}{W^s} + 2A \left(\frac{W^s_x}{W^s} \right)_x , \end{aligned}$$

оскільки $\beta^{0,1} \dots \beta^{s-1,s} = W^s$. Функція $w^{s,s} = 1/\beta^{s-1,s}$ — розв'язок рівняння $\lceil w^s \rfloor$. $\mathrm{DT}[w^{s,s}]$ відображає $\lceil w^s \rfloor$ у $\lceil w^{s-1} \rfloor$. Тоді спряжене перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[\beta^{s-1,s}]$ відображає $\lceil \beta^{s-1} \rfloor$ в $\beta^s_t = (A\beta^s)_{xx} + (B^s \beta^s)_x + C^s \beta^s$, спряжене до $\lceil w^s \rfloor$. Отже, функції $\beta^{s,\sigma} = \mathrm{DT}[\beta^{s-1,s}](\beta^{s-1,\sigma})$ задовольняють рівняння $\lceil \beta^s \rfloor$ і $\beta^{s,\sigma} \in \mathrm{Ch_f}(\lceil w^s \rfloor)$, тобто це характеристики законів збереження рівняння $\lceil w^s \rfloor$. Оскільки $\beta^{s-1,\sigma}$ побудовані ітераціями перетворення Дарбу з характеристик α^1, …, α^p, то в силу теореми Крума

$$\begin{aligned} &\beta^{s,\sigma} = \mathrm{DT}[\beta^{s-1,s}](\beta^{s-1,\sigma}) = \beta^{s-1,\sigma}_x - \frac{\beta^{s-1,s}_x}{\beta^{s-1,s}} \beta^{s-1,\sigma} = \\ &\quad = \frac{W(\alpha^1, \dots, \alpha^s, \alpha^\sigma)}{W(\alpha^1, \dots, \alpha^s)}. \end{aligned}$$

Звідси зокрема випливає, що $\beta^{s,\sigma} = 0$ при $\sigma \leqslant s$ і $\beta^{s,\sigma} \neq 0$ при $\sigma > s$.

Ітераційна процедура зупиняється на кроці p після побудови рівняння $\lceil w^p \rfloor$, оскільки немає ненульових функцій $\beta^{p,\sigma}$.

Для кожного $s < p$ друге рівняння системи (6.18) є диференціальним наслідком системи (6.18), де s замінено на $s+1$. Отже, мінімальна об'єднана потенціальна система складається з перших рівнянь потенціальних систем з усіх кроків і другого рівняння потенціальної системи, побудованої на останньому, p-му, кроці.

Нехай $f^0 = w^0 = u$, $W^0 = W^{-1} = 1$ і $\beta^{-1,s} = 1$ за означенням. Виключаючи w^s підстановкою $w^s = f^s/\beta^{s-1,s}$, отримаємо об'єднану потенціальну систему у термінах тільки f^s:

$$f^s_x = H^s f^{s-1}, \quad f^p_t = H^p A f^{p-1}_x - G^p f^{p-1}, \tag{6.19}$$

де

$$H^s = \frac{\beta^{s-1,s}}{\beta^{s-2,s-1}} = \frac{W^s W^{s-2}}{(W^{s-1})^2},$$
$$G^s = (H^s A)_x - H^s B^{s-1} + 2H^s A \frac{\beta^{s-2,s-1}_x}{\beta^{s-2,s-1}}.$$

Можна довести, що $H^s_t + G^s_x = 0$ для кожного s.

Система (6.19) має вигляд потенціальної системи p-го рівня рівняння (6.1), асоційованої з набором характеристик $\bar\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^p)$. Рівняння $f^s_t = H^s A f^{s-1}_x - G^s f^{s-1}$, $s = 1, \dots, p-1$, є диференціальними наслідками системи (6.19). При $p > 1$ похідні по x можна виключити з цих рівнянь з $s > 1$, а також з останнього рівняння системи (6.19). Результуючими рівняннями є $f^s_t = H^s H^{s-1} A f^{s-2} - G^s f^{s-1}$, $s = 2, \dots, p$.

Згідно наслідку 6.9, система (6.19) має бути еквівалентна відносно точкових перетворень потенціальній системі першого рівня. Нижче точкове перетворення з системи (6.17) у систему (6.19) побудовано явно.

Визначимо функції $g^{s,\sigma}$, $\sigma \geqslant s$, за рекурсивною формулою

$$g^{1,\sigma} = v^\sigma, \quad g^{s+1,\sigma} = \frac{\beta^{s-1,\sigma}}{\beta^{s-1,s}} g^{s,s} - g^{s,\sigma}.$$

Для зручності можна вважати, що $g^{s,\sigma} = 0$ при $\sigma < s$.

Лема 6.9. *Для будь-яких фіксованих s і σ функція $g^{s\sigma}$ є потенціалом рівняння $\lceil w^{s-1}\rfloor$, асоційованого з характеристикою $\beta^{s-1,\sigma}$. Зокрема, $g^{s,s} = f^s$ з точністю до тривіального сталого доданку.*

Лема 6.10. $g^{s,\sigma} = (-1)^{s-1}\dfrac{W(\alpha^1,\dots,\alpha^{s-1},\alpha^{\sigma})_{\bar v\rightsquigarrow\bar\alpha_{s-1}}}{W(\alpha^1,\dots,\alpha^{s-1})}$.

Тут нижній індекс $s-1$ позначає похідну по x порядку $s-1$, Формула "$\bar v \rightsquigarrow \bar\alpha_{s-1}$" означає, що похідні α^{ς}_{s-1} замінено функціями v^{ς} для інтервалу нижніх індексів у відповідному Вронськіані, тобто для $\varsigma = 1,\dots,s-1,\sigma$. Зауважимо, що лема 6.10 дає істотні значення для $g^{s,\sigma}$ тільки при $\sigma \geqslant s$, а при $\sigma < s$ $g^{s,\sigma} = 0$, що узгоджується з означенням $g^{s,\sigma}$.

Наслідок 6.10. *Системи* (6.17) *і* (6.19) *еквівалентні відносно точкового перетворення тільки потенціальних залежних змінних, лінійних за цими змінними. Іншими словами, потенціальний фрейм p-рівня над класом* (6.1) *еквівалентний потенціальному фрейму першого рівня порядку p над цим же класом. Їх можна разом розглядати у рамках загального потенціального фрейму p-го порядку.*

Наслідок 6.11. *На будь-якому рівні s функції $g^{s\sigma}$, $\sigma \geqslant s$, можна виразити через функції $g^{\varsigma\sigma'}$, $\sigma' \geqslant \varsigma$, будь-якого нижчого рівня ς:*

$$g^{s,\sigma} = (-1)^{s-\varsigma}\frac{W(\beta^{\varsigma-1,\varsigma},\dots,\beta^{\varsigma-1,s-1},\beta^{\varsigma-1,\sigma})_{\bar g^{\varsigma}\rightsquigarrow\bar\beta^{\varsigma-1}_{s-\varsigma}}}{W(\beta^{\varsigma-1,\varsigma},\dots,\beta^{\varsigma-1,s-1})}.$$

Оскільки $w^s = f^s/\beta^{s-1,s}$, то в силу формули для $\beta^{s-1,s}$ маємо ще один наслідок з леми 6.10.

Наслідок 6.12. *Для кожного s остаточний результат s-ї ітерації (тобто вираз для потенціалу w^s через потенціали v^1, …, v^s і вигляд рівняння $\lceil w^s\rfloor$) інваріантний відносно невиродженого лінійного перетворення $\tilde\alpha^{\sigma} = \sum_{\varsigma=1}^{s} c_{\varsigma\sigma}\alpha^{\varsigma}$, $\sigma = 1,\dots,s$, характеристик з набору $(\alpha^1,\dots,\alpha^s)$. Тут $c_{\varsigma\sigma}$, $\sigma,\varsigma = 1,\dots,s$, — сталі, для яких $\det(c_{\varsigma\sigma}) \neq 0$. Зокрема,*

$$w^s = (-1)^{s-1}\frac{W(\alpha^1,\dots,\alpha^s)_{\bar v\rightsquigarrow\bar\alpha_{s-1}}}{W(\alpha^1,\dots,\alpha^s)}.$$

Зауваження 6.5. Невироджене лінійне перетворення $\tilde{\alpha}^\sigma = \sum_{\varsigma=1}^{s} \alpha^\varsigma c_{\varsigma\sigma}$, $\sigma = 1, \dots, s$, у наборі характеристик $(\alpha^1, \dots, \alpha^s)$ індукує лінійне перетворення $\tilde{v}^\sigma = \sum_{\varsigma \leqslant s} c_{\sigma\varsigma} v^\varsigma$ в асоційованому наборі потенціалів $(v^1, \dots, v^s)$ з такими ж коефіцієнтами.

Зауваження 6.6. Можна казати, що модифікований потенціал s-го рівня w^s і рівняння $\lceil w^s \rfloor$ відповідають s-вимірному підпростору характеристик $\langle \alpha^1, \dots, \alpha^s \rangle$ замість набору характеристик $(\alpha^1, \dots, \alpha^s)$, оскільки вибір базису підпростору несуттєвий у силу наслідку 6.12.

Нижче позначення "$(\alpha^1, \dots, \cancel{\alpha^\varsigma}, \dots, \alpha^s)$" означає, що характеристика α^ς відсутня у відповідному наборі.

Лема 6.11. *Для кожного фіксованого s функції*

$$w^{s,\varsigma} = (-1)^{\varsigma-1} \frac{W(\alpha^1, \dots, \cancel{\alpha^\varsigma}, \dots, \alpha^s)}{W(\alpha^1, \dots, \alpha^s)}, \quad \varsigma = 1, \dots, s,$$

є лінійно незалежними розв'язками рівняння $\lceil w^s \rfloor$. Більш того,

$$W(w^{1,s}, \dots, w^{s,s})\, W(\alpha^1, \dots, \alpha^s) = 1.$$

Наслідок 6.13. *Потенціал w^s s-го рівня є лінійною комбінацією потенціалів v^1, …, v^s з функціональними коефіцієнтами, які є фіксованими розв'язками рівняння $\lceil w^s \rfloor$: $w^s = \sum_{\sigma=1}^{s} w^{s\sigma} v^\sigma$.*

Лема 6.12. $\mathrm{DT}[w^{s,s}](w^{s,\varsigma}) = w^{s-1,\varsigma}$, $\varsigma = 1, \dots, s-1$.

Багатократне перетворення Дарбу, побудоване за набором лінійно незалежних функцій $(\psi^1, \dots, \psi^s)$, позначимо $\mathrm{DT}[\psi^1, \dots, \psi^s]$, тобто

$$\mathrm{DT}[\psi^1, \dots, \psi^s](w) = \frac{W(\psi^1, \dots, \psi^s, w)}{W(\psi^1, \dots, \psi^s)}.$$

Теорема 6.5. *Нехай α^1, …, α^p — лінійно незалежні розв'язки рівняння $\lceil \alpha \rfloor = \lceil u \rfloor^*$, спряженого до $\lceil u \rfloor$, і $\mathrm{DT}[\alpha^1, \dots, \alpha^p]\, \lceil \alpha \rfloor = \lceil \beta^p \rfloor$. Тоді рівняння $\lceil \beta^p \rfloor^* = \lceil w^p \rfloor$, спряжене до $\lceil \beta^p \rfloor$, є потенціальним рівнянням p-рівня для $\lceil u \rfloor$, побудованим за набором $(\alpha^1, \dots, \alpha^p)$, а функції*

$$w^{p,\varsigma} = (-1)^{\varsigma-1} \frac{W(\alpha^1, \dots, \cancel{\alpha^\varsigma}, \dots, \alpha^p)}{W(\alpha^1, \dots, \alpha^p)}, \quad \varsigma = 1, \dots, p,$$

є його лінійно незалежними розв'язками і $\mathrm{DT}[w^{p,1},\dots,w^{p,p}]\,\lceil w^p\rfloor = \lceil u\rfloor$, *тобто*

$$\lceil u\rfloor \xleftarrow{\mathrm{DT}[w^{p,1},\dots,w^{p,p}]} \lceil w^p\rfloor \quad\Longleftrightarrow\quad \lceil\alpha\rfloor \xrightarrow{\mathrm{DT}[\alpha^1,\dots,\alpha^p]} \lceil\beta^p\rfloor.$$

У силу рефлексивності спряженості лінійних рівнянь, теорему 6.5 можна також переформулювати, аналогічно лемі 6.8, у термінах характеристик законів збереження.

Наслідок 6.14. *Якщо* ψ^1, …, ψ^p *— лінійно незалежні розв'язки рівняння* $\widehat{\mathcal{L}}$ *з класу* (6.1) *і* $\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p](\widehat{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$, *то* $\mathcal{L}$ *належить класу* (6.1),

$$\alpha^\varsigma = (-1)^{\varsigma-1}\frac{W(\psi^1,\dots,\cancel{\psi^\varsigma},\dots,\psi^p)}{W(\psi^1,\dots,\psi^p)} \in \mathrm{Ch}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}),\quad \varsigma=1,\dots,p,$$

причому $\mathrm{DT}[\alpha^1,\dots,\alpha^p]\colon\ \mathrm{Ch}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L}) \to \mathrm{Ch}_{\mathrm{f}}(\widehat{\mathcal{L}})$. *Набори* $(\psi^1,\dots,\psi^p)$ *і* $(\alpha^1,\dots,\alpha^p)$ *спряжені один до іншого.*

Зауваження 6.7. Подібно теоремі 6.5, можна сформулювати твердження про зв'язок такого ж типу між рівняннями з двох довільних кроків ітераційної процедури. Достатньо вважати крок з меншим номером початком ітерацій, а крок з більшим номером — їх кінцем.

$$\begin{aligned}&\mathrm{DT}[w^{s,\sigma},\dots,w^{s,s}]\,\lceil w^s\rfloor = \lceil w^{\sigma-1}\rfloor \quad\Leftrightarrow\\ &\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{DT}[\beta^{\sigma-1,\sigma},\dots,\beta^{\sigma-1,s}]\,\lceil\beta^{\sigma-1}\rfloor = \lceil\beta^s\rfloor.\end{aligned}$$

Зауваження 6.8. Для будь-яких лінійно незалежних розв'язків $w^{p,1}$, …, $w^{p,p}$ рівняння $\lceil w^p\rfloor$ багатократне перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[w^{p,1},\dots,w^{p,p}]$ є лінійним відображенням з простору розв'язків рівняння $\lceil w^p\rfloor$ у простір розв'язків рівняння $\lceil u\rfloor$. Ядро цього відображення співпадає з лінійною оболонкою $\langle w^{p,1},\dots,w^{p,p}\rangle$, а його образ — з усім простором розв'язків рівняння $\lceil u\rfloor$, оскільки це композиція простих перетворень Дарбу $\mathrm{DT}[w^{s,s}]$, які для будь-якого s є лінійним відображенням з простору розв'язків рівняння $\lceil w^s\rfloor$ на простір розв'язків рівняння $\lceil w^{s-1}\rfloor$, де $w^0 := u$. Отже, $\mathrm{DT}[w^{p,1},\dots,w^{p,p}]$ породжує взаємно-однозначне лінійне відображення між простором розв'язків рівняння $\lceil w^p \rfloor$, факторизованим по підпростору $\langle w^{p,1},\dots,w^{p,p}\rangle$, і простором розв'язків рівняння $\lceil u \rfloor$.

Рівняння $\lceil u \rfloor$ і $\lceil w^p \rfloor$ є диференціальними наслідками потенціальної системи (6.19) p-рівня. Існує взаємно-однозначна відповідність між розв'язками потенціальної системи і рівняння $\lceil w^p \rfloor$ завдяки проекції $(f^0,\dots,f^p) \to f^p$ і перетворенню $w^p = f^p/\beta^{p-1,p}$ у прямому напрямі і завдяки оберненому перетворенню $f^p = \beta^{p-1,p} w^p$ і зворотній рекурсивній формулі $f^{s-1} = f^s_x/H^s$ в іншому. Відповідність між розв'язками вихідного рівняння $\lceil u \rfloor$ і потенціальної системи взаємно-однозначне тільки з точністю до довільної лінійної комбінації p фіксованих розв'язків системи (6.19). Це випливає, наприклад, з того, що кожен v^s визначено через u з точністю до довільного сталого доданку і $(f^1,\dots,f^p)$ є добутком $(v^1,\dots,v^p)$ на матрицю-функцію з коефіцієнтами, залежними від t і x. Враховуючи наведені аргументи і зауваження 6.6, називатимемо рівняння $\lceil w^p \rfloor$ *модифікованим потенціальним рівнянням, асоційованим з рівнянням* $\lceil u \rfloor$ *і підпростором характеристик* $\langle \alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$.

Система загального вигляду (6.19) з $H^1\dots H^pA \neq 0$ є потенціальною системою p-рівня рівняння з класу (6.1) тільки при спеціальних обмеженнях на коефіцієнти. А саме, наступні умови є необхідними і достатніми:

$$H^p_t + G^p_x = 0, \qquad H^s_t = (AH^s)_{xx} - \left(\frac{G^{s+1} - AH^{s+1}_x}{H^{s+1}} H^s\right)_x, \quad s < p.$$

Тут коефіцієнти G^s, $s < p$, обчислюються з G^p і H^σ, $\sigma \geqslant s$, за рекурсивною формулою

$$G^s = \frac{G^{s+1} - (AH^{s+1})_x}{H^{s+1}} H^s - AH^s_x.$$

Отже, для кожного фіксованого $s < p$ функція H^s має задовольняти рівняння Фокера–Планка з коефіцієнтом дифузії A і коефіцієнтом зносу, вираженим через A, G^p і H^σ, $\sigma > s$.

6.3. Потенціальні симетрії

6.3.1. Критерій існування потенціальних симетрій. Розглянемо систему загального вигляду (6.19) з $H^1 \dots H^p A \neq 0$, яка є потенціальною системою p-рівня рівняння з класу (6.1). Така система має $s-1$ алгебраїчно незалежних нетривіальних диференціальних наслідків $f^s_t = H^s A f^{s-1}_x - G^s f^{s-1}$, $s = 1, \dots, p-1$, порядок яких як диференціальних рівнянь дорівнює 1. З системи (6.19) випливає ДРЧП другого порядку з єдиною невідомою функцією f^p:

$$f^p_t = A f^p_{xx} - \frac{G^p + A H^p_x}{H^p} f^p_x \tag{6.20}$$

Означення 6.1. МАІ потенціальної системи p-го порядку (або p-го рівня) рівняння $\mathcal{L}$ з класу (6.1) назвемо *алгеброю потенціальних симетрій p-го порядку* рівняння $\mathcal{L}$. Будь-який оператор з цієї алгебри назвемо *оператором потенціальних симетрій p-порядку* рівняння $\mathcal{L}$.

Лема 6.13. *Нехай система* (6.19) — *потенціальна система p-рівня рівняння з класу* (6.1). *Тоді МАІ системи* (6.19) *і рівняння* (6.20) *ізоморфні. А саме, для будь-якого оператора $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \theta^s\partial_{f^s}$ ліївської інваріантності системи* (6.19) *його проекція $Q' = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \theta^p\partial_{f^p}$ на змінні (t, x, f^p) є оператором ліївської інваріантності рівняння* (6.20). *Коефіцієнт θ^{s-1} у Q, де $\theta^0 := \eta$, виражається через коефіцієнти $(p-s+1)$-го продовження оператора Q' відносно x у зворотній рекурсивний спосіб у відповідності з рівняннями $f^{\sigma-1} = f^\sigma_x / H^\sigma$.*

Наслідок 6.15. *Якщо $\theta^{s-1}_{f^\sigma} = 0$ для фіксованого значення s і кожного $\sigma > s-1$, то $\theta^{\varsigma-1}_{f^\sigma} = 0$ для будь-яких $\varsigma \leqslant s$ і $\sigma > s-1$.*

Іншими словами, якщо $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \theta^\varsigma\partial_{f^\varsigma}$ — оператор ліївської інваріантності системи (6.19) і $\theta^s_{f^\sigma} = 0$ для фіксованого s і кожного $\sigma > s$, то зрізаний оператор $\check{Q} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \sum_{\varsigma=1}^{s} \theta^\varsigma\partial_{f^\varsigma}$ є оператором ліївської інваріантності потенціальної системи s-рівня

$$f^\varsigma_x = H^\varsigma f^{\varsigma-1}, \quad \varsigma \leqslant s, \qquad f^s_t = H^s A f^{s-1}_x - G^s f^{s-1},$$

яка є підсистемою системи (6.19), розширеної своїми диференціальними наслідками. Це означає, що відповідну потенціальну симетрію вихідного рівняння також індуковано зрізаним оператором $\check{Q}$, а тому її порядок можна вважати меншим, ніж p.

Згідно леми 6.13, аналіз ліївських симетрій будь-якої потенціальної системи p-го рівня, асоційованої з рівнянням $\lceil u\rfloor$ з класу (6.1) зводиться до подібного дослідження для відповідного потенціального рівняння p-го рівня. Насправді ж будемо досліджувати модифіковане потенціальне рівняння p-го рівня $\lceil w^p\rfloor$ замість $\lceil f^p\rfloor$. Це має дві переваги. По-перше, потенціал w^p не залежить від невироджених лінійних замін (включаючи переупорядкування, див. наслідок 6.12) у наборі характеристик. По-друге, $\lceil w^p\rfloor$ пов'язане з $\lceil u\rfloor$ через p-кратне перетворення Дарбу. Потенціальну систему p-го рівня, переписану в термінах w^s,

$$
\begin{aligned}
&w^s_x+\frac{\beta^{s-1,s}_x}{\beta^{s-1,s}}w^s=w^{s-1},\\
&w^p_t+\frac{\beta^{p-1,p}_t}{\beta^{p-1,p}}w^p=Aw^{p-1}_x-\left(A_x+\frac{\beta^{p-1,p}_x}{\beta^{p-1,p}}A-B^{p-1}\right)w^{p-1}
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

назвемо *модифікованою потенціальною системою p-го рівня*, асоційованою з $\lceil u\rfloor$ і набором характеристик $(\alpha^1,\dots,\alpha^p)$.

Єдина можливість отримання тут чисто потенціальних симетрій пов'язана з коефіцієнтом η, а саме, повинна виконуватись умова $\eta_{f^s}\neq 0$ (або $\eta_{w^s}\neq 0$ у термінах w) для деякого s. У дійсності потенціальні симетрії p-порядку необхідно досліджувати тільки у випадку, коли вони не індуковані потенціальними симетріями меншого порядку. Незвідність природно визначати у термінах w. Одна з причин цього полягає знову у незалежності w^p від невиродженого лінійного комбінування в наборах характеристик. Інша причина така. Нехай $Q=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\eta\partial_u+\theta^\varsigma\partial_{f^\varsigma}$ і $Q=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\eta\partial_u+\zeta^\varsigma\partial_{w^\varsigma}$ є зображеннями одного й того оператора Q у термінах f і w. Згідно наслідку 6.13 умови "$\theta^{s-1}_{f^\sigma}=0$ для фіксованого значення s і будь-якого $\sigma>s-1$" і "$\theta^{\varsigma-1}_{f^\sigma}=0$ для будь-якого $\varsigma\leqslant s$ і будь-якого $\sigma>s-1$" еквівалентні подібним умовам у термінах w, тобто

“$\zeta^{s-1}_{w^\sigma}=0$ для фіксованого значення s і будь-якого $\sigma>s-1$” і “$\zeta^{\varsigma-1}_{w^\sigma}=0$ для будь-якого $\varsigma\leqslant s$ і будь-якого $\sigma>s-1$”. Отже, наслідок 6.15 можна повністю переформульовано у термінах w.

Наслідок 15′. *Якщо $\zeta^{s-1}_{w^\sigma}=0$ для фіксованого значення s і будь-якого $\sigma>s-1$, то $\zeta^{\varsigma-1}_{w^\sigma}=0$ для будь-якого $\varsigma\leqslant s$ і будь-якого $\sigma>s-1$.*

Означення 6.2. Нехай $Q'=\tau\partial_t+\xi\partial_x+\zeta^p\partial_{w^p}$ — оператор ліївської інваріантності модифікованого потенціального рівняння p-рівня, асоційованого з рівнянням з класу (6.1) і підпростором характеристик $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$. Будемо казати, що Q' *породжує потенціальну симетрію строго p-го порядку* вихідного рівняння, якщо для будь-якого базису $(\tilde\alpha^1,\dots,\tilde\alpha^p)$ у $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$ продовження $Q=Q'+\tilde\zeta^{s-1}\partial_{\tilde w^{s-1}}$ оператора Q' на відповідні потенціали $\tilde w^{s-1}$, де $\tilde w^0:=u$, задовольняє таку умову: для будь-якого s існує $\sigma>s-1$ таке, що $\tilde\zeta^{s-1}_{\tilde w^\sigma}\neq 0$.

Означення 6.3. Нехай $\mathfrak g$ — МАІ модифікованого потенціального рівняння p-рівня, асоційованого з рівнянням з класу (6.1) і підпростором характеристик $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$. Будемо казати, що $\mathfrak g$ *породжує алгебру строго потенціальних симетрій p-го порядку* вихідного рівняння, якщо для будь-якого базису $(\tilde\alpha^1,\dots,\tilde\alpha^p)$ у $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$ і для будь-якого s існує $Q'\in\mathfrak g$, продовження $Q=Q'+\tilde\zeta^{s-1}\partial_{\tilde w^{s-1}}$ на відповідні потенціали $\tilde w^{s-1}$, де $\tilde w^0:=u$, задовольняє таку умову: існує $\sigma>s-1$, для якого $\tilde\zeta^{s-1}_{\tilde w^\sigma}\neq 0$.

Грубо кажучи, оператор (алгебра) потенціальної симетрії порядку строго p, якщо її не можна отримати з меншої кількості законів збереження і потенціалів.

Нагадаємо, що $w^0=u$ і $\zeta^0=\eta$ за означенням. З леми 6.13 в силу формули $w^s=f^s/\beta^{s-1,s}$ випливає, що

$$\zeta^s=\sum_{\sigma=s}^{p}\zeta^{s\sigma}(t,x)w^\sigma+\varrho^s(t,x),\quad \zeta^0=\zeta^{00}(t,x)w^0+\sum_{\sigma=1}^{p}\zeta^{0\sigma}(t,x)w^\sigma+\varrho^0(t,x),$$

і точніша форма коефіцієнтів ζ^{s-1} рахується за наведеною вище зворотною рекурсивною формулою, що включає τ, ξ і ζ^p, у відповідності з рівняннями з (6.21). Зокрема,

$$\zeta^{p-1,p} = \frac{1}{w^{p,p}}\mathrm{DT}[w^{p,p}](Q'[w^{p,p}]) = \frac{W(w^{p,p}, Q'[w^{p,p}])}{w^{p,p}\,W(w^{p,p})},$$

$$\zeta^{s-1,p} = \frac{1}{w^{p,p}}\mathrm{DT}[w^{s,s}](w^{p,p}\zeta^{sp}) = \frac{W(w^{p,s+1},\dots,w^{p,p}, Q'[w^{p,p}])}{w^{p,p}\,W(w^{p,s+1},\dots,w^{p,p})},\ s<p,$$

за теоремою Крума. Тут $Q'[w^{p,p}] = \zeta^{pp}w^{p,p} - \tau w^{p,p}_t - \xi w^{p,p}_x$.

Розглянемо продовження перетворення з групи еквівалентності $G^{\sim}$ на загальний потенціальний фрейм. Будь-яке точкове перетворення еквівалентності $\mathcal{T}$ в класі (6.1) діє на змінні (t,x,u) за формулою $\tilde t = T(t)$, $\tilde x = X(t,x)$, $\tilde u = U^1(t,x)u$, де $T_tX_xU^1\neq 0$. У силу твердження 6.1 воно продовжується на характеристики α^s законів збереження рівнянь з цього класу: $\tilde\alpha^s = \alpha^s/(X_xU^1)$. Можна вважати, що відповідний потенціал v^s перетворюється тотожно при продовженні $\mathcal{T}$ (див. підрозділ 6.2.3). Враховуючи побудоване зображення для $\beta^{s,\sigma}$, $g^{s,\sigma}$, $\sigma\geqslant s$, f^s і w^s через α^s і v^s, отримаємо таке твердження.

Лема 6.14. *Для кожного $p\in\mathbb{N}$ будь-яке перетворення $\mathcal{T}\in G^{\sim}$ канонічно продовжується на потенціальний фрейм порядку p над класом* (6.1). *Продовження $\mathcal{T}^p$:*

$$\tilde t = T(t),\quad \tilde x = X(t,x),\quad \tilde u = U^1(t,x)u,$$

$$\tilde\alpha^s = \frac{\alpha^s}{X_xU^1},\quad \tilde v^s = v^s,\quad \tilde\beta^{s,\sigma} = \frac{\beta^{s,\sigma}}{{X_x}^{s+1}U^1},$$

$$\tilde g^{s,\sigma} = g^{s,\sigma},\quad \tilde f^s = f^s,\quad \tilde w^s = {X_x}^sU^1w^s,\quad \tilde w^{s,\sigma} = {X_x}^sU^1w^{s,\sigma},$$

$$\tilde A = \frac{X_x^2}{T_t}A,\quad \tilde B = \frac{X_x}{T_t}\left(B - 2\frac{U^1_x}{U^1}A\right) - \frac{X_t - AX_{xx}}{T_t},\quad \tilde C = -\frac{U^1}{T_t}L\frac{1}{U^1},$$

де $T_tX_xU^1\neq 0$, діє на наборах, кожен з яких складається з вихідного, потенціального і модифікованого потенціального рівнянь і потенціальних систем у термінах v^s і f^s. Перетворення з $G^{\sim}$, продовжені на потенціальний фрейм порядку p над класом (6.1), *утворюють групу $G^{\sim}_{[p]}$, яку називатимемо групою еквівалентності цього фрейму.*

Зауваження 6.9. Загалом, при перетворенні $\mathcal{T}$: $\tilde{t} = T(t)$, $\tilde{x} = X(t,x)$, $\tilde{\psi} = \Phi(t,x)\psi$, $\tilde{\psi}^s = \Phi(t,x)\psi^s$ маємо

$$\big(\mathrm{DT}[\tilde{\psi}^1,\dots,\tilde{\psi}^s]\tilde{\psi}\big)(\tilde{x}) = \frac{\Phi(t,x)}{(X_x(t,x))^s}\big(\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^s]\psi\big)(x).$$

Зауваження 6.10. Продовжені перетворення з $G^\sim$ не вичерпують всі можливі перетворення еквівалентності потенціального фрейму порядку p над класом (6.1). Їх можна розширити, наприклад, лінійним комбінуванням характеристик. Якщо змінні (t,x,u) (а отже, і довільні елементи (A,B,C)) не перетворюються і $\tilde{\alpha}^s = \alpha^\sigma c_{\sigma s}$, де $c_{\sigma s} = \mathrm{const}$, $\det(c_{\sigma s}) \neq 0$ і $c_{\sigma s} = 0$, $\sigma > s$, то відповідні перетворення інших функцій, що виникають у потенціальному фреймі, легко побудувати:

$$\begin{aligned}&\tilde{v}^s = v^\sigma c_{\sigma s}, \quad \tilde{\beta}^{s,\sigma} = \beta^{s,\varsigma} c_{\varsigma\sigma}, \quad \tilde{g}^{s,\sigma} = g^{s,\varsigma} c_{\varsigma\sigma},\\ &\tilde{f}^s = f^s c_{ss}, \quad \tilde{w}^s = w^s, \quad \tilde{w}^{s,\sigma} = w^{s,\varsigma}\hat{c}_{\varsigma\sigma}.\end{aligned}$$

Тут $(\hat{c}_{\varsigma\sigma})$ — обернена матриця до $(c_{\sigma\varsigma})$.

Нехай $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \theta^s\partial_{f^s}$ — оператор ліївської інваріантності системи (6.19). Коефіцієнти оператора Q перетворюються при відображенні операторів, породженому $\mathcal{T}^p \in G^\sim_{[p]}$, за формулою

$$\tilde{\tau} = \tau T_t, \quad \tilde{\xi} = \tau X_t + \xi X_x, \quad \tilde{\eta} = \tau U^1_t u + \xi U^1_x u + U^1\eta, \quad \tilde{\theta}^s = \theta^s.$$

Отже обидві умови $\eta_{f^\sigma} \neq 0$ і $\eta_{f^\sigma} = 0$, а також умови $\theta^s_{f^\sigma} \neq 0$ і $\theta^s_{f^\sigma} = 0$ зберігаються перетвореннями з $G^\sim_{[p]}$ для будь-яких s і σ. Це означає, що перетворення з $G^\sim_{[p]}$ не змішують потенціальні симетрії строго p-го порядку будь-якого рівняння з класу (6.1) з потенціальними симетріями менших порядків або ліївськими симетріями. Розмірність фактор-просторів операторів потенціальної симетрії p-го порядку, асоційованих з набором p характеристик, по підпросторам операторів потенціальної симетрії менших порядків також не змінюється. Отже, потенціальні симетрії p-го порядку рівнянь з класу (6.1) можна вивчати з точністю до відношення еквівалентності, породженого перетвореннями з $G^\sim_{[p]}$.

Існують різні способи використання цього відношення еквівалентності. В одному з них наголос робиться на спрощенні вигляду рівняння, що розглядається. Зокрема, можна покласти $A = 1$ і $B = 0$ (і перепозначити C через $-V$) у (6.1), звідки $B^s = B - sA_x = 0$. В результаті симетрійний аналіз потенціального фрейму p-го порядку над класом (6.1) зводиться до симетрійного аналізу потенціального фрейму p-го порядку над класом (6.7).

Група еквівалентності $G_1^{\sim}$ зведеного класу (6.7) канонічно ізоморфна підгрупі групи еквівалентності $G^{\sim}$ з спеціальним обмеженням на параметр-функції X і U^1. У силу леми 6.14 перетворення з $G_1^{\sim}$ продовжуються до перетворень еквівалентності всього зведеного потенціального фрейму. Продовжені перетворення утворюють групу $\hat{G}_{[p]}^{\sim}$, канонічно ізоморфну через проекцію групі еквівалентності класу модифікованих потенціальних рівнянь p-го рівня для рівнянь вигляду (6.7). Тому класифікація потенціальних симетрій класу (6.7) випливає з групової класифікації того ж класу у термінах (w^p, V^p) замість (u, V).

Інший спосіб полягає у спрощенні вигляду операторів. Оператор Q' ліївської інваріантності рівняння з класу (6.1) з ненульовим коефіцієнтом при ∂_t (або нульовим коефіцієнтом при ∂_t і ненульовим коефіцієнтом при ∂_x) можна звести перетворенням з $G^{\sim}$ до вигляду $Q' = \partial_{\tilde{t}}$ ($Q' = \partial_{\tilde{x}}$). Зауважимо, що правильне спрощення вигляду рівнянь приводить до спрощення вигляду їх операторів симетрії і навпаки. Вибір того, як використовувати відношення еквівалентності, залежить від розв'язуваної проблеми.

Сформулюємо критерій того, коли оператор ліївської інваріантності модифікованого потенціального рівняння p-го рівня породжує потенціальну симетрію строго p-го порядку вихідного рівняння. Тут спрацьовує спрощення вигляду операторів.

Теорема 6.6. *Нехай* $\lceil w^p \rfloor$ *— рівняння з класу* (6.1), ψ^1, …, ψ^p *— його лінійно незалежні розв'язки і* $\mathrm{DT}[\psi^1, \dots, \psi^p]\,\lceil w^p \rfloor = \lceil u \rfloor$.

1) Тривіальні оператори ліївської інваріантності рівняння $\lceil w^p \rfloor$ *породжують тільки тривіальні оператори ліївської інваріантності рівняння* $\lceil u \rfloor$*. А саме,* $w^p\partial_{w^p}$ *породжує* $u\partial_u$ *і* $\psi(t,x)\partial_{w^p}$ *породжує* $\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p](\psi)\partial_u$*. Тут функція* $\psi = \psi(t,x)$ *пробігає множину розв'язків рівняння* $\lceil w^p \rfloor$*, а тому* $\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p](\psi)$ *пробігає множину розв'язків рівняння* $\lceil u \rfloor$*.*

2) Нехай $Q' \in \mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}(\lceil w^p \rfloor)$*. Тоді* Q' *породжує потенціальну симетрію строго p-го порядку рівняння* $\lceil u \rfloor$ *тоді і тільки тоді, коли будь-який підпростір у* $\langle\psi^1,\dots,\psi^p\rangle$ *не інваріантний під дією асоційованого диференціального оператора* $\widehat{Q}'$*.*

Наслідок 6.16. *Суттєвий оператор* Q' *ліївської інваріантності рівняння* $\lceil w^p \rfloor$ *породжує потенціальну симетрію строго p-го порядку рівняння* $\lceil u \rfloor = \mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p]\,\lceil w^p \rfloor$ *тоді і тільки тоді, коли будь-який одновимірний підпростір у* $\langle\psi^1,\dots,\psi^p\rangle$ *в комплексному випадку (будь-який одно- або двовимірний підпростір у дійсному випадку) не інваріантний під дією асоційованого диференціального оператора* $\widehat{Q}'$*.*

Зауваження 6.11. Теорему 6.6 можна переформулювати у різних термінах. Так, підпростір $\langle w^{p,1},\dots,w^{p,q}\rangle$ простору розв'язків рівняння $\lceil w^p \rfloor$ інваріантний під дією оператора $\widehat{Q}'$, причому $Q'[w^{p,\sigma}] = \kappa_{\sigma\varsigma}w^{p,\varsigma}$, де $\kappa_{\sigma\varsigma}$ — сталі, тоді і тільки тоді, коли $(w^{p,1},\dots,w^{p,q})$ — інваріантний розв'язок незачепленої системи з q копій рівняння $\lceil w^p \rfloor$ відносно оператора $\bar{Q}' = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \zeta^{p1}w^{p,\sigma}\partial_{w^{p,\sigma}} - \kappa_{\sigma\varsigma}w^{p,\varsigma}\partial_{w^{p,\sigma}}$.

Теорема 6.7. *Лінійне* $(1+1)$*-вимірне еволюційне рівняння другого порядку допускає алгебру потенціальних симетрій строго p-го порядку тоді і тільки тоді, коли воно еквівалентне відносно точкових перетворень еквівалентності рівнянню з класу* (6.7)*, в якому*

$$V = P(x) - 2\left(\ln|W(\psi^1,\dots,\psi^p)|\right)_{xx}, \tag{6.22}$$

де $\psi^s = \psi^s(t,x)$ *— лінійно незалежні розв'язки рівняння* $\psi_t - \psi_{xx} + P(x)\psi = 0$ *і або* $P = \mu x^{-2}$, $\mu = \mathrm{const}$*, або жоден підпростір у*

$\langle\psi^1,\dots,\psi^p\rangle$ не є інваріантним під дією ∂_t, якщо P нееквівалентно μx^{-2} відносно точкових перетворень еквівалентності. Асоційованим підпростором характеристик є $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$, де

$$\alpha^\varsigma=(-1)^{\varsigma-1}\frac{W(\psi^1,\dots,\cancel{\psi^\varsigma},\dots,\psi^p)}{W(\psi^1,\dots,\psi^p)},\quad \varsigma=1,\dots,p.$$

При $P=\mu x^{-2}$ з $\mu\neq 0$ ($P=0$) алгебра потенціальної симетрії містить щонайменше один (два) оператори, які лінійно незалежні з точністю до ліївських симетрій і суттєво залежать від потенціала порядку p. Для загального значення $P=P(x)$ достатньою умовою того, що алгебра потенціальних симетрій, відповідна $\langle\psi^1,\dots,\psi^p\rangle$, має строго p-ий порядок, є $V^{s-1}_t=0$ для всіх модифікованих потенціальних рівнянь $\lceil w^{s-1}\rfloor$, включаючи $\lceil w^0\rfloor=\lceil u\rfloor$, при довільному виборі базису в $\langle\psi^1,\dots,\psi^p\rangle$.

Наслідок 6.17. *Рівняння з класу* (6.1) *допускає алгебру потенціальних симетрій строго p-го порядку, асоційовану з p-вимірним підпростором його характеристик $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$, тільки якщо відповідне потенціальне рівняння p-рівня має нетривіальні оператори ліївської симетрії. Якщо потенціальне рівняння p-рівня має більш ніж один незалежний нетривіальний оператор ліївської симетрії, то алгебра потенціальних симетрій є строго p-го порядку. Точніше, якщо таких операторів більше, ніж один (три), то для будь-якого вибору базису в $\langle\alpha^1,\dots,\alpha^p\rangle$ алгебра потенціальних симетрій містить щонайменше один (два) незалежних оператори, які суттєво залежать від потенціалів p-го порядку.*

6.3.2. Ієрархії потенціальних симетрій. Розглянемо наступні питання щодо потенціальних симетрій лінійних параболічних рівнянь: Чи може фіксоване рівняння з класу (6.1) мати нескінченну серію нееквівалентних алгебр потенціальних симетрій? Чи є серед них рівняння, що має алгебри потенціальних симетрій всіх порядків? Які порядки потенціальних симетрій можливі для фіксованого рівняння? Буде вивчено тільки певні приклади, що однак дозволяє сформулювати досить загальні твердження, які дають відповіді на ці питання.

Рівняння, що має алгебри потенціальних симетрій всіх порядків, існує. Дійсно, візьмемо лінійне рівняння теплопровідності $w_t = w_{xx}$ як потенціальне рівняння (тобто $P = 0$) і для кожного $p \in \mathbb{N}$ виберемо набір $\bar{\psi} = (P_0, \ldots, P_{p-1})$ його p розв'язків. Тут P_k — многочлен теплопровідності степеня k:

$$P_{2m}(t,x) = \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{t}{1!}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x^2}{2!} + \frac{t^m}{m!},$$

$$P_{2m+1}(t,x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{t}{1!}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x^3}{3!} + \frac{t^m}{m!}\frac{x}{1!},$$

$k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Зауважимо, що $\partial P_{k+1}/\partial x = P_k$, а тому $\partial^k P_k/\partial x^k = 1$, $\partial^k P_{k+1}/\partial x^k = x$. Пряме обчислення дає, що $W(P_0, \ldots, P_{p-1}) = 1$ і що відповідне значення довільного елемента V дорівнює 0 для будь-якого $p \in \mathbb{N}$. Отже, $\mathrm{DT}[P_0, \ldots, P_{p-1}]\,\lceil w \rfloor = \lceil u \rfloor$, де $\lceil u \rfloor$ також є лінійним рівнянням теплопровідності $u_t = u_{xx}$. Насправді багатократне перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[P_0, \ldots, P_{p-1}]$ є не чим іншим як диференціюванням по x порядку p: $u = \mathrm{DT}[P_0, \ldots, P_{p-1}]\, w = \partial^p w/\partial x^p$. Нехай $(\alpha^{p1}, \ldots, \alpha^{pp})$ — набір характеристик рівняння $\lceil u \rfloor$, спряжений набору розв'язків $(P_0, \ldots, P_{p-1})$ рівняння $\lceil w \rfloor$, тобто $\alpha^{ps} = (-1)^{s-1} W(P_1, \ldots, P_{p-s})$, $s = 1, \ldots, p-1$, $\alpha^{pp} = (-1)^{p-1}$ (див. наслідок 6.14). Вронськіани $W^q = W(P_1, \ldots, P_q)$, $q \in \mathbb{N}$, і $W^0 := 1$ — розв'язки зворотного рівняння теплопровідності і додатково задовольняють умови $\partial W^q/\partial x = W^{q-1}$, $W^q(0,0) = 0$. Отже, $W^q = P_q(-t, x)$ — зворотний многочлен теплопровідності порядку q і $\alpha^{ps} = (-1)^{s-1} P_{p-s}(-t, x)$, $s = 1, \ldots, p$. У силу теорем 6.5 і 6.7, для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ алгебра потенціальних симетрій $\mathfrak{g}_p$ рівняння $\lceil u \rfloor$, асоційована з p-вимірним підпростором характеристик $\langle \alpha^{p1}, \ldots, \alpha^{pp} \rangle$, є строго p-го порядку. Для будь-якого вибору базису в $\langle \alpha^{p1}, \ldots, \alpha^{pp} \rangle$ алгебра потенціальних симетрій містить два лінійно незалежних оператори, які суттєво залучають потенціал порядку p. Підсумовуючи ці результати, можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 6.3. *Лінійне рівняння теплопровідності допускає нескінченну серію $\{\mathfrak{g}_p,\ p\in\mathbb{N}\}$ алгебр потенціальної симетрії. Для кожного $p\in\mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{g}_p$ має строго p-ий потенціальний порядок і асоційована з набором p лінійно незалежних поліноміальних розв'язків найнижчого степеня зворотного рівняння теплопровідності. Більш того, вона є стандартним p-им продовженням відносно тільки x алгебри $\mathfrak{g}_0$, переписаної у термінах (t,x,w), і тому ізоморфна $\mathfrak{g}_0$.*

Описану побудову можна узагальнити. Нехай $\lceil u\rfloor$ буде рівнянням $u_t-u_{xx}+Vu=0$, де функція V має вигляд (6.22) з $P=0$, тобто $\psi^s=\psi^s(t,x)$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $\psi_t=\psi_{xx}$. Це означає, що $\lceil u\rfloor$ — образ лінійного рівняння теплопровідності $\lceil w\rfloor$ при перетворенні Дарбу $\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p]$. Тоді для кожного $q\in\mathbb{N}$ $\lceil u\rfloor=\mathrm{DT}[P_0,\dots,P_{q-1},\tilde\psi^{q1},\dots,\tilde\psi^{qp}]\,\lceil w\rfloor$, де $\tilde\psi^{qs}$ — розв'язок лінійного рівняння теплопровідності такий, що $\mathrm{DT}[P_0,\dots,P_{q-1}]\tilde\psi^{qs}=\psi^s$. Функцію $\tilde\psi^{qs}$ знаходять q-кратним інтегруванням функції ψ^s по x при спеціальному виборі "сталих інтегрування", залежних від t. Найкращий спосіб — скористатися рекурсивними формулами $\tilde\psi^{qs}_x=\tilde\psi^{q-1,s}$, $\tilde\psi^{qs}_t=\tilde\psi^{q-1,s}_x$, $\tilde\psi^{0s}:=\psi^s$. В силу твердження 6.3 з цього випливає такий наслідок.

Наслідок 6.18. *Нехай рівняння з класу* (6.1) *точково еквівалентне рівнянню* (6.7), *де* $V=-2\left(\ln|W(\psi^1,\dots,\psi^p)|\right)_{xx}$, *а* $\psi^s=\psi^s(t,x)$ *— лінійно незалежні розв'язки лінійного рівняння теплопровідності. Тоді це рівняння має нескінченну серію* $\{\tilde{\mathfrak{g}}_{p+k},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ *алгебр потенціальної симетрії. Кожна алгебра* $\tilde{\mathfrak{g}}_{p+k}$ *з серії має строго* $(p+k)$*-ий потенціальний порядок, ізоморфна МАІ* $\mathfrak{g}_0$ *лінійного рівняння теплопровідності і містить щонайменше два оператори, що суттєво залучають потенціал* $(p+k)$*-го рівня.*

Наведений розгляд ґрунтується на побудові нескінченної серії автоперетворень Дарбу $\{\mathrm{DT}[P_0,\dots,P_{p-1}],p\in\mathbb{N}\}$ для лінійного рівняння теплопровідності. Подібні серії існують для всіх рівнянь вигляду

$$u_t-u_{xx}+\mu x^{-2}u=0. \tag{6.23}$$

Щоб показати це, достатньо довести, що рівняння (6.23) має нескінченну серію лінійно незалежних розв'язків, для якої Вронськіан p перших розв'язків сталий для нескінченної множини значень p. Нехай φ^{0i}, $i = 1, 2,$ — лінійно незалежні стаціонарні розв'язки рівняння (6.23), тобто $\varphi^{0i}_t = 0$, $\varphi^{0i}_{xx} = \mu x^{-2}\varphi^{0i}$. Розглянемо функції $\varphi^{ki} = \widehat{\Pi}^k\varphi^{0i}$, де $\widehat{\Pi} = -4t^2\partial_t - 4tx\partial_x - x^2 - 2t$. Вони лінійно незалежні, є многочленами по t і є розв'язками рівняння (6.23), оскільки отримані дією оператора симетрії Π на розв'язки. Вронськіан $W^k = W(\varphi^{01}, \varphi^{02}, \dots, \varphi^{k1}, \varphi^{k2})$ не залежить від t, оскільки φ^{ki}_t обов'язково є лінійною комбінацією функцій $\varphi^{k'i'}$, $k' < k$. Отже, достатньо оцінити W^k для одного значення $t = 0$. По індукції можна довести, що $W^k_x|_{t=0} = 0$, тобто W^k — ненульова стала. В результаті $\mathrm{DT}[\varphi^{01}, \varphi^{02}, \dots, \varphi^{k1}, \varphi^{k2}]$ є автоперетворенням Дарбу рівняння (6.23) для будь-якого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Твердження 6.4. *Рівняння* (6.23) *допускає серію* $\{\hat{\mathfrak{g}}_{2q},\ q \in \mathbb{N}\}$ *алгебр потенціальної симетрії. Кожна алгебра* $\hat{\mathfrak{g}}_{2q}$ *має строго* $2q$*-ий потенціальний порядок і асоційована з набором* $2q$ *лінійно незалежних розв'язків рівняння* (6.23)*, які є многочленами найнижчого степеня по* t*. Більш того, вона ізоморфна МАІ* $\hat{\mathfrak{g}}_0$ *рівняння* (6.23) *і містить щонайменше один оператор, що суттєво залучає потенціал* $2q$*-го рівня.*

Наслідок 6.19. *Нехай рівняння з класу* (6.1) *точково еквівалентне рівнянню* (6.7)*, де* $V = \mu x^{-2} - 2\left(\ln|W(\psi^1, \dots, \psi^p)|\right)_{xx}$*, а* $\psi^s = \psi^s(t,x)$ *— лінійно незалежні розв'язки рівняння* $\psi_t - \psi_{xx} + \mu x^{-2}\psi = 0$*. Тоді це рівняння має нескінченну серію* $\{\check{\mathfrak{g}}_{p+2k},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *алгебр потенціальної симетрії. Кожна алгебра* $\check{\mathfrak{g}}_{p+2k}$ *має строго* $(p+2k)$*-ий потенціальний порядок, ізоморфна МАІ* $\hat{\mathfrak{g}}_0$ *рівняння* (6.23) *і містить щонайменше один оператор, що суттєво залучає потенціал* $(p+2k)$*-го рівня.*

6.3.3. Найпростіші потенціальні симетрії лінійного рівняння теплопровідності. Теорема 6.7 дає опис рівнянь з класу (6.1), що мають нетривіальні потенціальні симетрії. Водночас існує інша задача щодо потенціальних симетрій: для заданого рівняння з класу (6.1) прокласифікувати всі набори його характеристик, що приводять до нетривіальних потенціальних симетрій. Розглянемо цю проблему докладно для *найпростіших потенціальних симетрій* (тобто для ліївських симетрій найпростіших потенціальних систем, асоційованих з окремими характеристиками) лінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx}. \tag{6.24}$$

Нагадаємо, що МАІ лінійного рівняння теплопровідності є алгебра

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 = \langle\, &\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ 2t\partial_x - xu\partial_u,\\ &4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u,\ u\partial_u,\ f\partial_u \,\rangle,\end{aligned}$$

а група G_0 його точкових симетрій складається з перетворень вигляду

$$\tilde u = \varepsilon_3 \frac{e^{-\frac{\varepsilon_5 x + \varepsilon_6 x^2 - \varepsilon_5^2 t}{1+4\varepsilon_6 t}}}{\sqrt{1+4\varepsilon_6 t}} u\left(\frac{\varepsilon_4^2 t}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_2, \frac{\varepsilon_4(x-2\varepsilon_5 t)}{1+4\varepsilon_6 t} - \varepsilon_1\right) + f(t,x),$$

де $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_6$ — довільні сталі, $\varepsilon_3\varepsilon_4 \neq 0$, а функція $f = f(t,x)$ пробігає множину розв'язків цього рівняння. Суттєву частину $G_0^{\rm ess}$ групи G_0 утворено перетвореннями з $f \equiv 0$. Проблеми щодо потенціальних симетрій рівняння (6.24) природно досліджувати з точністю до відношення еквівалентності, породженого $G_0^{\rm ess}$ на потенціальному фреймі над рівнянням (6.24) (див. наслідок 4.14 і лему 6.14).

Теорема 6.8. *Потенціальні симетрії лінійного рівняння теплопровідності, асоційовані з характеристикою* α*, є нетривіальними тоді і тільки тоді, коли* $\alpha \in \{1, x\} \bmod G_0^{\rm ess}$.

Випадок характеристики $\alpha = 1$ добре вивчено [75, 239, 264]. Відповідний потенціал v^1 визначено системою $v^1_x = u$, $v^1_t = u_x$, МАІ якої

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_1 = \langle\, &\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_x - (xu+v^1)\partial_u - xv^1\partial_{v^1},\ 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\ &4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - ((x^2+6t)u + 2xv^1)\partial_u - (x^2+2t)v^1\partial_{v^1},\\ &u\partial_u + v^1\partial_{v^1},\ f_x\partial_u + f\partial_{v^1} \,\rangle.\end{aligned}$$

Потенціальне рівняння $v^1_t = v^1_{xx}$ має той же вигляд, що і вихідне рівняння (6.24). Ось чому алгебри $\mathfrak{g}_0$ і $\mathfrak{p}_1$ ізоморфні [239]. Базисні оператори алгебри $\mathfrak{p}_1$ можна отримати з базисних операторів алгебри $\mathfrak{g}_0$ перепозначенням $u \to v^1$ і наступним першим продовження відносно x в силу рівняння $u = v^1_x$. Будь-яка лінійна комбінація операторів з $\mathfrak{p}_1$, яка містить третій або п'ятий базисні оператори, є оператором чисто потенціальної симетрії лінійного рівняння теплопровідності.

Випадок найпростішої несталої характеристики $\alpha = x$ розглянуто в [159]. Відповідна потенціальна система $v^2_x = u$, $v^2_t = xu_x - u$ має MAI

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_2 = \langle\, &\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u,\\ &4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - ((x^2+6t)u + 2v^2)\partial_u - (x^2-2t)v^2\partial_{v^2},\\ &u\partial_u + v^2\partial_{v^2},\ x^{-1}h_x\partial_u + h\partial_{v^2}\,\rangle,\end{aligned}$$

де функція $h = h(t,x)$ пробігає множину розв'язків потенціального рівняння $v^2_t + 2x^{-1}v^2_x - v^2_{xx} = 0$. Будь-яка лінійна комбінація операторів з $\mathfrak{p}_2$, яка містить третій базисний оператор, є оператором чисто потенціальної симетрії лінійний рівняння теплопровідності.

Наслідок 6.20. $G^{\rm ess}_0$*-еквівалентні найпростіші чисто потенціальні симетрії рівняння* (6.24) *вичерпано операторами з* $\mathfrak{p}_1$ *і* $\mathfrak{p}_2$ *, що задовольняють відповідно умови* $\eta_{v_1} \neq 0$ *або* $\eta_{v_2} \neq 0$*, де* η *— коефіцієнт при* ∂_u*.*

Результати цього пункту можна легко поширити на рівняння, еквівалентні рівнянню теплопровідності відносно точкових перетворень, наприклад, рівняння Фокера–Планка $u_t = u_{xx} + (xu)_x$ [241]. Це суттєво узагальнює результати з [159,247,253] щодо найпростіших потенціальних симетрій рівняння Фокера–Планка, асоційованих з характеристикою 1.

6.3.4. Узагальнені потенціальні симетрії. Щоб остаточно обґрунтувати вибір збережних векторів у канонічній формі (6.8) для побудови потенціальних систем, необхідно довести твердження щодо узагальнених потенціальних симетрій рівнянь з класу (6.1), аналогічне лемі 6.13.

Лема 6.15. *Нехай система* (6.19) — *потенціальна система рівня p рівняння з класу* (6.1). *З точністю до еквівалентності узагальнених симетрій, кожен оператор узагальненої симетрії системи* (6.19) *отримується через продовження порядку p відносно тільки змінної x оператора узагальненої симетрії відповідного модифікованого потенціального рівняння* (6.20) *рівня p і вираження похідних від f^p через f^s і похідні від u згідно системи* (6.19). *Зокрема, з точністю до еквівалентності узагальнених симетрій коефіцієнти кожного оператора узагальненої симетрії системи* (6.19) *залежать щонайбільше від t, x, f^s і похідних u по x і є лінійними по залежних змінних і похідних від u.*

Доведення. Припустимо, що $Q = \eta\partial_u + \theta^s\partial_{f^s}$ — оператор узагальненої симетрії системи (6.19). Тут коефіцієнти $\theta^0 := \eta$ і θ^s — функції від t, x і похідних від u і f^s. З огляду на систему (6.19), її диференціальні наслідки і відношення еквівалентності узагальнених симетрій, можна виключити похідні від f^s ненульових порядків і похідні від u, що містять диференціювання по t, з коефіцієнтів оператора Q. Отже, вважатимемо надалі, що вони залежать щонайбільше від t, x, f^s і похідних u по x.

Тимчасово введемо позначення $u_k := \partial^k u/\partial x^k$, $k \geqslant 1$, $u_0 := f^0 = u$, $u_{-s} := f^s$, $\operatorname{ord}\theta^\mu = \max\{k \mid \partial\theta^\mu/\partial u_k \neq 0,\ k \geqslant -p\}$, $r := \operatorname{ord}\theta^p$, $r \geqslant -p$. З інфінітезімального критерія інваріантності, застосованого до рівняння $f^s_x = H^s f^{s-1}$, випливає, що

$$\theta^{s-1} = \frac{1}{H^s}\left(\theta^s_x + \theta^s_{f^\sigma} H^\sigma f^{\sigma-1} + \sum_{k\geqslant 0}\theta^s_{u_k} u_{k+1}\right). \qquad (6.25)$$

Інтегруючи (6.25) у зворотному порядку, починаючи з $s = p$, отримаємо вираз θ^{s-1} через повні похідні від θ^p по x до порядку $p - s + 1$ включно згідно рівняння $f^{s-1} = (H^s)^{-1}\partial_x\big((H^{s+1})^{-1}\partial_x\big(\dots\big((H^p)^{-1}\partial_x f^p\big)\dots\big)\big)$. Зокрема, $\operatorname{ord}\theta^{s-1} = r + p - s + 1$.

Останнє рівняння $f^p_t = H^p A f^{p-1}_x - G^p f^{p-1}$ системи (6.19) в силу її інших рівнянь еквівалентне (6.20). Рівняння на θ^p, отримані з інфінітезімального критерію інваріантності для рівняння (6.20) як диференціального наслідку системи (6.19), співпадають з визначальними рівняннями для оператора узагальненої симетрії $Q' = \theta^p \partial_{f^p}$ окремого рівняння (6.20) при наведених вище співвідношеннях між x-похідними від f^p і функціями u_k, $k \geqslant -p$. Отже, існує бієкція між узагальненими симетріями системи (6.19) і рівняння (6.20), встановлена через проекцію на простір струменів над (t, x, f^p) у прямому напрямі і через продовження за формулою (6.25) — в зворотньому. Неявно вважаємо, що x-похідні від f^p можна виражати у термінах функцій u_k, $k \geqslant -p$, і навпаки.

Інфінітезімальну умову інваріантності для рівняння (6.20) можна розщепити по u_{r+1}. (Це еквівалентно розщепленню по f^p_{p+r+1}, якщо розглядати (6.20) як окреме рівняння.) Збираючи коефіцієнти при u^2_{r+1}, виведемо рівняння $\theta^p_{u_r u_r} = 0$. В силу останнього рівняння, можна зібрати коефіцієнти при $u_{r+1}u_r$, звідки $\theta^p_{u_r u_{r-1}} = 0$. Ітеруючи процедуру, на l-му кроці ($l \leqslant r+p+1$) можна зібрати коефіцієнти при $u_{r+1}u_{r+2-l}$ і отримати рівняння $\theta^p_{u_r u_{r+1-l}} = 0$. Наведену вище процедуру можна повторити для членів, що містять u_r, і так далі. Остаточно виведемо рівняння $\theta^p_{u_k u_{k'}} = 0$, $-p \leqslant k, k' \leqslant r$. Тоді в силу ітеративної формули (6.25) маємо $\theta^{s-1}_{u_k u_{k'}} = 0$, $-p \leqslant k, k' \leqslant r + p - s + 1$. □

Наслідок 6.21. *Для вичерпного дослідження потенціальної симетрії рівняння з класу* (6.1) *достатньо розглянути тільки набори збережних векторів вигляду* (6.8), *які є канонічними представниками відповідних законів збереження.*

Доведення. Розглянемо p збережних векторів рівняння вигляду (6.1), асоційованих з p лінійно незалежними законами збереження. Вони обов'язково мають зображення

$$\big(\alpha^s u + D_x\Phi^s,\ -\alpha^s A u_x + ((\alpha^s A)_x - \alpha^s B)u - D_t\Phi^s\big), \tag{6.26}$$

де $\alpha^s = \alpha^s(t, x)$ — лінійно незалежні розв'язки приєднаного рівняння (6.8), а Φ^s — функції від t, x і похідних u. Завдяки відношенню еквівалентності збережних векторів на множині розв'язків вихідного рівняння можна вважати, що серед аргументів функцій Φ^s є похідні тільки по x. Відповідну потенціальну систему можна отримати підстановкою $v^s = \tilde{v}^s - \Phi^s$ з системи (6.17), асоційованої з еквівалентним набором збережних векторів у канонічній формі. Тут $\tilde{v}^s$ —потенціали, введені за збережними векторами (6.26). Згідно лем 6.9 і 6.10 індукована підстановка у термінах потенціалів f^s має вигляд $f^s = \tilde{f}^s - \Psi^s$. Для кожного s функція Ψ^s є лінійною комбінацією функцій Φ^σ, $\sigma = \overline{1,s}$, з коефіцієнтами, залежними від t і x, причому коефіцієнт при Φ^s ненульовий. Позначимо максимальний порядок похідних у Ψ^s через ρ і значення s, для якого $\Psi^s_{u_\rho} \neq 0$, — через s_0. Можна вважати, що $\rho \geqslant 1$, оскільки інакше функціями Ψ^s, а отже і функціями Φ^s можна нехтувати завдяки точковому перетворенню, яке не має з точністю до подібності ніякого впливу на ліївські симетрії розглядуваних потенціальних систем.

Кожній ліївській симетрії системи на $\tilde{f}^s$ і u відповідає узагальнена симетрія системи (6.19) на f^s і u. Питання полягає у тому, коли оператор узагальненої симетрії $Q = \eta\partial_u + \theta^s\partial_{f^s}$ системи (6.19) індукує оператор ліївської симетрії $\tilde{Q} = \tilde{\eta}\partial_u + \tilde{\theta}^s\partial_{f^s}$ (в еволюційній формі) системи на $\tilde{f}^s$ і u.

Припустимо, що $r + p \geqslant 1$, де $r = \operatorname{ord}\theta^p$. Оскільки

$$\tilde{\theta}^{s_0} = Q\tilde{f}^{s_0}\big|_{\tilde{f}^s - \Psi^s \rightsquigarrow f^s} = \left(\theta^{s_0} + \sum_{k=0}^{\rho} D_x^k(\eta)\Psi^s_{u_k}\right)\Bigg|_{\tilde{f}^s - \Psi^s \rightsquigarrow f^s}$$

(тут використано позначення з доведення леми 6.15), доданок $\eta_{u_{r+p}}\Psi^s_{u_\rho}u_{r+p+\rho}$ не може скоротитися з іншими доданками в $\tilde{\theta}^{s_0}$. Отже, $\operatorname{ord}\tilde{\theta}^{s_0} = r + p + \rho \geqslant 2$. Водночас, якщо $\tilde{Q}$ був би оператором ліївської симетрії, то виконувалася б умова $\operatorname{ord}\tilde{\theta}^s \leqslant \max(2 - s, 0) \leqslant 1$.

У випадку $r+p = 0$ коефіцієнт θ^p має вигляд $\theta^p = \theta^{p1}(t,x)f^p + \theta^{p0}(t,x)$. З визначальних рівнянь для узагальнених симетрій системи (6.19) випливає, що $\theta^{p1}(t,x) = C = \mathrm{const}$. Тоді $\theta^{s-1} = Cf^{s-1} + \theta^{s-1,0}(t,x)$ в силу формули (6.25). Оскільки $\tilde{\eta} = \eta = Cu + \theta^{00}(t,x)$, оператор $\tilde{Q}$ дає тривіальну потенціальну симетрію вихідного рівняння, яка відповідає його тривіальній ліївській симетрії. $\square$

6.4. Оператори редукції

6.4.1. Визначальні рівняння для операторів редукції. Попередній опис операторів редукції рівнянь з класу (6.1) дає наступна лема.

Лема 6.16. *Кожен оператор редукції рівняння* $\mathcal{L}$ *з класу* (6.1) *еквівалентний або оператору* $\partial_t + g^1\partial_x + (g^2u + g^3)\partial_u$, *де коефіцієнти* g^1, g^2, g^3 *залежать лише від* t *і* x *та задовольняють систему*

$$\begin{aligned}
&\tilde{L}g^1 + HB + B_x g^1 + 2Ag^2_x + B_t = 0,\\
&\tilde{L}g^2 - HC - C_x g^1 - C_t = 0,\\
&\tilde{L}g^3 - Cg^3 = 0
\end{aligned} \tag{6.27}$$

з $\tilde{L} = \partial_t - A\partial_{xx} - B\partial_x + H$ *та* $H = 2g^1_x - (A_x g^1 + A_t)/A$, *або оператору* $\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$, *де функція* $\eta = \eta(t,x,u)$ *— розв'язок рівняння*

$$\begin{aligned}
\eta_t = A(\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu}) + A_x(\eta_x + \eta\eta_u) + (B\eta)_x +\\
+ C(\eta - u\eta_u) + C_x u.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Позначимо множину операторів редукції рівняння $\mathcal{L}$ з класу (6.1) через $\mathfrak{Q}(\mathcal{L})$, відповідну множину, факторизовану по відношенню еквівалентності операторів редукції, — через $\mathfrak{Q}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$. Розглянемо підмножини $\mathfrak{Q}_1(\mathcal{L})$ і $\mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$ у $\mathfrak{Q}(\mathcal{L})$, які складаються з операторів, зв'язаних умовами $\tau = 1$ і $(\tau,\xi) = (0,1)$ відповідно. Фактор-множину $\mathfrak{Q}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$ можна ототожнити з $\mathfrak{Q}_1(\mathcal{L}) \cup \mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$. Це об'єднання дає канонічне розбиття для $\mathfrak{Q}_{\mathrm{f}}(\mathcal{L})$. Систему вигляду (6.27) і рівняння вигляду (6.28), асоційовані з $\mathcal{L}$ (які є визначальними рівняннями на коефіцієнти операторів з $\mathfrak{Q}_1(\mathcal{L})$ і $\mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$), позначимо відповідно через $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ і $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$. Очевидно, що правила $\mathcal{L} \to \mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ і $\mathcal{L} \to \mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ визначають взаємно-однозначне відображення класу (6.1) на класи (6.27) і (6.28).

Зауваження 6.12. Розбиття множини операторів редукції згідно умови, є чи ні коефіцієнт τ нульовим, природно для рівнянь з класу (6.1) (як і всього класу еволюційних рівнянь) і узгоджено з їх трансформаційними властивостями (див. параграф 6.4.3).

Зауваження 6.13. З певних причин оператори редукції буде вивчено для рівнянь незведеного вигляду (6.1). Однак з точністю до відношення еквівалентності, породженого групою еквівалентності класу (6.1) на множині пар "(рівняння вигляду (6.1), його оператор редукції)", достатньо досліджувати тільки підклас (6.7) рівнянь з $A = 1$ і $B = 0$. Визначальні рівняння (6.27) і (6.28) мають тоді простіший вигляд

$$
\begin{aligned}
&g^1_t - g^1_{xx} + 2g^1_x g^1 + 2g^2_x = 0,\\
&g^2_t - g^2_{xx} + 2g^1_x(g^2 + V) + V_x g^1 + V_t = 0,\\
&g^3_t - g^3_{xx} + 2g^1_x g^3 + V g^3 = 0
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

і

$$
\eta_t = \eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu} - V(\eta - u\eta_u) - V_x u. \tag{6.30}
$$

6.4.2. Лінеаризація визначальних рівнянь до вихідних. Існують однозначні зв'язки між певними сім'ями розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ з класу (6.1) і його операторами редукції. Це породжує зв'язки системи $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ і рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ з вихідним рівнянням $\mathcal{L}$ через нелокальні перетворення.

Розглянемо спочатку оператори редукції з $\mathfrak{Q}_1(\mathcal{L})$. Надалі індекси i і j змінюються від 1 до 3, індекси p і q — від 1 до 2.

Теорема 6.9. *З точністю до еквівалентності операторів і еквівалентності сімей розв'язків, для кожного рівняння з класу* (6.1) *існує бієкція між його операторами редукції з ненульовими коефіцієнтами при* ∂_t *і двопараметричними сім'ями його розв'язків вигляду*

$$
u = c_1 v^1(t,x) + c_2 v^2(t,x) + v^3(t,x), \tag{6.31}
$$

де c_1 *і* c_2 *— сталі параметри. А саме, кожному такому оператору відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно нього. Проблема побудови всіх двопараметричних сім'ей розв'язків рівняння* (6.1)*, лінійних за параметрами, повністю еквівалентна проблемі вичерпного опису його операторів редукції з ненульовими коефіцієнтами при* ∂_t.

Наслідок 6.22. *Нелінійна зачеплена система* (6.27) *перетворенням*

$$g^1 = -A\frac{v^1v^2_{xx} - v^1_{xx}v^2}{v^1v^2_x - v^1_xv^2} - B, \qquad g^2 = -A\frac{v^1_xv^2_{xx} - v^1_{xx}v^2_x}{v^1v^2_x - v^1_xv^2} + C,$$
$$g^3 = \frac{A}{v^1v^2_x - v^1_xv^2}\begin{vmatrix} v^1 & v^1_x & v^1_{xx} \\ v^2 & v^2_x & v^2_{xx} \\ v^3 & v^3_x & v^3_{xx} \end{vmatrix} \tag{6.32}$$

зводиться до незачепленої системи з трьох копій рівнянь (6.1)

$$Lv^i = v^i_t - Av^i_{xx} - Bv^i_x - Cv^i = 0 \tag{6.33}$$

для функцій $v^i = v^i(t,x)$, причому функції v^1 і v^2 лінійно незалежні.

Зауваження 6.14. В силу леми 6.3 формули (6.32) добре визначені.

Наслідок 6.23. *Нехай $G^\infty(\mathcal{L})$ позначає групу тривіальної ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}$ з класу* (6.1)*, що складається з перетворень вигляду*

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + f(t,x),$$

де параметр-функція $f = f(t,x)$ пробігає множину розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Кожен оператор редукції рівняння $\mathcal{L}$ з ненульовим коефіцієнтом при ∂_t $G^\infty(\mathcal{L})$-еквівалентний оператору $\partial_t + g^1\partial_x + g^2u\partial_u$ з коефіцієнтами $g^1 = g^1(t,x)$ і $g^2 = g^2(t,x)$, що є розв'язками двох перших рівнянь з $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$.

Зауваження 6.15. Функції v^i, що задовольняють систему (6.33) і додаткові умови (6.32) з фіксованими значеннями коефіцієнтів g^j, визначені з точністю до перетворення

$$\tilde{v}^p = \mu_{pq}v^q, \quad \tilde{v}^3 = v^3 + \mu_{3q}v^q, \tag{6.34}$$

де $\mu_{iq} = \mathrm{const}$ і $\det(\mu_{pq}) \neq 0$. Перетворення (6.34) індукує перетворення сталих c_1 і c_2: $\tilde{c}_p = \tilde{\mu}_{pq}(c_q - \nu_q)$, де $(\tilde{\mu}_{pq}) = (\mu_{p'q'})^{-1}$. Очевидно, що сім'ї розв'язків (6.31) і $u = \tilde{c}_1\tilde{v}^1 + \tilde{c}_2\tilde{v}^2 + \tilde{v}^3$ співпадають з точністю до репараметризації і їх можна ототожнити.

Щодо операторів редукції з класу $\mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$ справедливі всі результати, отримані у параграфі 5.2.3 для сингулярних операторів редукції еволюційних рівнянь. Зокрема, наслідок 5.8 можна переформулювати як твердження про лінеаризацію визначального рівняння (6.28).

Цікавим є зв'язок між (узагальненими) операторами редукції і перетворенням Дарбу. Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p]$ можна зобразити як дію лінійного диференціального оператора p-порядку з диференціюваннями тільки по x, $\mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p](u) = \mathrm{DT}[\psi^1,\dots,\psi^p]u$. Оператор позначимо тим же символом, що і перетворення, і назвемо *оператором Дарбу*, асоційованим з набором $(\psi^1,\dots,\psi^p)$. Припустимо, що оператор редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ має канонічний вигляд і асоційований з лінійним диференціальним оператором першого порядку $\widetilde{Q}$, діючим на функції від t і x, тобто або $Q = \partial_t + g^1\partial_x + g^2u\partial_u$, якщо $Q \in \mathfrak{Q}_1(\mathcal{L})$, або $Q = \partial_x + \eta^1u\partial_u$, якщо $Q \in \mathfrak{Q}_0(\mathcal{L})$. (Тут g^1, g^2 і η^1 — функції від t і x.) У першому випадку оператор $\widetilde{Q} = -\partial_t - g^1\partial_x + g^2$ дорівнює $-A\,\mathrm{DT}[v^1, v^2]$ на множині розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, де розв'язки $v^i = v^i(t,x)$, $i = 1, 2$, рівняння $\mathcal{L}$ визначено згідно наслідку 6.22. У другому випадку коефіцієнт η^1 допускає зображення $\eta^1 = \Psi_x/\Psi$, де $\Psi = \Psi(t,x)$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}$. Отже $\widetilde{Q} = -\mathrm{DT}[\Psi]$. Остаточно маємо наступне твердження.

Твердження 6.5. *Нехай оператор редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ з класу* (6.1) *асоційований з точністю до відношення еквівалентності операторів з лінійним диференціальним оператором першого порядку, що діє на функції від t і x. Тоді він еквівалентний оператору Дарбу, побудованому за одним (двома) лінійно незалежними розв'язками цього рівняння у випадку нульового (або ненульового) коефіцієнта при ∂_t.*

6.4.3. Допустимі перетворення, групи еквівалентності і ліївські симетрії визначальних рівнянь. "No-go" результати можна поширити на дослідження точкових перетворень, ліївських симетрій і ліївських редукції визначальних рівнянь (6.27) і (6.28). Так, МАІ цих рівнянь канонічно ізоморфні MAI рівняння (6.1). (Раніше цей результат був відомий тільки для лінійного рівняння теплопровідності [134].) Більш того, подібні твердження вірні для повних груп точкових симетрій, включаючи перетворення дискретної симетрії, а також груп еквівалентності і множин допустимих перетворень класи таких рівнянь.

Ці твердження обґрунтовано лемами 5.3 і 6.1. Дійсно, кожне точкове перетворення $\mathcal{T}$ між рівняннями $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ з класу (6.1) має вигляд (6.3) і індукує взаємно-однозначні відображення $\mathcal{T}_*\colon \mathfrak{Q}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{Q}(\tilde{\mathcal{L}})$ і $\mathcal{T}_{\rm f}\colon \mathfrak{Q}_{\rm f}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{Q}_{\rm f}(\tilde{\mathcal{L}})$. Завдяки умовам $\mathcal{T}^t_x = 0$ і $\mathcal{T}^t_u = 0$, перетворення $\mathcal{T}_*$ зберігає зв'язок $\tau = 0$ ($\tau \neq 0$) на коефіцієнти операторів редукції. Отже, перетворення $\mathcal{T}_{\rm f}$ розщеплюється на взаємно-однозначні відображення $\mathcal{T}_{{\rm f},1}\colon \mathfrak{Q}_1(\mathcal{L}) \to \mathfrak{Q}_1(\tilde{\mathcal{L}})$ і $\mathcal{T}_{{\rm f},0}\colon \mathfrak{Q}_0(\mathcal{L}) \to \mathfrak{Q}_0(\tilde{\mathcal{L}})$ згідно канонічного розбиття множин $\mathfrak{Q}_{\rm f}(\mathcal{L})$ і $\mathfrak{Q}_{\rm f}(\tilde{\mathcal{L}})$, а тому перетворення $\mathcal{T}$ індукує в канонічний спосіб перетворення $\mathcal{T}_1$ і $\mathcal{T}_0$ в просторах змінних (t, x, g^1, g^2, g^3) і (t, x, u, η), для яких $\mathcal{T}_1\big(\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})\big) = \mathrm{DE}_1(\tilde{\mathcal{L}})$, $\mathcal{T}_0\big(\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})\big) = \mathrm{DE}_0(\tilde{\mathcal{L}})$.

Процедура виведення явної формули для $\mathcal{T}_1$ наступна: діючи на оператор $\partial_t + g^1\partial_x + (g^2u + g^3)\partial_u$ перетворенням $\mathcal{T}_*$ і нормалізуючи коефіцієнт при $\partial_{\tilde t}$ до 1, отримаємо оператор $\partial_{\tilde t} + \tilde g^1\partial_{\tilde x} + (\tilde g^2\tilde u + \tilde g^3)\partial_{\tilde u}$, де нові коефіцієнти $\tilde g^i = \tilde g^i(\tilde t, \tilde x)$, $i = 1, 2, 3$, виражаються за формулами

$$
\begin{aligned}
\tilde g^1 &= \frac{X_x}{T_t}g^1 + \frac{X_t}{T_t},\\
\tilde g^2 &= \frac{1}{T_t}g^2 + \frac{U^1_x}{T_tU^1}g^1 + \frac{U^1_t}{T_tU^1},\\
\tilde g^3 &= \frac{U^1}{T_t}g^3 - \frac{U^0}{T_t}g^2 + \frac{U^0_xU^1 - U^0U^1_x}{T_tU^1}g^1 + \frac{U^0_tU^1 - U^0U^1_t}{T_tU^1},
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

які описують дію $\mathcal{T}_1$ на залежні змінні (g^1, g^2, g^3). Незалежні змінні t, x і довільний елементи A, B, C перетворюються за тими ж формулами (6.3) і (6.4), як і у перетворенні $\mathcal{T}$. Перетворенням для u нехтуємо.

Якщо перетворення $\mathcal{T}$ належить групі еквівалентності $G^\sim$ класу (6.1), то воно визначене для всіх значень довільних елементів, а тому таке ж твердження справедливе і для $\mathcal{T}_1$. Отже, $\mathcal{T}_1$ належить групі еквівалентності $G_1^\sim$ класу (6.27). Іншими словами, група $G^\sim$ індукує підгрупу $G_1^\sim$ групи еквівалентності класу визначальних рівнянь для випадку $\tau = 1$.

Припустимо, що перетворення $\mathcal{T}$ параметризоване параметром ε і ця сім'я перетворень є однопараметричною групою ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}$, породженою оператором $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + (\zeta^1 u + \zeta^0)\partial_u$. Продиференціюємо (6.35) по ε і покладемо $\varepsilon = 0$, враховуючи умови

$$\tau = \tau(t) = T_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0},\ T\big|_{\varepsilon=0} = t,\ \xi = \xi(t,x) = X_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0},\ X\big|_{\varepsilon=0} = x,$$
$$\zeta^1 = \zeta^1(t,x) = U^1_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0},\ U^1\big|_{\varepsilon=0} = 1,\ \zeta^0 = \zeta^0(t,x) = U^0_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0},\ U^0\big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

У результаті отримаємо вирази для коефіцієнтів θ^i оператора ліївської симетрії $Q_1 = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \theta^i\partial_{g^i}$ системи $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$, асоційованого з Q:

$$\begin{aligned}
&\theta^1 = (\xi_x - \tau_t)g^1 + \xi_t,\\
&\theta^2 = -\tau_t g^2 + \eta^1_x g^1 + \eta^1_t,\\
&\theta^3 = (\eta^1 - \tau_t)g^3 - \eta^0 g^2 + \eta^0_x g^1 + \eta^0_t.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Явні формули для $\mathcal{T}_0$ виведемо аналогічно. Дія $\mathcal{T}_*$ на оператор $\partial_x + \eta\partial_u$ і нормалізація коефіцієнта при $\partial_{\tilde{x}}$ до 1 дають оператор $\partial_{\tilde{x}} + \tilde{\eta}\partial_{\tilde{u}}$, де

$$\tilde{\eta} = \frac{U^1}{X_x}\eta + \frac{U^1_x}{X_x}u + \frac{U^0_x}{X_x}. \tag{6.37}$$

Формула (6.37) зображає вираз для залежної змінної η, перетвореної $\mathcal{T}_0$. Незалежні змінні t, x, u і довільні елементи A, B, C перетворюються згідно формул (6.3) і (6.4). Єдина різниця з $\mathcal{T}$ є у тому, що тут змінну u вважаємо незалежною. Отже, кожне перетворення з групи еквівалентності $G^\sim$ класу (6.1) індукує перетворення з групи еквівалентності $G_0^\sim$ класу (6.28). Також кожен оператор ліївської інваріантності $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + (\zeta^1 u + \zeta^0)\partial_u$ рівняння $\mathcal{L}$ можна продовжити до оператора ліївської інваріантності $Q_0 = Q + \theta\partial_\eta$ рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$, де коефіцієнт θ визначено формулою

$$\theta = (\zeta^1 - \xi_x)\eta + \zeta^1_x u + \zeta^0_x. \tag{6.38}$$

Проблема полягає у тому, щоб довести, що індуковані об'єкти (допустимі перетворення, точкові еквівалентності і симетрії, оператори ліївської інваріантності) вичерпують всі можливі об'єкти відповідного типу для визначальних рівнянь.

Лема 6.17. *Якщо точкове перетворення пов'язує дві системи* $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ *і* $\mathrm{DE}_1(\tilde{\mathcal{L}})$ *з класу* (6.27), *то воно має вигляд*

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X(t,x), \quad \tilde g^i = G^{ii'}(t,x)g^{i'} + G^{i0}(t,x), \tag{6.39}$$

де T, X, G^{33} *і* G^{32} *— гладкі функції своїх аргументів, де* $T_tX_xG^{33}\neq 0$ *і додатково* G^{32}/G^{33} *— розв'язок асоційованого рівняння* $\mathcal{L}$; $i,i'=1,2,3$. *Інші параметр-функції в* (6.39) *явно визначені:*

$$\begin{aligned}
&G^{10}=\frac{X_t}{T_t}, && G^{11}=\frac{X_x}{T_t}, && G^{12}=0, \quad G^{13}=0,\\
&G^{20}=\frac{(T_tG^{33})_t}{{T_t}^2G^{33}}, && G^{21}=\frac{G^{33}_x}{T_tG^{33}}, && G^{22}=\frac{1}{T_t}, \quad G^{23}=0,\\
&G^{30}=\frac{(T_tG^{33})_t}{{T_t}^2G^{33}}, && G^{31}=\frac{G^{33}_x}{G^{33}}G^{32}-G^{32}_x.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Довільні елементи перетворюються за формулами

$$\begin{aligned}
&\tilde A=\frac{X_x^2}{T_t}A, \quad \tilde B=\frac{X_x}{T_t}\left(B-2\frac{G^{33}_x}{G^{33}}A\right)-\frac{X_t-AX_{xx}}{T_t},\\
&\tilde C=-G^{33}L\frac{1}{T_tG^{33}}.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Теорема 6.10. *Існує канонічна біекція між множинами допустимих перетворень класів* (6.1) *і* (6.27). *А саме, кожне точкове перетворення між рівняннями* $\mathcal{L}$ *і* $\tilde{\mathcal{L}}$ *з класу* (6.1) *індукує точкове перетворення між асоційованими системами* $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ *і* $\mathrm{DE}_1(\tilde{\mathcal{L}})$ *згідно формули* (6.35), *а незалежні змінні перетворюються так само. Індуковані перетворення вичерпують множину допустимих перетворень у класі* (6.27).

Зауваження 6.16. З доведення теореми 6.10 випливає, що "якщо ..., то ..." в лемі 6.17 можна замінити на "... тоді і тільки тоді, коли ...", тобто наведені умови є необхідними і достатніми.

Наслідок 6.24. *Група еквівалентності $G_1^\sim$ класу* (6.27) *ізоморфна групі еквівалентності $G^\sim$ класу* (6.1). *Канонічний ізоморфізм встановлюють формули* (6.35), *де $U^0 = 0$.*

Наслідок 6.25. *Максимальна групи точкових симетрій (а також MAI) кожного рівняння $\mathcal{L}$ з класу* (6.1) *і відповідної системи* $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ *ізоморфні. Оператор ліївської симетрії $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + (\zeta^1 u + \zeta^0)\partial_u$ рівняння $\mathcal{L}$ індукує оператор ліївської симетрії $Q_1 = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \theta^i\partial_{g^i}$ системи* $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$, *де коефіцієнти θ^i, $i = 1, 2, 3$, визначено формулами* (6.36).

Наслідки 6.24 і 6.25 разом з теоремою 6.2 дають вичерпну групову класифікацію класу (6.27).

Ланцюжок подібних тверджень також отримано для класу (6.28).

Лема 6.18. *Якщо точкове перетворення у просторі змінних* (t, x, u, η) *пов'язує два рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ *і* $\mathrm{DE}_0(\tilde{\mathcal{L}})$ *з класу* (6.28), *то його вигляд задається формулами* (6.3) *і* (6.37), *де T, X, U^1 і U^0 — довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що $T_t X_x U^1 \neq 0$ і додатково U^0/U^1 задовольняє $\mathcal{L}$. Довільні елементи перетворюється за формулами* (6.4).

Теорема 6.11. *Існує канонічна бієкція між множинами допустимих перетворень класів* (6.1) *і* (6.28). *А саме, кожне точкове перетворення між рівняннями $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ з класу* (6.1) *можна розширити до точкового перетворення між асоційованими рівняннями* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ *і* $\mathrm{DE}_0(\tilde{\mathcal{L}})$ *згідно формули* (6.37) *(змінні* (t, x, u) *і довільні елементи перетворюються так само). Розширені перетворення вичерпують множину допустимих перетворень у класі* (6.28).

Наслідок 6.26. *Група еквівалентності $G_0^\sim$ класу* (6.28) *ізоморфна групі еквівалентності $G^\sim$ класу* (6.1). *Канонічний ізоморфізм встановлено через розширення перетворень з $G^\sim$ на змінну η за формулою* (6.37), *де $U^0 = 0$.*

Наслідок 6.27. *Для кожного рівняння $\mathcal{L}$ з класу* (6.1) *максимальні групи точкових симетрій (а також MAI) рівнянь $\mathcal{L}$ і* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ *ізоморф-*

ні. Канонічний ізоморфізм між алгебрами реалізується через розширення кожного оператора $Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + (\zeta^1 u + \zeta^0)\partial_u$ *з МАІ рівняння* $\mathcal{L}$ *до оператора* $Q_1 = Q + \big((\zeta^1 - \xi_x)\eta + \zeta^1_x u + \zeta^0_x\big)\partial_\eta$ *з МАІ рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$.

У силу наслідків 6.26 і 6.27 результати щодо групової класифікації класу (6.28) випливають з теореми 6.2.

6.4.4. Ліївські редукції визначальних рівнянь. Припустимо, що рівняння $\mathcal{L}$ з класу (6.1) допускає оператор ліївської симетрії $Q = \tau\partial_t + {}+\xi\partial_x + \zeta\partial_u$. Коефіцієнти Q обов'язково мають вигляд $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t, x)$ і $\zeta = \zeta^1(t, x)u + \zeta^0(t, x)$, причому ζ^0 — розв'язок рівняння $\mathcal{L}$. Згідно наслідків 6.25 і 6.27, визначальні рівняння $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$ і $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ відповідно мають оператори ліївської симетрії Q_1 і Q_0, асоційовані з Q, які можна використати для редукції визначальних рівнянь і побудови їх точних розв'язків. Знайдені розв'язки визначальних рівнянь дають оператори редукції спеціального типу для вихідного рівняння $\mathcal{L}$, неявно пов'язані з його властивостями ліївської інваріантності. Питання полягає у тому, які властивості мають його розв'язки, інваріантні відносно таких операторів редукції, наприклад, чи є ці розв'язки обов'язково ліївськими, чи ні.

Допустиме перетворення $\mathcal{T}$ рівняння $\mathcal{L}$ у класі (6.1) має вигляд (6.3) і відображає пару $(\mathcal{L}, Q)$ у пару $(\mathcal{L}', Q')$, де рівняння $\mathcal{L}'$ також належить класу (6.1), а Q' — (не)тривіальний оператор ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}'$, якщо Q — (не)тривіальний оператор ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}$. З точністю до еквівалентності, породженої множиною допустимих перетворень класу (6.1) (див. лему 6.1) на множині пари "(рівняння вигляду (6.1), його оператор ліївської симетрії)", можна вважати, що $Q \in \{\partial_t, \partial_x\}$ або $Q \in \{u\partial_u, \partial_u\}$, якщо Q — нетривіальний або тривіальний оператор ліївської симетрії рівняння $\mathcal{L}$ відповідно. $Q \sim \partial_t$ при $\tau \neq 0$ і $Q \sim \partial_x$ при $\tau = 0$ та $\xi \neq 0$. Якщо $Q \in \{\partial_t, \partial_x\}$, оператори Q_1 і Q_0 формально мають такий самий вигляд, як оператор Q, але визначені в інших просторах змінних.

Твердження 6.6. *Нехай* $R = \partial_t + g^1\partial_x + (g^2u + g^3)\partial_u \in \mathfrak{Q}_1(\mathcal{L})$, *де* (g^1, g^2, g^3) *—* Q_1*-інваріантний розв'язок системи* $\mathrm{DE}_1(\mathcal{L})$.

1) Якщо $\tau \neq 0$, *то функції* g^1, g^2 *і* g^3 *виражаються згідно* (6.32) *через розв'язок* (v^1, v^2, v^3) *незачепленої системи* $3\mathcal{L}$, *інваріантний відносно оператора ліївської симетрії* $\tau\partial_t + \xi\partial_x + \zeta^1 v^1\partial_{v^1} + \zeta^1 v^2\partial_{v^2} + (\zeta^1 v^3 + \zeta^0)\partial_{v^3} + \lambda_{iq}v^q\partial_{v^i}$ *цієї системи, де* λ_{iq} *— деякі сталі,* $i = 1, 2, 3$, $q = 1, 2$, *а функції* v^1 *і* v^2 *лінійно незалежні. Кожний* R*-інваріантний розв'язок рівняння* $\mathcal{L}$ *є лінійною комбінацією (з одиничним коефіцієнтом при* v^3*) компонент ліївського розв'язку* (v^1, v^2, v^3) *системи* $3\mathcal{L}$.

2) Якщо $\tau = 0$ *і* $\xi \neq 0$, *то оператор* R *обов'язково еквівалентний оператору ліївської інваріантності рівняння* $\mathcal{L}$.

Щоб сформулювати результати щодо ліївських розв'язків визначальних рівнянь $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$, потрібно спочатку ввести допоміжне поняття *однопараметричної сім'ї розв'язків* рівняння $\mathcal{L}$, *асоційованої з оператором ліївської симетрії* Q. Множину таких сімей можна зобразити як об'єднання двох підмножин, які відповідно утворено *сингулярними асоційованими сім'ями*, що складаються з Q-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, і *регулярними асоційованими сім'ями*, отриманими через дію на фіксовані не Q-інваріантні розв'язки рівняння $\mathcal{L}$ однопараметричною групою перетворень, породженою Q. Регулярні однопараметричні сім'ї, асоційовані з одним і тим же оператором, еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони відрізнятися тільки зсувами параметра. Такі сім'ї отримано дією тієї ж однопараметричної групи перетворень на фіксовані розв'язки, подібні відносно цієї групи. Розглядається окіл точки, неособливої для Q. (Інакше взаємно-однозначна відповідність у наступній теоремі зруйнується. В деяких випадках її можна зберегти, враховуючи дискретні перетворення симетрії, див. зауваження 14 з [230].)

Твердження 6.7. *Нехай рівняння* $\mathcal{L}$ *з класу* (6.1) *інваріантне відносно точкового перетворення* $\mathcal{T}$ *(оператора* Q*) і функція* $\eta = \eta(t, x, u)$ *— розв'язок асоційованого визначального рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$. *Тоді рівняння*

$u_x = \eta(t, x, u)$ допускає $\mathcal{T}$ (Q) як перетворення точкової симетрії (оператор ліївської симетрії) тоді і тільки тоді, коли функція η є інваріантом асоційованого перетворення точкової симетрії $\mathcal{T}_0$ (асоційованого оператора ліївської симетрії Q_0) рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$.

Теорема 6.12. *Для кожного рівняння $\mathcal{L}$ з класу* (6.1) *і кожного його оператора ліївської симетрії Q існує бієкція між Q_0-інваріантними розв'язками визначального рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ *і однопараметричними сім'ями розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, асоційованими з Q. А саме, редукція рівняння $\mathcal{L}$ за оператором $\partial_x + \eta\partial_u$, де коефіцієнт η — Q_0-інваріантний розв'язок рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$*, дає однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, асоційовану з Q. І навпаки, кожна сім'я такого типу складається з розв'язків, інваріантних відносно оператора $\partial_x + \eta\partial_u$, де коефіцієнт η — Q_0-інваріантний розв'язок рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$.

Оскільки визначальне рівняння $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ має три незалежні змінні, воно допускає також ліївські редукції по двовимірних підалгебрах своєї МАІ до ЗДР і, отже, має відповідні інваріантні розв'язки. Щоб сформулювати твердження про такі розв'язки аналогічно теоремі 6.12, потрібно визначати *однопараметричні сім'ї розв'язків* рівняння $\mathcal{L}$, *асоційовані з його двовимірною алгеброю ліївської інваріантності* $\mathfrak{g}$. Множина цих сімей визначається через розбиття на підмножини *сингулярних* і *регулярних* сімей. Кожна сингулярна асоційована сім'я складається з $\mathfrak{g}$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Кожну регулярну асоційовану сім'ю отримано через дію на фіксований Q^1-інваріантний і не Q^2-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ однопараметричною групою перетворень, породжених Q^2. Тут Q^1 і Q^2 — довільні лінійно незалежні елементи з $\mathfrak{g}$.

Теорема 6.13. *Нехай двовимірна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння $\mathcal{L}$ з класу* (6.1) *індукує алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_0$ відповідного визначального рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$*, яка прийнятна для його ліївської редукції. Тоді існує взаємно-однозначна відповідність між $\mathfrak{g}_0$-інваріантними розв'язками рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ *і однопараметричними* *сім'ями розв'язків рівняння* $\mathcal{L}$, *асоційованими з* $\mathfrak{g}$. *А саме, редукція* $\mathcal{L}$ *за оператором* $\partial_x + \eta\partial_u$, *де коефіцієнт* η — $\mathfrak{g}_0$-*інваріантний розв'язок рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$, *дає однопараметричну сім'ю розв'язків рівняння* $\mathcal{L}$, *асоційовану з* $\mathfrak{g}$. *І навпаки, кожна сім'я такого типу складається з розв'язків, інваріантних відносно оператора* $\partial_x+\eta\partial_u$, *де коефіцієнт* η — $\mathfrak{g}_0$-*інваріантний розв'язок рівняння* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$.

Аналогічно можна дослідити неліївські редукції визначальних рівнянь [231].

6.5. Висновки

У цьому розділі виконано розширений симетрійний аналіз (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Проаналізовано структуру нормалізаних підкласів таких рівнянь, знайдено локальні і потенціальні закони збереження, описано потенціальні симетрії, узагальнені потенціальні симетрії і оператори редукції. Це суттєво узагальнює відомі результати щодо рівнянь з цього класу.

Повну групову класифікацію для нього виконано С. Лі [187] як частину більш загальної групової класифікації лінійних ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Сучасне трактування класифікації Лі подано в [30]. Існує також багато робіт, в яких частково перевідкрито ці результати С. Лі і Л.В. Овсяннікова (див., наприклад, [22,41,69,105,255]). У деяких з них робилися спроби виконання класифікації для відмінних від [30, 187] канонічних форм рівнянь, наприклад, для рівнянь Колмогорова чи Фокера–Планка, але в результаті задача ставала значно складнішою. Через вивчення нормалізіційних властивостей класу (6.1) в підрозділі 6.1 пояснено складнощі групової класифікації при виборі форми рівнянь Колмогорова чи Фокера–Планка як канонічної для класу.

Щодо законів збереження і потенціальних симетрій таких рівнянь раніше існували тільки результати про локальні закони збереження [13, 89] та найпростіші потенціальні симетрії, асоційовані з характеристикою 1, [247,248] лише для деяких підкласів чи навіть конкретних рівнянь з класу (6.1). Після повного опису локальних законів збереження доведено, що всі потенціальні закони збереження рівнянь з класу (6.1) індуковано локальними. Це дало змогу побудувати повну ієрархію потенціальних систем над цим класом, тобто, іншими словами, знайти його абелеве накриття. Потенціальний фрейм розширено через уведення модифікованих потенціалів і визначення різних типів зображень для потенціальних систем та асоційованих з ними окремих потенціальних рівнянь. Докладно вивчено властивості багатократного двоїстого перетворення Дарбу [194], оскільки воно є основним інструментом дослідження (модифікованих) потенціальних структур. Через продовження перетворень еквівалентності вихідних рівнянь на весь потенціальний фрейм визначено відношення еквівалентності для класифікації потенціальних структур.

Після аналізу ліївської інваріантності потенціальних систем, в різних термінах сформульовано критерії існування загальних потенціальних симетрій. Їх ефективність продемонстровано через побудову широких підкласів класу (6.1), рівняння з яких допускають нескінченні серії алгебр потенціальної симетрії як завгодно великого порядку. При цьому як потужний допоміжний засіб суттєво використано багатократне автоперетворення Дарбу. Прокласифіковано всі найпростіші потенціальні симетрії лінійного рівняння теплопровідності. Вивчено узагальнені потенціальні симетрії, що дозволило вперше у літературі обґрунтувати вибір потенціальних систем для обчислення потенціальних симетрій.

Доведено вичерпний набір “no-go” тверджень про оператори редукції рівнянь з класу (6.1):

1) З точністю до відношень еквівалентності на відповідних множинах існує бієкція між однопараметричними (двопараметричними і лінійними за параметрами) сім’ями розв’язків кожного рівняння з класу (6.1) і його операторами редукції з (не)нульовими коефіцієнтами при ∂_t.

2) Визначальні рівняння на коефіцієнти операторів редукції обох типів зводяться за допомогою нелокальних замін до вихідних рівнянь.

3) МАІ і групи точкових симетрій визначальних рівнянь, а також групи еквівалентності і множини допустимих перетворень їх класів індуковано відповідними об'єктами для вихідних рівнянь.

4) Ліївська редукція визначальних рівнянь дає такі оператори редукції, що кожна з асоційованих сімей розв'язків вихідних рівнянь або складається з ліївських розв'язків, або породжена з фіксованого розв'язку дією групи ліївських симетрій.

Водночас, ці твердження зовсім не означають, що оператори редукції не є корисними для побудови точних розв'язків рівнянь з класу (6.1) [33, 127, 231].

Відомими з цих тверджень були лише друге та, частково (щодо МАІ), третє і лише для лінійного рівняння теплопровідності [134] та деякого класу лінійних рівнянь переносу [33, 127], а також друге для випадку сингулярних операторів редукції [291, 292]. Четверте твердження є принципово новим.

У випадку сингулярних операторів редукції всі ці твердження можна поширити на загальні $(1 + 1)$-вимірні еволюційні рівняння. Можна також розглянути узагальнені оператори редукції рівнянь з класу (6.1), коефіцієнти яких залежать від похідних невідомої функції.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [159, 162, 224, 228, 231, 236, 241].

РОЗДІЛ 7

Суміжні проблеми теорії алгебр Лі

У цьому розділі розглянуто суміжні проблеми теорії алгебр Лі над дійсним або комплексним полем $\mathbb{F}$. У підрозділі 7.1 за допомогою оригінального алгоритму, що залучає метод рухомих реперів Картана, пораховано узагальнені оператори Казіміра серій розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких ізоморфні алгебрі строго верхньотрикутних матриць. Розглянуті серії включають алгебри з одним нільнезалежним елементом та алгебри строго верхньотрикутних матриць, нестрого верхньотрикутних матриць, спеціальних верхньотрикутних матриць. У підрозділі 7.2 наведено простий необхідний критерій для перевірки нееквівалентності реалізацій алгебр Лі. Низку нових необхідних критеріїв контракцій алгебр Лі запропоновано у підрозділі 7.3, в якому також вивчено багатопараметричні і повторні контракції.

7.1. Інваріанти трикутних алгебр Лі

7.1.1. Означення узагальнених операторів Казіміра. Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ розмірності $\dim\mathfrak{g} = n < \infty$ і відповідну зв'язану групу Лі G. Нехай $\mathfrak{g}^*$ — дуальний простір до $\mathfrak{g}$. Відображення $\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, визначене для кожного $g \in G$ співвідношенням $\langle \mathrm{Ad}^*_g x, u\rangle = \langle x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u\rangle$ $\forall x \in \mathfrak{g}^*$ і $\forall u \in \mathfrak{g}$, називають *коприєднаним зображенням* групи Лі G. Тут $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ — звичайне приєднане зображення групи G на $\mathfrak{g}$, а образ Ad_G групи G при Ad — група внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ алгебри $\mathfrak{g}$. Образ Ad^*_G групи G при Ad^* є підгрупою групи $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$.

Рангом коприєднаного зображення $\operatorname{rank}\mathrm{Ad}^*_G$ групи G (і алгебри $\mathfrak{g}$) називають максимальну розмірність орбіт групи Ad^*_G. Це базисно незалежна характеристика алгебри $\mathfrak{g}$. Орбіти такої розмірності називають регулярними.

Функцію $F \in C^\infty(\Omega)$, де Ω — деяка область у $\mathfrak{g}^*$, називають *інваріантом* групи Ad^*_G (глобальним на Ω), якщо $F(\mathrm{Ad}^*_g x) = F(x)$ для всіх $g \in G$ і $x \in \Omega$ таких, що $\mathrm{Ad}^*_g x \in \Omega$. Множину інваріантів групи Ad^*_G на Ω позначимо через $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$, не вказуючи явно область. Нехай надалі Ω — окіл точки з регулярної орбіти. Його завжди можна вибрати таким чином, щоб група Ad^*_G діяла на ньому регулярно. Тоді максимальна кількість $N_\mathfrak{g}$ функціонально незалежних інваріантів у $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ співпадає з корозмірністю регулярних орбіт групи Ad^*_G, тобто $N_\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{g} - \operatorname{rank}\mathrm{Ad}^*_G$.

Щоб обчислити інваріанти явно, в алгебрі $\mathfrak{g}$ необхідно зафіксувати базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Це веде до фіксації дуального базису $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ у дуальному просторі $\mathfrak{g}^*$ і ототожнення $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ і Ad^*_G з відповідними матричними групами. Базисні елементи $e_1, \dots, e_n$ задовольняють комутаційні відношення $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де c_{ij}^k — компоненти тензора структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}$ у базисі $\mathcal{E}$. Нехай $x \to \check{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — координати у просторі $\mathfrak{g}^*$, асоційовані з $\mathcal{E}^*$.

Добре відомо, що існує бієкція між елементами центру універсальної обгортуючої (*операторами Казіміра*) і поліноміальними інваріантами алгебри $\mathfrak{g}$ (див., наприклад, [52]). Таку бієкцію встановлює, зокрема, оператор симетризації Sym, який діє на одночлени за формулою

$$\mathrm{Sym}(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} e_{i_{\sigma_1}} \cdots e_{i_{\sigma_r}},$$

де $i_1, \dots, i_r$ приймають значення від 1 до n, $r \in \mathbb{N}$, S_r позначає групу перестановок r елементів. Симетризацію також можна коректно визначити для раціональних інваріантів [52], а її коректність для інших інваріантів (якщо в $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ не існує функціонального базису з раціональних інваріантів) вимагає додаткового дослідження для кожного конкретної алгебри, оскільки загальних результатів щодо цього поки не існує. Симетризовані елементи з $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ природно назвати інваріантами або узагальненими операторами Казіміра алгебри $\mathfrak{g}$. Множина функціонально незалежних інваріантів $F^l(x_1,\dots,x_n)$, $l=\overline{1,N_\mathfrak{g}}$, утворює *функціональний базис* (*фундаментальний інваріант*) множини $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$, тобто будь-який інваріант $F(x_1,\dots,x_n)$ можна єдиним чином зобразити як функцію від незалежних інваріантів $F^l(x_1,\dots,x_n)$, $l=\overline{1,N_\mathfrak{g}}$. Відповідну множину $\mathrm{Sym}\,F^l(e_1,\dots,e_n)$, $l=\overline{1,N_\mathfrak{g}}$, називають базисом множини інваріантів $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ алгебри $\mathfrak{g}$.

7.1.2. Алгоритм. Нагадаємо деякі факти з [117, 118] і адаптуємо їх до часткового випадку коприєднаної дії групи G на простір $\mathfrak{g}^*$. Нехай $\mathcal{G}=\mathrm{Ad}^*_G\times\mathfrak{g}^*$ — тривіальне ліве головне Ad^*_G-розшарування над $\mathfrak{g}^*$. Правою регуляризацією $\widehat{R}$ коприєднаної дії групи G на $\mathfrak{g}^*$ є діагональна дія групи Ad^*_G на $\mathcal{G}=\mathrm{Ad}^*_G\times\mathfrak{g}^*$, що задається відображенням $\widehat{R}_g(\mathrm{Ad}^*_h,x)=(\mathrm{Ad}^*_h\cdot\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}},\mathrm{Ad}^*_gx)$, $g,h\in G$, $x\in\mathfrak{g}^*$, і є регулярною та вільною. Назвемо $\widehat{R}_g$ *піднятою коприєднаною дією* групи G. Вона проектується на коприєднану дію на $\mathfrak{g}^*$ через Ad^*_G-еквіваріантну проекцію $\pi_{\mathfrak{g}^*}\colon\mathcal{G}\to\mathfrak{g}^*$. Будь-який *піднятий інваріант* групи Ad^*_G — це (локально визначена) гладка функція з $\mathcal{G}$ на деякий многовид, інваріантна відносно піднятої коприєднаної дії групи G. Функція $\mathcal{I}\colon\mathcal{G}\to\mathfrak{g}^*$, задана формулою $\mathcal{I}=\mathcal{I}(\mathrm{Ad}^*_g,x)=\mathrm{Ad}^*_gx$, є *фундаментальним піднятим інваріантом* групи Ad^*_G, тобто $\mathcal{I}$ — піднятий інваріант, і будь-який піднятий інваріант єдиним чином можна локально задати як функцію від $\mathcal{I}$. Використовуючи довільну функцію $F(x)$ на $\mathfrak{g}^*$, можна утворити піднятий інваріант $F\circ\mathcal{I}$ групи Ad^*_G заміною x на $\mathcal{I}=\mathrm{Ad}^*_gx$ у виразі для F. Звичайні інваріанти є частковими випадками піднятих інваріантів, що співпадають зі своїми композиціями з стандартною проекцією $\pi_{\mathfrak{g}^*}$. Отже, звичайні інваріанти є частковими функціональними комбінаціями піднятих, які виявляються незалежними від параметрів групи Ad^*_G.

Алгебраїчний алгоритм для знаходження інваріантів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ стисло сформульовано у наступних чотирьох кроках.

1. *Побудова загальної матриці $B(\theta)$ групи Ad^*_G.* $B(\theta)$ — матриця внутрішнього автоморфізму алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у вибраному базисі e_1, …, e_n, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ — повний набір параметрів (координат) групи $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ і $r = \dim \mathrm{Ad}^*_G = \dim \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = n - \dim \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$, де $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ — центр алгебри $\mathfrak{g}$.

2. *Зображення фундаментального піднятого інваріанту.* Фундаментальний піднятий інваріант $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ групи Ad^*_G у вибраних координатах $(\theta, \check{x})$ в $\mathrm{Ad}^*_G \times \mathfrak{g}^*$ має явний вигляд $\mathcal{I} = \check{x}B(\theta)$.

3. *Виключення параметрів через нормалізацію.* Виберемо максимально можливу кількість ρ піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}$, …, $\mathcal{I}_{j_\rho}$, сталі c_1, …, c_ρ і параметри групи θ_{k_1}, …, θ_{k_ρ} такі, що рівняння $\mathcal{I}_{j_1} = c_1$, …, $\mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ розв'язні відносно $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$. Підстановка знайдених значень $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$ в інші підняті інваріанти $\mathcal{I}_j$ дає $N_\mathfrak{g} = n - \rho$ виразів $F^l(\check{x})$ без θ.

4. *Симетризація.* Функції $F^l(x_1, \dots, x_n)$ обов'язково утворюють базис множини $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$. Тоді $\mathrm{Sym}\, F^l(e_1, \dots, e_n)$ — базис множини $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$.

Твердження 7.1. *Нехай $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ — фундаментальний піднятий інваріант і для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}$, …, $\mathcal{I}_{j_\rho}$ та деяких сталих c_1, …, c_ρ система $\mathcal{I}_{j_1} = c_1$, …, $\mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ розв'язна відносно параметрів θ_{k_1}, …, θ_{k_ρ}, а підстановка знайдених значень цих параметрів у інші підняті інваріанти приводить до $m = n - \rho$ виразів $\hat{\mathcal{I}}_1, \dots, \hat{\mathcal{I}}_m$, залежних тільки від $\check{x}$. Тоді $\rho = \mathrm{rank}\, \mathrm{Ad}^*_G$, $m = N_\mathfrak{g}$ і $\hat{\mathcal{I}}_1$, …, $\hat{\mathcal{I}}_m$ утворюють базис множини $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$.*

Існуючі приклади обчислення інваріантів алгебр Лі показують, що версія алгебраїчного методу, яка залучає твердження 7.1, є найдієвішою.

Зазвичай для першого кроку підходять другі канонічні координати на $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, хоча іноді перші канонічні координати є більш прийнятним вибором. На відміну від загальної ситуації, для трикутних алгебр Лі використаємо спеціальні координати для їх груп внутрішніх автоморфізмів, які природно узгоджені з канонічними матричними зображеннями відповідних груп Лі і зі спеціальною подвійною нумерацією базисних елементів. Це приводить до прояснення і суттєвого спрощення всіх обчислень. Зокрема, алгебраїчні системи, які необхідно розв'язувати при нормалізації, стають лінійними відносно невідомих.

7.1.3. Трикутна алгебра Лі з одним ніль-незалежним діагональним елементом. Розглянемо розв'язну алгебру Лі $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ над полем $\mathbb{F}$ з нільрадикалом $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$, ізоморфним алгебрі строго верхньотрикутних матриць $\mathfrak{t}_0(n)$, і одним ніль-незалежним елементом f, який діє на елементи нільрадикалу так, як діагональна матриця $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ діє на строго верхньотрикутні матриці, причому вважаємо, що матриця Γ непропорційна одиничній матриці, тобто набір $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ має різні елементи. Цей набір визначено з точністю до ненульового множника і однорідного зсуву. Іншими словами, алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ і $\mathfrak{t}_{\gamma'}(n)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$ такі, що $\gamma'_i = \lambda\gamma_i + \mu$, $i = \overline{1, n}$. Набори γ і γ' вважаємо еквівалентними. З точністю до введеної еквівалентності на параметри алгебри можна накласти додаткову умову $\mathrm{Tr}\,\Gamma = \sum_i \gamma_i = 0$. Отже, алгебра $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ природно вкладена в $\mathfrak{st}(n)$ як ідеал, при цьому $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ ототожнено з $\mathfrak{t}_0(n)$ і f — з Γ. Виберемо як канонічний базис у $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ об'єднання канонічного базису в $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ і одноелементної множини $\{f\}$. Елементи з базису в $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ занумеруємо двома індексами. Так, базисні елементи $e_{ij} \sim E^n_{ij}$, $i < j$, і $f \sim \sum_i \gamma_i E^n_{ii}$ задовольняють комутаційні співвідношення $[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{i'j} e_{ij'} - \delta_{ij'} e_{i'j}$, $[f, e_{ij}] = (\gamma_i - \gamma_j) e_{ij}$. Тут і надалі δ_{ij} — символ Кронекера, E^n_{ij} (для фіксованих значень i і j) позначає $n \times n$ матрицю $(\delta_{ii'}\delta_{jj'})$ з i' і j', що пробігають рядки і стовпчики відповідно, тобто $n \times n$ матрицю з одиницею на перетині i-го рядка і j-го стовпчика і нулями всюди інде, $E^n = \mathrm{diag}(1, \dots, 1)$ — $n \times n$ одинична матриця. $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ можна розглядати як алгебру Лі підгрупи $T_\gamma(n) = \{B \in T(n) \mid \exists\, \varepsilon \in \mathbb{F}\colon b_{ii} = e^{\gamma_i \varepsilon}\}$ групи Лі $T(n)$ неособливих верхньотрикутних $n \times n$ матриць.

Нехай e^*_{ji}, x_{ji} і y_{ij} позначають базисний елемент у спряженому просторі $\mathfrak{t}^*_\gamma(n)$ та координатні функції в $\mathfrak{t}^*_\gamma(n)$ і $\mathfrak{t}_\gamma(n)$, які відповідають базисному елементу e_{ij}, $i<j$. Зокрема, $\langle e^*_{j'i'}, e_{ij}\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}$. Зворотний порядок нижніх індексів спряжених елементів і координат спрощує матричне зображення піднятих інваріантів. f^*, x_0 і y_0 позначають подібні об'єкти для базисного елемента f. Додатково покладемо $y_{ii}=\gamma_i y_0$ і тоді поповнимо множини з x_{ji} і y_{ij} нулями до матриць X і Y. Тому X — строго нижньотрикутна, а Y — нестрого верхньотрикутна матриці. Аналогічну "матрицю" з істотними елементами e_{ij}, $i<j$, позначимо через $\mathcal{E}$.

Лема 7.1. *Повну множину функціонально незалежних піднятих інваріантів групи $\mathrm{Ad}^*_{T_\gamma(n)}$ вичерпують вирази*

$$\mathcal{I}_{ij} = \sum_{i\leqslant i'<j'\leqslant j} b_{ii'}\widehat{b}_{j'j}x_{i'j'}, \quad j<i, \qquad \mathcal{I}_0 = x_0 + \sum_{j<i}\sum_{j\leqslant l\leqslant i} \gamma_l b_{li}\widehat{b}_{jl}x_{ij},$$

де $B=(b_{ij})$ — довільна матриця з $T_\gamma(n)$, а $(\widehat{b}_{ij}) = B^{-1}$.

Доведення. Приєднана дія матриці $B\in T_\gamma(n)$ на матрицю Y визначається як $\mathrm{Ad}_B Y = BYB^{-1}$, тобто

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_B&\Bigl(y_0 f + \sum_{i<j} y_{ij}e_{ij}\Bigr) =\\ &= y_0 f + y_0\sum_{i<j}\sum_{i\leqslant i'\leqslant j} b_{ii'}\gamma_{i'}\widehat{b}_{i'j}e_{ij} + \sum_{i\leqslant i'<j'\leqslant j} b_{ii'}y_{i'j'}\widehat{b}_{j'j}e_{ij}.\end{aligned}$$

Після заміни $e_{ij}\to x_{ji}$, $y_{ij}\to e^*_{ji}$, $f\to x_0$, $y_0\to f^*$, $b_{ij}\leftrightarrow\widehat{b}_{ij}$ в останній рівності отримаємо зображення для коприєднаної дії матриці B

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*_B&\Bigl(x_0 f^* + \sum_{i<j} x_{ji}e^*_{ji}\Bigr) =\\ &= \Bigl(x_0 + \sum_{i<j}\sum_{i\leqslant i'\leqslant j} b_{i'j}x_{ji}\widehat{b}_{ii'}\gamma_{i'}\Bigr)f^* + \sum_{i'<j'}(BXB^{-1})_{j'i'}e^*_{j'i'}.\end{aligned}$$

Отже, $\mathcal{I}_0$ і елементи $\mathcal{I}_{ij}$, $j<i$, матриці $\mathcal{I}=BXB^{-1}$, де $B\in T_\gamma(n)$, утворюють фундаментальний піднятий інваріант групи $\mathrm{Ad}^*_{T_\gamma(n)}$. $\square$

Зауваження 7.1. Повну множину параметрів отриманого зображення піднятих інваріантів утворено b_{ij}, $j < i$, і ε. Центр групи $T_\gamma(n)$ ненульовий тільки, якщо $\gamma_1 = \gamma_n$, а саме тоді $\mathbb{Z}(T_\gamma(n)) = \{E^n + b_{1n}E^n_{1n},\ b_{1n} \in \mathbb{F}\}$. У цьому випадку група внутрішніх автоморфізмів алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ ізоморфна фактор-групі $T_\gamma(n)/\mathbb{Z}(T_\gamma(n))$, тому її розмірність дорівнює $\frac{1}{2}n(n-1)$. Параметр b_{1n} у зображенні піднятих інваріантів тоді є несуттєвим. Інакше група внутрішніх автоморфізмів алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ ізоморфна групі $T_\gamma(n)$, і всі параметри в побудованих піднятих інваріантах суттєві.

Нижче $A^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, де $i_1 \leqslant i_2$, $j_1 \leqslant j_2$, позначає підматрицю $(a_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$ матриці $A = (a_{ij})$. $|A| = \det A$. $\varkappa = n - k + 1$.

Лема 7.2. *Нехай* $1 < k < n$. *Якщо* $|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}| \neq 0$, *то для кожного* $\beta \in \mathbb{F}$

$$\beta - X^{i,i}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{j,j} = \frac{(-1)^{k+1}}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k-1} & \beta \\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{j,j}\end{vmatrix},$$

$$\left(x_{\varkappa j} - X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{j,j}\right)\left(x_{jk} - X^{j,j}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k}\right) =$$

$$= \frac{1}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\begin{vmatrix} X^{j,j}_{1,k} & \beta \\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{j,j}\end{vmatrix} + \frac{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|^2}\begin{vmatrix} X^{j,j}_{1,k-1} & \beta \\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{j,j}\end{vmatrix}.$$

Зокрема, $x_{\varkappa k} - X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k} = (-1)^{k+1}|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|^{-1}|X^{\varkappa,n}_{1,k}|$.

Теорема 7.1. *Базис у* $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{T_\gamma(n)})$ *утворено виразами*

1) $|X^{\varkappa,n}_{1,k}|, \quad k = 1, \dots, \left[\dfrac{n}{2}\right],$

$$x_0 + \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{k+1}}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}(\gamma_k - \gamma_{k+1}) \sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k} & 0 \\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix},$$

якщо $\gamma_k = \gamma_\varkappa$ *для всіх* $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$;

2) $|X^{\varkappa,n}_{1,k}|, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1,$

$$|X^{\varkappa_0,n}_{1,k_0}|^{\alpha_k}|X^{\varkappa,n}_{1,k}|, \quad k = k_0 + 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right], \quad \alpha_k := -\sum_{i=k_0}^{k}\frac{\gamma_{n-i+1} - \gamma_i}{\gamma_{n-k_0+1} - \gamma_{k_0}}.$$

інакше. Тут k_0 — *мінімальне значення* k, *для якого* $\gamma_k \neq \gamma_\varkappa$ *і*

Доведення. При нормалізації накладемо такі обмеження на підняті інваріанти: $\mathcal{I}_{ij}=0$, якщо $j<i$, $(i,j)\neq(n-j'+1,j')$, $j'=\overline{1,[n/2]}$, тобто не фіксуємо тільки значення елементів матриці $\mathcal{I}$, які розташовані на побічній діагоналі вище основної. Інші істотні елементи в $\mathcal{I}$ покладемо рівними 0. Рішення про те, що робити з піднятими інваріантами $\mathcal{I}_0$ і $\mathcal{I}_{\varkappa k}$, $k=\overline{1,[n/2]}$, приймемо пізніше, оскільки виявляється, що кількість і вигляд умов нормалізації залежить від значень γ. Як показано нижче, в усіх випадках можна забезпечити остаточну нормалізацію, що задовольняє умови твердження 7.1.

З зображення $\mathcal{I}=BXB^{-1}$ завдяки трикутній структурі матриць B і X випливає, що $BX=\mathcal{I}B$. Ця матрична рівність також істотна тільки для матричних елементів, що лежать під основною діагоналлю, тобто

$$e^{\gamma_i\varepsilon}x_{ij}+\sum_{i<i'}b_{ii'}x_{i'j}=\mathcal{I}_{ij}e^{\gamma_j\varepsilon}+\sum_{j'<j}\mathcal{I}_{ij'}b_{j'j},\quad j<i.$$

Для зручності останню систему розбито за вибраних умов нормалізації на чотири множини підсистем

$$S_1^k\colon\ e^{\gamma_\varkappa\varepsilon}x_{\varkappa j}+\sum_{i'>\varkappa}b_{\varkappa i'}x_{i'j}=0,\ i=\varkappa,\ j<k,\ k=2,\dots,\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$S_2^k\colon\ e^{\gamma_\varkappa\varepsilon}x_{\varkappa k}+\sum_{i'>\varkappa}b_{\varkappa i'}x_{i'k}=\mathcal{I}_{\varkappa k}e^{\gamma_k\varepsilon},\ i=\varkappa,\ j=k,\ k=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right],$$

$$S_3^k\colon\ e^{\gamma_\varkappa\varepsilon}x_{\varkappa j}+\sum_{i'>\varkappa}b_{\varkappa i'}x_{i'j}=\mathcal{I}_{\varkappa k}b_{kj},\ i=\varkappa,\ k<j<\varkappa,\ k=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]-1,$$

$$S_4^k\colon\ e^{\gamma_k\varepsilon}x_{kj}+\sum_{i'>k}b_{ki'}x_{i'j}=0,\ i=k,\ j<k,\ k=2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

Розв'язуємо їх одну за іншою. Підсистема S_2^1 складається з одного рівняння $\mathcal{I}_{n1}=x_{n1}e^{(\gamma_n-\gamma_1)\varepsilon}$. Для будь-якого фіксованого $k\in\{2,\dots,[n/2]\}$ підсистема $S_1^k\cup S_2^k$ — добре визначена система лінійних рівнянь відносно $b_{\varkappa i'}$, $i'>\varkappa$, і $\mathcal{I}_{\varkappa k}$. Аналогічно, підсистема S_1^k для $k=\varkappa=[(n+1)/2]$ у випадку непарного n — добре визначена система лінійних рівнянь відносно $b_{ki'}$, $i' > k$. Розв'язки цих підсистем є виразами від $x_{i'j}$, $i' \geqslant \varkappa$, $j < k$, і ε:

$$\mathcal{I}_{\varkappa k} = (-1)^{k+1} \frac{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|} e^{(\gamma_\varkappa - \gamma_k)\varepsilon}, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right],$$
$$B^{\varkappa,\varkappa}_{\varkappa+1,n} = -e^{\gamma_\varkappa \varepsilon} X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1} (X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Після підстановки виразів для $\mathcal{I}_{\varkappa k}$ і $b_{\varkappa i'}$, $i' > \varkappa$, через ε і x в S^k_3, ця система тривіально розв'язується відносно b_{kj} як незв'язна система лінійних рівнянь:

$$b_{1j} = e^{\gamma_1 \varepsilon} \frac{x_{nj}}{x_{n1}}, \quad 1 < j < n,$$
$$b_{kj} = \frac{e^{\gamma_k \varepsilon}}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|} \begin{vmatrix} X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1} & x_{\varkappa j} \\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{j,j} \end{vmatrix}, \quad k < j < \varkappa, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1.$$

Наступна підстановка порахованих виразів для b_{kj} в S^k_4 для будь-якого фіксованого допустимого k приводить до добре визначеної системи лінійних рівнянь, наприклад, відносно $b_{ki'}$, $i' > \varkappa$. Її розв'язок виражається через x, $b_{k\varkappa}$ і ε:

$$B^{k,k}_{\varkappa+1,n} = -\frac{e^{\gamma_k \varepsilon}}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|} \sum_{k \leqslant j < \varkappa} \begin{vmatrix} X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1} & x_{\varkappa j} \\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{j,j} \end{vmatrix} X^{j,j}_{1,k-1} (X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1} -$$
$$- b_{k\varkappa} X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1} (X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}, \qquad k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Вираз для $\mathcal{I}_0$ перепишемо, враховуючи вже накладені нормалізаційні зв'язки (зауважимо, що $\varkappa = [(n+1)/2] + 1$, якщо $k = [n/2]$):

$$\mathcal{I}_0 = x_0 + \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \gamma_k \widehat{b}_{kk} \Bigg(\sum_{k < i \leqslant \varkappa} + \sum_{i > \varkappa} \Bigg) b_{ki} x_{ik} + \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \gamma_\varkappa \widehat{b}_{\varkappa\varkappa} \sum_{i > \varkappa} b_{\varkappa i} x_{i\varkappa} -$$
$$- \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \gamma_\varkappa \widehat{b}_{\varkappa\varkappa} \mathcal{I}_{\varkappa k} b_{k\varkappa},$$

а потім підставимо у нього вже знайдені вирази для b і $I_{\varkappa k}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 = x_0 &+ (\gamma_1-\gamma_n)e^{-\gamma_1\varepsilon}b_{1n}x_{n1} + \\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\gamma_k-\gamma_\varkappa)e^{-\gamma_k\varepsilon}b_{k\varkappa}(-1)^{k+1}\frac{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}+\\
&-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_k X^{k,k}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k}-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\gamma_\varkappa X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{\varkappa,\varkappa}+\\
&+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}\gamma_k}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k} & 0\\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix}+\\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}\gamma_k}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k-1} & 0\\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{i,i}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Якщо $\gamma_k=\gamma_\varkappa$ для всіх $k\in\{1,\dots,[n/2]\}$, то $\mathcal{I}_{\varkappa k}$, $k=\overline{1,[n/2]}$, і $\mathcal{I}_0$ не залежать від параметрів b і ε, тобто це інваріанти. Як простіший базис візьмемо $\hat{\mathcal{I}}_0=\mathcal{I}_0$, а також $\hat{\mathcal{I}}_1=\mathcal{I}_{n1}$ і комбінації $\hat{\mathcal{I}}_k=(-1)^{k+1}\mathcal{I}_{\varkappa k}\hat{\mathcal{I}}_{k-1}$, $k=\overline{2,[n/2]}$, що приводить до першого набору інваріантів з твердження теореми. Зауважимо тільки, що за припущень на γ, наведена вище формула для $\mathcal{I}_0$ перетворюється в

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 = x_0 &+ \left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\frac{(-1)^{k+1}\gamma_k}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k} & 0\\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix}+\\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}\gamma_k}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\sum_{k\leqslant i\leqslant\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k-1} & 0\\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{i,i}\end{vmatrix}-\\
&-\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\gamma_\varkappa X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{\varkappa,\varkappa}.
\end{aligned}
$$

Це приводить до виразу для $\mathcal{I}_0$ з твердження після зсуву індексу k у третій сумі на -1 і подальшої перестановки і перекомбінування членів.

Інакше, якщо існує $k_0 \in \{1, \dots, [n/2]\}$ таке, що $\gamma_{k_0} \neq \gamma_{\varkappa_0}$, то $\mathcal{I}_0$ обов'язково залежить від параметра $b_{k_0\varkappa_0}$, який є в виразах для $\mathcal{I}_{\varkappa k}$, $k = \overline{1, [n/2]}$, при вже накладених умовах нормалізації. Тому необхідно накласти додаткову умову нормалізації на $\mathcal{I}_0$, наприклад, $\mathcal{I}_0 = 0$. Це дає вираз для $b_{k_0\varkappa_0}$ через x, інші $b_{k\varkappa}$ і ε, точний вигляд якого не є суттєвим. Припустимо, що k_0 є мінімальним k, для якого $\gamma_k \neq \gamma_\varkappa$. Візьмемо $\hat{\mathcal{I}}_1 = \mathcal{I}_{n1}$ і комбінації

$$\hat{\mathcal{I}}_k = (-1)^{k+1}\mathcal{I}_{\varkappa k}\hat{\mathcal{I}}_{k-1}, \quad k = \overline{2, [n/2]}.$$

Оскільки $\hat{\mathcal{I}}_{k_0}$ явно залежить від ε, накладемо ще одну умову нормалізації $\hat{\mathcal{I}}_{k_0} = 1$ і, використовуючи її, виключимо параметр ε з інших $\hat{\mathcal{I}}$. У результаті побудуємо другий набір інваріантів з твердження теореми.

В обох випадках усі параметри b виключено з незв'язаних піднятих інваріантів, а частину параметрів b виражено через x і інші b. Вирази в отриманих наборах інваріантів функціонально незалежні. Не виведено жодних рівнянь тільки на x. Згідно твердження 7.1 це означає, що вибір зв'язків для нормалізації залежно від значень γ коректний. Ось чому кількість знайдених функціонально незалежних інваріантів максимальна, тобто вони утворюють базис у $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{T_\gamma(n)})$. $\square$

Наслідок 7.1. $|X^{\varkappa,n}_{1,k}|$, $k = \overline{1, [n/2]}$, *— функціонально незалежні відносні інваріанти для* $\mathrm{Ad}^*_{T_\gamma(n)}$ *для будь-якого допустимого значення* γ.

Нагадаємо [214, означення 3.30], що коли група G діє на множині M, функцію $F\colon M \to \mathbb{R}$ називають *відносним інваріантом* зображення групи G, якщо $F(g \cdot x) = \mu(g, x)F(x)$ для всіх $g \in G$, $x \in M$ і деякого множника $\mu\colon G \times M \to \mathbb{R}$ цього зображення.

Теорема 7.2. *Базис у* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ *складається з виразів*

1) $|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|$, $k = 1, \dots, \left[\dfrac{n}{2}\right]$,

$$f + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}(\gamma_k - \gamma_{k+1}) \sum_{i=k+1}^{n-k} \begin{vmatrix} \mathcal{E}^{1,k}_{i,i} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n} \\ 0 & \mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n} \end{vmatrix},$$

якщо $\gamma_k = \gamma_\varkappa$ *для всіх* $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$*; тут і надалі* $\varkappa = n - k + 1$, $\mathcal{E}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, $i_1 \leqslant i_2$, $j_1 \leqslant j_2$, *позначає матрицю* $(e_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$*;*

$$2)\ |\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|,\ k = 1, \dots, k_0 - 1, \quad |\mathcal{E}^{1,k_0}_{\varkappa_0,n}|^{\alpha_k} |\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|,\ k = k_0 + 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

інакше. Тут k_0 *— мінімальне значення* k*, для якого* $\gamma_k \neq \gamma_\varkappa$ *і*

$$\alpha_k = -\sum_{i=k_0}^{k} \frac{\gamma_{n-i+1} - \gamma_i}{\gamma_{n-k_0+1} - \gamma_{k_0}}.$$

Доведення. Розглянемо спочатку інваріанти з теореми 7.1, які не містять змінної x_0, що відповідає ніль-незалежному елементу f. Розвиваючи визначники в цих інваріантах, отримаємо вирази від x, що містять тільки координатні функції, для яких асоційовані базисні елементи комутують один з іншим. Отже, процедура симетризації для них тривіальна. Оскільки $x_{ij} \sim e_{ji}$, $j < i$, тут і надалі необхідно транспонувати матриці в отриманих виразах інваріантів для поліпшення зображення. Остаточно побудуємо першу частину базису в $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ для випадку 1 твердження і повний базис у $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ у випадку 2.

Процедуру симетризації для інваріанта з x_0, представленого в теоремі 7.1, також можна вважати тривіальною. Щоб показати це, знову розвинемо всі визначники. Тільки одночлени визначників

$$\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k} & 0 \\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i} \end{vmatrix}, \quad k \in \{1, \dots, [n/2]\}, \quad i = k, \dots, \varkappa,$$

містять координатні функції, асоційовані з некомутуючими елементами базису алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$. Більш точно, кожен з одночленів включає дві такі координатні функції, а саме, $x_{ii'}$ і $x_{j'i}$ для деяких значень $i' \in \{1, \dots, k\}$ і $j' \in \{\varkappa, \dots, n\}$. Достатньо симетризувати тільки відповідні пари базисних елементів. У результаті, після симетризації і перестановки матриці отримаємо наступний вираз для інваріанту алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$, відповідного інваріанту з x_0 з теореми 7.1 (тут $\left|\mathcal{E}^{1,k;\hat{i}'}_{\varkappa,n;\hat{j}'}\right|$ позначає мінор матриці $\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}$, доповнюючий елемент $e_{i'j'}$):

$$f+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}(\gamma_k-\gamma_{k+1})\sum_{k<i<\varkappa}\sum_{i'=1}^{k}\sum_{j'=\varkappa}^{n}\frac{e_{i'i}e_{ij'}+e_{ij'}e_{i'i}}{2}(-1)^{i'j'}\big|\mathcal{E}^{1,k;\hat{i}'}_{\varkappa,n;\hat{j}'}\big|.$$

Оскільки $e_{i'i}e_{ij'}=e_{ij'}e_{i'i}+e_{i'j'}$, то

$$\sum_{i'=1}^{k}\sum_{j'=\varkappa}^{n}\frac{e_{i'i}e_{ij'}+e_{ij'}e_{i'i}}{2}(-1)^{i'j'}\big|\mathcal{E}^{1,k;\hat{i}'}_{\varkappa,n;\hat{j}'}\big|=\begin{vmatrix}\mathcal{E}^{1,k}_{i,i} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}\\ 0 & \mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}\end{vmatrix}\pm\frac{1}{2}|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|,$$

де потрібно взяти знак "+" ("−"), якщо елементи з $\mathcal{E}^{1,k}_{i,i}$ розміщено після елементів (перед елементами) з $\mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}$ в усіх релевантних одночленах. Отже, з точністю до сталого доданку виведемо вираз для останнього елементу базису у випадку 1 твердження. Його формально можна отримати з відповідного виразу з x заміною $x_{ij}\to e_{ji}$ і $x_0\to f$ і транспонуванням усіх матриць. Ось чому вважаємо, що процедура симетризації є тривіальною в описаному сенсі. Підкреслимо, що при використанні такого несиметризованого вигляду інваріантів, як і наведених у наслідку 7.4, зауваженні 7.5 і теоремі 7.6 (див. нижче) в усіх одночленах з $\mathcal{E}^{1,k}_{i,i}$ і $\mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}$ потрібно фіксувати однаковий порядок елементів. □

Наслідок 7.2. *Якщо $\gamma_k=\gamma_\varkappa$ для всіх $k\in\{1,\dots,[n/2]\}$, то* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ *має базис з операторів Казіміра. Інакше, алгебра $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ допускає раціональний базис інваріантів тоді і тільки тоді, коли $\alpha_k\in\mathbb{Q}$ для всіх $k\in\{k_0,\dots,[n/2]\}$, і допускає поліноміальний базис інваріантів тоді і тільки тоді, коли додатково $\alpha_k\geqslant 0$ для всіх $k\in\{k_0,\dots,[n/2]\}$. Тут k_0 — мінімальне значення k, для якого $\gamma_k\neq\gamma_\varkappa$.*

Зауваження 7.2. З теореми 7.2 випливає, що максимальна кількість $N_{\mathfrak{t}_\gamma(n)}$ функціонально незалежних інваріантів алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ дорівнює $[n/2]+1$, якщо $\gamma_k=\gamma_\varkappa$ для всіх $k\in\{1,\dots,[n/2]\}$ і $[n/2]-1$ — в інших випадках. Умову на розширення $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ можна переформулювати у термінах комутаторів: $[f,e_{k\varkappa}]=0$, $k=\overline{1,[n/2]}$.

7.1.4. Алгебра строго верхньотрикутних матриць. Нільпотентна алгебра Лі $\mathfrak{t}_0(n)$ строго верхньотрикутніх $n\times n$ матриць над полем $\mathbb{F}$ має розмірність $n(n-1)/2$ і є алгеброю Лі групи Лі $T_0(n)$ верхніх уніпонентних $n\times n$ матриць, тобто верхньотрикутних матриць з одиницями на діагоналі. Канонічний базис алгебри $\mathfrak{t}_0(n)$ складається з базисних елементів $e_{ij}\sim E^n_{ij}$, $i<j$, що задовольняють комутаційні співвідношення $[e_{ij},e_{i'j'}]=\delta_{i'j}e_{ij'}-\delta_{ij'}e_{i'j}$. Нехай e^*_{ji} і x_{ji} позначають базисні елементи і координатні функції у спряженому просторі $\mathfrak{t}^*_0(n)$, відповідні базисному елементу e_{ij}, $i<j$. Зокрема, $\langle e^*_{j'i'},e_{ij}\rangle=\delta_{ii'}\delta_{jj'}$. Поповнимо множину елементів x_{ji} до строго нижньотрикутної матриці X нулями.

Лема 7.3. *Повна множина незалежних піднятих інваріантів групи* $\mathrm{Ad}^*_{T_0(n)}$ *вичерпується виразами*

$$\mathcal{I}_{ij}=x_{ij}+\sum_{i<i'}b_{ii'}x_{i'j}+\sum_{j'<j}b_{j'j}x_{ij'}+\sum_{i<i',\,j'<j}b_{ii'}\widehat{b}_{j'j}x_{i'j'},\quad j<i,$$

де $B=(b_{ij})$ *— довільна матриця з* $T_0(n)$ *і* $(\widehat{b}_{ij})=B^{-1}$.

Зауваження 7.3. Центром групи $T_0(n)$ є $Z(T_0(n))=\{E^n+b_{1n}E^n_{1n},b_{1n}\in\in\mathbb{F}\}$. Внутрішня група автоморфізмів алгебри $\mathfrak{t}_0(n)$ ізоморфна фактор-групі $T_0(n)/Z(T_0(n))$, тому її розмірність дорівнює $\frac{1}{2}n(n–1)-1$. Параметр b_{1n} у наведеному вище зображенні піднятих інваріантів не є суттєвим.

Теорема 7.3. *Базис множини* $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{T_0(n)})$ *складається з многочленів*

$$|X^{\varkappa,n}_{1,k}|,\quad k=1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

Наслідок 7.3. *Базис у* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_0(n))$ *утворено операторами Казіміра*

$$|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|,\quad k=1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

7.1.5. Алгебра верхньотрикутних матриць. Розв'язна алгебра Лі $\mathfrak{t}(n)$ верхньотрикутних $n\times n$ матриць має розмірність $n(n+1)/2$ і є алгеброю Лі групи Лі $T(n)$ невироджених верхньотрикутних $n\times n$ матриць. Її базисні елементи $e_{ij}\sim E^n_{ij}$, $i\leqslant j$, задовольняють стандартні комутаційні співвідношення $[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{i'j} e_{ij'} - \delta_{ij'} e_{i'j}$. Центр алгебри $\mathfrak{t}(n)$ одновимірний і співпадає з лінійною оболонкою елемента $e_{11} + \cdots + e_{nn}$, що відповідає одиничній матриці E^n. Елементи e_{ij}, $i < j$, і $e_{11} + \cdots + e_{nn}$ утворюють базис нільрадикала алгебри $\mathfrak{t}(n)$, ізоморфного $\mathfrak{t}_0(n) \oplus \mathfrak{a}$, де $\mathfrak{a}$ — одновимірна (абелева) алгебра Лі. Нехай e^*_{ji} і x_{ji} позначають елементи базису і координатні функції в дуальному просторі $\mathfrak{t}^*(n)$, які відповідають базисним елементам e_{ij}, $i \leqslant j$. Так, $\langle e^*_{j'i'}, e_{ij} \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'}$. Поповнимо множину елементів x_{ji} до нижньотрикутної матриці X нулями.

Лема 7.4. *Фундаментальний піднятий інваріант групи* $\mathrm{Ad}^*_{T(n)}$ *складається з виразів* $\mathcal{I}_{ij} = \sum_{i \leqslant i', j' \leqslant j} b_{ii'} \widehat{b}_{j'j} x_{i'j'}$, $j \leqslant i$, *де* $B = (b_{ij})$ — *довільна матриця з* $T(n)$, $(\widehat{b}_{ij}) = B^{-1}$.

Зауваження 7.4. Центром групи $T(n)$ є $Z(T(n)) = \{\beta E^n \mid \beta \in \mathbb{F}/\{0\}\}$. При $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ група $T(n)$ зв'язана. У випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ зв'язану компоненту $T_+(n)$ одиниці в $T(n)$ утворено матрицями з $T(n)$ з додатними діагональними елементами: $T_+(n) \simeq T(n)/\mathbb{Z}_2^n$, де $\mathbb{Z}_2^n = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1\}$. Внутрішня група автоморфізмів $\mathrm{Int}(\mathfrak{t}(n))$ алгебри $\mathfrak{t}(n)$ ізоморфна фактор-групі $T(n)/Z(T(n))$ (або $T_+(n)/Z(T(n))$, якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$), а тому її розмірність дорівнює $n(n+1)/2 - 1$. Значення одного з діагональних елементів матриці B або їх однорідної комбінації у наведеному вище зображенні піднятих інваріантів можна вважати несуттєвими. З доведення теореми 7.4 очевидно, що у всіх випадках інваріантні множин коприєднаних зображень груп $\mathrm{Int}(\mathfrak{t}(n))$ і $T(n)$ співпадають.

Теорема 7.4. *Базис у* $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{T(n)})$ *утворено раціональними виразами*

$$\frac{1}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|} \sum_{j=k+1}^{\varkappa-1} \begin{vmatrix} X^{j,j}_{1,k} & x_{jj} \\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{j,j} \end{vmatrix}, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad \text{де} \quad |X^{n+1,n}_{1,0}| := 1.$$

Наслідок 7.4. $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ *має базис з раціональних інваріантів*

$$\hat{\mathcal{I}}_k = \frac{1}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|} \sum_{j=k+1}^{n-k} \begin{vmatrix} \mathcal{E}^{1,k}_{j,j} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n} \\ e_{jj} & \mathcal{E}^{j,j}_{\varkappa,n} \end{vmatrix}, \quad k = 0, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Зауваження 7.5. Інваріанти з наслідку 7.4 можна переписати у вигляді

$$\hat{\mathcal{I}}_k = \frac{1}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}\sum_{j=k+1}^{n-k}\begin{vmatrix}\mathcal{E}^{1,k}_{j,j} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}\\ 0 & \mathcal{E}^{j,j}_{\varkappa,n}\end{vmatrix} + (-1)^k\sum_{j=k+1}^{n-k} e_{jj}, \quad k=0,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Зокрема, $\hat{\mathcal{I}}_0 = \sum_j e_{jj}$.

7.1.6. Алгебра спеціальних верхньотрикутних матриць. Алгебра Лі $\mathfrak{st}(n)$ спеціальних верхньотрикутних $n\times n$ матриць природно вкладається у $\mathfrak{t}(n)$ як ідеал. $\dim\mathfrak{st}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)-1$. Більш того, $\mathfrak{t}(n) = \mathfrak{st}(n)\oplus Z(\mathfrak{t}(n))$, де $Z(\mathfrak{t}(n)) = \langle e_{11}+\dots+e_{nn}\rangle$ — центр у $\mathfrak{t}(n)$, який відповідає одновимірній абелевій алгебрі Лі матриць, пропорційних E^n. Завдяки цьому можна побудувати базис у $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$, використовуючи знайдений базис в $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$, оскільки для алгебра Лі $\mathfrak{g}$, розкладної у пряму суму алгебр Лі $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$, об'єднання базисів в $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}_1)$ і $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}_2)$ буде базисом у $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$. Базис в $\mathrm{Inv}(Z(\mathfrak{t}(n)))$ очевидно складається з одного елемента, наприклад, $e_{11}+\dots+e_{nn}$. Отже, кількість елементів у базисі $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$ дорівнює кількості елементів у базисі $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ мінус 1, тобто $[(n-1)/2]$. Щоб побудувати базис у $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$, достатньо переписати $[(n-1)/2]$ функціонально незалежних комбінацій елементи з базису в $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ через елементи з $\mathfrak{st}(n)$ і виключати центральний елемент з базису. Виберемо в $\mathfrak{st}(n)$ як підалгебри алгебри $\mathfrak{t}(n)$ такий базис:

$$e_{ij}, \quad i<j, \qquad f_k = \frac{n-k}{n}\sum_{i=1}^{k} e_{ii} - \frac{k}{n}\sum_{i=k+1}^{n} e_{ii}, \quad k=1,\dots,n-1.$$

Комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{st}(n)$ у вибраному базисі

$$[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{i'j}e_{ij'} - \delta_{ij'}e_{i'j}, \quad i<j, \quad i'<j',$$
$$[f_k, e_{ij}] = e_{ij}, \quad i\leqslant k\leqslant j, \qquad \text{інакше} \quad [f_k, e_{ij}] = 0, \quad i<j$$

співпадають з комутаційними відношеннями алгебри $L(n,n-1)$ з [272], тобто $L(n,n-1)$ ізоморфна $\mathfrak{st}(n)$. Об'єднуючи ці спостереження з лемою 6 з [272], отримаємо наступну теорему.

Теорема 7.5. *Алгебра Лі* $\mathfrak{st}(n)$ *має максимальну розмірність (рівну* $n(n+1)/2-1$*) серед розв'язних алгебр Лі з нільрадикалами, ізоморфними алгебрі* $\mathfrak{t}_0(n)$*. Це єдина алгебра з такою властивістю.*

Теорема 7.6. $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$ *має базис з раціональних інваріантів*

$$\check{\mathcal{I}}_k = \frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}\sum_{j=k+1}^{n-k}\begin{vmatrix}\mathcal{E}^{1,k}_{j,j} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}\\ 0 & \mathcal{E}^{j,j}_{\varkappa,n}\end{vmatrix} + f_k - f_{n-k}, \quad k=1,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Доведення. Згідно зауваження 7.5 маємо, що

$$\check{\mathcal{I}}_k = (-1)^{k+1}\hat{\mathcal{I}}_k + \frac{n-2k}{n}\hat{\mathcal{I}}_0, \quad k=1,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Ці комбінації елементів з базису в $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ функціонально незалежні і виражаються через елементи з $\mathfrak{st}(n)$. Їх кількість дорівнює $[(n-1)/2]$. Отже, вони утворюють базис $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$. $\square$

7.2. Критерій нееквівалентності реалізацій алгебр Лі

Розглянемо n-вимірну (дійсну або комплексну) алгебру Лі $\mathfrak{g}$ ($n \in \mathbb{N}$) і позначимо через $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ її групи внутрішніх і всіх автоморфізмів, приєднане зображення і алгебру диференціювань.

Означення 7.1. Мегаідеалом алгебри $\mathfrak{g}$ назвемо будь-який її підпростір, інваріантний відносно дії групи $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Оскільки $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ — нормальна підгрупа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, зрозуміло, що будь-який мегаідеал алгебри $\mathfrak{g}$ є підалгеброю і, більш того, ідеалом в алгебрі $\mathfrak{g}$. Але коли $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \neq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (наприклад, для нільпотентної алгебри), то існують ідеали в $\mathfrak{g}$, які не є мегаідеалами. Більш того, будь-який мегаідеал I алгебри $\mathfrak{g}$ є інваріантним відносно всіх диференціювань алгебри $\mathfrak{g}$: $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})I \subset I$, тобто це характеристичний ідеал. Характеристичні ідеали, які не є мегаідеалами, існують тільки за умови, що $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — незв'язна група Лі.

Обидві невласні підмножини алгебри $\mathfrak{g}$ (порожня множина і сама $\mathfrak{g}$) очевидно є мегаідеалами у $\mathfrak{g}$.

Лема 7.5. *1) Якщо I_1 і I_2 — мегаідеали в $\mathfrak{g}$, то I_1+I_2, $I_1\cap I_2$ і $[I_1,I_2]$ — також мегаідеали, тобто суми, перетини і добутки Лі мегаідеалів є також мегаідеалами.*

2) Якщо I' — мегаідеал у I, а I — мегаідеал у $\mathfrak{g}$, то I' — також мегаідеал алгебри $\mathfrak{g}$, тобто мегаідеали мегаідеалів — також мегаідеали.

3) Радикал і нільрадикал алгебри $\mathfrak{g}$ є її мегаідеалами.

Аналог першого твердження леми справедливий і для звичайних, і для характеристичних ідеалів, другого — тільки для характеристичних.

Наслідок 7.5. *Всі члени ряду похідних, спадаючого і зростаючого центральних рядів алгебри $\mathfrak{g}$ є мегаідеалами в $\mathfrak{g}$.*

Лема 7.5 дає багато інваріантних підпросторів всіх автоморфізмів у $\mathfrak{g}$, а тому дозволяє спростити обчислення групи $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Списки мегаідеалів і групи автоморфізмів три- та чотиривимірних алгебр Лі, а також інших їх характеристик наведено в [233].

Нехай M позначає m-вимірний гладкий многовид, $\mathrm{Vect}(M)$ — алгебру Лі гладких векторних полів на M з дужкою Лі векторних полів.

Означення 7.2. *Реалізацією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ векторними полями на M* називають гомоморфізм $R\colon \mathfrak{g}\to\mathrm{Vect}(M)$. Нехай G — підгрупа групи $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Реалізації $R_1\colon \mathfrak{g}\to\mathrm{Vect}(M_1)$ і $R_2\colon \mathfrak{g}\to\mathrm{Vect}(M_2)$ називають *G-еквівалентними*, якщо існують $\varphi\in G$ і дифеоморфізм f з M_1 у M_2 такі, що $R_2(v)=f_*\,R_1(\varphi(v))$ для всіх $v\in\mathfrak{g}$. Тут f_* — ізоморфізм з $\mathrm{Vect}(M_1)$ у $\mathrm{Vect}(M_2)$, індукований f. Якщо G містить тільки тотожне перетворення, реалізації називають *сильно еквівалентними*. Реалізації *слабо еквівалентні*, якщо $G=\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Обмеження реалізації R на підалгебру $\mathfrak{g}_0$ алгебри $\mathfrak{g}$ називають *реалізацією, індукованою* R, і позначають як $R|_{\mathfrak{g}_0}$.

У рамках локального підходу множину M можна розглядати як відкриту підмножину в $\mathbb{R}^m$, а всі дифеоморфізми вважати локальними.

Зазвичай реалізації алгебр Лі потрібно класифікувати відносно слабкої еквівалентності, хоча еквівалентність, яку використовують в теорії зображень, подібна до сильної. Сильна еквівалентність підходить краще для побудови реалізацій алгебри з використанням реалізацій їх підалгебр і перевіряється у простіший спосіб, ніж слабка еквівалентність. У деяких статтях не акцентують увагу на тому, яка еквівалентність повинна використовуватись, що призводить до помилок у класифікації.

Щоб прокласифікувати реалізації n-вимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у найбільш прямий спосіб, необхідно взяти n лінійно незалежних векторних полів загального вигляду $e_i = \xi^{ia}(x)\partial_a$, де $\partial_a = \partial/\partial x_a$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in M$, і вимагати, щоб вони задовольняли комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$. У результаті отримаємо систему ДРЧП першого порядку для коефіцієнтів ξ^{ia}, яку інтегруємо, розглядаючи всі можливі випадки. Для кожного випадку знайдений розв'язок перетворюємо до найпростішого вигляду, застосовуючи або локальний дифеоморфізми простору x і автоморфізми алгебри $\mathfrak{g}$ при використанні слабкої еквівалентності, або тільки локальні дифеоморфізми простору x у випадку сильної еквівалентності. Недоліком цього методу є необхідність розв'язувати складні нелінійні системи ДРЧП. Інший спосіб полягає у тому, щоб класифікувати послідовно реалізації набору вкладених підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, починаючи з одновимірної підалгебри і закінчуючи $\mathfrak{g}$. Саме цим методом знайдено повні набори нееквівалентних реалізацій три- та чотиривимірних алгебр Лі в [232]. В обох прямих методах необхідно доводити нееквівалентність отриманих реалізацій. Існує також алгебраїчний метод класифікації реалізацій, але його використання вимагає побудови оптимальної системи підалгебр для алгебр, що розглядаються.

Нехай V — підмножина в $\mathrm{Vect}(M)$ і

$$r(x) = \dim\langle V(x)\rangle, \quad x \in M.$$

Звідси $0 \le r(x) \le m$. Загальне значення $r(x)$ на M називають *рангом* підмножини V і позначають $\operatorname{rank} V$.

Лема 7.6. *Нехай B — підмножина, а R_1 і R_2 — реалізації алгебри $\mathfrak{g}$. Якщо реалізації $R_1(B)$ і $R_2(B)$ нееквівалентні відносно ендоморфізмів у $\mathrm{Vect}(M)$, породжених дифеоморфізмами на M, то реалізації R_1 і R_2 сильно нееквівалентні.*

Наслідок 7.6. *Якщо $\operatorname{rank} R_1(B) \neq \operatorname{rank} R_2(B)$ для деякої підмножини B алгебри $\mathfrak{g}$, то реалізації R_1 і R_2 сильно нееквівалентні.*

Лема 7.7. *Нехай I — мегаідеал, а R_1 і R_2 — реалізації алгебри $\mathfrak{g}$. Якщо $R_1|_I$ і $R_2|_I$ $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})|_I$-нееквівалентні, то R_1 і R_2 слабо нееквівалентні.*

Наслідок 7.7. *Якщо $R_1|_I$ і $R_2|_I$ — слабо нееквівалентні, то R_1 і R_2 також слабо нееквівалентні.*

Наслідок 7.8. *Якщо існує мегаідеал I алгебри $\mathfrak{g}$ такий, що $\operatorname{rank} R_1(I) \neq \operatorname{rank} R_2(I)$, то реалізації R_1 і R_2 слабо нееквівалентні.*

7.3. Контракції алгебр Лі

7.3.1. Означення контракцій та їх еквівалентності. Поняття контракції визначено для довільного поля у термінах замикання орбіт у многовиді алгебр Лі [91–93, 150, 184]. Нехай V — n-вимірний векторний простір над полем $\mathbb{F}$, $n < \infty$, і $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(\mathbb{F})$ позначає множину всіх можливих дужкок Лі на V. Ототожнимо $\mu \in \mathcal{L}_n$ з відповідною алгеброю Лі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. $\mathcal{L}_n$ — це алгебраїчна підмножина многовиду $V^* \otimes V^* \otimes V$ білінійних відображень з $V \times V$ у V. Дійсно, фіксування базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ у V встановлює взаємно-однозначну відповідність між $\mathcal{L}_n$ і множиною $\mathcal{C}_n = \{(c_{ij}^k) \in \mathbb{F}^{n^3} \mid c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0,\ c_{ij}^{i'} c_{i'k}^{k'} + c_{ki}^{i'} c_{i'j}^{k'} + c_{jk}^{i'} c_{i'i}^{k'} = 0\}$, визначену для будь-якої дужки Лі $\mu \in \mathcal{L}_n$ і будь-якого набору структурних сталих $(c_{ij}^k) \in \mathcal{C}_n$ формулою $\mu(e_i, e_j) = c_{ij}^k e_k$. $\mathcal{L}_n$ називають *многовидом n-вимірних алгебр Лі (над полем $\mathbb{F}$)* або, більш точно, многовидом можливих дужок Лі на V. Група $\mathrm{GL}(V)$ діє на $\mathcal{L}_n$ у наступний спосіб:

$$(U \cdot \mu)(x, y) = U^{-1}\big(\mu(Ux, Uy)\big) \quad \forall U \in \mathrm{GL}(V), \forall \mu \in \mathcal{L}_n, \forall x, y \in V.$$

Позначимо орбіту $\mu \in \mathcal{L}_n$ під дією $\mathrm{GL}(V)$ через $\mathcal{O}(\mu)$, а її замикання в топології Заріського в $\mathcal{L}_n$ — через $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$.

Означення 7.3. Алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ називають *контракцією* (або *виродженням*) алгебри Лі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$, якщо $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}$. Контракція *власна*, якщо $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)} \backslash \mathcal{O}(\mu)$, і *нетривіальна*, якщо $\mu_0 \not\equiv 0$.

У випадку $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ замикання орбіт у топології Заріського співпадає із замиканням орбіт в евклідовій топології і означення 7.3 зводиться до звичайного означення контракції, яке також підходить для випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Означення 7.4. Розглянемо параметризовану сім'ю алгебр Лі $\mathfrak{g}_\varepsilon = (V, \mu_\varepsilon)$, ізоморфних $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. Сім'ю нових дужок Лі μ_ε, $\varepsilon \in (0, 1]$, визначено через дужку Лі μ за допомогою неперервної функції $U\colon (0, 1] \to \mathrm{GL}(V)$ за правилом $\mu_\varepsilon(x, y) = U_\varepsilon{}^{-1}\mu(U_\varepsilon x, U_\varepsilon y)\ \forall\ x, y \in V$. Якщо для будь-яких $x, y \in V$ існує границя $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \mu_\varepsilon(x, y) =: \mu_0(x, y)$, то μ_0 є добре визначеною дужкою Лі. Алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ називають *однопараметричною неперервною контракцією* (або просто *контракцією*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Процедуру $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ переходу від $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ також називають *контракцією*.

Якщо базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ у V фіксований, то оператор U_ε визначає відповідна матриця $U_\varepsilon \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ і означення 7.4 можна переформулювати у термінах структурних сталих c_{ij}^k алгебри $\mathfrak{g}$ у цьому базисі. А саме, воно еквівалентне тому, що границя $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} (U_\varepsilon)_{i'}^i (U_\varepsilon)_{j'}^j (U_\varepsilon{}^{-1})_k^{k'} c_{ij}^k =: c_{0,i'j'}^{k'}$ існує для всіх i', j' і k', а тому $c_{0,i'j'}^{k'}$ — компоненти добре визначеного тензора структурних сталих алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. Параметр ε і матрицю-функцію U_ε називають *параметром* і *матрицею контракції* відповідно.

Контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ *тривіальна*, якщо $\mathfrak{g}_0$ абелева, і *невласна*, якщо $\mathfrak{g}_0$ ізоморфна $\mathfrak{g}$. Тривіальні і невласні контракції існують для будь-якої алгебри Лі. Як матриці таких контракцій можна завжди використати $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ і $U_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)$ відповідно.

Означення 7.5. Контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ і $\tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_0$ називають *(слабо) еквівалентними*, якщо алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ відповідно ізоморфні алгебрам $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{g}_0$.

Поняття послідовної контракції подібне до поняття неперервної контракції [258,285]. Розглянемо послідовність алгебр Лі $\mathfrak{g}_p = (V, \mu_p)$, $p \in \mathbb{N}$, ізоморфних $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. Послідовність нових дужок Лі $\{\mu_p, p \in \mathbb{N}\}$, визначають через дужку μ і послідовність $\{U_p, p \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{GL}(V)$ за правилом $\mu_p(x, y) = {U_p}^{-1}\mu(U_p x, U_p y)\ \forall\, x, y \in V$. Якщо для будь-яких $x, y \in V$ існує границя $\lim\limits_{p\to+0} \mu_p(x, y) =: \mu_0(x, y)$, то μ_0 — добре визначена дужка Лі. Алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ називають *послідовною контракцією* алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Будь-яка неперервна контракція з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ дає нескінченну сім'ю матричних послідовностей, асоційованих з послідовними контракціями з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$. Більш точно, якщо U_ε — матриця неперервної контракції і послідовність $\{\varepsilon_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ задовольняє умови $\varepsilon_p \in (0, 1]$, $\varepsilon_p \to 0$, $p \to \infty$, то матрична послідовність $\{U_{\varepsilon_p},\ p \in \mathbb{N}\}$ породжує послідовну контракцію з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$. Навпаки, якщо послідовність $\{U_p, p \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{GL}(V)$ визначає послідовну контракцію з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ (і знак $\det U_p$ однаковий для всіх $p \in \mathbb{N}$, якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$), то існує однопараметрична неперервна контракція з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ з матрицею $\tilde{U}\colon (0, 1] \to \mathrm{GL}(V)$ така, що $\tilde{U}_{1/p} = U_p$ для будь-якого $p \in \mathbb{N}$.

Означення спеціальних типів контракцій, твердження про властивості і їх доведення у випадку послідовних контракцій можна легко перенести з випадку неперервних контракцій. Достатньо замінити неперервну параметризацію дискретною. Заміна є оборотною.

7.3.2. Необхідні критерії контракцій. Оптимальний метод вичерпного дослідження контракцій у множинах алгебр Лі включає інтенсивне використання необхідних критеріїв, що ґрунтуються на величинах, *інваріантних* або *напівінваріантних* при контракціях. Інваріантні величини зберігаються при контракціях. Напівінваріантність означає існування нерівності між відповідними величинами вихідних і контрактованих алгебр. Оскільки контракції є граничними переходами, замість термінів інваріантність і інваріантність також вживають терміни *неперервність* і *напівнеперервність*.

Нижче використаємо наступні позначення величин і об'єктів, пов'язаних з алгеброю $\mathfrak{g}$: дужка Лі $[\cdot,\cdot]$, алгебра диференціювань $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, орбіта $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ при дії $\mathrm{GL}(V)$ у многовиді $\mathcal{L}_n$, центр $Z(\mathfrak{g})$, радикал $R(\mathfrak{g})$, нільрадикал $N(\mathfrak{g})$, максимальна розмірність $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ абелевих підалгебр, максимальна розмірність $n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$ абелевих ідеалів, ранг $r_{\mathfrak{g}}$, тобто розмірність підалгебри Картана, приєднане і коприєднане зображення $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ і $\mathrm{ad}^*\mathfrak{g}$, приєднане зображення ad_x елемента $x\in\mathfrak{g}$, ранги приєднаного і коприєднаного зображення, які рахують у фіксованому базисі за формулами

$$\mathrm{rank}(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g})=\max_{x\in V}\mathrm{rank}(c^k_{ij}x^j)\quad\text{і}\quad\mathrm{rank}(\mathrm{ad}^*\mathfrak{g})=\max_{u\in V^*}\mathrm{rank}(c^k_{ij}u_k).$$

Визначимо також три стандартних серії характеристичних ідеалів, а саме спадаючий центральний ряд: $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^l=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{l-1}]$, ряд похідних: $\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(l)}=[\mathfrak{g}^{(l-1)},\mathfrak{g}^{(l-1)}]$, зростаючий центральний ряд: $\mathfrak{g}_{(0)}=\{0\}$, $\mathfrak{g}_{(l)}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$ — центр $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{(l-1)}$, $l\in\mathbb{N}$. Якщо $\mathfrak{g}$ — розв'язна (нільпотентна) алгебра Лі, то $r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$ ($r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$) позначає її ранг розв'язності (нільпотентності), тобто мінімальну величину l таку, що $\mathfrak{g}^{(l)}=\{0\}$ ($\mathfrak{g}^l=\{0\}$). Введемо модифіковану форму Кілінга $\tilde\kappa^\alpha_{\mathfrak{g}}=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u\,\mathrm{ad}_v)+\alpha\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_u)\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v)$, де $\alpha\in\mathbb{F}$. У дійсному випадку позначимо ранг додатньої (від'ємної) частини форми $\tilde\kappa^\alpha_{\mathfrak{g}}$, тобто кількість додатніх (від'ємних) діагональних елементів діагональної форми її матриці, через $\mathrm{rank}_+\,\tilde\kappa^\alpha_{\mathfrak{g}}$ ($\mathrm{rank}_-\,\tilde\kappa^\alpha_{\mathfrak{g}}$).

Лема 7.8. *Нехай A_p, $p\in\mathbb{N}$, — дійсні або комплексні матриці однакової розмірності і існує покомпонентна границя $\lim\limits_{p\to\infty}A_p=:A_0$. Якщо $\mathrm{rank}\,A_p=r$ $\forall p\in\mathbb{N}$, то $\mathrm{rank}\,A_0\leqslant r$.*

Теорема 7.7. *Якщо $\mathfrak{g}_0$ — власна контракція алгебри $\mathfrak{g}$, то виконуються наступні співвідношення:*

1) $\dim\mathrm{Der}(\mathfrak{g}_0)>\dim\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *(і $\dim\mathcal{O}(\mathfrak{g}_0)<\dim\mathcal{O}(\mathfrak{g})$);*
2) $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}_0)\geqslant n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$*;*
3) $\dim Z(\mathfrak{g}_0)\geqslant\dim Z(\mathfrak{g})$*; більш того,* $\dim\mathfrak{g}_{0(l)}\geqslant\dim\mathfrak{g}_{(l)}$, $l\in\mathbb{N}$*;*
4) $\dim\mathfrak{g}_0^{(l)}\leqslant\dim\mathfrak{g}^{(l)}$, $l\in\mathbb{N}$*;*

5) $\dim \mathfrak{g}_0^l \leqslant \dim \mathfrak{g}^l$, $l \in \mathbb{N}$*;*

6) $\dim R(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim R(\mathfrak{g})$*;*

7) $\dim N(\mathfrak{g}_0) \geqslant \dim N(\mathfrak{g})$*;*

8) $n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g}_0) \geqslant n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})$*;*

9) $r_{\mathfrak{g}_0} \geqslant r_{\mathfrak{g}}$*;*

10) $\operatorname{rank} \operatorname{ad} \mathfrak{g}_0 \leqslant \operatorname{rank} \operatorname{ad} \mathfrak{g}$*,* $\operatorname{rank} \operatorname{ad}^* \mathfrak{g}_0 \leqslant \operatorname{rank} \operatorname{ad}^* \mathfrak{g}$*;*

11) $\operatorname{rank} \kappa_{\mathfrak{g}_0}^{\alpha} \leqslant \operatorname{rank} \kappa_{\mathfrak{g}}^{\alpha}$*;*

12) $\mathfrak{g}_0$ *l-унімодулярна для кожного $l \in \mathbb{N}$, для якого $\mathfrak{g}$ l-унімодулярна, тобто* $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^l) = 0$ $\forall u \in \mathfrak{g}$ *спричиняє таку ж умову для* $\mathfrak{g}_0$*;*

13) *якщо $\mathfrak{g}$ розв'язна, то $\mathfrak{g}_0$ також розв'язна і* $r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g}_0) \leqslant r_{\mathrm{s}}(\mathfrak{g})$*;*

14) $\mathfrak{g}_0$ *нільпотентна, якщо $\mathfrak{g}$ нільпотентна, і* $r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g}_0) \leqslant r_{\mathrm{n}}(\mathfrak{g})$*;*

15) *(тільки над $\mathbb{R}$!)* $\operatorname{rank}_+ \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}_0}^{\alpha} \leqslant \operatorname{rank}_+ \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^{\alpha}$ *і* $\operatorname{rank}_- \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}_0}^{\alpha} \leqslant \operatorname{rank}_- \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^{\alpha}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*;*

Доведення. Достатньо розглянути послідовні контракції.

Доведемо спочатку докладно критерії 4 і 5. Вони виконуються, якщо $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \dim \mathfrak{g} =: n$. Дійсно, тоді $\dim \mathfrak{g}^{(l)} = \dim \mathfrak{g}^l = n$ для всіх $l \in \mathbb{N}$, що приводить до критеріїв 4 і 5 в силу очевидних умов $\dim \mathfrak{g}_0^{(l)} \leqslant \dim \mathfrak{g}_0$, $\dim \mathfrak{g}_0^l \leqslant \dim \mathfrak{g}_0$ і $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g} = n$.

Припустимо, що $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] < n$. Нехай $\{e^1, \ldots, e^n\}$ — базис у дуальному просторі V^*, спряжений до базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$, тобто $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$, де δ^i_j — символ Кронекера. Визначимо A як $n \times n^2$ матрицю, що складається з елементів $c^k_{ij} = \langle e^k, [e_i, e_j] \rangle$, де індекс k пробігає номери рядків, а пара (i, j) — стовпчиків. Завдяки антисиметричності c^k_{ij} за нижніми індексами, можна брати до уваги тільки стовпчики з $i < j$. Аналогічно введемо матриці A_p і A_0 для алгебр $\mathfrak{g}_p$ і $\mathfrak{g}_0$.

Розмірності $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ і $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_p$ співпадають; позначимо їх спільне значення як n_1. У термінах матриць A і A_p це означає, що $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_p = n_1$. Отже, всі $(n_1 + 1)$-вимірні мінори матриць A_p, $p \in \mathbb{N}$ рівні нулю. Крім того, $c^k_{p,ij} = \langle e^k, [e_i, e_j]_p \rangle \to c^k_{0,ij} = \langle e^k, [e_i, e_j]_0 \rangle$, $p \to \infty$, тобто елементи матриць A_p збігаються до відповідних елементів матриці A_0, що приводить до збіжності мінорів. Отже, будь-який (n_1+1)-вимірний мінор матриці A_0 рівний 0, звідки $\operatorname{rank} A_0 \leqslant n_1$, що еквівалентно $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \leqslant n_1$, Це доводить критерії 4 і 5 при $l = 1$. Для інших значень l доведення аналогічне. Потрібні матриці визначать аналогічно матрицям A, A_p і A_0 у випадку $l = 1$ з заміною звичайних комутаторів $[e_i, e_j]$ відповідними повторними комутаторами базисних елементів.

Критерії 9, 10 і 11 доводяться у подібний і простіший спосіб через граничний перехід $p \to \infty$ у формулах для $p \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&r_{\mathfrak{g}} = n - \max_{x \in V} \operatorname{rank}(c_{ij}^k x^j)^n = r_{\mathfrak{g}_p} = n - \max_{x \in V} \operatorname{rank}(c_{p,ij}^k x^j)^n,\\
&\operatorname{rank}(\operatorname{ad} \mathfrak{g}) = \max_{x \in V} \operatorname{rank}(c_{ij}^k x^j) = \operatorname{rank}(\operatorname{ad} \mathfrak{g}_p) = \max_{x \in V} \operatorname{rank}(c_{p,ij}^k x^j),\\
&\operatorname{rank}(\operatorname{ad}^* \mathfrak{g}) = \max_{u \in V^*} \operatorname{rank}(c_{ij}^k u_k) = \operatorname{rank}(\operatorname{ad}^* \mathfrak{g}_p) = \max_{u \in V^*} \operatorname{rank}(c_{p,ij}^k u_k),\\
&\operatorname{rank}(\kappa_{\mathfrak{g}}^\alpha) = \operatorname{rank}(c_{ij}^k c_{i'k}^j + \alpha c_{ij}^j c_{i'k}^k) =\\
&\qquad = \operatorname{rank}(\kappa_{\mathfrak{g}_p}^\alpha) = \operatorname{rank}(c_{p,ij}^k c_{p,i'k}^j + \alpha c_{p,ij}^j c_{p,i'k}^k).
\end{aligned}
$$

Критерій 12 очевидний, оскільки з $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_u{}^l) = 0$ $\forall u \in \mathfrak{g}$ випливає така ж умова в $\mathfrak{g}_p$ і $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_p,u}{}^l) \to \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0,u}{}^l)$, $p \to \infty$.

Критерії 13 і 14 є прямими наслідками критеріїв 4 і 5.

Оскільки радикал $R(\mathfrak{g})$ є ортогональним доповненням до $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ відносно форми Кілінга $\kappa_{\mathfrak{g}}$, то $\dim R(\mathfrak{g}) = \dim R(\mathfrak{g}_p)$ співпадає зі значенням $n - \operatorname{rank}(c_{ij}^k c_{i'k}^j c_{i''j''}^{i'}) = n - \operatorname{rank}(c_{p,ij}^k c_{p,i'k}^j c_{p,i''j''}^{i'})$, $p \in \mathbb{N}$. У відповідних матрицях пара (i'', j'') пробігає номери рядків і індекс i — номери стовпчиків. Граничний перехід $p \to \infty$ в останній формулі приводить до критерію 6.

Центр $Z(\mathfrak{g})$ співпадає з множиною розв'язків системи $[e_i, x] = 0$, або $c_{ij}^k x^j = 0$ у координатній формі. Отже, $\dim Z(\mathfrak{g}) = \dim Z(\mathfrak{g}_p)$ дорівнює $n - \operatorname{rank}(c_{ij}^k) = n - \operatorname{rank}(c_{p,ij}^k)$, $p \in \mathbb{N}$, де пара (k, j) пробігає номери рядків, а індекс i — номери стовпчиків. Граничний перехід $p \to \infty$ в останній формулі дає критерій 3 при $l = 1$. Доведення для інших значень l подібне. Замість $(c_{ij}^k) = (\langle e^k, [e_i, e_j]\rangle)$ потрібно використати матрицю $(\langle e^k, [\dots[e_i, e_{j_1}], \dots, e_{j_l}]\rangle)$, де набір $(k, j_1, \dots, j_l)$ пробігає номери рядків, а індекс i — номери стовпчиків.

Доведення критерію 2 також подамо докладно, оскільки воно репрезентує інший типовий трюк, застосовний при виведенні необхідних критеріїв контракцій. Нехай $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}) = l$. Тоді також $n_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}_p) = l$. Виконаємо заміну базису в $\mathfrak{g}_p$, асоційовану з невиродженою матрицею W_p, щоб у результаті $\tilde{c}^k_{p,ij} = 0$ при $i, j \leqslant l$. Тут $\tilde{c}^k_{p,ij} = (W_p)^i_{i'}(W_p)^j_{j'}({W_p}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{p,i'j'}$ — структурні сталі алгебри $\mathfrak{g}_p$ у новому базисі. Завдяки можливості "ортогоналізації" базису без обмеження загальності можна вважати, що W_p — ортогональна (унітарна) матриця у випадку дійсного (комплексного) поля. Множина ортогональних (або унітарних) матриць компактна в індукованій "евклідовій" матричній нормі. Отже, існує збіжна підпослідовність $\{W_{p_q},\ q \in \mathbb{N}\}$. Позначимо через W_0 ортогональну (унітарну) матрицю, що є границею цієї підпослідовності. Тоді

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}^k_{p_q,ij} &= (W_{p_q})^i_{i'}(W_{p_q})^j_{j'}({W_{p_q}}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{p_q,i'j'} \to \\
&\quad \to (W_0)^i_{i'}(W_0)^j_{j'}({W_0}^{-1})^{k'}_k c^{k'}_{0,i'j'} = \tilde{c}^k_{0,ij}, \quad q \to \infty.
\end{aligned}
$$

Тому $\tilde{c}^k_{0,ij} = 0$, $i, j \leqslant l$, в силу такої ж умови для $c^k_{p,ij}$, тобто $\mathfrak{g}_0$ містить l-вимірну абелеву підалгебру, що завершує доведення критерію 2.

Критерії 6, 7 і 8 виводяться аналогічно з заміною умови для абелевої підалгебри умовою для ідеалу

$$
\tilde{c}^k_{p,ij} = 0, \quad \text{якщо} \quad (i \leqslant l \text{ або } j \leqslant l) \quad \text{і} \quad k > l,
$$

доповненою відповідно умовами

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}^k_{p,ij} = 0, \quad \text{якщо} \quad i, j \leqslant l \text{ і } k > \max(i,j), \quad l = \dim R(\mathfrak{g}),\\
&\tilde{c}^k_{p,ij} = 0, \quad \text{якщо} \quad i, j \leqslant l \text{ і } k \geqslant \max(i,j), \quad l = \dim N(\mathfrak{g}),\\
&\tilde{c}^k_{p,ij} = 0, \quad \text{якщо} \quad i, j \leqslant l, \quad l = n_{\mathrm{Ai}}(\mathfrak{g})
\end{aligned}
$$

розв'язності для радикала, нільпотентності для нільрадикала і комутативності для абелевого ідеалу максимальної розмірності. Зауважимо, що отримано друге доведення критерію 6.

Подібну техніку, що ґрунтується на компактності множини ортогональних матриць, можна застосувати у доведенні критерію 15. Позначимо кількість додатних (від'ємних) діагональних елементів у діагональній формі симетричної матриці K через $\operatorname{rank}_+ K$ ($\operatorname{rank}_- K$). Достатньо довести, що для будь-якої збіжної послідовності симетричних матриць $K_p \to K_0$, $p \to \infty$, з $\operatorname{rank}_+ K_p = r_+$ і $\operatorname{rank}_- K_p = r_-$, $p \in \mathbb{N}$, вірні нерівності $\operatorname{rank}_+ K_0 \leqslant r_+$ і $\operatorname{rank}_- K_0 \leqslant r_-$. Тоді це твердження застосоване до послідовності матриць (модифікованих) форм Кілінга алгебр $\mathfrak{g}_p$, які мають однакові значення rank_+ і rank_- згідно закону інерції квадратичних форм і збігаються до матриці (модифікованої) форми Кілінга результуючої алгебри $\mathfrak{g}_0$. Нехай W_p — ортогональна матриця, що зводить K_p до матриці $D_p = \operatorname{diag}(d_{p1}, \dots, d_{pn})$, де $d_{pi_1} > 0$, $i_1 = \overline{1, r_+}$, $d_{pi_2} < 0$, $i_2 = \overline{r_+ + 1, r_+ + r_-}$ і $d_{pi_3} = 0$, $i_3 = \overline{r_+ + r_- + 1, n}$ ($r_+ + r_- \leqslant n$), тобто $K_p = W_p D_p {W_p}^{\mathrm{T}}$. Виберемо збіжну підпослідовність $\{W_{p_q},\ q \in \mathbb{N}\}$ і позначимо її границю через W_0. Тоді $D_{p_q} = {W_{p_q}}^{\mathrm{T}} K_{p_q} W_{p_q} \to {W_0}^{\mathrm{T}} K_0 W_0 =: D_0$, $q \to \infty$. $D_0 = \operatorname{diag}(d_{01}, \dots, d_{0n})$, де $d_{0i} = \lim\limits_{q\to\infty} d_{p_q i}$. Крім того, $d_{0i_1} \geqslant 0$, $i_1 = \overline{1, r_+}$, $d_{0i_2} \leqslant 0$, $i_2 = \overline{r_+ + 1, r_+ + r_-}$ і $d_{0i_3} = 0$, $i_3 = \overline{r_+ + r_- + 1, n}$, що дає потрібне твердження.

Критерій 1 доведено у комплексному випадку, наприклад, у [81, 150]. У випадку поля дійсних чисел цей критерій також справедливий і є наслідком версії для комплексного випадку. Дійсно, у фіксованому базисі простору V коефіцієнти d^i_j матриці будь-якого оператора з $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ задовольняють однорідну систему лінійних рівнянь $c^{k'}_{ij} d^k_{k'} = c^k_{i'j} d^{i'}_i + c^k_{ij'} d^{j'}_j$. Якщо $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над $\mathbb{R}$, а $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — її комплексифікація, то при виборі відповідного базиса в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ коефіцієнти матриці кожного оператора з $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ задовольняють ту ж систему лінійних рівнянь. Розширення поля не змінює ранг матриці системи. Тому $\dim \operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \dim \operatorname{Der}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. □

Зауваження 7.6. Критерії можна переформулювати у термінах замкнутих підмножин многовиду $\mathcal{L}_n$. Зокрема, множини нільпотентних, розв'язних і унімодулярних алгебр замкнуті. Множини $\{\mathfrak{g} \in \mathcal{L}_n \mid \dim \mathfrak{g}^l \leqslant r\}$, $\{\mathfrak{g} \in \mathcal{L}_n \mid \dim \mathfrak{g}^{(l)} \leqslant r\}$, $\{\mathfrak{g} \in \mathcal{L}_n \mid \dim \mathfrak{g}_{(l)} \geqslant r\}$ і подібні їм замкнуті для кожного l і $r = \overline{0, n}$.

Зауваження 7.7. Необхідні критерії з'явилися вже в ранніх статтях про контракції алгебр Лі. Так, у своїй піонерській роботі [258] Сегал використав для компактних напівпростих алгебр Лі критерій, що ґрунтується на законі інерції для форм Кілінга (перша частина критерію 15 при $\alpha = 0$). Нерівність на розмірності похідних алгебр $\dim[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \leqslant \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ доведено в [254] у практично такий же спосіб, як і вище. Критерії 3 і 5 щодо зростаючого і спадаючого центрального рядів виникли при вивченні многовидів нільпотентних алгебр [278]. Важливий критерій 1 у випадку комплексного поля є прямим наслідком леми про замикання орбіт, наведеної, наприклад, у [81]. Критерій 2 доведено в [150] з використанням розкладу Івасави. У [262] вказано, що таку ж техніку можна використати для доведення інших необхідних критеріїв контракції. Для дійсного і комплексного полів цю техніку можна спростити і також використати її, щоб довести критерії 6, 7 і 8. Критерії 3, 4 і 5 застосовано разом у [177], див. також обговорення в [11]. Всі наведений вище критерії ґрунтуються на напівінваріантних величинах. Низку критеріїв зібрано в [93]. Зокрема, ідею щодо критерію 9 взято звідти. Частина критерію 10 щодо рангу коприєднаного зображення виникла у дослідженнях зв'язків між інваріантами вихідних і контрактованих алгебр [94, 95].

Зауваження 7.8. Список критеріїв можна розширити іншими величинами, що пов'язані з алгебрами і є напівінваріантними при контракціях [24,92,93]. Запропоновані критерії є простими з обчислювальної точки зору. Множина (або навіть її підмножина) наведених критеріїв повна для три- і чотиривимірних алгебр Лі у сенсі, що вони точно виділяють всі пари алгебр Лі, між якими немає контракцій. Деякі критерії з наведених індуковано іншими наведеними критеріями. Наприклад, з критеріїв 4 і 5 випливають критерії 13 і 14.

Критерій 15 є єдиним критерієм, спеціальним для дійсного поля. Він працює для пар алгебр, між якими немає контракції над $\mathbb{C}$, але є (після комплексифікації) контракція над $\mathbb{R}$.

7.3.3. Багатопараметричні і повторні контракції. Для реалізації вироджень алгебр Лі достатньо використовувати однопараметричні неперервні контракції. Водночас корисними є також інші типи неперервних контракцій, зокрема, для знаходження однопараметричних контракцій.

Поняття *багатопараметричної (неперервної) контракції* вводиться аналогічно до поняття однопараметричної (неперервної) контракції. Замість матричної функції одного дійсного параметра розглядається функція $U\colon (0,1]^m \to GL(V)$, тобто $U_{\bar\varepsilon} = U(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ — невироджений лінійний оператор на V для будь-якого $\bar\varepsilon \in (0,1]^m$, $m \in \mathbb{N}$. Параметри ε_1, …, ε_m і матрицю-функцію $U_{\bar\varepsilon}$ відповідно називають *параметрами і матрицею контракції.*

Очевидно, що поняття замикання орбіт [93] *транзитивне.* Таке ж твердження справедливе і для однопараметричних контракцій, але просте множення матриць послідовних контракцій не дає матриці результуючої контракції. Введемо необхідні поняття щодо композиції контракцій.

Нехай матриця $U_1(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_{m_1})$ контрактує алгебру $\mathfrak{g}_2$ до алгебри $\mathfrak{g}_1$, яка, в свою чергу, контрактована матрицею $U_2(\varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon''_{m_2})$ до алгебри $\mathfrak{g}_0$. Якщо матриця $U_1(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_{m_1})U_2(\varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon''_{m_2})$ визначає (m_1+m_2)-параметричну контракцію $\mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_0$, то цю контракцію називають *композицією* двох вихідних контракцій.

Означення 7.6. Багатопараметричну контракцію називають *розкладною*, якщо її можна зобразити як композицію двох власних багатопараметричних контракцій. m-параметричну контракцію називають *цілком розкладною*, якщо її можна зобразити як композицію m однопараметричних контракцій.

Більш точно, m-параметрична контракція $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ розкладна тоді і тільки тоді, коли існує така алгебра $\mathfrak{g}_1$, неізоморфна $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{g}_0$, що контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ можна зобразити як композицію m_1-параметричної контракції з $\mathfrak{g}$ у $\mathfrak{g}_1$ і m_2-параметричної контракції з $\mathfrak{g}_1$ у $\mathfrak{g}_0$, де $m_1 + m_2 = m$.

Означення 7.7. Якщо існують дві однопараметричні контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$, то алгебру $\mathfrak{g}_0$ називають *повторною контракцією* алгебри $\mathfrak{g}$.

Аналогічно будь-яка l-повторна контракція є результатом l однопараметричних послідовних контракцій. Поняття повторних багатопараметричних контракцій можна також ввести у подібний спосіб. Ці означення можна обґрунтувати наступним чином. Нехай $U_1(\varepsilon_1)$, $U_2(\varepsilon_2)$ — матриці однопараметричних контракцій $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ і з $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ відповідно і $U_{\bar\varepsilon} = U_1(\varepsilon_1)U_2(\varepsilon_2)$, де $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тоді для всіх значень i', j', k' існує *повторна* границя $\lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\Bigl(\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U_{\bar\varepsilon}^{-1})^{k'}_k c^k_{ij},\Bigr) =: \tilde c^{k'}_{i'j'}$ тобто $\tilde c^{k'}_{i'j'}$ — компоненти добре визначеного тензора структурних сталих алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. Якщо повторну границю можна замінити сумісною $\lim\limits_{\bar\varepsilon\to+\bar 0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U_{\bar\varepsilon}^{-1})^{k'}_k c^k_{ij} = \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\Bigl(\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U_{\bar\varepsilon}^{-1})^{k'}_k c^k_{ij}\Bigr)$ з $\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то ця повторна контракція є повністю розкладною багатопараметричною контракцією.

Приклади, коли повторні контракції породжують добре визначені розкладні багатопараметричні контракції або як можна побудувати відповідну однопараметричну контракцію, коли це не так, наведено в [205].

Нехай алгебри Лі в парах $(\mathfrak{g}, \hat{\mathfrak{g}})$ і $(\hat{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}})$ зв'язані однопараметричними контракціями з матрицями $\hat U_{\hat\varepsilon}$ і $\tilde U_{\tilde\varepsilon}$, c^k_{ij}, $\hat c^{k''}_{i''j''}$ і $\tilde c^{k'}_{i'j'}$ — компоненти тензора структурних сталих алгебр $\mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{g}}$ і $\tilde{\mathfrak{g}}$ відповідно, $U_{\bar\varepsilon} = \hat U_{\hat\varepsilon}\tilde U_{\tilde\varepsilon}$, де $\bar\varepsilon = (\hat\varepsilon, \tilde\varepsilon)$. Згідно означення контракцій,

$$\lim_{\hat\varepsilon\to+0}(\hat U_{\hat\varepsilon})^i_{i''}(\hat U_{\hat\varepsilon})^j_{j''}(\hat U_{\hat\varepsilon}{}^{-1})^{k''}_k c^k_{ij} = \hat c^{k''}_{i''j''},$$
$$\lim_{\tilde\varepsilon\to+0}(\tilde U_{\tilde\varepsilon})^{i''}_{i'}(\tilde U_{\tilde\varepsilon})^{j''}_{j'}(\tilde U_{\tilde\varepsilon}{}^{-1})^{k'}_{k''}\hat c^{k''}_{i''j''} = \tilde c^{k'}_{i'j'},$$

і, отже, маємо повторну контракцію

$$\lim_{\tilde\varepsilon\to+0}(\tilde U_{\tilde\varepsilon})^{i''}_{i'}(\tilde U_{\tilde\varepsilon})^{j''}_{j'}(\tilde U_{\tilde\varepsilon}{}^{-1})^{k'}_{k''}\Bigl(\lim_{\hat\varepsilon\to+0}(\hat U_{\hat\varepsilon})^i_{i''}(\hat U_{\hat\varepsilon})^j_{j''}(\hat U_{\hat\varepsilon}{}^{-1})^{k''}_k c^k_{ij}\Bigr) =$$
$$= \lim_{\tilde\varepsilon\to+0}\Bigl(\lim_{\hat\varepsilon\to+0}(U_{\bar\varepsilon})^i_{i'}(U_{\bar\varepsilon})^j_{j'}(U_{\bar\varepsilon}^{-1})^{k'}_k c^k_{ij}\Bigr) = \tilde c^{k'}_{i'j'},$$

тобто $\lim\limits_{\tilde\varepsilon\to+0}\lim\limits_{\hat\varepsilon\to+0} g^{k'}_{i'j'}(\bar\varepsilon) = 0$, де $g^{k'}_{i'j'}(\bar\varepsilon) = \tilde g^{k'i''j''}_{i'j'k''}(\tilde\varepsilon)\,\hat g^{i''j''}_{k''}(\hat\varepsilon)$, $\tilde g^{k'i''j''}_{i'j'k''}(\tilde\varepsilon) = (\tilde U_{\tilde\varepsilon})^{i''}_{i'}(\tilde U_{\tilde\varepsilon})^{j''}_{j'}(\tilde U_{\tilde\varepsilon}{}^{-1})^{k'}_{k''}$, $\hat g^{i''j''}_{k''}(\hat\varepsilon) = (\hat U_{\hat\varepsilon})^i_{i''}(\hat U_{\hat\varepsilon})^j_{j''}(\hat U_{\hat\varepsilon}{}^{-1})^{k''}_k c^k_{ij} - \hat c^{k''}_{i''j''}$.

Якщо повторну границю в останньому рівнянні можна коректно замінити сумісною границею $\bar{\varepsilon} \to +\bar{0}$ або простою границею зі зв'язаними значеннями ε_1 і ε_2, то матриця $U_{\bar{\varepsilon}}$ відповідає добре визначеній багато- або однопараметричній контракції. А саме, вірне таке твердження.

Лема 7.9. *Матриця* $U_{\bar{\varepsilon}} = \hat{U}_{\hat{\varepsilon}}\tilde{U}_{\tilde{\varepsilon}}$ *(або* $U_{\bar{f}(\varepsilon)} = \hat{U}_{\hat{f}(\varepsilon)}\tilde{U}_{\tilde{f}(\varepsilon)}$, *де* $\hat{f}$, $\tilde{f}$ *— неперервні монотонні функції з* $(0,1]$ *в* $(0,1]$, $\hat{f}, \tilde{f} \to 0$, $\varepsilon \to +0$*) породжує багатопараметричну (однопараметричну) контракцію* $\mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\lim\limits_{\bar{\varepsilon}\to+0} g^{k'}_{i'j'}(\bar{\varepsilon}) = 0$ $\Big(\lim\limits_{\varepsilon\to+0} g^{k'}_{i'j'}(\hat{f}(\varepsilon), \tilde{f}(\varepsilon)) = 0\Big)$.

Наслідок 7.9. *Якщо функції* $\tilde{g}^{k'i''j''}_{i'j'k''}(\tilde{\varepsilon})$ *обмежені для всіх значень індексів при* $\tilde{\varepsilon} \to +0$, *то матриця* $U_{\bar{\varepsilon}} = \hat{U}_{\hat{\varepsilon}}\tilde{U}_{\tilde{\varepsilon}}$ *породжує двопараметричну контракцію алгебри* $\mathfrak{g}$ *в алгебру* $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Теорема 7.8. *Нехай матриця* $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}}$ *контрактує* $\mathfrak{g}$ *до* $\hat{\mathfrak{g}}$ *і матриця* $\tilde{U}_{\hat{\varepsilon}}$ *контрактує* $\hat{\mathfrak{g}}$ *до* $\tilde{\mathfrak{g}}$. *Тоді існує неперервна монотонна функція* $f\colon (0,1] \to (0,1]$, $f \to 0$, $\varepsilon \to +0$, *така, що матриця* $\check{U}_{\varepsilon} = \hat{U}_{f(\varepsilon)}\tilde{U}_{\varepsilon}$ *породжує однопараметричну неперервну контракцію* $\mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$.

Доведення. Оскільки $\tilde{g}^{k'i''j''}_{i'j'k''}$ — неперервні функції для будь-яких значень індексів, то для кожного $p \in \mathbb{N}$ існує таке $\varkappa_p > 0$, що $\tilde{g}^{k'i''j''}_{i'j'k''}(\varepsilon) < \varkappa_p$ при $\varepsilon \in [\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$. У силу того, що $\hat{g}^{i''j''}_{k''}(\hat{\varepsilon}) \to 0$ при $\hat{\varepsilon} \to +0$, для кожного $p \in \mathbb{N}$ існує $\delta_p \in (0,1]$, для якого $|g^{i''j''}_{k''}(\hat{\varepsilon})| < n^{-3}p^{-1}\min(1, \varkappa_p^{-1})$ при $\hat{\varepsilon} \in (0, \delta_p]$. Без обмеження загальності покладемо $\delta_1 > \delta_2 > \dots$ і визначимо бажану функцію f формулою

$$f(\varepsilon) = p\delta_p((p+1)\varepsilon - 1) - (p+1)\delta_{p+1}(p\varepsilon - 1)$$

для $\varepsilon \in [\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, $p \in \mathbb{N}$. □

Теорема 7.9. *Нехай матриця* $\hat{U}_{\hat{\varepsilon}}$ *контрактує* $\mathfrak{g}$ *до* $\hat{\mathfrak{g}}$, *матриця* $\tilde{U}_{\hat{\varepsilon}}$ *контрактує* $\hat{\mathfrak{g}}$ *до* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *і коефіцієнти цих матриць можна розвинути в ряди Лорана в околі 0. Тоді існує* $\nu \in \mathbb{N}$, *для якого матриця* $\check{U}_{\varepsilon} = \hat{U}_{\varepsilon^{\nu}}\tilde{U}_{\varepsilon}$ *породжує однопараметричну неперервну контракцію з* $\mathfrak{g}$ *у* $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Доведення. Згідно умов теореми функції $\tilde g^{k'i''j''}_{i'j'k''}$ і $\hat g^{i''j''}_{k''}$ також можна розвинути в ряди Лорана в околі 0. Оскільки $\hat g^{i''j''}_{k''}(\hat\varepsilon)\to 0$ при $\hat\varepsilon\to+0$, то $\hat g^{i''j''}_{k''}(\hat\varepsilon)=O(\hat\varepsilon)$ при $\hat\varepsilon\to+0$. Нехай μ — модуль мінімальної степені у розвиненнях функцій $\tilde g^{k'i''j''}_{i'j'k''}$. Тоді $\nu=\mu+1$ — шукане значення. □

Наслідок 7.10. *Якщо контракції $\mathfrak g\to\hat{\mathfrak g}$ і $\hat{\mathfrak g}\to\tilde{\mathfrak g}$ породжено матрицями з коефіцієнтами, що є многочленами від параметрів контракцій, то контракцію $\mathfrak g\to\tilde{\mathfrak g}$ можна здійснити матрицею такого ж типу.*

7.4. Висновки

У цьому розділі вивчено деякі проблеми теорії алгебр Лі, суміжні до групового аналізу.

Застосовуючи оригінальний алгебраїчний алгоритм, що залучає версію Фелса–Олвера методу рухомих реперів Картана [117, 118], і спеціальну техніку, розроблену для алгебр трикутних матриць, пораховано інваріанти (узагальнені оператори Казіміра) серій розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких ізоморфні алгебрі строго верхньотрикутних матриць. Цим підтверджено гіпотезу, що існувала, про інваріанти алгебр спеціальних верхньотрикутних матриць (твердження 1 з [273]) та поправлено аналогічну гіпотезу щодо серії алгебр з одним нільнезалежним елементом (твердження 2 з [273]). Використаний алгоритм дозволяє уникнути інтегрування громіздких перевизначених систем квазілінійних ДРЧР першого порядку, заміняючи його розв'язанням (часто — лінійних) систем алгебраїчних рівнянь. З іншого боку, цей алгоритм можна розглядати як спеціальний метод інтегрування таких систем ДРЧР. Його ефективність продемонстровано також на інших серіях розв'язних алгебр і усіх низькорозмірних алгебрах до розмірності шість включно [84, 85, 88, 271].

Запропоновано новий необхідний критерій для перевірки еквівалентності реалізацій алгебр Лі, оснований на порівнянні рангів обмежень реалізацій на мегаідеали. Його застосування дозволило прокласифікувати реалізації алгебр Лі до розмірності чотири включно у просторах з довільною кількістю змінних [232, 233] і порівняти отриману класифікацію з відомими частковими результати, які було значно узагальнено, а також суттєво відкореговано. Цю класифікацію можна використати, зокрема, для класифікації систем ЗДР, інтегровних у квадратурах [23].

Зібрано, доповнено і узагальнено необхідні критерії контракцій алгебр Лі. З їх допомогою в [205] описано контракції дійсних і комплексних алгебр Лі до розмірності чотири включно. Особливий наголос зроблено на дійсному випадку, оскільки його досліджували значно менше, ніж комплексний. Вивчено зв'язок між багатопараметричними, повторними і звичайними контракціями.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [84–88, 191, 204, 205, 232, 233].

ВИСНОВКИ

У дисертації вдосконалено ряд існуючих і розроблено нові методи групового аналізу диференціальних рівнянь та суміжних галузей теорії алгебр Лі. Переваги і можливості цих методів продемонстровано через їх застосування у різних класифікаційних задачах. Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином:

• Введено низку нових понять, пов'язаних з класами диференціальних рівнянь: розширена (узагальнена розширена, умовна, потенціальна) група еквівалентності, нормалізований (напівнормалізований, строго нормалізований) клас, подібні класи, відображення між класами, породжене точковими перетвореннями тощо. Для дослідження задач групової класифікації розвинуто методи розбиття на нормалізовані підкласи, розгалуженого розщеплення, калібрування довільних елементів перетвореннями еквівалентності і відображеннями між класами диференціальних рівнянь. Визначено межі застосовності алгебраїчного методу. Ці поняття і методи істотно розширяють коло розв'язних класифікаційних задач. Вони дозволяють адекватно формулювати проблеми класифікації для складних класів, узагальнювати постановки задач і отримувати кінцеві результати класифікацій у замкненому і простому вигляді. На їх основі можна проводити відбір класів для дослідження. Поставлено задачі про класифікацію допустимих перетворень, ліївських симетрій, законів збереження, потенціальних симетрій та операторів редукції відносно різних типів еквівалентностей. Такі задачі розв'язано для багатьох класів диференціальних рівнянь, важливих для застосувань.

• Вивчено ряд модифікованих і узагальнених задач групової класифікації. Зокрема, побудовано ієрархію вкладених нормалізованих класів нелінійних рівнянь Шрьодінгера у випадку довільної кількості просторових змінних. Виконано групову класифікацію у класах (1+1)-вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами та модульними нелінійностями, (1+2)-вимірних кубічних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами, рівнянь Шрьодінгера з довільною нелінійністю, залежною лише від невідомої функції і спряженої до неї, нелінійних рівнянь реакції–дифузії та конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, узагальнених рівнянь Гамільтона–Якобі та систем двох двовимірних нелінійних рівнянь Лапласа.

- Використовуючи версію леми Адамара для розшарованих просторів та навантажені простори струменів і модифікуючи поняття цілковитої невиродженості систем диференціальних рівнянь, обґрунтовано коректність методів обчислення потенціальних законів збереження, що залучають характеристичну форму законів збереження. Доведено теорему про закони збереження двовимірних потенціальних систем, що індуковані законами збереження вихідних систем. Її узагальнено на багатовимірні абелеві накриття, (не)калібровані потенціальні, псевдопотенціальні та загальні розшаровані системи.
- Отримано критерій для визначення того, чи є закон збереження абелевого накриття чисто потенціальним законом збереження вихідної системи. Застосовуючи цей критерій, проаналізовано ієрархію потенціальних законів збереження рівнянь конвекції–дифузії.
- З точністю до контактної еквівалентності описано закони збереження (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь другого порядку. Це значно узагальнює і водночас спрощує результати Р.Л. Брайанта і П.А. Гріфітса [89] щодо класифікації законів збереження у (ненормалізованому) підкласі рівнянь, не залежних явно від часу.
- Запропоновано поняття сингулярних і регулярних операторів редукції. Показано, що особливі випадки редукції спричинено пониженням порядку розглядуваного рівняння на многовидах, заданих відповідними умовами інваріантної поверхні у просторі струменів.

- Описано сингулярні оператори редукції (1+1)-вимірних еволюційних і хвильових рівнянь, а також знайдено їх зв'язок із сім'ями розв'язків відповідних рівнянь.
- Доведено "no-go" теорему про сингулярні оператори редукції диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними, що допускають модулі векторних полів першого копорядку сингулярності. Вона істотно узагальнює відому "no-go" теорему Р.З. Жданова і В.І. Лагна [291, 292] про умовні симетрії (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь.
- Знайдено всі оператори редукції багатовимірного лінійного рівняння теплопровідності. Це єдиний у літературі приклад обрахунку некласичних симетрій, коли кількість змінних довільна. Існуючі результати стосуються випадку, як правило, двох чи зрідка трьох незалежних змінних. Також прокласифіковано оператори редукції нелінійних рівнянь фільтрації, що дає один з небагатьох відомих прикладів вичерпного опису операторів редукції для важливого класу диференціальних рівнянь.
- Проведено розширений симетрійний аналіз (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, що включає вивчення структури нормалізованих підкласів, локальних і потенціальних законів збереження, звичайних та узагальнених потенціальних симетрій і операторів редукції. До цього були відомі лише часткові результати про локальні закони збереження, найпростіші потенціальні симетрії і оператори редукції деяких рівнянь з цього класу.
- Застосовуючи оригінальний підхід, побудовано інваріанти серій розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких ізоморфні алгебрі строго верхньотрикутних матриць. Цим підтверджено або уточнено кілька сформульованих у літературі гіпотез щодо таких інваріантів.
- Запропоновано нові необхідні критерії контракцій алгебр Лі і критерій нееквівалентності їх реалізацій, які дозволили описати контракції і реалізації алгебр Лі до розмірності чотири включно.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абраменко А.А. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований / А.А. Абраменко, В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.
2. Ахатов Н.Ш. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации / Н.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 293. — С. 1033–1035.
3. Ахатов Н.Ш. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / Н.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — Т. 34. — С. 3–83.
4. Бойко В.М. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь / В.М. Бойко, В.О. Попович // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. —С. 45–50.
5. Боровских А.В. Двумерное уравнение эйконала / А.В. Боровских // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 993–1018.
6. Боровских А.В. Групповая классификация уравнений эйконала для трехмерной неоднородной среды / А.В. Боровских // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 4. — С. 23–64.
7. Бочаров А.В. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др. / Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. — М. : Факториал Пресс, 2005. — 380 с.
8. Ванєєва О.О. Групова класифікація та некласичні симетрії рівнянь реакції–дифузії : дис. . . . канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / О.О. Ванєєва. — Київ, 2007.

9. Василенко О.Ф. Групова класифікація нелінійних хвильових рівнянь / О.Ф. Василенко, І.А. Єгорченко // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 63–66.
10. Василенко О.Ф. О классе редуцирующих операторов и решениях эволюционных уравнений / О.Ф. Василенко, Р.Е. Попович // Вестн. Приазов. гос. тех. ун-та. — 1999. — Вып. 8. — С. 269–273.
11. Горбацевич В.В. Об уровне некоторых разрешимых алгебр Ли / В.В. Горбацевич // Сиб. мат. журн. — 1998. — Т. 39, № 5. — С. 1013–1027.
12. Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником / В.А. Дородницын // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.
13. Дородницын В.А. О группах Ли-Бэклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником / В.А. Дородницын, С.Р. Свирщевский. — М. : Ин-т прикл. мат. АН СССР, 1983. — 28 с. — (Препринт / АН СССР, Ин-т прикл. мат. ; № 101).
14. Жаринов В.В. Законы сохранения эволюционных систем / В.В. Жаринов // Теор. и мат. физ. — 1986. — Т. 68, № 2. — С. 163–171.
15. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.
16. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) / Н.Х. Ибрагимов // Усп. мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 4. — С. 83–144.
17. Ічанська Н.В. Ліївська та умовна симетрії деяких нелінійних еволюційних рівнянь : дис. …канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / Н.В. Ічанська. — Київ, 2005.
18. Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные

решения этих уравнений / Л.В. Капитанский // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 243, № 4. — С. 901—904.

19. Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса при наличии вращательной симметрии и некоторые новые точные решения / Л.В. Капитанский // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1979. — Т. 84. — С. 89–107.
20. Курдюмов С.П. О инвариантных решениях уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, допускаящим наиболее широкую группу преобразований / С.П. Курдюмов, С.А. Посашков, А.В. Синило. — М. : Ин-т прикл. мат. АН СССР, 1984. — 28 с. (Препринт / АН СССР, Ин-т прикл. мат. ; № 110).
21. Лагно В.И. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований / В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 365–372.
22. Лагно В.И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа / В.И. Лагно, С.В. Спичак, В.И. Стогний. — Москва–Ижевск : РХД, 2004. — 392 с.
23. Лутфуллін М.В. Реалізації алгебр Лі невисоких розмірностей та інваріантні системи нелінійних диференціальних рівнянь : дис. …канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / М.В. Лутфуллін. — Київ, 2004.
24. Лыхмус Я.Х. Предельные (сжатые) группы Ли / Я.Х. Лыхмус. — Тарту : Ин-т физики и астрономии АН ЭССР, 1969. — 132 с.
25. Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений / Б.А. Магадеев // Алгебра и анализ. — 1993. — Т. 3, вып 2. — С. 141–156.
26. Мелешко С.В. Групповая классификация уравнений двумерных движений газа / С.В. Мелешко // Прикл. мат. и мех. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 56–62.

27. Нікітін А.Г. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера / А.Г. Нікітін, Р.О. Попович // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 8. — С. 1053–1060.

28. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л.В. Овсянников // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

29. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. — 240 с.

30. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

31. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 639 с.

32. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. — М. : Физматлит, 2002. — 432 с.

33. Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу / Р.О. Попович // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, N 1. — С. 121–125.

34. Попович Р.О. Про клас Q-умовних симетрій та розв'язки еволюційних рівнянь / Р.О. Попович // Пр. Інституту математики НАН України. — 1998. — Т. 19. — С. 194–199.

35. Попович Р.О. Про групову класифікацію галілей-інваріантних еволюційних рівнянь другого порядку / Р.О. Попович, В.М. Бойко // Український математичний конгрес-2001. Тези доповідей. Секція № 5 (математична фізика). — Київ : Інститут математики НАН України, 2001. — С. 25–26.

36. Попович Р.О. Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала / Р.О. Попович, І.А. Єгорченко // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 11. — С. 1513–1520.

37. Попович Р.О. Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності / Р.О. Попович, І.П. Корнєва // Праці Інституту математики НАН України. — 1998. — Т. 19. — С. 200–211.
38. Попович Р.О. Повна класифікація симетрій Лі системи нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа / Р.О. Попович, Р.М. Черніга // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 212–221.
39. Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности / Н.И. Серов // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 10. — С. 1370–1376.
40. Сидоров А.Ф. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А.Ф. Сидоров, В.П. Шапеев, Н.Н. Яненко. — Новосибирск : Наука, 1984. — 272 с.
41. Спичак С.В. Симметрийная классификация одномерного уравнения Фоккера–Планка с произвольными коэффициентами сноса и диффузии / С.В. Спичак, В.И. Стогний // Нелінійні коливання, 1999. — Т. 2, № 3. — С. 401–413.
42. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / В.И. Фущич // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981. — С. 6–28.
43. Фущич В.И. Как расширить симетрию дифференциальных уравнений? / В.И. Фущич // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 4–16.
44. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений / В.И. Фущич // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 116–123.
45. Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики / В.И. Фущич // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1456–1470.

46. Фущич В.И. Симметрия уравнений квантовой механики / В.И. Фущич, А.Г. Никитин. — М. : Наука, 1990. — 400 с.
47. Фущич В.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Серов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 7. — С. 24—27.
48. Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. — Киев : Наук. думка, 1989. — 336 с.
49. Фущич В.І. Симметрія та неліївська редукція нелінійного рівняння Шредінгера / В.І. Фущич, В.І. Чопик // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45. — С. 539–551.
50. Фущич В.И. Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера / В.И. Фущич, В.И. Чопик // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 4. — С. 30–33.
51. Хамитова Р.С. Структура группы и базис законов сохранения / Р.С. Хамитова // Теор. и мат. физ. — 1982. — Т. 52. — С. 244–251.
52. Abellanas L. A general setting for Casimir invariants / L. Abellanas and L. Martinez Alonso // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1580–1584.
53. Anco S.C. Nonlocal symmetries and nonlocal conservation laws of Maxwell's equations / S.C. Anco, G. Bluman // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, № 7. — P. 3508–3532.
54. Anco S.C. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. I. Examples of conservation law classifications / S.C. Anco, G. Bluman // Eur. J. Appl. Math. — 2002. — Vol. 13, № 5. — P. 545–566.
55. Anco S.C. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. II. General treatment / S.C. Anco, G. Bluman // Eur. J. Appl. Math. — 2002. — Vol. 13, № 5. — P. 567–585.

56. Anco S.C. Symmetries, Conservation Laws, and Cohomology of Maxwell's Equations Using Potentials / S.C. Anco, D. The // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 89, № 1–3. — P. 1–52.
57. Ancochea J.M. Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants / J.M. Ancochea, R. Campoamor-Stursberg, L. Garcia Vergnolle // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39, № 6. — 1339–1355.
58. Arrigo D.J. Nonclassical solutions are nonexistent for the heat equation and are rare for nonlinear diffusion / D.J. Arrigo, J.M. Goard, P. Broadbridge // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 202, № 1. — P. 259–279.
59. Arrigo D.J. Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source / D.J. Arrigo, J.M. Hill, P. Broadbridge // IMA J. Appl. Math. — 1994. — Vol. 52, № 1. — P. 1–24.
60. Barannyk L.F. Casimir operators of the generalised Poincaré and Galilei groups / L.F. Barannyk, W.I. Fushchych // Group theoretical methods in physics (Yurmala, 1985). — Vol. II. — Utrecht : VNU Sci. Press, 1986. — P. 275–282.
61. Basarab P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations / P. Horwath, V. Lahno, R. Zhdanov // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 69, № 1. — P. 43–94.
62. Białynicki-Birula I. Wave equations with logarithmic nonlinearities / I. Białynicki-Birula, J. Mycielski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1975. — Vol. 23, № 4. — P. 461–466.
63. Białynicki-Birula I. Nonlinear wave mechanics / I. Białynicki-Birula, J. Mycielski // Ann. Physics. — 1976. — Vol. 100, № 1–2. — P. 62–93.
64. Białynicki-Birula I. Gaussons: Solitons of the logarithmic Schrödinger equation / I. Białynicki-Birula, J. Mycielski // Phys. Scripta. — 1978. — Vol. 20, № 3–4. — P. 539–544.
65. Białynicki-Birula I. Solutions of the logarithmic Schrödinger equation in a rotating harmonic trap. Nonlinear waves: classical and quantum

aspects / I. Białynicki-Birula, T. Sowiński // NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. — 2004. — Vol. 153. — P. 99–106.

66. Bila N. On a new procedure for finding nonclassical symmetries / N. Bila, J. Niesen // J. Symbolic Comput. — 2004. — Vol. 38, № 6. — P. 1523–1533.
67. Błaczak M. Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems / M. Błaczak. — Berlin : Springer, 1998. — x+350 p.
68. Bluman G.W. On the transformation of diffusion processes into the Wiener process / G.W. Bluman // SIAM J. Appl. Math. — 1980. — Vol. 39, № 2. — P. 238–247.
69. Bluman G.W. Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation / G.W. Bluman // J. Math. Anal. Appl. — 1990. — Vol. 145, № 1. — P. 52–62.
70. Bluman G. Potential symmetries and equivalent conservation laws / G. Bluman // Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics (Acireale, 1992). — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1993. — P. 71–84.
71. Bluman G. Connections Between Symmetries and Conservation Laws / G. Bluman // SIGMA. — 2005. — Vol. 1. — Paper 011, 16 p.
72. Bluman G.W. The general similarity solution of the heat equation / G.W. Bluman, J.D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.
73. Bluman G. The use of factors to discover potential systems or linearizations. Geometric and algebraic structures in differential equations / G. Bluman, P. Doran-Wu // Acta Appl. Math. — 1995. — Vol. 41, № 1–3. — P. 21–43.
74. Bluman G. On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)] - \partial u/\partial t = 0$ / G. Bluman, S. Kumei // J. Math. Phys. — 1980. — Vol. 21, № 5. — P. 1019–1023.

75. Bluman G.W. Symmetries and differential equations / G.W. Bluman, S. Kumei. — New York : Springer-Verlag, 1989. — 412 p.
76. Bluman G.W. New classes of symmetries for partial differential equations / G.W. Bluman, G.J. Reid, S. Kumei // J. Math. Phys. — 1988. — Vol. 29, № 4. — P. 806–811.
77. Bluman G. Framework for nonlocally related partial differential equation systems and nonlocal symmetries: Extension, simplification, and examples / G. Bluman, A.F. Cheviakov, N.M. Ivanova // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47, № 11. — Paper 113505, 23 pp.
78. Bluman G. Nonlocal transformations of Kolmogorov equations into the backward heat equation / G. Bluman, V. Shtelen // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — Vol. 291, № 2. — P. 419–437.
79. Bluman G. New conservation laws obtained directly from symmetry action on a known conservation law / G. Bluman, Temuerchaolu, S.C. Anco // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 322, № 1. — P. 233–250.
80. Bluman G.W. Nonclassical potential solutions of partial differential equations / G.W. Bluman, Z. Yan // Euro. J. Appl. Math. — 2005. — Vol. 16, № 2. — P. 239–261.
81. Borel A. Linear algebraic groups / A. Borel. — New York–Amsterdam : Benjamin, Inc., 1969. — xi+398 p.
82. Boyer C.P. Conformal symmetry of the Hamilton–Jacobi equation and quantization / C.P. Boyer, M.N. Penafiel // Nuovo cim. B. — 1976. — Vol. 31, № 1. — P. 195–210.
83. Boyer C.P. Symmetry breaking interactions for the time dependent Schrödinger equation / C.P. Boyer, R.T. Sharp, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 8. — P. 1439–1451.
84. Boyko V. Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39, № 20. — P. 5749–5762.

85. Boyko V. Invariants of Lie algebras with fixed structure of nilradicals / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — Vol. 40, № 1. — P. 113–130.
86. Boyko V. Invariants of triangular Lie algebras / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — Vol. 40, № 27. — P. 7557–7572.
87. Boyko V. Invariants of triangular Lie algebras with one nilindependent diagonal element / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — Vol. 40, № 32. — P. 9783–9792.
88. Boyko V. Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // Linear Algebra Appl. — 2008. — Vol. 428, № 4. — P. 834–854.
89. Bryant R.L. Characteristic cohomology of differential systems II: Conservation laws for a class of parabolic equations / R.L. Bryant, P.A. Griffiths // Duke Math. J. — 1995. — Vol. 78, № 3. — P. 531–676.
90. Broadbridge P. Integrable heterogeneous nonlinear Schrödinger equations with dielectric loss: Lie–Bäcklund symmetries / P. Broadbridge, S.E. Godfrey // J. Math. Phys. — 1991. — 32, № 1. — 8–18.
91. Burde D. Degenerations of nilpotent Lie algebras / D. Burde // J. Lie Theory. — 1999. — Vol. 9, № 1. — 193–202.
92. Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras / D. Burde // Comm. Algebra. — 2005. — 33, № 4. — P. 1259–1277.
93. Burde D. Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras / D. Burde, C. Steinhoff // J. Algebra. — 1999. — Vol. 214, № 2. — P. 729–739.
94. Campoamor-Stursberg R. A contraction formula for the invariants of the coadjoint representation of Lie algebras / R. Campoamor-Stursberg // Algebras Groups Geom. — 2002. — Vol. 19, № 4. — P. 385–394.

95. Campoamor-Stursberg R. Contractions of Lie algebras and generalized Casimir invariants / R. Campoamor-Stursberg // Acta Phys. Polon. B. — 2003. — Vol. 34, № 8. — P. 3901–3919.
96. Campoamor-Stursberg R. An alternative interpretation of the Beltrametti–Blasi formula by means of differential forms / R. Campoamor-Stursberg // Phys. Lett. A. — 2004. — Vol. 327, № 2–3. — P. 138–145.
97. Campoamor-Stursberg R. Application of the Gel'fand matrix method to the missing label problem in classical kinematical Lie algebras / R. Campoamor-Stursberg // SIGMA. — 2006. — Vol. 2. — Paper 028, 11 pages.
98. Campoamor-Stursberg R. Affine Lie algebras with non-compact rank one Levi subalgebra and their invariants / R. Campoamor-Stursberg // Acta Phys. Polon. B. — 2007. — Vol. 38, № 1. — P. 3–20.
99. Chaichian M. The Casimir operators of inhomogeneous groups / M. Chaichian, A.P. Demichev, N.F. Nelipa // Comm. Math. Phys. — 1983. — Vol. 90, № 3. — P. 353–372.
100. Carles R. Critical nonlinear Schrödinger equations with and without harmonic potential / R. Carles // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2002. — Vol. 12, № 10. — P. 1513–1523.
101. Caviglia G. Conservation laws for the Navier–Stokes equations / G. Caviglia // Int. J. Eng. Sci. — 1986. — Vol. 24, № 8. — P. 1295–1302.
102. Cherkasov I.D. On the transformation of the diffusion process to a Wiener process / I.D. Cherkasov // Theory Probab. Appl. — 1957. — Vol. 2. — P. 373–377.
103. Cherniha R. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms, II / R. Cherniha , M. Serov // European J. Appl. Math. — 2006. — Vol. 17, № 5. — P. 597–605.
104. Chopyk V. Symmetry and reduction of multi-dimensional Schrödinger equation with the logarithmic nonlinearity / V. Chopyk // Symmetry

Analysis of Equations of Mathematical Physics. — Kyiv : In-t of mathematics of Academy of science of Ukraine, 1992. — P. 55–62.

105. Cicogna G. Classification of the extended symmetries of Fokker–Planck equations / G. Cicogna, D. Vitali // J. Phys. A. — 1990. — Vol. 23, № 3. — P. 85–88.
106. Clarkson P.A. Dimensional reductions and exact solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation / P.A. Clarkson // Nonlinearity. — 1992. — Vol. 5, № 2. — P. 453–472.
107. Clarkson P.A. New similarity solutions of the Boussinesq equation / P.A. Clarkson, M.D. Kruskal // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 10. — P. 2201–2213.
108. Clarkson P.A. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations / P.A. Clarkson, E.L. Mansfield // Phys. D. — 1993. — 70, № 3. — P. 250–288.
109. Clarkson P.A. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions / P.A. Clarkson, E.L. Mansfield // SIAM J. Appl. Math. — 1994. — Vol. 54, № 6. — P. 1693–1719.
110. Cole J.D. On a quasilinear parabolic equation used in aerodinamics / J.D. Cole // Quart. Appl. Math. — 1951. — Vol. 9. — P. 225–236.
111. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton : CRC Press, 1994. — Vol. 1 : Symmetries, exact solutions and conservation laws. — 429 p.
112. CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton : CRC Press, 1994. — Vol. 2 : Applications in engineering and physical sciences. — 546 p.
113. Dieudonné J. Treatise on analysis. Vol. III. Translated from the French by I. G. MacDonald. Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-III / Dieudonné J. — New York–London : Academic Press, 1972. — xvii+388 pp.

114. Doebner H.-D. Properties of nonlinear Schrödinger equations associated with diffeomorphism group representations / H.-D. Doebner, G.A. Goldin // J. Phys. A. — 1994. — Vol. 27, № 5. — P. 1771–1780.
115. Doebner H.-D. Gauge transformations in quantum mechanics and the unification of nonlinear Schrödinger equations / H.-D. Doebner, G.A. Goldin, P. Nattermann // J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 40, № 1. — P. 49–63.
116. Edelen D.G.B. Isovector methods for equations of balance / D.G.B. Edelen. — Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1980. — xxi+513 pp.
117. Fels M. Moving coframes: I. A practical algorithm / M. Fels, P. Olver // Acta Appl. Math. — 1998. — Vol. 51, № 2. — P. 161–213.
118. Fels M. Moving coframes: II. Regularization and theoretical foundations / M. Fels, P. Olver // Acta Appl. Math. — 1999. — Vol. 55, № 2. — P. 127–208.
119. Fokas A.S. Generalized conditional symmetries and exact solutions of nonitegrable equations / A.S. Fokas, Q.M. Liu // Теор. и матем. физика. — 1994. — Т. 99, № 2. — С. 263–278.
120. Fokas A.S. On the exactly solvable equation $S_t = [(\beta S + \gamma)^{-2} S_x]_x + {} + \alpha(\beta S + \gamma)^{-2} S_x$ occurring in two-phase flow in porous media / A.S. Fokas, Y.C. Yortsos // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — Vol. 42, № 2. — P. 318–332.
121. Forsyth A.R. The theory of differential equations / A.R. Forsyth. — Vol. 6. — Cambridge : Cambridge University Press, 1906. — 304 p.
122. Fushchych W.I. Ansatz'95 / W.I. Fushchych, N.I. Serov // J. Nonlinear Math. Phys. — 1995. — Vol. 2, № 3–4. — P. 216–235.
123. Fushchych W. Symmetries and reductions of nonlinear Schrödinger equations of Doebner–Goldin type / W. Fushchych, V. Chopyk, P. Nattermann, W. Scherer // Rep. Math. Phys. — 1995. — Vol. 35, № 1. — P. 129–138.

124. Fushchych W.I. Symmetries of Maxwell's equations / W.I. Fushchych, A.G. Nikitin. — Dordrecht : D.Reidel, 1987. — 220 pp.
125. Fushchych W.I. Symmetries of Equations of Quantum Mechanics / W.I. Fushchych, A.G. Nikitin. — New York : Allerton Press Inc., 1994. — 480 pp.
126. Fushchych W.I. On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equations in three spatial dimensions / W.I. Fushchych, S.S. Moskaliuk // Lett. Nuovo Cim. — 1981. — Vol. 31, № 16. — P. 571–576.
127. Fushchych W.I. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. I / W.I. Fushchych, R.O. Popovych // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 1. — P. 75–113.
128. Fushchych W.I. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. II / W.I. Fushchych, R.O. Popovych // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — 1, № 2. — P. 158–188.
129. Fushchych W.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations / W.I. Fushchych, N.I. Serov // J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — Vol. 16, № 15. — P. 3645—3658.
130. Fushchich W.I. On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation / W.I. Fushchich, N.I. Serov // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20, № 6. — P. L929–L933.
131. Fushchych W.I. On non-local symmetries of nonlinear heat equation / W.I. Fushchych, N.I. Serov, V.A. Tychinin, T.K. Amerov // Доклады АН Украины. — 1992. — № 11. — С. 27–33.
132. Fushchych W.I. Symmetry Analisys and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathimatical Physics / W.I. Fushchych, W.M. Shtelen, N.I. Serov. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993. — 460 pp.
133. Fushchich W.I. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation / W.I. Fushchich, W.M. Shtelen // Lett. nuovo cim. — 1982. — Vol. 34, № 16. — P. 498.

134. Fushchych W.I. Q-conditional symmetry of the linear heat equation / W.I. Fushchych, W.M. Shtelen, M.I. Serov, R.O. Popovych // Докл. НАН Украины. — 1992. — № 12. — C. 28–33.

135. Fushchych W.I. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry / W.I. Fushchych, I.M. Tsyfra // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20, № 2. — P. L45–L48.

136. Fushchych W.I. Second-order differential invariants of the rotation group $\mathrm{O}(n)$ and of its extensions: $\mathrm{E}(n)$, $\mathrm{P}(1,n)$, $\mathrm{G}(1,n)$ / W.I. Fushchych, I.A. Yegorchenko // Acta Appl. Math. — 1992. — Vol. 28, № 1. —C. 69–92.

137. Fushchych W.I. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations / W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov. — Kyiv : Mathematical Ukraina Publisher, 1997. — 384 pp.

138. Fushchych W. Antireduction and exact solutions of nonlinear heat equations / W. Fushchych, R. Zhdanov // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 1. — P. 60–64.

139. Fushchych W.I. Conditional symmetry and reduction of partial differential equations / W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 7. —С. 970–982.

140. Gagnon L. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: I. The symmetry group and its subgroups / L. Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 21, № 7. — P. 1493–1511.

141. Gagnon L. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: II. Exact solutions / L. Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A. — 1989. — Vol. 22, № 5. — P. 469–497.

142. Gagnon L. Lie symmetries of a generalised non-linear Schrödinger equation: III. Reductions to third-order ordinary differential equations / L. Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A. — 1989. — Vol. 22, № 5. — P. 499–509.

143. Gagnon L. Exact solutions of the cubic and quintic non-linear Schrödinger equation for a cylindrical geometry / L. Gagnon, P. Winternitz // Phys. Rev. A. — 1989. — Vol. 39, № 1. — P. 296–306.
144. Gagnon L. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations / L. Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A. — 1993. — Vol. 26, № 23. — P. 7061–7076.
145. Galaktionov V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications / V.A. Galaktionov // Differential Integral Equations. — 1990. — Vol. 3, № 5. — P. 863–874.
146. Galaktionov V.A. A quasilinear heat equation with a source: peaking, location, symmetry exact solution, asymptotics, structures / V.A. Galaktionov, V.A. Dorodnitsyn, G.G. Elenin, S.P. Kurdyumov, A.A. Samarskii // J. Soviet Math. — 1988. — Vol. 41. — C. 1222–1292.
147. Gandarias M.L. Classical point symmetries of a porous medium equation / M.L. Gandarias // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — Vol. 29, № 3. — P. 607–633.
148. Gandarias M.L. Nonclassical potential symmetries of the Burgers equation / M.L. Gandarias // Proceedings of the Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". — Kyiv (Ukraine). — 1997. — P. 130–137.
149. Gandarias M.L. New symmetries for a model of fast diffusion / M.L. Gandarias // Phys. Let. A. — 2001. — Vol. 286, № 2–3. — P. 153–160.
150. Grunewald F. Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six / F. Grunewald, J. O'Halloran // J. Algebra. — 1988. — Vol. 112, № 2. — P. 315–325.
151. Güngör F. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations / F. Güngör, V. Lahno, R. Zhdanov // J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 45, № 6. — P. 2280–2313.

152. Head A.K. LIE, a PC program for Lie analysis of differential equations / A.K. Head // Comput. Phys. Comm. — 1993. — Vol. 77, № 2. — P. 241–248.
153. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / E. Hopf // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — Vol. 3. — P. 201–230.
154. Hubert E. Rational invariants of a group action: construction and rewriting / E. Hubert, I. Kogan // J. Symbolic Comput. — 2007. — Vol. 42, № 1–2. — P. 203–217.
155. Ibragimov N.H. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ / N.H. Ibragimov, M. Torrisi, A. Valenti // J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32, № 11. — P. 2988–2995.
156. Ibragimov N.H. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations / N.H. Ibragimov. — Chichester : John Wiley & Sons, 1999. — xviii+347 pp.
157. Inönü E. On the contraction of groups and their representations / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1953. — Vol. 39. — P. 510–524.
158. Inönü E. On a particular type of convergence to a singular matrix / E. Inönü, E.P. Wigner // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1954. — Vol. 40. — P. 119–121.
159. Ivanova N.M. Equivalence of conservation laws and equivalence of potential systems / N.M. Ivanova, R.O. Popovych // Internat. J. Theor. Phys. — Vol. 46, № 10. — 2007. — P. 2658–2668.
160. Ivanova N.M. On symmetry properties of nonlinear Schrödinger equations / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, H. Eshraghi // Sveske Fiz. Nauka. — 2005. — Vol. 18(A1). — P. 451–456.
161. Ivanova N.M. Conservation laws of variable coefficient diffusion–convection equations / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous // Proc. of 10th Int. Conf. in Modern Group Analysis (MOGRAN X)

(Larnaca, Cyprus, 2004). — Nicosia : University of Cyprus, 2005. — P. 107–113. arXiv:math-ph/0505015.

162. Ivanova N.M. Conservation laws and potential symmetries for certain evolution equations / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous, O.O. Vaneeva // Phys. A. — 2008. — DOI:10.1016/j.physa.2008.10.018. — 14 pp. arXiv:0806.1698.
163. Ivanova N.M. Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. I. Enhanced group classification / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous. — 2007. — arXiv:0710.2731. — 24 pp.
164. Ivanova N.M. Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. II. Contractions and exact solutions / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous. — 2007. — arXiv:0710.3049. — 19 pp.
165. Ivanova N.M. Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. III. Conservation laws / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous. — 2007. — arXiv:0710.3053. — 26 pp.
166. Ivanova N.M. Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. IV. Potential symmetries / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous. — 2007. — arXiv:0710.4251. — 14 pp.
167. Ivanova N.M. On the group classification of variable coefficient nonlinear diffusion–convection equations / N.M. Ivanova, C. Sophocleous // J. Comp. Appl. Math. — 2006. — Vol. 197, № 2. — P. 322–344.
168. Johnpillai I.K. Singular invariant equation for the $(1+1)$ Fokker–Planck equation / I.K. Johnpillai, F.M. Mahomed // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34, № 49. — P. 11033–11051.
169. Kaneta H. The invariant polynomial algebras for the groups IU(n) and ISO(n) / H. Kaneta // Nagoya Math. J. — 1984. — Vol. 94. — P. 43–59.
170. Kaneta H. The invariant polynomial algebras for the groups ISL(n) and ISp(n) / H. Kaneta // Nagoya Math. J. — 1984. — Vol. 94. — P. 61–73.

171. Kamin S. Nonlinear thermal evolution in an inhomogeneous medium / S. Kamin, P. Rosenau // J. Math. Phys. — 1982. — Vol. 23, № 7. — P. 1385–1390.

172. Kara A.H. A basis of conservation laws for partial differential equations / A.H. Kara, F.M. Mahomed // J. Nonlinear Math. Phys. — 2002. — Vol. 9. — P. 60–72.

173. Kingston J.G. On point transformations of evolution equations / J.G. Kingston // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — Vol. 24, № 14. — P. L769–L774.

174. Kingston J.G. On form-preserving point transformations of partial differential equations / J.G. Kingston, C. Sophocleous // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. —Vol. 31, № 5. —P. 1597–1619.

175. Kingston J.G. On point transformations of a generalised Burgers equation / J.G. Kingston, C. Sophocleous // Phys. Lett. A. — 1991. — Vol. 155, № 1. — P. 15–19.

176. Kingston J.G. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation / J.G. Kingston, C. Sophocleous // Int. J. Non-Lin. Mech. — 2001. — Vol. 36, № 6. — P. 987–997.

177. Kirillov A.A. The variety A_n of n-dimensional Lie algebra structures / A.A. Kirillov, Yu.A. Neretin // Amer. Math. Soc. Transl (Ser. 2). — 1984. — Vol. 137. — P. 21–30.

178. Krasil'shchik I.S. Nonlocal symmetries and the theory of coverings: an addendum to Vinogradov's "Local symmetries and conservation laws" / I.S. Krasil'shchik, A.M. Vinogradov // Acta Appl. Math. — 1984. — Vol. 2, № 1. — P. 79–96.

179. Krasil'shchik I.S. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Backlund transformations / I.S. Krasil'shchik, A.M. Vinogradov // Acta Appl. Math. — 1989. — Vol. 15, № 1–2. — P. 161–209.

180. Kunzinger M. Singular reduction operators in two dimensions / M. Kunzinger, R.O. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 50. — Paper 505201, 24 pp.
181. Kunzinger M. Potential conservation laws / M. Kunzinger, R.O. Popovych // J. Math. Phys. — 2008. — Vol. 49, № 10. — Paper 103506, 34 pp.
182. Lahno V. Group classification of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46, № 4. — Paper 053301, 37 pp.
183. Lahno V. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov, O. Magda // Acta Appl. Math. — 2006. — Vol. 91, № 3. — P. 253–313.
184. Lauret J. Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups / J. Lauret // Differential Geom. Appl. — 2003. — Vol. 18, № 2. — P. 177–194.
185. Levi D. Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation / D. Levi, P. Winternitz // J. Phys. A. — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.
186. Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen / S. Lie. — Leipzig : Teubner, 1891. — 582 c.
187. Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung / S. Lie // Arch. Math. — 1881. — Vol. 6, № 3. — P. 328–368.
188. Lie S. Discussion der Differentialgleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // Arch. Math. — 1881. — Vol. 6, № 1. — P. 112–125.
189. Lisle I.G. Equivalence transformations for classes of differential equations / I.G. Lisle. — Thesis, University of British Columbia. — 1992.
190. Lisle I.G. Symmetry classification using invariant differential operators / I.G. Lisle, G.J. Reid // Found. Comput. Math. — 2006. — Vol. 6, № 3. — P. 353–386.

191. Lutfullin M. Realizations of real 4-dimensional solvable decomposable Lie algebras / M. Lutfullin, R. Popovych // Праці Інституту математики НАН України. — 2002. — Т. 43, ч. 2. — С. 466–468.
192. Mansfield E.L. The Nonclassical Group Analysis of the Heat Equation / E.L. Mansfield // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 231, № 2. — P. 526–542.
193. Marvan M. Reducibility of zero curvature representations with application to recursion operators / M. Marvan // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 83, № 1–2. — P. 39–68.
194. Matveev V.B. Darboux transformations and solitons / V.B. Matveev, M.A. Salle. — Berlin : Springer-Verlag, 1991. — 130 p.
195. Meleshko S.V. Generalization of the equivalence transformations / S.V. Meleshko // J. Nonlinear Math. Phys. — 1996. — Vol. 3, № 1–2. — P. 170–174.
196. Meleshko S.V. Methods for constructing exact solutions of partial differential equations / S.V. Meleshko. — New York : Springer, 2005. — 352 p.
197. Miller W. Symmetry and separation of variables / W. Miller. — Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, 1977. — xxx+285 p.
198. Morozov O.I. Contact equivalence problem for linear parabolic equations / O.I. Morozov // arXiv:math-ph/0304045. — 2003. — 19 p.
199. Morse P.M. Methods of theoretical physics / P.M. Morse, H. Feshbach. — New York : McGraw-Hill, 1953. — Vol. 1. — 22+998+40 p.
200. Nattermann P. Gauge classification, Lie symmetries and integrability of a family of nonlinear Schrödinger equations / P. Nattermann, H.-D. Doebner // J. Nonlinear Math. Phys. — 1996. — Vol. 3, № 3–4. — P. 302–310.

201. Ndogmo J.C. Invariants of a semi-direct sum of Lie algebras / J.C. Ndogmo // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37, № 21. — P. 5635–5647.

202. Ndogmo J.C. Solvable Lie algebras with Abelian nilradicals / J.C. Ndogmo, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27, № 2. — P. 405–423.

203. Ndogmo J.C. Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras with Abelian nilradicals / J.C. Ndogmo, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994 — Vol. 27, № 8. — P. 2787–2800.

204. Nesterenko M. Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras / M. Nesterenko, R. Popovych // Праці Інституту математики НАН України. — 2005. — Т. 55. — С. 163–168.

205. Nesterenko M. Contractions of low-dimensional Lie algebras / M. Nesterenko, R. Popovych // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47, № 12. — Paper 123515, 45 pp.

206. Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation / U. Niederer // Helv. Phys. Acta. — 1972. — Vol. 45, № 5. — P. 802–810.

207. Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator / U. Niederer // Helv. Phys. Acta. — 1973. — Vol. 46. — P. 191–200.

208. Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations / A.G. Nikitin // Укр. Мат. Вісн. — 2005. — Т. 2, № 2. — С. 149–200.

209. Nikitin A.G. Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction–Diffusion Equations / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // Праці Інституту математики НАН України. — 2000. — Т. 30, ч. 1. — С. 47–59.

210. Noether E. Invariante Variationsprobleme / E. Noether // König. Gessell. Wissen. Göttingen, Math.-phys. Kl. — 1918. — P. 235–257.

211. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations / P. Olver. — New York : Springer-Verlag, 1993. — xxviii+513 pp.
212. Olver P. Direct reduction and differential constraints / P. Olver // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1994. — Vol. 444, № 1922. — P. 509–523.
213. Olver P. Differential invariants and invariant differential equations / P. Olver // Lie Groups Appl. — 1994. — Vol. 1, № 1. — P. 177–192.
214. Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry / P. Olver. — Cambridge : Cambridge University Press, 1995. — xvi+525 pp.
215. Olver P. Differential invariants / P. Olver. — Acta Appl. Math. — 1995. — Vol. 41, № 1–3. — P. 271–284.
216. Olver P.J. The construction of special solutions to partial differential equations / P.J. Olver, P. Rosenau // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 114, № 3. — P. 107–112.
217. Olver P.J. Group-invariant solutions of differential equations / P.J. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47, № 2. — P. 263–278.
218. Olver P.J. Moving frames for Lie pseudo-groups / P.J. Olver, J. Pohjanpelto // Canad. J. Math. — 2008. — Vol. 60, № 6. — P. 1336–1386.
219. Olver P.J. Nonclassical and conditional symmetries / P.J. Olver, E.M. Vorob'ev // CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton : CRC Press, 1996. — Vol. 3. — P. 291–328.
220. Patera J. Invariants of real low dimension Lie algebras / J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 986–994.
221. Patera J. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras / J. Patera, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1977. — Vol. 18, № 7. — P. 1449–1455.

222. Perroud M. The fundamental invariants of inhomogeneous classical groups / M. Perroud // J. Math. Phys. — 1983. — Vol. 24, № 6. — P. 1381–1391.

223. Popovych H.V. Lie, partially invariant, and nonclassical submodels of Euler equations / H.V. Popovych // Пр. Інституту математики НАН України. — 2002. — Т. 43, ч. 1. — P. 178–183.

224. Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry / R.O. Popovych // Proc. of 2nd Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1997). — Київ : Інститут математики НАН України, 1997. — Т. 2. — С. 437–443.

225. Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation / R.O. Popovych // Праці Інституту математики НАН України. — Т. 30, ч. 1. — 2000. — С. 184–189.

226. Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations / R.O. Popovych // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 239–254.

227. Popovych R.O. Normalized classes of nonlinear Schrödinger equations / R.O. Popovych // Bulg. J. Phys. — 2006. — Vol. 33 (s2). — P. 211–222.

228. Popovych R.O. No-go theorem on reduction operators of linear second-order parabolic equations / R.O. Popovych // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 231–238.

229. Popovych R.O. Direct methods of construction of conservation laws / R.O. Popovych // Physics AUC. — 2006. — Vol. 16, Part II. — P. 81–94.

230. Popovych R.O. Reduction operators of linear second-order parabolic equations / R.O. Popovych. — arXiv:0712.2764v1. — 37 p.

231. Popovych R.O. Reduction operators of linear second-order parabolic equations / R.O. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 18. — Paper 185202, 31 pp.

232. Popovych R.O. Realizations of real low-dimensional Lie algebras / R.O. Popovych, V.M. Boyko, M.O. Nesterenko, M.W. Lutfullin // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36, № 26. — P. 7337–7360.

233. Popovych R.O. Realizations of real low-dimensional Lie algebras / R.O. Popovych, V.M. Boyko, M.O. Nesterenko, M.W. Lutfullin. — arXiv:math-ph/0301029v7. — 2005. — 39 pp.

234. Popovych R.O. Admissible point transformations of nonlinear Schrödinger equations / R.O. Popovych, H. Eshraghi // Proc. of 10th Int. Conf. in Modern Group Analysis (MOGRAN X) (Larnaca, Cyprus, 2004). — Nicosia : University of Cyprus, 2005. — P. 167–174.

235. Popovych R.O. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations / R.O. Popovych, N.M. Ivanova // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — V. 37, № 30. — P. 7547–7565.

236. Popovych R.O. Hierarchy of conservation laws of diffusion–convection equations / R.O. Popovych, N.M. Ivanova // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46, № 20. — Paper 043502, 21 pp.

237. Popovych R.O. Group classification of (1+1)-dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearities / R.O. Popovych, N.M. Ivanova, H. Eshraghi // J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 45, № 8. — P. 3049–3057.

238. Popovych R.O. Lie symmetries of (1+1)-dimensional cubic Schrödinger equation with potential / R.O. Popovych, N.M. Ivanova, H. Eshraghi // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2004. —Т. 50, Ч. 1. — С. 219–224.

239. Popovych R.O. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion–convection equations / R.O. Popovych, N.M. Ivanova // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38, № 14. — P. 3145–3155.

240. Popovych R.O. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations / R.O. Popovych, M. Kunzinger,

H. Eshraghi // Acta Appl. Math. — 2008. — DOI: 10.1007/s10440-008-9321-4. — 45 pp. arXiv:math-ph/0611061.

241. Popovych R.O. Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations / R.O. Popovych, M. Kunzinger, N.M. Ivanova // Acta Appl. Math. — 2008. — Vol. 100, № 2. — P. 113–185.

242. Popovych R.O. Local conservation laws of second-order evolution equations / R.O. Popovych, A.M. Samoilenko // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 36. — Paper 362002, 11 pp.

243. Popovych R.O. Exact solutions of a remarkable fin equation / R.O. Popovych, C. Sophocleous, O.O. Vaneeva // Appl. Math. Lett. — 2008. — Vol. 21, № 3. — P. 209–214.

244. Popovych R.O. Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation / R.O. Popovych, O.O. Vaneeva, N.M. Ivanova // Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 362, № 2–3. — P. 166–173.

245. Prokhorova M. The structure of the category of parabolic equations / M. Prokhorova. — arXiv:math.AP/0512094. — 2005. — 24 p.

246. Pucci E. On the weak symmetry groups of partial differential equations / E. Pucci, G. Saccomandi // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — Vol. 163, № 2. — P. 588–598.

247. Pucci E. Potential symmetries and solutions by reduction of partial differential equations / E. Pucci, G. Saccomandi // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — Vol. 26, № 3. — P. 681–690.

248. Pucci E. Potential symmetries of Fokker Plank equations / E. Pucci, G. Saccomandi // Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics (Acireale, 1992). — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1993. — P. 291–298.

249. Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations / V.V. Pukhnachov // Energy methods in continuum mechanics. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1996. — P. 75–99.

250. Rajaee L. Multi-dimensional quasi-simple waves in weakly dissipative flows / L. Rajaee, H. Eshraghi, R.O. Popovych // Phys. D. — 2008. — Vol. 237, № 3. — P. 405–419.

251. Rosenau P. Fast and superfast diffusion processes / P. Rosenau // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 74, № 7. — P. 1056–1059.

252. Rubin J.L. Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals / J.L. Rubin, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 1993. — Vol. 26, № 5. — P. 1123–1138.

253. Saccomandi G. Potential symmetries and direct reduction methods of order two / G. Saccomandi // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — Vol. 30, № 6. — P. 2211–2217.

254. Saletan E.J. Contraction of Lie groups / E.J. Saletan // J. Math. Phys. — 1961. — Vol. 2. — P. 1–21.

255. Sastri C.C.A. Lie symmetries of some equations of the Fokker–Planck type / C.C.A. Sastri, K.A. Dunn // J. Math. Phys. — 1985. — Vol. 26, № 12. — P. 3042–3047.

256. Schwarz F. Solving second-order differential equations with Lie symmetries / F. Schwarz // Acta Appl. Math. — 2000. — Vol. 60, № 1. — P. 39–113.

257. Sciarrino A. Symmetries and solutions of the vector nonlinear Schrödinger equation / A. Sciarrino, P. Winternitz // Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B (12). — 1997. — Vol. 112, № 6. — P. 853–871.

258. Segal I.E. A class of operator algebras which are determined by groups / I.E. Segal // Duke Math. J. — 1951. — Vol. 18, № 1. — P. 221–265.

259. Sergyeyev A. Constructing conditionally integrable evolution systems in $(1+1)$ dimensions: a generalization of invariant modules approach / A. Sergyeyev // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — Vol. 35, № 35. — P. 7653–7660.

260. Sergyeyev A. On recursion operators and nonlocal symmetries of evolution equations / A. Sergyeyev // Proceedings of the Seminar on

Differential Geometry, Math. Publications. — Silesial University in Opava. — 2000. — Vol. 2. — P. 159–173.

261. Storm M.L. Heat conduction in simple metals / M.L. Storm // J. Appl. Phys. — 1951. — Vol. 22. — P. 940–951.
262. Seeley C. Degenerations of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over C / C. Seeley // Comm. Algebra. — 1990. — Vol. 18, № 10. — P. 3493–3505.
263. Sophocleous C. On symmetries of radially symmetric nonlinear diffusion equations / C. Sophocleous // J. Math. Phys. — 1992. — Vol. 33, № 11. — P. 3687–3693.
264. Sophocleous C. Potential symmetries of nonlinear diffusion-convection equations / C. Sophocleous // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — Vol. 29, № 21. — P. 6951–6959.
265. Sophocleous C. Potential symmetries of inhomogeneous nonlinear diffusion equations / C. Sophocleous // Bull. Austral. Math. Soc. — 2000. — V. 61, № 3. — P. 507–521.
266. Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of generalised inhomogeneous nonlinear diffusion equations / C. Sophocleous // Phys. A. — 2003. — Vol. 324, № 3–4. — P. 509–529.
267. Sophocleous C. Transformation properties of a variable-coefficient Burgers equation / C. Sophocleous // Chaos, Solitons Fractals. — 2004. — Vol. 20, № 5. — P. 1047–1057.
268. Sophocleous C. Classification of potential symmetries of generalised inhomogeneous nonlinear diffusion equations / C. Sophocleous // Physica A. — 2003. — V. 320. — P. 169–183.
269. Strampp W. Bäcklund transformations for diffusion equations / W. Strampp // Phys. D. — 1982. — Vol. 6, № 1. — P. 113–118.
270. Šnobl L. A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants / L. Šnobl, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38, № 12. — P. 2687–2700.

271. Šnobl L. All solvable extensions of a class of nilpotent Lie algebras of dimension n and degree of nilpotency $n-1$ / L. Šnobl, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — Vol. 42, № 10. — Paper 105201, 16 pp.

272. Tremblay S. Solvable Lie algebras with triangular nilradicals / S. Tremblay, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31, № 2. — P. 789–806.

273. Tremblay S. Invariants of the nilpotent and solvable triangular Lie algebras / S. Tremblay, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — Vol. 34, № 42. — P. 9085–9099.

274. Tsujishita T. On variation bicomplexes associated to differential equations / T. Tsujishita // Osaka J. Math. — 1982. — Vol. 19, № 2. — P. 311–363.

275. Vaneeva O.O. Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities / O.O. Vaneeva, A.G. Johnpillai, R.O. Popovych, C. Sophocleous // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 330, № 2. — P. 1363–1386.

276. Vaneeva O.O. Group analysis of nonlinear fin equations / O.O. Vaneeva, A.G. Johnpillai, R.O. Popovych, C. Sophocleous // Appl. Math. Lett. — 2008. — Vol. 21, № 3. — P. 248–253.

277. Vaneeva O.O. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source / O.O. Vaneeva, R.O. Popovych, C. Sophocleous // Acta Appl. Math. — 2008. — DOI:10.1007/s10440-008-9280-9. — 46 pp. arXiv:0708.3457.

278. Vergne M. Variétés des algèbres de Lie nilpotentes / M. Vergne. — Thése de 3 éme cycle, Université Paris. — 1966.

279. Vinogradov A.M. The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws / A.M. Vinogradov // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — Vol. 100, № 1. — P. 1–129.

280. Vinogradov A.M. On the theory of nonlocal symmetries of nonlinear partial differential equations / A.M. Vinogradov, I.S. Krasil'shchik // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1984. — Vol. 275, № 5. — P. 1044–1049.
281. Vorob'ev E.M. Reduction and quotient equations for differential equations with symmetries / E.M. Vorob'ev // Acta Appl. Math. — 1991. — Vol. 23, № 1. — P. 1–24.
282. Vorob'ev E.M. Symmetries of compatibility conditions for systems of differential equations / E.M. Vorob'ev // Acta Appl. Math. — 1992. — Vol. 26, № 1. — P. 61–86.
283. Wahlquist H.D. Prolongation structures of nonlinear evolution equations / H.D. Wahlquist, F.B. Estabrook // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 1. — P. 1–7.
284. Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system / G.M. Webb // J. Phys. A.: Math. Gen. — 1990. — Vol. 23, № 17. — P. 3885–3894.
285. Weimar-Woods E. Contractions, generalized Inönü–Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras / E. Weimar-Woods // Rev. Math. Phys. — 2000. — Vol. 12, № 11. — P. 1505–1529.
286. Wittkopf A.D. Algorithms and Implementations for Differential Elimination / A.D. Wittkopf. — PhD. Thesis. — Simon Fraser University, 2004. — 338 p.
287. Wittkopf A.D. Fast differential elimination algorithms. Technical Report TR-00-06 / A.D. Wittkopf, G.J. Reid. — Waterloo : Ontario Research Centre for Computer Algebra, 2000. — 18 p.
288. Wittkopf A.D. Fast differential elimination in C: The CDiffElim environment / A.D. Wittkopf, G.J. Reid // Comp. Phys. Comm. — 2001. — Vol. 139, № 2. — P. 192–217.
289. Wolf T. A comparison of four approaches to the calculation of conservation laws / T. Wolf // Eur. J. Appl. Math. — 2002. — Vol. 13, № 2. — P. 129–152.

290. Zhdanov R.Z. Conditional Lie-Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations / R.Z. Zhdanov // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — Vol. 28, № 13. — P. 3841–3850.

291. Zhdanov R.Z. Conditional symmetry of a porous medium equation / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // Phys. D. — 1998. — Vol. 122, № 1–4. — P. 178–186.

292. Zhdanov R.Z. Conditional symmetry of the (1+1)-dimensional Boussinesq equation: a no-go theorem / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // Праці Інституту математики НАН України. — 1998. — Т. 19. — С. 88–99.

293. Zhdanov R.Z. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32, № 42. — P. 7405–7418.

294. Zhdanov R. Group Classification of the general evolution equation: local and quasilocal symmetries / R. Zhdanov, V. Lahno // SIGMA. — 2005. — Vol. 1, Paper 009. — 7 p.

295. Zhdanov R. Group classification of the general second-order evolution equation: semi-simple invariance groups / R. Zhdanov, V. Lahno // J. Phys. A: Math. Gen. — 2007. — Vol. 40, № 19. — P. 5083–5103.

296. Zhdanov R. On preliminary symmetry classification of nonlinear Schrödinger equation with some applications of Doebner–Goldin models / R. Zhdanov, O. Roman // Rep. Math. Phys. — 2000. — Vol. 45, № 2. — P. 273–291.

297. Zhdanov R.Z. A precise definition of reduction of partial differential equations / R.Z. Zhdanov, I.M. Tsyfra, R.O. Popovych // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 238, № 1. — P. 101–123.

Додаток А

Груповий аналіз рівнянь реакції–конвекції–дифузії

У цьому додатку наведено результати розширеного групового аналізу у різних класах $(1+1)$-вимірних рівнянь реакції–конвекції–дифузії, які, починаючи з робіт Овсяннікова, традиційно є об'єктами симетрійних досліджень. Такі рівняння дають нетривіальні приклади щодо ілюстрації запропонованих у дисертації понять і застосувань розроблених методів у ситуаціях, коли існуючі методи неефективні. Також побудовано приховані симетрії і точні розв'язки $(1+2)$-вимірного рівняння Бюргерса.

Результати, зібрані у цьому додатку, опубліковано в роботах [161–166, 181, 229, 235, 236, 243, 250, 275–277].

А.1. Закони збереження і потенціальні системи рівнянь конвекції–дифузії

Прокласифікуємо закони збереження і потенціальні системи рівнянь конвекції–дифузії вигляду (4.16), залучаючи техніку, розвинуту у підрозділах 4.3 і 4.9.

Група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (4.16) складається з перетворень

$$\tilde t=\varepsilon_4 t+\varepsilon_1,\quad \tilde x=\varepsilon_5 x+\varepsilon_7 t+\varepsilon_2,\quad \tilde u=\varepsilon_6 u+\varepsilon_3,$$
$$\tilde A=\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5^2 A,\quad \tilde B=\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5 B-\varepsilon_7,$$

де $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7$ — довільні сталі, $\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 \neq 0$, а ядро (перетин) $G^\cap$ максимальних груп ліївської інваріантністі рівнянь з класу (4.16) — з перетворень $\tilde t = t + \varepsilon_1$, $\tilde x = x + \varepsilon_2$, $\tilde u = u$.

Кожне рівняння з класу (4.16) має закон збереження

$$\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0(A, B)\colon \quad F = u, \quad G = -Au_x - \textstyle\int B, \quad \lambda = 1,$$

де F, G, λ — відповідно його густина, потік і характеристика. Повний список $G^\sim$-нееквівалентних рівнянь (4.16), що мають додаткові (тобто лінійно незалежні від $\mathcal{F}^0$) закони збереження, вичерпують наступні рівняння

$$\begin{array}{lllll} B = 0, & \mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(A)\colon & F = xu, & G = \int A - xAu_x, & \lambda = x; \\ B = A, & \mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^2(A)\colon & F = e^x u, & G = -e^x A u_x, & \lambda = e^x; \\ A = 1, & B = 0, \quad \mathcal{F}^3_h\colon & F = hu, & G = h_x u - h u_x, & \lambda = h, \end{array}$$

де $\int A = \int A(u)du$, $\int B = \int B(u)du$, $h = h(t, x)$ — довільний розв'язок зворотного лінійного рівняння теплопровідності $h_t + h_{xx} = 0$. (Разом з обмеженнями для A і B наведена таблиця також містить повні списки густин, потоків і характеристик додаткових законів збереження.)

Загальний випадок. У загальному випадку рівняння (4.16) має єдиний лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}^0(A, B)$. Відповідна потенціальна система $v^1_x = u$, $v^1_t = Au_x + \int B$ допускає тільки нульовий закон збереження, тобто рівняння (4.16) загального вигляду не має чисто потенціальних законів збереження.

$\boldsymbol{B = 0}$. Кожне рівняння з $B = 0$ і загальним значенням A допускає точно два лінійно незалежні локальні закони збереження $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0(A, 0)$ і $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(A)$, причому з точністю до сталого множника будь-який закон збереження $G^\cap$-еквівалентний одному з них. Використовуючи ці закони збереження, введемо потенціали v^1 і v^2, де

$$v^1_x = u, \quad v^1_t = Au_x, \tag{A.1}$$

$$v^2_x = xu, \quad v^2_t = xAu_x - \textstyle\int A. \tag{A.2}$$

Пари рівнянь (A.1) і (A.2), взяті окремо, утворюють дві потенціальні системи для рівняння (4.16) (з нульовим B) з невідомими функціями (u, v^1) і (u, v^2) відповідно. Третю потенціальну систему рівняння (A.1) і (A.2) утворюють разом, причому невідомими вважаємо три функції u, v^1 і v^2. Оскільки характеристики $\lambda = 1$ і $\lambda = x$ неособливі, то вихідне рівняння є диференціальним наслідком обох потенціальних частин (A.1) і (A.2) і не входить до мінімальної множини рівнянь, що зображають потенціальні системи. Отже, характеристики систем (A.1) і (A.2) мають дві компоненти. Компоненти β і α відповідають першому і другому рівнянням цих систем відповідно.

Система (A.1) має тільки один лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}$, вектор густини $(F, G) = (v^1, -\int A)$ якого асоційований з характеристикою $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. В силу теореми 4.2 цей закон збереження індуковано законом збереження вихідного рівняння. Знайдемо вектор густини $(\tilde{F}, \tilde{G})$, еквівалентний вектору (F, G) і додатково не залежний від похідних потенціалів. Функція Φ (див. підрозділ 4.9) задовольняє рівняння $D_x\Phi = \alpha = 1$ і $D_t\Phi = -\beta = 0$. Виберемо значення $\Phi = x$ і розглянемо вектор $(\hat{F}, \hat{G})$, еквівалентний вектору (F, G) з компонентами

$$\hat{F} = F + \Phi(v^1_x - u) = (xv^1)_x - xu,$$
$$\hat{G} = G - \Phi(v^1_t - Au_x) = -(xv^1)_t - \int A + xAu_x.$$

З точністю до доданку $((xv^1)_x, -(xv^1)_t)$, який очевидно є нульовою дивергенцією, вектор $(\hat{F}, \hat{G})$, що зберігається, еквівалентний вектору густини $(\tilde{F}, \tilde{G}) = (-xu, xAu_x - \int A)$ закону збереження $-\mathcal{F}^1$. Ось чому потенціальна система "другого рівня"

$$v^1_x = u, \quad w^1_x = v^1, \quad w^1_t = \int A, \tag{A.3}$$

отримана з (A.1) введенням потенціалу "другого рівня" w^1 за законом збереження $\mathcal{F}$, в дійсності еквівалентна відносно точкового перетворення $w^1 = xv^1 - v^2$ об'єднаній потенціальній системі "першого рівня" (A.1)–(A.2). Хоча система (A.3) формально належить другому рівню, вона більше підходить для подальшого дослідження, оскільки має найпростіший вигляд серед потенціальних систем, побудованих за двома законами збереження з рівняння (4.16) з $B = 0$.

Аналогічно, система (A.2) має тільки один лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}$ з вектором густини $(F, G) = (x^{-2}v^2, -x^{-1}\int A)$ і характеристикою $(\alpha, \beta) = (x^{-2}, 0)$. З теореми 4.2 випливає, що цей закон збереження індуковано законом збереження вихідного рівняння. Як розв'язок рівнянь $D_x\Phi = \alpha = x^{-2}$ і $D_t\Phi = -\beta = 0$ виберемо значення $\Phi = -x^{-1}$. Тоді

$$\hat{F} = x^{-2}v^2 - x^{-1}(v^2_x - xu) = -(x^{-1}v^2)_x + u,$$
$$\hat{G} = -x^{-1}\textstyle\int A + x^{-1}(v^2_t - xAu_x + \int A) = -(x^{-1}v^2)_t - Au_x.$$

Вектор $(\hat{F}, \hat{G})$ еквівалентний за побудовою вектору (F, G) на множині розв'язків системи (A.3). З точністю до нульової дивергенції $((x^{-1}v^2)_x, -(x^{-1}v^2)_t)$, він також еквівалентний вектору $(\tilde{F}, \tilde{G}) = (u, -Au_x)$, який залежить тільки від похідних функцій u і належить закону збереження $\mathcal{F}^0$. Отже потенціальна система “другого рівня”

$$v^2_x = xu, \quad w^2_x = x^{-2}v^2, \quad w^2_t = x^{-1}\textstyle\int A,$$

отримана з (A.2) введенням потенціалу “другого рівня” w^2 за законом збереження $\mathcal{F}$, також еквівалентна відносно точкового перетворення $w^2 = v^1 - x^{-1}v^2$ об'єднаній системі (A.1)–(A.2).

Простір законів збереження об'єднаної системи (A.1)–(A.2) нульвимірний. Отже, для будь-якого рівняння (4.16) з $B = 0$ всі потенціальні закони збереження індуковано локальними, а всі нееквівалентні потенціальні системи вичерпано системами (A.1), (A.2) і (A.3).

$\boldsymbol{B = A}$. Аналіз виконуємо у спосіб, подібний до попередніх випадків. Кожне рівняння з $B = A$ і загальним значенням A має двовимірний простір локальних законів збереження з базисом $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0(A, A)$ і $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^2(A)$, причому з точністю до сталого множника будь-який закон збереження $G^{\cap}$-еквівалентний або $\mathcal{F}^0$, або $\mathcal{F}^2+\varepsilon\mathcal{F}^0$, де $\varepsilon\in\{0,\pm1\}$. Використовуючи закони збереження $\mathcal{F}^0$ і $\mathcal{F}^2+\varepsilon\mathcal{F}^0$, можна ввести незалежні потенціали v^1 і v^3, що задовольняють умови

$$v^1_x=u,\quad v^1_t=Au_x+\textstyle\int A, \tag{A.4}$$

$$v^3_x=(e^x+\varepsilon)u,\quad v^3_t=(e^x+\varepsilon)Au_x+\varepsilon\textstyle\int A. \tag{A.5}$$

Пари рівнянь (A.4) і (A.5) окремо утворюють дві потенціальні системи для рівняння (4.16) з $B=A$ з невідомими функціями (u,v^1) і (u,v^3) відповідно. Третю потенціальну систему утворено рівняннями (A.4) і (A.5) разом, причому три функції u, v^1 і v^3 вважаємо невідомими. Оскільки характеристики $\lambda=1$ і $\lambda=e^x+\varepsilon$ неособливі, то вихідне рівняння є диференціальним наслідком обох потенціальних частин (A.4) і (A.5) і не входить у мінімальні множини рівнянь, що зображають потенціальні системи. Отже, характеристики систем (A.4) і (A.5) мають дві компоненти. Компоненти β і α відповідають першому і другому рівнянням цих систем.

Система (A.4) має тільки один лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}$, вектор густини $(F,G)=(e^xv^1,-e^x\int A)$ якого асоційований з характеристикою $(\alpha,\beta)=(e^x,0)$. Виберемо розв'язок $\Phi=e^x$ рівнянь $D_x\Phi=\alpha=1$ і $D_t\Phi=-\beta=0$ і покладемо

$$\hat F=e^xv^1+e^x(v^1_x-u)=(e^xv^1)_x-e^xu,$$
$$\hat G=-e^x\textstyle\int A-e^x(v^1_t-Au_x-\int A)=-(e^xv^1)_t+e^xAu_x.$$

Вектор $(\hat F,\hat G)$ еквівалентний вектору (F,G) за побудовою і з точністю до нульової дивергенції $((e^xv^1)_x,-(e^xv^1)_t)$ еквівалентний вектору $(\tilde F,\tilde G)=(-e^xu,e^xAu_x)$. Цей вектор не залежить від потенціалу v^1 і належить закону збереження $-\mathcal{F}^2$. Тому закон збереження $\mathcal{F}$ потенціальної системи (A.5) індуковано законом збереження $-\mathcal{F}^2$ вихідного рівняння. Отже, потенціальна система “другого рівня”

$$v^1_x=u,\quad w^1_x=e^xv^1,\quad w^1_t=e^x\textstyle\int A, \tag{A.6}$$

отримана з (A.5) введенням потенціалу "другого рівня" w^1 за законом збереження $\mathcal{F}$, еквівалентна відносно точкового перетворення $w^1 = e^x v^1 - v^3$ об'єднаній системі (A.4)–(A.5), де $\varepsilon = 0$. Хоча система (A.6) формально належить другому рівню, вона є найбільш придатною для подальших досліджень з-поміж потенціальних систем, побудованих з рівняння (4.16) з $B = A$ за двома законами збереження, оскільки має найпростіший вигляд.

Система (A.5) також допускає тільки один лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}$, який містить вектор густини $(F, G) = (e^x(e^x+\varepsilon)^{-2}v^3, -e^x(e^x+\varepsilon)^{-1}\int A)$, асоційований з характеристикою $(\alpha, \beta) = (e^x(e^x+\varepsilon)^{-2}, 0)$, і тому в силу теореми 4.2 індукований законом збереження вихідного рівняння. Виберемо розв'язок $\Phi = -(e^x+\varepsilon)^{-1}$ рівнянь $D_x\Phi = \alpha$ і $D_t\Phi = -\beta$ і покладемо

$$\hat{F} = \frac{e^x v^3}{(e^x+\varepsilon)^2} - \frac{v^3_x - (e^x+\varepsilon)u}{e^x+\varepsilon} = -\left(\frac{v^3}{e^x+\varepsilon}\right)_x + u,$$

$$\hat{G} = \frac{e^x\int A}{e^x+\varepsilon} + \frac{v^3_t - (e^x+\varepsilon)Au_x - \varepsilon\int A}{e^x+\varepsilon} = \left(\frac{v^3}{e^x+\varepsilon}\right)_t - Au_x - \int A.$$

Аналогічно попередньому випадку вектор $(\hat{F}, \hat{G})$ еквівалентний вектору (F, G) і з точністю до нульової дивергенції також еквівалентний вектору $(\tilde{F}, \tilde{G}) = (u, -Au_x - \int A)$, який залежить тільки від похідних функцій u і належить закону збереження $\mathcal{F}^0$. Отже, потенціальна система "другого рівня"

$$v^3_x = (e^x+\varepsilon)u, \quad w^3_x = \frac{e^x}{(e^x+\varepsilon)^2}v^3, \quad w^3_t = \frac{e^x}{e^x+\varepsilon}\int A,$$

отримана з (A.5) введенням потенціалу "другого рівня" w^3 за законом збереження $\mathcal{F}$, також еквівалентна відносно точкового перетворення $w^3 = v^1 - (e^x+\varepsilon)^{-1}v^3$ об'єднаній системі (A.4)–(A.5).

Простір законів збереження об'єднаної системи (A.4)–(A.5) нульвимірний. Отже, для будь-якого рівняння (4.16) з $B = A$ всі потенціальні закони збереження індуковано локальними, а всі нееквівалентні потенціальні системи вичерпано системами (A.4), (A.5) і (A.6).

$\boldsymbol{B = \int A + uA}$. З точки зору локальних законів збереження, цей випадок не вирізняється із загального. Будь-яке рівняння з класу (4.16) з таким значенням параметр-функції B і довільним значенням параметр-функції A має єдиний лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0(A, \int A + uA)$. Водночас відповідна потенціальна система

$$v^1_x = u, \quad v^1_t = Au_x + u\int A \tag{A.7}$$

також допускає один лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}^4(A)$ з вектором густини $(F, G) = (e^{v^1}, -e^{v^1}\int A)$ і характеристикою $(\alpha, \beta) = (e^{v^1}, -e^{v^1}\int A)$. Оскільки характеристика повністю зведена і залежить від потенціалу v^1, то в силу твердження 4.11 закон збереження $\mathcal{F}^4$ не індуковано локальним законом збереження вихідного рівняння, тобто це чисто потенціальний закон збереження. Потенціальна система (A.7) зводиться до потенціальної системи (A.4) за допомогою потенціального перетворення годографа

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = v^1, \quad \tilde v^1 = x, \quad \tilde u = u^{-1}, \quad \tilde A = u^2 A, \tag{A.8}$$

причому закон збереження $\mathcal{F}^4$ відображається у індукований законом збереження $\mathcal{F}^2$. Те саме перетворення, розширене за формулою $\tilde w = -w + v^1 e^x$ на потенціал другого рівня w, введений за законом збереження $\mathcal{F}^4$, також зводить потенціальну систему другого рівня $v_x = u$, $w_x = e^v$, $w_t = e^v\int A$ до системи (A.6). Отже, хоча будь-яке рівняння з класу (4.16) з $B = \int A + uA$ допускає нетривіальний потенціальний закон збереження, цей випадок не дає принципово нових потенціальних систем.

Лінійне рівняння теплопровідності. (Див. підрозділ 6.2.) Простір локальних законів збереження лінійного рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$ нескінченновимірний. Його утворюють закони збереження

$\mathcal{F}^4_h$, де $h = h(t, x)$ пробігає розв'язки зворотного лінійного рівняння теплопровідності $h_t + h_{xx} = 0$ [13]. Фіксуючи довільне $p \in \mathbb{N}$ і вибираючи p лінійно незалежних розв'язків $h^1, \dots, h^p$ зворотного лінійного рівняння теплопровідності, отримаємо p лінійно незалежних законів збереження $\mathcal{F}^4_{h^1}, \dots, \mathcal{F}^4_{h^p}$. Потенціали $v^1, \dots, v^p$, введені за цими законами збереження рівняннями

$$v^s_x = h^s u, \quad v^s_t = h^s u_x - h^s_x u, \quad s = \overline{1,p}, \tag{A.9}$$

незалежні у сенсі означення 4.14. Кожен локальний закон збереження системи (A.9) індуковано локальним законом збереження лінійного рівняння теплопровідності. Таким чином, системи вигляду (A.9) вичерпують всі можливі потенціальні системи цього рівняння, і всі його потенціальні закони збереження індуковано локальними.

Лінеаризовні рівняння. З точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності клас (4.16) містить три лінеаризовні рівняння, а саме рівняння u^{-2}-дифузії $u_t = (u^{-2}u_x)_x$ [74,261], споріднене рівняння $u_t = (u^{-2}u_x)_x + u^{-2}u_x$ [120,269] і рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$ [110, 121, 153]. Добре відомо, що ці рівняння лінеаризуються нелокальними перетвореннями (так званими потенціальними перетвореннями еквівалентності у клас (4.16) [189, 239]) до лінійного рівняння теплопровідності. Маючи звичайні властивості щодо локальних законів збереження, вони вирізняються з інших рівнянь конвекції–дифузії вигляду (4.16) тим, що мають нескінченну кількість лінійно незалежних чисто потенціальних законів збереження.

Рівняння u^{-2}-дифузії $\boldsymbol{u_t = (u^{-2}u_x)_x}$ допускає, як підвипадок випадку $B = 0$, два лінійно незалежних локальних закони збереження $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0(u^{-2}, 0)$ і $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}^1(u^{-2})$. Потенціальна система, побудована за законом збереження $\mathcal{F}^1$, співпадає з (A.2), де $A = u^{-2}$, і має ті самі властивості, як для загального A (див. випадок $B = 0$). Закон збереження $\mathcal{F}^0$ дає потенціальну систему вигляду (A.1) з $A = u^{-2}$, простір локальних законів збереження якої нескінченновимірний на відміну від загального A і складається із законів збереження $\mathcal{F}^5_\sigma$ з векторами густини $(F,G)=(\sigma,\sigma_v u^{-1})$ і характеристиками $(\alpha,\beta)=(\sigma_v,-\sigma_t u^{-1})$. Тут параметр-функція $\sigma=\sigma(t,v)$ пробігає множину розв'язків зворотного лінійного рівняння теплопровідності $\sigma_t+\sigma_{vv}=0$, потенціал v^1 перепозначено як v. Оскільки будь-яка з наведених вище характеристик повністю зведена і залежить від потенціалу v у випадку $\sigma_{vv}\neq 0$, то внаслідок твердження 4.11 кожен закон збереження $\mathcal{F}^5_\sigma$ з $\sigma_{vv}\neq 0$ не індукований локальним законом збереження вихідного рівняння, тобто це чисто потенціальний закон збереження. Закон збереження $\mathcal{F}^5_v$ індуковано законом збереження $\mathcal{F}^2=\mathcal{F}^2(u^{-2})$ і $\mathcal{F}^5_1$ — нульовий закон збереження.

Рівняння u^{-2}-дифузії зводиться до лінійного рівняння теплопровідності [74] потенціальним перетворенням годографа (A.8). Більш точно, перетворення (A.8) є локальним перетворенням між відповідними потенціальними системами $v_x=u$, $v_t=u^{-2}u_x$ і $v_x=u$, $v_t=u_x$, побудованими за законами збереження $\mathcal{F}^0(u^{-2},0)$ і $\mathcal{F}^0(1,0)=\mathcal{F}^4_1$ відповідно. Тому дія перетворення (A.8) відображає кожен з цих законів збереження у нульовий закон збереження перетвореної системи. Більш того, перетворення (A.8) зумовлює відповідність законів збереження $\mathcal{F}^5_\sigma$ і $\mathcal{F}^4_h$ з однаковими значеннями параметр-функцій $\sigma(t,v)=h(\tilde t,\tilde x)$.

Зафіксуємо довільне $p\in\mathbb{N}$ і виберемо p розв'язків σ^1, …, σ^p зворотного лінійного рівняння теплопровідності, будь-яка лінійна комбінація яких не є сталою. Використовуючи p лінійно незалежних законів збереження $\mathcal{F}^5_{\sigma^1}$, …, $\mathcal{F}^5_{\sigma^p}$, з системи (A.1) з $A=u^{-2}$ побудуємо потенціальну систему другого рівня $\mathcal{S}$. Система $\mathcal{S}$ точково еквівалентна потенціальній системі лінійного рівняння теплопровідності, асоційованій із законами збереження $\mathcal{F}^4_1$, $\mathcal{F}^4_{\sigma^1}$, …, $\mathcal{F}^4_{\sigma^p}$. Наведені вище результати для законів збереження лінійного рівняння теплопровідності означають, що будь-який закон збереження системи $\mathcal{S}$ індуковано законом збереження системи (A.1) з $A=u^{-2}$. Отже, цей випадок не дає принципово нових потенціальних систем, хоча рівняння u^{-2}-дифузії допускає нескінченновимірний простір потенціальних законів збереження першого рівня, пов'язаних з системою (А.1).

Оскільки рівняння $\boldsymbol{u_t = (u^{-2}u_x)_x + u^{-2}u_x}$ зводиться до рівняння u^{-2}-дифузії точковим перетворенням $\tilde t = t$, $\tilde x = e^x$, $\tilde u = e^{-x}u$, його закони збереження пов'язані із законами збереження лінійного рівняння теплопровідності подібно до попереднього випадку.

Рівняння Бюргерса $\boldsymbol{u_t = u_{xx} + 2uu_x}$ вирізняється з рівнянь вигляду (4.16), де $B = \int A + uA$, своїми потенціальними законами збереження. Як будь-яке рівняння з $B = \int A + uA$, воно має єдиний лінійно незалежний локальний закон збереження $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^0(1, 2u)$. Асоційована потенціальна система $v_x = u$, $v_t = u_x + u^2$ має нескінченновимірний простір законів збереження $\mathcal{F}^7_h$ з векторами густини $(he^v, h_xe^v - hue^v)$ і характеристиками $(he^v, h_xe^v - hue^v)$. Тут параметр-функція $h = h(t, x)$ пробігає множину розв'язків зворотного лінійного рівняння теплопровідності $h_t + h_{xx} = 0$. Будь-яка з наведених вище характеристик повністю зведена і залежить від потенціалу v, якщо $h \neq 0$. Тому в силу твердження 4.11 кожний закон збереження $\mathcal{F}^7_h$ з $h \neq 0$ не є індукованим локальним законом збереження вихідного рівняння, тобто це чисто потенціальний закон збереження.

Потенціальна система $v_x = u$, $v_t = u_x + u^2$ рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$ відображається у потенціальну систему $\tilde v_{\tilde x} = \tilde u$, $\tilde v_{\tilde t} = \tilde u_{\tilde x}$ (побудовану з лінійного рівняння теплопровідності $\tilde u_{\tilde t} = \tilde u_{\tilde x\tilde x}$ з використанням "спільного" закону збереження $\mathcal{F}^0(1, 0) = \mathcal{F}^4_1$) точковим перетворенням $\tilde t = t$, $\tilde x = x$, $\tilde u = ue^v$, $\tilde v = e^v$. Це перетворення встановлює відповідність між законом збереження $\mathcal{F}^7_{h_x}$ і законом збереження потенціальної системи $\tilde v_{\tilde x} = \tilde u$, $\tilde v_{\tilde t} = \tilde u_{\tilde x}$, індукованим $\mathcal{F}^4_h$. Зауважимо, що якщо параметр-функція $h = h(t, x)$ є розв'язком оберненого лінійного рівняння теплопровідності, то її похідна h_x також є розв'язком того самого рівняння. Відома підстановка Коула–Хопфа [110, 153] (вперше знайдена в [121]) є наслідком наведеного вище перетворення і в дійсності лінеаризує рівняння Бюргерса до лінійного рівняння теплопровідності на потенціал $\tilde{v}$ [189, 239].

Для деякого $p \in \mathbb{N}$ виберемо p розв'язків $h^1, \ldots, h^p$ зворотного лінійного рівняння теплопровідності так, щоб будь-яка їх лінійна комбінація не дорівнювала константі. Потенціальна система другого рівня $\mathcal{S}$, побудована з потенціальної системи $v_x = u$, $v_t = u_x + u^2$ із використанням p лінійно незалежних законів збереження $\mathcal{F}^7_{h^1_x}, \ldots, \mathcal{F}^7_{h^p_x}$ точково еквівалентна потенціальній системі лінійного рівняння теплопровідності, асоційованій із законами збереження $\mathcal{F}^4_1$, $\mathcal{F}^4_{h^1}, \ldots, \mathcal{F}^4_{h^p}$. З наведених результатів для законів збереження лінійного рівняння теплопровідності випливає, що будь-який закон збереження системи $\mathcal{S}$ індуковано законом збереження потенціальної системи $v_x = u$, $v_t = u_x + u^2$. Отже, цей випадок дає тільки потенціальні системи, що є точково еквівалентними системі вигляду (A.9).

Використовуючи побудовані потенціальні системи і результати щодо потенціальних симетрій лінійного рівняння теплопровідності (див. підрозділ 6.3), можна отримати досить повний опис потенціальних симетрій рівнянь (4.16) [3, 162, 239].

На прикладі лінеаризовних рівнянь конвекції–дифузії проілюструємо твердження про вплив невизначеності потенціалів на потенціальні закони збереження (див. підрозділ 4.10). Так, потенціальна система $v_x = u$, $v_t = u^{-2}u_x$ рівняння u^{-2}-дифузії $u_t = (u^{-2}u_x)_x$ має нескінченновимірний простір локальних законів збереження $\mathcal{F}^5_\sigma$ з векторами густини $(\sigma, \sigma_v u^{-1})$ і характеристиками $(\sigma_v, -\sigma_t u^{-1})$. Тут параметр-функція $\sigma = \sigma(t, v)$ пробігає множину розв'язків зворотного лінійного рівняння теплопровідності $\sigma_t + \sigma_{vv} = 0$. (Нагадаємо, v позначає потенціал v^1.) Оскільки похідна σ_v також є розв'язком цього ж рівняння, дія оператора ∂_v відображає вектор $(\sigma, \sigma_v u^{-1})$ у вектор густини закону збереження $\mathcal{F}^5_{\sigma_v}$. Характеристика $(\sigma_v, -\sigma_t u^{-1})$ закону збереження $\mathcal{F}^5_\sigma$ співпадає з вектором густини закону збереження $\mathcal{F}^5_{\sigma_v}$. Аналогічно, локальні закони збереження потенціальної системи $v_x = u$, $v_t = u^{-2}u_x - u^{-1}$ рівняння $u_t = (u^{-2}u_x)_x + u^{-2}u_x$ вичерпують закони збереження $\mathcal{F}^6_\sigma$ з векторами густини $(\sigma e^x, \sigma_v u^{-1}e^x)$ і характеристиками $(\sigma_v e^x, -\sigma_t u^{-1}e^x)$. Образ вектора $(\sigma e^x, \sigma_v u^{-1}e^x)$ під дією оператора ∂_v є вектором густини $(\sigma_v e^x, \sigma_{vv}u^{-1}e^x)$ закону збереження $\mathcal{F}^6_{\sigma_v}$ і співпадає з характеристикою $(\sigma_v e^x, -\sigma_t u^{-1}e^x)$ закону збереження $\mathcal{F}^6_\sigma$. Будь-який локальний закон збереження потенціальної системи $v_x = u$, $v_t = u_x + u^2$, асоційованої з рівнянням Бюргерса $u_t = u_{xx} + 2uu_x$, має вектор густини і характеристику однакового вигляду $(he^v, h_x e^v - hue^v)$, де параметр-функція $h = h(t,x)$ пробігає множину розв'язків зворотного лінійного рівняння теплопровідності $h_t + h_{xx} = 0$. Дія оператора ∂_v не змінює такі вектори і характеристики, що пояснює в силу твердження 4.13, чому вони співпадають. Схоже спостереження справедливе для рівнянь конвекції–дифузії вигляду (4.16) з $B = \int A + uA$. Кожне з цих рівнянь має єдиний лінійно незалежний потенціальний закон збереження $\mathcal{F}^4 = \mathcal{F}^4(A)$ з вектором густини $(F,G) = (e^v, -e^v\int A)$ і характеристикою $(\alpha,\beta) = (e^v, -e^v\int A)$, які очевидно співпадають. Дія оператора ∂_v відображає $\mathcal{F}^4$ в себе. Інші нелінеаризовні рівняння конвекції–дифузії допускають тільки потенціальні закони збереження, індуковані локальними, які відображаються диференціюваннями по потенціалам у нульові закони збереження цих рівнянь.

A.2. Рівняння конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо клас нелінійних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами загального вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u)u_x, \tag{A.10}$$

де A, B, f, g, h — довільні гладкі функції своїх аргументів, $fghA \neq 0$. Різні властивості і об'єкти, пов'язані з цими рівняннями в рамках симетрійного підходу (ліївські, некласичні і потенціальні симетрії, групи еквівалентності, допустимі перетворення, точні розв'язки, закони збереження тощо), досліджено в роботах [161–166, 235]. Зробимо короткий огляд цих результатів.

Теорема А.1. *Розширена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу* (A.10) *складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2,\ \ \tilde{x} = X,\ \ \tilde{u} = \delta_3 u + \delta_4,$$
$$\tilde{f} = \frac{\varepsilon_1\delta_1\varphi}{X_x} f,\ \ \tilde{g} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} X_x\varphi\, g,\ \ \tilde{h} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\varphi\, h,\ \ \tilde{A} = \varepsilon_2 A,\ \ \tilde{B} = \varepsilon_3(B - \varepsilon_4 A),$$

де δ_j, ε_j, $i = \overline{1,4}$, — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \neq 0$, $X = X(x)$ — довільна гладка функція, $X_x \neq 0$, $\varphi := \exp\bigl(\varepsilon_4 \int h(x)/g(x)\, dx\bigr)$.

Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}$ є підгрупою групи $\hat{G}^{\sim}$, виокремленою умовою $\varepsilon_4 = 0$. Перетворення з $\hat{G}^{\sim}$, у яких $\delta_1 = \delta_3 = 1$, $\delta_2 = \delta_4 = 0$ і $X(x) = x$, діють тільки на довільні елементи і в дійсності не замінюють рівнянь з класу (A.10). Тому вони утворюють нормальну підгрупу групи $\hat{G}^{\sim}$, яка є розширеною калібрувальною групою еквівалентності $\hat{G}^{\mathrm{g}\sim}$ класу (A.10). Будь-яке допустиме калібрувальне перетворення у цьому класі породжується елементом з $\hat{G}^{\mathrm{g}\sim}$, тобто два зображення (A.10), асоційовані з наборами довільних елементів (f, g, h, A, B) і $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{A}, \tilde{B})$, визначають однакове рівняння тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{f} = \varepsilon_1\varphi\, f,\ \ \tilde{g} = \varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varphi\, g,\ \ \tilde{h} = \varepsilon_1\varepsilon_3^{-1}\varphi\, h,\ \ \tilde{A} = \varepsilon_2 A,\ \ \tilde{B} = \varepsilon_3(B + \varepsilon_4 A)$$

для деяких сталих ε_j. Іншими словами, одне рівняння має нескінченну серію різних зображень (A.10). Саме невизначенність зображення рівняння у вигляді (A.10) пояснює існування перетворень еквівалентності з $\varepsilon_4 \neq 0$. Перетин груп $\hat{G}^{\mathrm{g}\sim}$ і $G^{\sim}$ дає звичайну калібрувальну групу еквівалентності $G^{\mathrm{g}\sim}$, що складається з калібрувальних перетворень, в яких $\varepsilon_4 = 0$, і є нормальною підгрупою в $G^{\sim}$.

Фактор-група $\hat{G}^{\sim}/\hat{G}^{\mathrm{g}\sim}$ для класу (A.10) канонічно ізоморфна фактор-групі $G^{\sim}/G^{\mathrm{g}\sim}$ і її можна ототожнити з підгрупою в $\hat{G}^{\sim}$, складеною перетвореннями з $\varepsilon_j = 0$.

Перетворення з $G^{\sim}$ містять функціональну довільність (функція X), яку можна використати, щоб калібрувати довільні елементи f або g. Найбільш простим здається калібрування $f=1$, але насправді воно сильно ускладнює виконання групової класифікації порівняно з калібруваннями, обговореними нижче.

Під час дослідження підкласу класу (A.10), виокремленого додатковою умовою $h=1$ [235], виявилося зручним калібрувати довільний елемент g в 1. У той же спосіб, використовуючи перетворення $\tilde t=t$, $\tilde x=\int 1/g(x)\,dx$, $\tilde u=u$ з $G^{\sim}/G^{\mathrm{g}\sim}$, кожне рівняння з класу (A.10) можна звести до вигляду

$$f(x)u_t=(A(u)u_x)_x+h(x)B(u)u_x. \tag{A.11}$$

Ось чому без втрати загальності можна обмежитися дослідженням рівнянь з класу (A.11).

Будь-яке перетворення з $\hat G^{\sim}$, що зберігає умову $g=1$, після нехтування компоненти перетворення для g має вигляд

$$\begin{gathered}\tilde t=\delta_1t+\delta_2,\ \tilde x=\delta_5\int e^{-\varepsilon_4\int h}dx+\delta_6,\ \tilde u=\delta_3u+\delta_4,\\ \tilde f=\frac{\delta_1}{\delta_5}\varepsilon_1fe^{2\varepsilon_4\int h},\ \tilde h=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}he^{\varepsilon_4\int h},\ \tilde A=\delta_5\varepsilon_1A,\ \tilde B=\varepsilon_3(B-\varepsilon_4A),\end{gathered} \tag{A.12}$$

де δ_i, $i=\overline{1,6}$, ε_1, ε_3, ε_4 — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\delta_5\varepsilon_1\varepsilon_3\neq0$, $\int h:=\int h(x)\,dx$. Вигляд перетворень (A.14) отримано з загального вигляду перетворень у $\hat G^{\sim}$ за допомогою зв'язків $X=\delta_5\int e^{-\varepsilon_4\int h}dx+\delta_6$ і $\varepsilon_2=\delta_5$. Також з умови $g=h$ очевидно випливає, що $\varphi=e^{\varepsilon_4\int h}$. Множина таких перетворень є узагальненою розширеною групою еквівалентності $G_1^{\sim}$ класу (A.11). Тут додатково вжито атрибут "узагальнена", оскільки перетворення змінних у (A.14) (а саме, x) (нелокально) залежать від довільного елементу h. Звичайна група $G_1^{\sim}$ еквівалентності класу (A.11) співпадає з підгрупою групи $\hat G_1^{\sim}$, виокремленою умовою $\varepsilon_4=0$. Перетворення з $G_h^{\sim}$, в яких $\delta_1=\delta_3=\delta_5=1$ і $\delta_2=\delta_4=\delta_6=\varepsilon_4=0$, діють тільки на довільні елементи, а тому вони утворюють нормальну підгрупу групи $G_1^{\sim}$, яка є калібрувальною групою еквівалентності $G_1^{\mathrm{g}\sim}$ класу (A.11). Перетворення (A.12), що відповідають параметру ε_4, є проекціями композицій перетворень з $\hat{G}^{\mathrm{g}\sim}$ і $G^{\sim}/G^{\mathrm{g}\sim}$. Це пояснює, чому такі перетворення не є калібрувальними для класу (A.11). Саме сплетіння нелокальних калібрувальних перетворень еквівалентності зі звичайними приводить до ускладнення структури групи еквівалентності.

Операцій з нелокальними перетвореннями еквівалентності можна уникнути, вважаючи, що довільний елемент B визначений з точністю до доданку, пропорційного A, і віднімати такі доданки від B перед застосуванням перетворень еквівалентності (A.12) з $\varepsilon_4 = 0$.

Водночас існує інше можливе узагальнення калібрування $g = 1$ з випадку $h = 1$ на загальний випадок h, а саме калібрування $g = h$. Кожне рівняння з класу (A.10) можна звести до рівняння вигляду

$$f(x)u_t = (h(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u)u_x \tag{A.13}$$

перетворенням $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = \int h(x)/g(x)\,dx$, $\tilde{u} = u$ з $G^{\sim}/G^{\mathrm{g}\sim}$. Будь-яке перетворення з $\hat{G}^{\sim}$, що зберігає умову $g = h$, після нехтування компоненти перетворення для g має вигляд

$$\begin{gathered}\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_5 x + \delta_6, \quad \tilde{u} = \delta_3 u + \delta_4,\\ \tilde{f} = \frac{\delta_1}{\delta_5}\varepsilon_1 f e^{\varepsilon_4 x}, \quad \tilde{h} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} h e^{\varepsilon_4 x}, \quad \tilde{A} = \delta_5 A, \quad \tilde{B} = \varepsilon_3 (B - \varepsilon_4 A),\end{gathered} \tag{A.14}$$

де δ_i, $i = \overline{1,6}$, ε_1, ε_3, ε_4 — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\delta_5\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0$. Вигляд перетворень (A.14) отримано з загального вигляду перетворень у $\hat{G}^{\sim}$ за допомогою зв'язків $X = \delta_5 x + \delta_6$ і $\varepsilon_2 = \delta_5$. Також очевидно, що завдяки умові $g = h$ маємо $\varphi = e^{\varepsilon_4 x}$. Множина таких перетворення є проекцією підгрупи групи $\hat{G}^{\sim}$ за умови $g = h$ і насправді утворює групу еквівалентності $G_h^{\sim}$ класу (A.13). Перевага калібрування $g = h$ над калібруванням $g = 1$ полягає у тому, що $G_h^{\sim}$ є звичайною групою точкової еквівалентності. Перетворення з $G_h^{\sim}$, в яких $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = 1$ і $\delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = 0$, діють тільки на довільні елементи, а тому вони утворюють нормальну підгрупу групи $G^{\sim}_{h}$, яка є калібрувальною групою еквівалентності $G^{\mathrm{g}\sim}_{h}$ класу (A.13).

Наведені приклади показують, що різні калібрування можуть істотно змінити тип групи еквівалентності, як покращуючи, так і погіршуючи її структуру.

Щоб дослідити залежність між вибором калібрування і складністю виконання класифікації в цілому, а також спростити кінцевий результат, при груповій класифікації у класі (A.10) використовувались обидва калібрування $g = 1$ і $g = h$. Будь-яке рівняння з $g = 1$ можна звести до рівняння з $\tilde{g} = \tilde{h}$ простим перетворенням еквівалентності

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \textstyle\int h, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{f} = \frac{f}{h}, \quad \tilde{h} = h, \quad \tilde{A} = A, \quad \tilde{B} = B.$$

Зауваження A.1. При $B = 0$ вважаємо для визначеності, що $h = 1$.

Оптимальний шлях виконання групової класифікації у класі (A.10) полягає у використанні методу розгалуженого розщеплення до пари довільних елементів A і B разом зі змінним калібруванням довільного елементу g до 1 або h у залежності від випадку розщеплення. А саме, схема класифікації наступна. З визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів ліївської симетрії випливає, що довільний елемент A повинен задовольняти $k \in \{0, 1, 2\}$ незалежних рівнянь вигляду $(\alpha u + \beta)A_u = \gamma A$, де α, β, γ — деякі сталі. При $k = 0$ (випадок загального значення A) покладемо $g = 1$; подальше розщеплення залежить від того, чи $B \in \langle 1, A\rangle$, чи ні. Якщо $k = 1$, то або $A = |u|^{\mu} \bmod G^{\sim}$, де $\mu \neq 0$, або $A = e^{u} \bmod G^{\sim}$; відкаліброуємо g в 1 або h, якщо відповідно $B \in \langle 1, A\rangle$ або $B \notin \langle 1, A\rangle$. При $k = 2$ маємо $A = 1 \bmod G^{\sim}$ і виберемо калібрування $g = h$.

Підкреслимо, що вирішальним для успішної класифікації є використання розширеної, а не звичайної групи еквівалентності. Більш того, частина калібрувальних перетворень не входить у звичайну групу еквівалентності. При нехтуванні ними у класифікаційному списку опиняються елементи з класу (A.10), що є зображенням одного й того ж рівняння!

Тому без використання додаткових перетворень еквівалентності такий список не є вірним. Спробу виконання класифікації відносно звичайної еквівалентності було зроблено в [167].

Результати групової класифікації у класі (A.10) при обох фіксованих калібруваннях $g = 1$ і $g = h$ представлено в [163], а оптимізованої класифікації зі змінним калібруванням — у [164]. Знайдено усі додаткові перетворення еквівалентності між випадками класифікації. З цього, зокрема, випливає твердження, що кожне рівняння з класу (A.10), яке допускає МАІ розмірності не нижче 4, зводиться точковим перетворенням до рівняння з цього ж класу з $f = g = h = 1$. Вивчено також можливі граничні переходи між випадками класифікації, що приводять до граничних переходів між відповідними МАІ, які можна описати у термінах контракцій алгебр Лі чи їх зображень. Такі граничні переходи між парами (“рівняння”, “його МАІ”) природно назвати *контракціями МАІ*. Побудовано низку нетривіальних умовних груп еквівалентності для класу (A.10), виконано попередній опис його множини допустимих перетворень.

Обговоримо класифікацію законів збереження рівнянь з класу (A.10). З наслідку 4.5 випливає, що кожен закон збереження такого рівняння має характеристику, залежну лише від t і x, тому класифікація не є складною. Водночас, щоб отримати результат у замкненій і лаконічній формі, класифікацію необхідно виконати з точністю до розширеної $\hat{G}_1^{\sim}$-еквівалентності, а потім знайти додаткові еквівалентності між отриманими випадками.

Теорема A.2. *Повний список $\hat{G}_1^{\sim}$-нееквівалентних рівнянь* (A.11)*, що мають ненульові закони збереження, вичерпують наступні рівняння:*

1. $h = 1\colon \quad 1,\ -Au_x - \int B.$
2. $A = 1,\ B_u \neq 0,\ f = -h(h^{-1})_{xx}\colon \quad -e^t h^{-1},\ e^t(h^{-1}u_x - (h^{-1})_x u + \int B).$
3. $B = 1,\ f = h_x\colon \quad e^t,\ -e^t(Au_x + hu).$
4. $B = 1,\ f = h_x + hx^{-1}\colon \quad e^t x,\ -e^t(xAu_x + xhu - \int A).$

5a. $B=0\colon\ 1,\ -Au_x;\ x,\ -xAu_x+\int\!A.$

5b. $B=1,\ f=1,\ h=1\colon\quad 1,\ -Au_x-u;\quad (x+t),\ -(x+t)(Au_x+u)+\int\!A.$

5c. $B=1,\ f=e^x,\ h=e^x\colon\quad e^{x+t},\ -e^t(Au_x+e^xu);$
$e^{x+t}(x+t),\ -e^t(x+t)(Au_x+e^xu)+e^t\int\!A.$

5d. $B=1,\ f=x^{\mu-1},\ h=x^{\mu}\colon\quad e^{\mu t},\ -e^{\mu t}(Au_x+x^{\mu}u);$
$e^{(\mu+1)t}x,\ e^{(\mu+1)t}(-xAu_x-x^{\mu+1}u+\int\!A).$

6. $B=1,\ f=e^{-\mu/x}x^{-3},\ h=e^{-\mu/x}x^{-1},\ \mu\in\{0,1\}\colon$
$e^{\mu t}x,\ -e^{\mu t}x(Au_x+hu)+e^{\mu t}\int\!A;$
$e^{\mu t}(tx-1),\ -e^{\mu t}(tx-1)(Au_x+hu)+te^{\mu t}\int\!A.$

7. $B=1,\ f=|x-1|^{\mu-3/2}|x+1|^{-\mu-3/2},\ h=|x-1|^{\mu-1/2}|x+1|^{-\mu-1/2}\colon$
$e^{(2\mu+1)t}(x-1),\ -e^{(2\mu+1)t}(x-1)(Au_x+hu)+e^{(2\mu+1)t}\int\!A;$
$e^{(2\mu-1)t}(x+1),\ -e^{(2\mu-1)t}(x+1)(Au_x+hu)+e^{(2\mu-1)t}\int\!A.$

8. $B=1,\ f=e^{\mu\operatorname{arctg}x}(x^2+1)^{-3/2},\ h=e^{\mu\operatorname{arctg}x}(x^2+1)^{-1/2}\colon$
$e^{\mu t}(x\cos t+\sin t),\ -e^{\mu t}(x\cos t+\sin t)(Au_x+hu)+e^{\mu t}\cos t\int\!A;$
$e^{\mu t}(x\sin t-\cos t),\ -e^{\mu t}(x\sin t-\cos t)(Au_x+hu)+e^{\mu t}\sin t\int\!A.$

9. $A=1,\ B=0\colon\quad \alpha(t,x),\ -\alpha u_x+\alpha_x u.$

Тут $\mu=\mathrm{const}$, α *пробігає множину розв'язків рівняння* $f\alpha_t+\alpha_{xx}=0$. *У кожному випадку разом зі зв'язками на довільні елементи* A, B, f, h *також наведено характеристики* (λ) *і потоки базисних елементів відповідних просторів законів збереження. Густина усюди дорівнює* $\lambda f u$.

Випадки 5b–5d теореми A.2 можна звести до випадку 5a за допомогою додаткових перетворень еквівалентності, які не належать навіть до $\hat{G}^{\sim}$ (у кожному перетворенні $\tilde u=u$):

$$5\mathrm{b}\to 5\mathrm{a}_{f=1}\colon\quad \tilde t=t,\quad \tilde x=x+t;$$
$$5\mathrm{c}\to 5\mathrm{a}_{f=e^x}\colon\quad \tilde t=e^t,\quad \tilde x=x+t;$$
$$5\mathrm{d}(\mu+1\neq0)\to 5\mathrm{a}_{f=x^{\mu-1}}\colon\quad \tilde t=(\mu+1)^{-1}(e^{(\mu+1)t}-1),\quad \tilde x=xe^t;$$
$$5\mathrm{d}(\mu+1=0)\to 5\mathrm{a}_{f=x^{-2}}\colon\quad \tilde t=t,\quad \tilde x=xe^t.$$

Побудовано приклади граничних переходів між парами (“рівняння”, “простір його законів збереження”), подібних до граничних переходів між МАІ. По аналогії з контракціями алгебр Лі їх можна назвати *контракціями законів збереження*. Такі граничні переходи зручніше всього описувати у термінах *контракцій характеристик*.

Використовуючи теорему А.2, вичерпно прокласифіковано потенціальні системи, потенціальні закони збереження і потенціальні симетрії рівнянь з класу (А.11). Показано, що всі потенціальні симетрії породжуються ліївськими симетріями деяких інших рівнянь через потенціальні перетворення еквівалентності.

Знайдені ліївські симетрії, перетворення з групи еквівалентності, додаткові перетворення еквівалентності застосовано поряд з некласичним методом до побудови точних розв'язків рівнянь з класу (А.11).

А.3. Рівняння реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами

У роботах [8, 162, 243, 275–277] вивчено різні підкласи рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами, що мають загальний вигляд

$$f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u), \tag{A.15}$$

де f, g, h, A, B — довільні гладкі функції своїх аргументів, $fgA \neq 0$.

Клас нелінійних рівнянь дифузії між пластинами загального вигляду

$$u_t = (D(u)u_x)_x + h(x)u, \tag{A.16}$$

де $D_u \neq 0$, є достатньо простим з точки зору групового аналізу. Він був відібраний для дослідження в [276] з огляду на те, що в літературі існувало кілька спроб його класифікації. Його звичайна група еквівалентності $G^{\sim}$, що складається з перетворень $\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2$, $\tilde{x} = \delta_3 x + \delta_4$, $\tilde{u} = \delta_5 u$, $\tilde{D} = \delta_1^{-1}\delta_3^2 D$, $\tilde{h} = \delta_1^{-1} h$, де δ_i, $i = 1, \ldots, 5$, — довільні сталі, $\delta_1\delta_3\delta_5 \neq 0$, не містить зсувів по u, що було однією з причин помилок при виконанні класифікації. Отримано всі $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки розширення МАІ, знайдено всі можливі додаткові перетворення еквівалентності між ними, що дало також класифікацію відносно точкової еквівалентності. Виникнення деяких випадків розширення пояснено через існування у класі (A.16) нетривіальних умовних груп еквівалентності.

Значно цікавішим є підклас рівнянь зі степеневими нелінійностями

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m, \tag{A.17}$$

де n та m — довільні сталі, $(n,m)\neq(0,0)$ [275]. Довільний елемент m не є визначеним, якщо $h=0$. Як буде видно далі, в цьому випадку зручно вважати, що $m=n+1$ (або $m=1$).

Теорема A.3. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу* (A.17) *складається з перетворень*

$$\tilde t=\delta_1 t+\delta_2,\quad \tilde x=\varphi(x),\quad \tilde u=\psi(x)u,$$
$$\tilde f=\frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^{n+2}}f,\quad \tilde g=\frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^{2n+2}}\,g,\quad \tilde h=\frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^{m+n+1}}h,\quad \tilde n=n,\quad \tilde m=m,$$

де δ_j $(j=0,1,2)$ — довільні сталі, $\delta_0\delta_1\neq0$, φ — довільна гладка функція змінної x, $\varphi_x\neq0$. Функція $\psi(x)$ визначається за формулою

$$\psi(x)=\begin{cases}\big(1-(n+1)F(x)\big)^{-\frac{1}{n+1}}, & n\neq-1\\ e^{F(x)}, & n=-1\end{cases},\quad F(x)=\delta_3\int\frac{dx}{g(x)}+\delta_4.$$

Вибране зображення функції $\psi(x)$ гарантує, що ця сім'я перетворень неперервно параметризована параметром n.

Звичайна група еквівалентності $G^{\sim}$ класу (A.17) є власною підгрупою групи $\hat{G}^{\sim}$, що виокремлюється умовою $\delta_3=0$, або ψ — ненульова стала.

Перетворення $\tilde t=t$, $\tilde x=\int 1/g(x)\,dx$, $\tilde u=u$ з $G^{\sim}$ калібрує довільний елемент g у 1. Замість такого калібрування можна використати інші, наприклад $f=1$, але саме калібрування $g=1$ є оптимальним для загальних значень степеня n. Це дозволяє, не втрачаючи загальності, обмежитись дослідженням рівнянь загального вигляду

$$f(x)u_t = (u^n u_x)_x + h(x)u^m. \tag{A.18}$$

Усі результати, а саме, симетрії, розв'язки та закони збереження класу (A.18) можна розмножити для класу (A.17) перетворенням, оберненим до калібрувального. Групу еквівалентності класу (A.18) можна отримати, накладаючи на перетворення з $\hat{G}^{\sim}$ зв'язок $\tilde{g} = g = 1$.

Теорема A.4. *Узагальнена група еквівалентності* $\hat{G}_1^{\sim}$ *класу* (A.18) *складається з перетворень, які мають вигляд*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \frac{\delta_3 x + \delta_4}{\delta_5 x + \delta_6} =: \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_7 {\varphi_x}^{\frac{1}{2n+2}} u,$$
$$\tilde{f} = \delta_1 {\delta_7}^n {\varphi_x}^{-\frac{3n+4}{2n+2}} f, \quad \tilde{h} = {\delta_7}^{-m+n+1} {\varphi_x}^{-\frac{m+3n+3}{2n+2}} h, \quad \tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m$$

при $n \neq -1$, *де* δ_j, $j = \overline{1,7}$, — *довільні сталі,* $\delta_1\delta_7 \neq 0$, $\delta_3\delta_6 - \delta_4\delta_5 = \pm 1$, *і*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_5 e^{\delta_6 x} u,$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_1}{{\delta_3}^2 \delta_5 e^{\delta_6 x}} f, \quad \tilde{h} = \frac{1}{{\delta_3}^2 {\delta_5}^m e^{m\delta_6 x}} h, \quad \tilde{n} = n, \quad \tilde{m} = m$$

при $n = -1$, *де* δ_j, $j = \overline{1,6}$, — *довільні сталі,* $\delta_1\delta_3\delta_5 \neq 0$.

Для перетворень з $\hat{G}_1^{\sim}$ також можна отримати зображення, неперервно параметризоване довільним елементом n, включаючи значення $n = -1$. Оскільки довільний елемент n інваріантний відносно всіх перетворень з $\hat{G}_1^{\sim}$ (і, більш того, — відносно всіх допустимих перетворень у класах (A.17) і (A.18)), клас (A.18) можна розбити на підкласи, асоційовані з фіксованими значеннями n. Відповідно узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ можна розглядати як сім'ю звичайних груп еквівалентності підкласів класу (A.18), параметризованих n.

У класі (A.17) є нетривіальні умовні групи еквівалентності.

Теорема A.5. *Підклас, виокремлений з класу* (A.17) *умовою* $m = n+1$, *тобто утворений рівняннями, які мають вигляд*

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^{n+1}, \tag{A.19}$$

допускає групу еквівалентності $G^{\sim}_{m=n+1}$, що складається з перетворень

$$\tilde t=\delta_1 t+\delta_2,\quad \tilde x=\varphi(x),\quad \tilde u=\psi(x)u,\quad \tilde n=n,$$
$$\tilde f=\frac{\delta_0\delta_1}{\psi^{n+2}\varphi_x}f,\quad \tilde g=\frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^{2n+2}}g,\quad \tilde h=\delta_0\frac{h-\psi^{n+1}(\psi^{-(n+2)}\psi_x g)_x}{\psi^{2n+2}\varphi_x},$$

де φ, ψ — довільні функції змінної x, δ_j, $j=0,1,2$, — довільні сталі, $\delta_0\delta_1\varphi_x\psi\neq 0$.

Клас (A.19) також можна розглядати як сім'ю класів, параметризованих n, але $G^{\sim}_{m=n+1}$ є звичайною групою еквівалентності, навіть якщо вважати n довільним елементом. Вона є нетривіальною умовною групою еквівалентності всього класу (A.17), оскільки власно містить обмеження $\hat G^{\sim}|_{m=n+1}$ групи $\hat G^{\sim}$ за умови $m=n+1$.

При калібруванні $g=1$ на параметри групи $G^{\sim}_{m=n+1}$ накладається обмеження $\delta_0\varphi_x=\psi^{2n+2}$.

Наслідок A.1. *Узагальнена група еквівалентності $\hat G^{\sim}_{1,m=n+1}$ класу рівнянь $f(x)u_t=(u^n u_x)_x+h(x)u^{n+1}$, асоційованих з калібруванням $g=1$, складається з перетворень*

$$\tilde t=\delta_1 t+\delta_2,\quad \tilde x=\varphi(x),\quad \tilde u=\psi(x)u,$$
$$\tilde f=\frac{\delta_0^2\delta_1}{\psi^{3n+4}}f,\quad \tilde h=\delta_0^2\frac{h-\psi^{n+1}[\psi^{-(n+2)}\psi_x]_x}{\psi^{4n+4}}\quad (\tilde n=n),$$

де φ, ψ — функції, що задовольняють умови $\varphi_x\psi\neq 0$ і $\delta_0\varphi_x=\psi^{2n+2}$, δ_j, $j=0,1,2$, — довільні сталі, $\delta_0\delta_1\neq 0$.

Зауважимо, що група $\hat G^{\sim}_{1,m=n+1}$ стає звичайною групою еквівалентності для будь-якого підкласу таких рівнянь з фіксованим значенням n.

Наступну умовну групу еквівалентності розглянемо одразу при калібруванні $g=1$.

Теорема A.6. *При $g=1$ і $m=1$ умова $(h/f)_x\neq 0$ інваріантна відносно $\hat G^{\sim}_1$. Узагальнена розширена група еквівалентності $\hat G^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$*

підкласу, виокремленого з класу (A.18) *умовами* $m = 1$ *і* $(h/f)_x \neq 0$, *складається з перетворень, які мають вигляд*

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = \varphi(x), \quad \tilde u = \frac{\psi(x)}{|T_t|^{1/n}}u, \quad \tilde f = \frac{\psi^n}{{\varphi_x}^2}(\operatorname{sign} T_t)f, \quad \tilde n = n,$$

де $\varphi = \delta_3 x + \delta_4$, $\psi = \delta_5 e^{\delta_6 x}$, δ_j, $j = \overline{3,6}$, *— довільні сталі,* $\delta_3\delta_5 \neq 0$ *при* $n = -1$ *і* $\varphi = (\delta_3 x + \delta_4)/(\delta_5 x + \delta_6)$, $\psi = \delta_7 {\varphi_x}^{\frac{1}{2n+2}}$, δ_j, $j = \overline{3,7}$, *— довільні сталі,* $\delta_7 \neq 0$, $\delta_3\delta_6 - \delta_4\delta_5 = \pm 1$ *при* $n \neq -1$. *У залежності від значень* $\alpha := h/f = \mathrm{const}$ *і* $\tilde\alpha := \tilde h/\tilde f = \mathrm{const}$ *на* $T = T(t)$ *маємо рівняння*

$$\alpha\tilde\alpha \neq 0\colon\ \frac{e^{n\tilde\alpha T} - 1}{n\tilde\alpha} = \delta_1 \frac{e^{n\alpha t} - 1}{n\alpha} + \delta_2, \quad \alpha = \tilde\alpha = 0\colon\ T = \delta_1 t + \delta_2,$$

$$\begin{array}{c}\alpha = 0\\ \tilde\alpha \neq 0\end{array}\colon\ \frac{e^{n\tilde\alpha T} - 1}{n\tilde\alpha} = \delta_1 t + \delta_2, \qquad \begin{array}{c}\alpha \neq 0\\ \tilde\alpha = 0\end{array}\colon\ T = \delta_1 \frac{e^{n\alpha t} - 1}{n\alpha} + \delta_2.$$

Опишемо всі допустимі перетворення у підкласі класу (A.17), асоційованому з умовою $n \neq 0$. Підклас рівнянь з $n = 0$ є сингулярним з точки зору усіх трансформаційних властивостей, тому його треба досліджувати окремо. Оскільки існує відображення, породжене перетвореннями з групи $G^{\sim}$, класу (A.17) на свій підклас (A.18), то достатньо розв'язати цю задачу для підкласу (A.18), де додатково $n \neq 0$.

Теорема A.7. *Нехай рівняння* $f(x)u_t = (u^n u_x)_x + h(x)u^m$ *та рівняння* $\tilde f(\tilde x)\tilde u_{\tilde t} = (\tilde u^{\tilde n}\tilde u_{\tilde x})_{\tilde x} + \tilde h(\tilde x)\tilde u^{\tilde m}$ *пов'язані точковим перетворенням змінних* t, x, u. *Тоді* $\tilde n = n$ *та або* $\tilde m = m$, *або* $(m, \tilde m) = (1, n+1)$, *або* $(m, \tilde m) = (n+1, 1)$. *Перетворення, що пов'язує ці рівняння, породжене перетвореннями з групи еквівалентності*

- *a)* $\hat G^{\sim}_1$, *якщо або* $m \neq 1, n+1$, *або* $m = 1$, $(h/f)_x \neq 0$;
- *b)* $\hat G^{\sim}_{1,m=n+1}$, *якщо* $m = \tilde m = n+1$;
- *c)* $\hat G^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$, *якщо* $m = \tilde m = 1$, $(h/f)_x = 0$; *тоді і* $(\tilde h/\tilde f)_x = 0$.

Якщо $m = 1$ *і* $\tilde m = n+1$, *то* $(h/f)_x = 0$ *і перетворення є композицією перетворень з груп* $\hat G^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$ *і* $\hat G^{\sim}_{1,m=n+1}$ *через проміжне рівняння, в якому* $h = 0$. *Випадок з* $m = n+1$ *та* $\tilde m = 1$ *є подібним.*

Інших допустимих перетворень у класі (A.18) *з* $n \neq 0$ *немає.*

Наслідок А.2. *Клас* (A.18) *з* $n \neq 0$ *можна зобразити як об'єднання нормалізованих підкласів, відповідно асоційованих з умовами 1)* $h \neq 0$, $m \neq 1, n+1$*; 2)* $m = 1$, $(h/f)_x \neq 0$*; 3)* $m = 1$, $(h/f)_x = 0$*; 4)* $m = n+1$. *Тільки підкласи 3 і 4 мають непорожній перетин і цим перетином є нормалізований підклас, виокремлений умовою* $h = 0$. *Між рівняннями з різних підкласів перетворення можливі тільки, якщо ці рівняння належать підкласам 3 і 4. Кожне таке перетворення є композицією перетворень через проміжне рівняння, в якому* $h = 0$. *Будь-яке рівняння з підкласу 3 можна відобразити у рівняння, в якому* $h = 0$.

Наслідок А.3. *Групи* $\hat{G}^{\sim}_{1,m=n+1}$, $\hat{G}^{\sim}_{1,m=1,(h/f)_x=0}$ *вичерпують множину максимальних умовних груп еквівалентності у класі* (A.18) *з* $n \neq 0$.

Виконано групову класифікацію у класі (A.18) з $n \neq 0$. Природно виникають три різні випадки: 1) $m \neq 1, n+1$; 2) $m = 1$; 3) $m = n+1$ (або $h = 0$). Класифікацію зроблено з точністю до $G^{\sim}_1$-еквівалентності при $m \neq n+1$ і з точністю до $G^{\sim}_{1,m=n+1}$-еквівалентності при $m = n+1$ або $h = 0$. Знайдено всі додаткові перетворення еквівалентності між отриманими випадками розширення МАІ. Вони очікувано вичерпуються перетвореннями, що зводять рівняння з $m = 1$ у рівняння з $h = 0$. Це дає також класифікацію відносно загальної точкової еквівалентності. Оскільки група $G^{\sim}_{1,m=n+1}$ має функціональну довільність у параметрах, при класифікації у підкласі, в якому $m = n+1$ або $h = 0$, можливе ще одне калібрування, додаткове до $g = 1$, — зв'язок на f або h. Як не дивно, умова $h = 0$ не є вдалим калібруванням, оскільки приводить до істотного ускладнення структури групи еквівалентності. Оптимальним виявилось на перший погляд складне калібрування:

$$f = 1 \quad \text{при} \quad n \neq -\frac{4}{3} \quad \text{і} \quad f = e^x \quad \text{або} \quad (f, h) = (1, 0) \quad \text{інакше.}$$

Дослідження підкласу рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m, \tag{A.20}$$

асоційованого з умовою $n = 0$, набагато складніше, ніж при $n \neq 0$ [277].

Теорема A.8. *Узагальнена розширена група еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}$ *класу* (A.20) *складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \psi(x)u,$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^2}f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^2}\,g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^{m+1}}h, \quad \tilde{m} = m,$$

де δ_j, $j = 0, 1, 2$, *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$*;* φ *— довільна гладка функція змінної* x*, причому* $\varphi_x \neq 0$*, а* ψ *задовольняє ЗДР* $(g\psi_x/\psi^2)_x = 0$.

Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (A.20) можна виокремити з $\hat{G}^{\sim}$ умовою $\psi_x = 0$. Довільний елемент m є інваріантом групи $\hat{G}^{\sim}$. Це дозволяє розбити клас (A.20) на підкласи, кожен з яких відповідає фіксованому значенню m. Цікавим є підклас з $m = 2$.

Теорема A.9. *Підклас рівнянь* (A.20) *з* $m = 2$ *допускає узагальнену розширену групу еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{m=2}$*, що складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^2}\,f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^2}\,g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^3}\,h,$$

де δ_j, $j = 0, 1, 2$, *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$*,* ψ *— розв'язок ЗДР*

$$\left[\frac{g}{\psi^2}\left(\frac{\psi^2}{2h}\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right)_x\right]_x = \frac{\psi}{4h}\left[\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right]^2, \quad a \quad \chi = -\frac{\psi^2}{2h}\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x.$$

Група $\hat{G}^{\sim}_{m=2}$ є нетривіальною умовною групою еквівалентності класу (A.20) за умови $m = 2$, оскільки обмеження $\hat{G}^{\sim}|_{m=2}$ групи $\hat{G}^{\sim}$ на $m = 2$ вужче за групу $\hat{G}^{\sim}_{m=2}$: $\hat{G}^{\sim}|_{m=2} \subsetneq \hat{G}^{\sim}_{m=2}$. Водночас $G^{\sim}|_{m=2} = G^{\sim}_{m=2}$, тобто умова $m = 2$ не дає розширення звичайної групи еквівалентності.

На відміну від класу (A.17) у класі (A.20) калібрування $g = 1$ не є ефективним, як і інші прості калібрування. Запропонований вихід з цієї ситуації — відобразити клас (A.20) деяким відображенням, породженим точковими перетвореннями змінних, на клас, для якого легше розв'язати задачу класифікації. Спочатку перетворенням з $G^{\sim}$ накладемо калібрування $g = f$, тобто відобразимо клас (A.20) на його підклас

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^m. \tag{A.21}$$

Теорема А.10. *Узагальнена розширена група еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{g=f}$ *класу* (А.21) *складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \psi(x)u,$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\psi^2} f, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_1\psi^{m+1}} h, \quad \tilde{m} = m.$$

Тут δ_j, $j = \overline{0,3}$, *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$*;* $\psi = \psi(x)$ *— довільний (ненульовий) розв'язок ЗДР з теореми А.8, де* $g = f$.

Теорема А.11. *Підклас рівнянь* (А.21) *з* $m = 2$ *допускає узагальнену розширену групу еквівалентності* $\hat{G}^{\sim}_{g=f,m=2}$*, складену перетвореннями*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\psi^2} f, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_1\psi^3} h,$$

де δ_j, $j = \overline{0,3}$, *— довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$, *а функції* ψ *і* χ *визначено як у теоремі А.9, якщо покласти* $g = f$.

Група $\hat{G}^{\sim}_{g=f,m=2}$ є нетривіальною умовною групою еквівалентності класу (А.21), оскільки вона ширша за $\hat{G}^{\sim}_{g=f}|_{m=2}$. Звичайні групи еквівалентності класів (А.21) і його підкласу з $m = 2$ виокремлюються зв'язком $\psi_x = 0$ відповідно з $\hat{G}^{\sim}_{g=f}$ і $\hat{G}^{\sim}_{g=f,m=2}$. Очевидно, що $G^{\sim}_{g=f}|_{m=2} = G^{\sim}_{g=f,m=2}$.

Сім'я точкових перетворень $v(t,x) = \sqrt{|f(x)|}u(t,x)$, параметризованих довільним елементом f, породжує відображення *вихідного класу* (А.21) на *клас-образ*

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^m + F(x)v, \tag{А.22}$$

де нові довільні елементи F та H визначаються за формулами

$$F(x) = -\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}, \quad H(x) = \frac{h(x)}{(\sqrt{|f(x)|})^{m+1}}. \tag{А.23}$$

Це дає специфічне калібрування довільних елементів класу (А.21), оскільки кожна фіксована пара (F,H) є образом нескінченної кількості пар функцій (f,h), що задовольняють умови (А.23).

Теорема А.12. *Звичайна група еквівалентності* $G^{\sim}_{FH}$ *класу* (А.22) *співпадає з узагальненою розширеною і складається з перетворень*

$$\tilde t = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde x = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde v = \delta_4 v,$$
$$\tilde F = \frac{F}{{\delta_1}^2}, \quad \tilde H = \frac{H}{{\delta_1}^2 {\delta_4}^{m-1}}, \quad \tilde m = m.$$

Тут і надалі δ_j, $j = 1, ..., 4$, *— довільні сталі,* $\delta_1\delta_4 \neq 0$.

Теорема А.13. *Підклас рівнянь* (А.22) *з* $m = 2$ *допускає узагальнену розширену групу еквівалентності* $\hat G^{\sim}_{FH,m=2}$*, складену перетвореннями*

$$\tilde t = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde x = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde v = \delta_4 v + \chi(x),$$
$$\tilde F = \frac{F}{{\delta_1}^2} - \frac{2H}{{\delta_1}^2\delta_4}\chi, \quad \tilde H = \frac{H}{{\delta_1}^2\delta_4},$$

де $\chi(x)$ *— розв'язок ЗДР* $\chi_{xx} = \delta_4^{-1} H\chi^2 - F\chi$. *Вона є нетривіальною умовною групою еквівалентності класу* (А.22) *за умови* $m = 2$.

У випадку $m = 2$ потрібно додатково калібрувати через відображення між класами так, щоб складні перетворення еквівалентності, відповідні функції ψ, відобразились у тотожні перетворення. Цього можна досягти сім'єю перетворень

$$w(t,x) = v(t,x) + \frac{F(x)}{2H(x)}, \tag{А.24}$$

що породжує відображення підкласу рівнянь (А.22) з $m = 2$ на клас рівнянь вигляду

$$w_t = w_{xx} + H(x)w^2 + G(x). \tag{А.25}$$

Новий довільний елемент G виражається через F та H за формулою

$$G(x) = -\left(\frac{F(x)}{2H(x)}\right)_{xx} - \frac{F(x)^2}{4H(x)}. \tag{А.26}$$

Теорема А.14. *Звичайна група еквівалентності* $G^{\sim}_{HG}$ *класу* (А.25) *співпадає з узагальненою розширеною і складається з перетворень*

$$\tilde t = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde x = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde w = \delta_4 w, \quad \tilde G = \frac{\delta_4 G}{{\delta_1}^2}, \quad \tilde H = \frac{H}{{\delta_1}^2\delta_4}.$$

Кінцеві класи ((A.22) при $m \neq 2$ і (A.25)) мають групи еквівалентності простої структури і взагалі є достатньо простими для групової класифікації. Всі виконані відображення між класами переводять орбіти груп еквівалентності в орбіти груп еквівалентності. Тому можна використати метод групової класифікації, описаний у пункті 2.2.3. А саме, якщо взяти по одному прообразу відносно (A.24) для кожного елемента списка $G^{\sim}_{HG}$-нееквівалентних розширень МАІ у класі (A.25), отримаємо подібний список відносно $\hat{G}^{\sim}_{FH,m=2}$-еквівалентності для підкласу рівнянь (A.22) з $m = 2$, який є “специфікацією” списку відносно $\hat{G}^{\sim}_{FH}$-еквівалентності для класу (A.22) для значення $m = 2$. Аналогічно, з класифікаційного списку для класу (A.22) за перетворенням $v(t,x) = \sqrt{|f(x)|}u(t,x)$ будуємо класифікаційний список для класу (A.20), який включає $\hat{G}^{\sim}_{g=f}$-нееквівалентні розширення МАІ при $m \neq 2$ і $\hat{G}^{\sim}_{g=f,m=2}$-нееквівалентні розширення МАІ при $m = 2$. Знайдено всі додаткові перетворення еквівалентності, що дає також класифікацію відносно всіх точкових перетворень. Для підкласу рівнянь (A.17) з $m \neq 2$ у термінах класу-образу прокласифіковано максимальні умовні групи еквівалентності та максимальні нормалізовані підкласи і в результаті описано множину допустимих перетворень.

Для всіх класів рівнянь, розглянутих у цьому підрозділі, різними методами побудовано широкі сім’ї точних розв’язків та проведено попереднє дослідження операторів редукції.

A.4. Редукції і приховані симетрії (1+2)-вимірного рівняння Бюргерса

Під час аналізу багатовимірних квазіпростих хвиль у слабо дисипативних течіях у [250] виведено модельне (1+2)-вимірне рівняння Бюргерса

$$\Phi_t + \Phi\Phi_x - \Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0, \tag{A.27}$$

яке має гарні симетрійні властивості, в особливості — пов'язані з прихованими симетріями. МАІ рівняння (A.27) є алгебра

$$\mathfrak{g} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_y,\ G = t\partial_x + \partial_\Phi,\ D = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \Phi\partial_\Phi \rangle.$$

Повна група точкових симетрій G рівняння (A.27) складається з перетворень, що діють на розв'язки за формулою

$$\tilde{\Phi}(t,x,y) = \varepsilon_1 e^{\delta_5}\Phi(e^{2\delta_5}t + \delta_1, \varepsilon_1 e^{\delta_5}x + \delta_2 + \delta_4 t, \varepsilon_2 e^{\delta_5}y + \delta_3),$$

де δ_1, …, δ_5 — довільні сталі, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$. Перелік одно- і двовимірних G-нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпують алгебри

$$\begin{aligned}
&\langle D\rangle, \quad \langle \partial_t + \alpha G + \beta\partial_y\rangle,\ (\alpha,\beta) \in \{(1,\beta'),(0,1),(0,0)\},\ \beta' \geqslant 0,\\
&\langle G + \partial_y\rangle, \quad \langle \partial_y + \alpha\partial_x\rangle,\ \alpha \geqslant 0, \quad \langle G\rangle, \quad \langle \partial_x\rangle.\\
&\langle D, \partial_t\rangle,\ \langle D, G\rangle,\ \langle G + \partial_y, \partial_x\rangle,\ \langle G, \partial_x\rangle,\\
&\langle D, \partial_y + \alpha\partial_x\rangle,\ \langle \partial_t + \varepsilon G, \partial_y + \alpha\partial_x\rangle,\ \langle G, \partial_y + \alpha\partial_x\rangle,\ \alpha \geqslant 0,\ \varepsilon \in \{0,1\},\\
&\langle D, \partial_x\rangle,\ \langle \partial_t + \alpha G + \beta\partial_y, \partial_x\rangle,\ (\alpha,\beta) \in \{(1,\beta'),(0,1),(0,0)\},\ \beta' \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Кожну одновимірну підалгебру алгебри $\mathfrak{g}$ можна використати для редукції рівняння (A.27) до ДРЧП з двома незалежними змінними. Наведемо анзаци, побудовані за нееквівалентними одновимірними підалгебрами, і асоційовані редуковані рівняння.

1. $\langle D\rangle$: $\Phi = |t|^{-1/2}\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1 = |t|^{-1/2}x,\ \omega_2 = |t|^{-1/2}y,\ \delta = \operatorname{sign} t,$
$$\varphi_{11} + \varphi_{22} - \varphi\varphi_1 + \frac{\delta}{2}(\varphi + \omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2) = 0. \tag{A.28}$$
2. $\langle \partial_t + \alpha G + \beta\partial_y\rangle$: $\Phi = \varphi(\omega_1,\omega_2) + \alpha t,\ \omega_1 = x - \dfrac{\alpha}{2}t^2,\ \omega_2 = y - \beta t,$
$$\varphi_{11} + \varphi_{22} - \varphi\varphi_1 + \beta\varphi_2 - \alpha = 0. \tag{A.29}$$
3. $\langle G + \partial_y\rangle$: $\Phi = \varphi(\omega_1,\omega_2) + y,\ \omega_1 = t,\ \omega_2 = x - ty,$
$$\varphi_1 + \varphi\varphi_2 - (1 + \omega_1^2)\varphi_{22} = 0. \tag{A.30}$$
4. $\langle \partial_y + \alpha\partial_x\rangle$: $\Phi = \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1 = t,\ \omega_2 = \dfrac{x - \alpha y}{\sqrt{1+\alpha^2}},$
$$\varphi_1 + \varphi\varphi_2 - \varphi_{22} = 0. \tag{A.31}$$

5. $\langle G\rangle :\ \ \Phi = t^{-1}\varphi(\omega_1,\omega_2) + t^{-1}x,\ \omega_1 = t,\ \omega_2 = y.$

6. $\langle \partial_x\rangle :\ \ \Phi = \varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1 = t,\ \omega_2 = y.$

Редуковані рівняння у випадках 5 і 6 мають однаковий вигляд

$$\varphi_1 - \varphi_{22} = 0. \tag{A.32}$$

Серед редукованих рівнянь є відомі. Так, (A.32) — одновимірне лінійне рівняння теплопровідності, (A.31) — звичайне, а (A.30) — узагальнене (одновимірне) рівняння Бюргерса [267]. Симетрійні властивості цих рівнянь добре досліджені. Зокрема, рівняння (A.32) і (A.31) мають широкі MAI, що містять оператори, не індуковані операторами з MAI $\mathfrak{g}$ вихідного рівняння (A.27). Отже, рівняння (A.27) має велику множину операторів *прихованої* симетрії. Зауважимо, що перший нетривіальний приклад прихованої симетрії, пов'язаної з редукцією ДРЧП, знайдено Капітанським [18, 19] для рівнянь Ойлера. Класи прихованих симетрій рівнянь Нав'є–Стокса і Ойлера побудовано в [127, 128, 223]. Рівняння Бюргерса (A.31) зводиться підстановкою Коула–Хопфа $\varphi = -2\tilde\varphi_2/\tilde\varphi$ до лінійного рівняння теплопровідності на функцію $\tilde\varphi = \tilde\varphi(\omega_1,\omega_2)$. Отже, остаточно маємо три класи розв'язків рівняння (A.27) (ті, що відповідають анзацам 4, 5 і 6), які виражаються через розв'язки лінійного рівняння теплопровідності. Подальші редукції лінійного рівняння теплопровідності не потрібні, оскільки багато точних розв'язків для нього вже побудовано, що одразу дає великі сім'ї точних розв'язків рівняння (A.27).

Редуковані рівняння (A.28), (A.29), (A.30) не мають цікавих властивостей щодо ліївської симетрії. Всі оператори з їх MAI індуковано операторами з алгебри $\mathfrak{g}$, а тому подальші їх ліївські редукції не дають нових точних розв'язків порівняно з прямою редукцією рівняння (A.27) по двовимірних підалгебрах алгебри $\mathfrak{g}$.

Щоб редукувати рівняння (A.27) до ЗДР у рамках ліївського підходу, достатньо вибрати тільки алгебри зі списку нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, які не містять операторів G, $\partial_y + \alpha\partial_x$ або ∂_x.

(Інакше відповідні розв'язки належать класам вже описаних розв'язків, що виражаються через розв'язки лінійного рівняння теплопровідності.) Цій умові задовольняє тільки підалгебра $\langle D, \partial_t \rangle$. Відповідні анзац і редуковане рівняння мають вигляд $\Phi = -y^{-1}\varphi(\omega)$, де $\omega = y^{-1}x$, та

$$(1+\omega^2)\varphi'' + 4\omega\varphi' + 2\varphi + \varphi\varphi' = 0. \tag{A.33}$$

Загальний розв'язок рівняння (A.33) виражається через елементарні функції. Проінтегруємо його один раз: $(1+\omega^2)\varphi' + 2\omega\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 = 2A$, де $A = \mathrm{const}$, і зведемо отримане рівняння Рікаті підстановкою

$$\varphi = 2(1+\omega^2)\frac{\psi'}{\psi}, \quad \psi = \psi(\omega)$$

до лінійного ЗДР другого порядку $(1+\omega^2)^2\psi'' + 4\omega(1+\omega^2)\psi' - A\psi = 0$. Вигляд загального розв'язку останнього рівняння залежить від A:

$$\begin{aligned}
&A = 0\colon \quad \psi = C_1 + C_2\left(\theta + \frac{\omega}{1+\omega^2}\right),\\
&A = 1\colon \quad \psi = C_1\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} + C_2\frac{\omega\theta + 1}{\sqrt{1+\omega^2}},\\
&A > 1\colon \quad \psi = C_1\frac{\omega - \alpha}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{-\alpha\theta} + C_2\frac{\omega + \alpha}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{\alpha\theta},\\
&\begin{matrix} A < 1 \\ A \neq 0 \end{matrix}\colon \quad \psi = C_1\frac{\omega\cos(\alpha\theta) - \alpha\sin(\alpha\theta)}{\sqrt{1+\omega^2}} + C_2\frac{\omega\sin(\alpha\theta) + \alpha\cos(\alpha\theta)}{\sqrt{1+\omega^2}},
\end{aligned}$$

де $\theta := \operatorname{arctg}\omega$, $\alpha := \sqrt{|A-1|}$.

Розглянемо неліївський анзац

$$\Phi = \varphi(t,y)x + \psi(t,y), \tag{A.34}$$

що редукує рівняння (A.27) до системи

$$\varphi_t - \varphi_{yy} + \varphi^2 = 0, \quad \psi_t - \psi_{yy} + \varphi\psi = 0 \tag{A.35}$$

двох ДРЧП на дві нові невідомі функції $\varphi = \varphi(t,y)$ і $\psi = \psi(t,y)$. Цей анзац допускає інтерпретацію в рамках різних підходів до побудови точних розв'язків нелінійних ДРЧП, таких як нелінійне розділення змінних [145], метод диференціальних зв'язків [40], антиредукція [137] або узагальнені умовні симетрії [119,290], які пов'язані між собою [212]. Так, диференціальний зв'язок $\Phi_{xx} = 0$, що відповідає анзацу (A.34), формально сумісний з (A.27). Антиредукція рівняння (A.27) за допомогою анзаца, що містить дві нові невідомі функції двох аргументів, до системи двох ДРЧП означає, що $\Phi_{xx}\partial_\Phi$ є оператором узагальненої умовної симетрії рівняння (A.27).

MAI $\mathfrak{g}_1 = \langle\, \partial_t,\ \partial_y,\ \varphi\partial_\psi,\ G_1 = (t\varphi - \psi)\partial_\psi,\ D_1 = 2t\partial_t + y\partial_y - 2\varphi\partial_\varphi,$ $D_1' = \psi\partial_\psi \,\rangle$ системи (A.35) шестивимірна, а $\dim\mathfrak{g} = 5$. Отже, в $\mathfrak{g}_1$ повинні існувати оператори, не індуковані операторами з $\mathfrak{g}$. Дійсно, оператори ∂_t, ∂_y, ∂_x, G, D з $\mathfrak{g}$ індукують відповідно оператори ∂_t, ∂_y, $\varphi\partial_\psi$, G_1, $D_1 - D_1'$ з $\mathfrak{g}_1$. Будь-який оператор з $\mathfrak{g}_1$, який містить лінійну комбінацію операторів D_1 і D_1' з коефіцієнтами, непропорційними $(1, -1)$, не є індукованим оператором з $\mathfrak{g}$, тобто рівняння (A.27) має нетривіальні приховані симетрії, асоційовані з неліївським анзацом (A.34).

Для побудови точних розв'язків системи (A.35) можна використати той факт, що ця система напівзачеплена. Підстановка відомого розв'язку першого рівняння у друге приводить до лінійного рівняння теплопровідності з потенціалом φ на функцію ψ. Обговоримо тут лише випадок $\varphi = 6y^{-2} \bmod G$, у якому загальний розв'язок рівняння $\psi_t - \psi_{yy} + 6y^{-2}\psi = 0$ на ψ виражається через загальний розв'язок (вільного) рівняння теплопровідності. Після підстановки $\psi = y^3\zeta(t, y)$ отримаємо рівняння $\zeta_t - \zeta_{yy} - 6y^{-1}\zeta_y = 0$ для функції $\zeta = \zeta(t, y)$. Між рівняннями вигляду $\eta_t - \eta_{yy} - \nu y^{-1}\eta_y = 0$ і $\theta_t - \theta_{yy} - (\nu - 2)y^{-1}\theta_y = 0$, де $\nu = \mathrm{const}$, є перетворення Беклунда $\theta_y = y\eta$, $\theta_t = (y\eta)_y + (\nu - 2)\eta$, що зсуває параметр ν на -2. Застосовуючи його тричі до рівняння $\zeta_t - \zeta_{yy} - 6y^{-1}\zeta_y = 0$, отримаємо зображення розв'язків цього рівняння через розв'язки рівняння теплопровідності: $\zeta = (y^{-1}\partial_y)^3\theta$, де $\theta_t - \theta_{yy} = 0$. У результаті, маємо ще один клас розв'язків $\Phi = 6y^{-2}x + (y^{-1}\partial_y)^3\theta(t, y)$ рівняння (A.27), зображених у термінах довільного розв'язку $\theta = \theta(t, y)$ лінійного рівняння теплопровідності. Фізичний зміст побудованих розв'язків обговорено в [250].

Додаток Б

Закони збереження потенціальних систем. Доведення

Наведені у підрозділі 4.8 результати для двовимірного випадку можна узагальнити на багатовимірний випадок двома способами. Один із них пов'язаний з так званими абелевими накриттями [193], а інший ґрунтується на введенні потенціалів згідно теореми 4.3. Частину результатів можна також поширити на калібровані потенціальні системи і загальні накриття. У сукупності це обґрунтовує поняття характеристики закону збереження для таких потенціальних структур, доводить для них теорему 4.2, а також дає деякі інші твердження (див. теореми Б.1 і Б.2).

Б.1. Абелеві накриття

Припустимо, що система $\mathcal{L}$ допускає p потенціалів $v^1, \ldots, v^p$, визначених співвідношеннями

$$v_i^s = G^{si}[u], \tag{Б.1}$$

де диференціальні функції $G^{si} = G^{si}[u]$ задовольняють умові сумісності $D_jG^{si} = D_iG^{sj}$ на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Відповідну потенціальну систему $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ канонічно зображено потенціальною частиною (Б.1) і системою $\mathcal{L}$, з якої виключено підсистему рівнянь, що є диференціальними наслідками інших рівнянь системи $\mathcal{L}$ і потенціальної частини, узятих разом. Як і в підрозділі 4.8, індекс ν пробігає множину $\mathcal{N}$ номерів рівнянь з $\mathcal{L}$, що входять до зображення системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, а індекс ν' пробігає її доповнення $\mathcal{N}' = \{1, \dots, l\} \backslash \mathcal{N}$. Описане зображення дає канонічне розшарування системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ над системою $\mathcal{L}$.

Система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ визначає *абелеве* накриття (першого рівня) системи $\mathcal{L}$, оскільки праві частини G^{si} у (Б.1) не залежать від потенціалів $v^1, \dots, v^p$. Кожну з умов сумісності $(D_j G^{si} - D_i G^{sj})\big|_\mathcal{L} = 0$ можна інтерпретувати як закон збереження системи $\mathcal{L}$ зі збережним вектором, який має тільки дві ненульові компоненти, а саме, i-та компонента дорівнює G^{sj} і j-та компонента дорівнює $-G^{si}$. Отже, для визначення одного потенціалу в абелевому накритті необхідно мати $\frac{1}{2}n(n-1)$ законів збереження спеціального вигляду.

Подібно до двовимірного випадку, два набори $v = (v^1, \dots, v^p)$ і $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^p)$ потенціалів абелевих накриттів деякої багатовимірної системи $\mathcal{L}$ *еквівалентні*, якщо існують диференціальні функції $\Phi^s[u]$ і сталі $c_{s\sigma}$ такі, що $|c_{s\sigma}| \neq 0$ і перетворення $\tilde{v}^s = c_{s\sigma} v^\sigma + \Phi^s[u]$ (змінні x і похідні функцій u не перетворюють) відображає систему $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, асоційовану з v, у систему $\tilde{\mathcal{L}}_\mathrm{p}$, асоційовану з $\tilde{v}$. Набори диференціальних функцій $(G^{si}[u])$ і $(\tilde{G}^{si}[u])$ з потенціальних частин цієї системи пов'язані співвідношеннями $(\tilde{G}^{si} - c_{s\sigma} G^{\sigma i} - D_i \Phi^s)\big|_\mathcal{L} = 0$. При локально-координатному підході абелеве накриття системи $\mathcal{L}$ у дійсності є класом еквівалентності наборів потенціалів, які розглядають разом з відповідними рівняннями вигляду (Б.1) і продовженнями операторів повного диференціювання на потенціали, що збігаються на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Еквівалентність p-наборів потенціалів узгоджена з еквівалентністю асоційованих p-елементних множин $\frac{1}{2}n(n-1)$-наборів збережних векторів з урахуванням лінійних комбінацій.

Означення 4.14 легко узагальнити на абелеві накриття довільної розмірності.

Означення Б.1. Потенціали v^1, …, v^p називають *локально залежними на множині розв'язків системи* $\mathcal{L}$ (або скорочено *залежними*), якщо існують $r' \in \mathbb{N}$ і функція Ω змінних x, $u_{(r')}$, v^1, …, v^p такі, що

$\Omega_{v^s} \neq 0$ для деякого s і $\Omega(x, u_{(r')}, v^1, \dots, v^p) = 0$ для будь-якого розв'язку $(u, v^1, \dots, v^p)$ системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ (з точністю до калібрувальних перетворень, тобто додавання сталих до потенціалів).

Якщо лінійна комбінація наборів $(G^{s1}, \dots, G^{sn})$, $s = \overline{1,p}$, — повний градієнт, тобто $c_s G^{si} = D_i H$ для деяких сталих c_s і диференціальної функції $H[u]$, то потенціали v^1, …, v^p залежні і $c_s v^s = H[u] + c_0$ для деякої нехтовної сталої c_0.

Застосування характеристичної форми (4.1) законів збереження вимагає цілковитої невиродженості систем $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}_\mathrm{p}$. Знову використаємо прийом із введенням навантажених просторів струменів і розширенням ваги на потенціали. Процедура подібна до двовимірного випадку. Так, правило для розширення ваги на похідні потенціалів v^1, …, v^p задає формула

$$\varrho(v^s_\alpha) = \max\big(0, \varrho(G^{s1}) - 1, \dots, \varrho(G^{sn}) - 1\big) + |\alpha|.$$

Лема Б.1. *Система $\mathcal{L}$ цілком невироджена за вагою тоді і тільки тоді, коли система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ цілком невироджена за цією вагою, розширеною на похідні потенціалів.*

Доведення. Повну множину $L_{\mathrm{p}[k]}$ незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ які мають розширені ваги не вище, ніж k, вичерпують рівняння $\breve{L}^{\breve{\mu}} = 0$, $\breve{\mu} = 1, \dots, \breve{l}$, $v^s_\alpha = D_i^{\alpha_i - 1} D_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots D_n^{\alpha_n} G^{si}$. Тут рівняння $\breve{L}^{\breve{\mu}} = 0$, $\breve{\mu} = 1, \dots, \breve{l}$, утворюють повну множину $L_{[k]}$ незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$, які мають ваги не вище k, і $v^s_\alpha = \partial^{|\alpha|} v^s / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$. Для фіксованих i і s мультиіндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ пробігає множину мультиіндексів, що задовольняють обмеження $\alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = 0$, $\alpha_i > 0$, $\varrho(v^s) + |\alpha| \leqslant k$. Далі доведення повторює доведення леми 4.9. □

Будь-яка потенціальна система, що зображає абелеве накриття, розшарована над відповідною вихідною системою. Тому всі твердження підрозділу 4.7 можна застосовувати до її законів збереження (після необхідних модифікацій у доведенні теореми 4.7, пов'язаних із введенням навантажених просторів струменів). Строге твердження про зв'язок між характеристиками, вільними від потенціалів, і законами збереження, індукованими законами збереження відповідної вихідної системи, можна довести завдяки спеціальній структурі цього розшарування.

Лема Б.2. *Якщо характеристика потенціальної системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ залежить тільки від "локальних" змінних (тобто є функцією тільки від x і похідних функцій u), то асоційований закон збереження системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ має вектор густини, незалежний від потенціалів.*

Доведення. Нехай $(\alpha^{si}, \gamma^{\nu}, s = \overline{1,p}, i = \overline{1,n}, \nu \in \mathcal{N})$ — характеристика потенціальної системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, незалежна від потенціалів $v^1, \ldots, v^p$. (Згідно визначальним рівнянням (Б.1) для потенціалів, залежністю характеристики від похідних потенціалів ненульового порядку можна знехтувати з точністю до відношення еквівалентності характеристик.) Компоненти α^{si} і γ^{ν} є диференціальними функціями від u і асоційовані з рівняннями $v^s_i = G^{si}$ і $L^{\nu} = 0$ відповідно. За означенням характеристики існує вектор $(F^1, \ldots, F^n)$, що зберігається, системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, для якого

$$D_i F^i = \alpha^{si}(v^s_i - G^{si}) + \gamma^{\nu} L^{\nu} =: V. \tag{Б.2}$$

Оскільки диференціальна функція $V = V[u, v]$ є повною дивергенцією, дія розширеного оператора Ейлера $\mathsf{E} = (\mathsf{E}_{u^1}, \ldots, \mathsf{E}_{u^m}, \mathsf{E}_{v^1}, \ldots, \mathsf{E}_{v^p})$ на V дає набір з $m + p$ нулів. Зокрема, $-\mathsf{E}_{v^s} V = D_i \alpha^{si} = 0$, а тому $(\alpha^{s1}[u], \ldots, \alpha^{sn}[u])$ — нульова дивергенція і згідно теореми 4.3 існують такі диференціальні функції $\Phi^{sij} = \Phi^{sij}[u]$, що $\alpha^{si} = D_j \Phi^{sij}$ і $\Phi^{sij} = -\Phi^{sji}$. Набір $\hat{F}$ з компонентами $\hat{F}^i = F^i + \Phi^{sij}(v^s_j - G^{sj})$, є вектором, що зберігається, еквівалентним вихідному вектору F. У термінах вектора $\hat{F}$ рівняння (Б.2) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} D_i \hat{F}^i = \alpha^{si}(v^s_i - G^{si}) + \gamma^{\nu} L^{\nu} + (D_i \Phi^{sij})(v^s_j - G^{sj}) + \\ + \Phi^{sij}(v^s_{ij} - D_i G^{sj}) = \sum_{i<j} \Phi^{sij}(D_j G^{si} - D_i G^{sj}) + \gamma^{\nu} L^{\nu}. \end{aligned}$$

Права частина цієї рівності щезає на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Діючи згідно стандартного способу виведення характеристичної форми законів збереження, отримаємо, що $D_i\check{F}^i = \check{\gamma}^\mu L^\mu$ для деяких диференціальних функцій $\check{\gamma}^\mu[u]$ і деякого збережного вектора $\check{F}$, еквівалентного $\hat{F}$, а отже, і F. (Вектор $\check{F}$ відрізняється від $\hat{F}$ на набір, що щезає на множина розв'язків системи $\mathcal{L}$.) Оскільки $\check{\gamma}^\mu L^\mu$ залежить тільки від x і похідних функцій u, із останньої рівності і наслідку 4.1 випливає, що існує збережний вектор $\tilde{F}$ системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ який залежить тільки від x і похідних функцій u і є еквівалентним вектору $\check{F}$, а отже і вектору F. □

Лема Б.3. *Якщо розширену характеристику потенціальної системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ індуковано характеристикою вихідної системи $\mathcal{L}$, то асоційований закон збереження системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має характеристики, що не залежать від потенціалів.*

Доведення. Нехай система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ визначає абелеве накриття системи $\mathcal{L}$. Припустимо, що $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має розширену характеристику, індуковану характеристикою λ системи $\mathcal{L}$. Це еквівалентно існуванню вектора F, що зберігається, системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ з $D_iF^i = \lambda^\mu[u]L^\mu[u]$. У загальному випадку, це рівняння не є характеристичною формою закону збереження системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, що містить вектор F, оскільки деякі рівняння системи $\mathcal{L}$ можуть не міститися в мінімальній множині рівнянь, що зображають потенціальну систему $\mathcal{L}_\mathrm{p}$. Зберемо індекси таких рівнянь у множину $\mathcal{N}' = \{\nu'\}$ і припустимо, що $\mathcal{N}' \neq \varnothing$ (інакше це вже характеристична форма).

За лемою 4.7, зображення будь-якого $L^{\nu'}$ як диференціального наслідку системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має вигляд

$$L^{\nu'} = A^{\nu'\nu}L^\nu + \sum_{i<j} B^{\nu'sij}(D_iG^{sj} - D_jG^{si}),$$

де $A^{\nu'\nu}$ і $B^{\nu'sij}$ — многочлени від операторів повного диференціювання D_i з гладкими коефіцієнтами, залежними від x і похідних функцій u, $B^{\nu'sij} = -B^{\nu'sji}$. Оскільки $D_iG^{sj} - D_jG^{si} = D_j(v^s_i - G^{si}) - D_i(v^s_j - G^{sj})$, то $D_iF^i = \lambda^\nu L^\nu + \lambda^{\nu'} A^{\nu'\nu} L^\nu + \lambda^{\nu'} B^{\nu' sij} D_j(v^s_i - G^{si})$, звідки, інтегруючи по частинах, отримаємо $D_i\tilde F^i = \gamma^\nu L^\nu + \alpha^{si}(v^s_i - G^{si})$. Тут $\alpha^{si} = -D_j B^{jis\nu'*}\lambda^{\nu'}$ і $\gamma^\nu = \lambda^\nu + A^{\nu\nu'*}\lambda^{\nu'}$ — диференціальні функції від u, $A^{\nu\nu'*}$ і $B^{jis\nu'*}$ позначають формально спряжені оператори до $A^{\nu'\nu}$ і $B^{\nu' sij}$ відповідно. F і $\tilde F$ — еквівалентні збережні вектори, оскільки їх різниця щезає на $\mathcal{L}_{\rm p}$.

Отже, знайдено характеристику (α^{si}, γ^ν, $s = \overline{1,p}$, $i = \overline{1,n}$, $\nu \in \mathcal{N}$) закону збереження з вектором густини F, залежну тільки від x і похідних функцій u. □

Комбінуючи твердження 4.8, теорему 4.7 і леми Б.2 і Б.3, одержимо версію теореми 4.2 для абелевих накриттів.

Зауваження Б.1. Властивості локальності законів збереження, пераховані у теоремі 4.2, зберігаються при перетвореннях еквівалентності потенціальних систем. Більш точно, якщо системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_{\rm p}$ належать одному абелевому накриттю системи $\mathcal{L}$, то відповідне перетворення еквівалентності відображає будь-який закон збереження системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ з властивостями локальності у закон збереження системи $\tilde{\mathcal{L}}_{\rm p}$ з такими ж властивостями. Отже, твердження про властивості локальності законів збереження потенціальних систем можна переформулювати у термінах абелевих накриттів.

Б.2. Стандартні потенціали

Розглянемо потенціальні системи, отримані введенням потенціалів згідно теореми 4.3 при $n > 2$. Припустимо, що система $\mathcal{L}$ має p лінійно незалежних локальних законів збереження з векторами густини $G^s = (G^{s1}, \ldots, G^{sn})$, $s = \overline{1,p}$. Введемо потенціали $v^{sij} = -v^{sji}$, зв'язані з цією множиною векторів рівнянням

$$v^{sij}_j = G^{si}. \tag{Б.3}$$

Додатково вважатимемо, що ці потенціали локально незалежні на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Канонічне зображення відповідної *стан-*

дартної потенціальної системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ складається з потенціальної частини (Б.3) і системи $\mathcal{L}$, з якої виключено підсистему рівнянь, що є диференціальними наслідками інших рівнянь системи $\mathcal{L}$ і потенціальної частини, узятих разом. Індекс ν' пробігає множину $\mathcal{N}'$ індексів таких рівнянь, а індекс ν — її доповнення $\mathcal{N}=\{1,\dots,l\}\backslash\mathcal{N}'$. (Зауважимо, що $|\mathcal{N}|\geqslant l-p$ і може не дорівнювати $l-p$.) Описане вище зображення є канонічним розшаруванням системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ над системою $\mathcal{L}$.

Набори $v=(v^{sij})$ і $\tilde v=(\tilde v^{sij})$ потенціалів, асоційовані з одним й тим самим p-вимірним підпростором простору $\mathrm{CL}(\mathcal{L})$, вважаємо *еквівалентними*. Іншими словами, набори потенціалів v і $\tilde v$ еквівалентні, якщо існують диференціальні функції $\Phi^{sij}[u]$ і сталі $c_{s\sigma}$ такі, що $\Phi^{sij}=-\Phi^{sji}$, $|c_{s\sigma}|\neq 0$ і перетворення $\tilde v^{sij}=c_{s\sigma}v^{\sigma ij}+\Phi^{sij}[u]$ (змінні x і похідні функцій u не перетворюють) відображає систему $\mathcal{L}_{\rm p}$, асоційовану з v, у систему $\tilde{\mathcal{L}}_{\rm p}$, асоційовану з $\tilde v$. Набори відповідних збережних векторів G^s і $\tilde G^s$ пов'язані умовами $\big(\tilde G^{si}-c_{s\sigma}G^{\sigma i}-D_i\Phi^{sij}\big)\big|_{\mathcal{L}}=0$. Будемо також казати, що системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_{\rm p}$ *еквівалентні як потенціальні системи* системи $\mathcal{L}$.

Процедура градуювання простору струменів відносно потенціалів при $n>2$ аналогічна двовимірному випадку (див. підрозділ 4.8). Відмінність полягає у тому, що ваги всіх потенціалів, які виникають з одного закону збереження (тобто з однаковим значенням індексу s), вважаємо рівними, тобто $\varrho(v^{sij}_\alpha)=\max\big(0,\varrho(G^{s1})-1,\dots,\varrho(G^{sn})-1\big)+|\alpha|$.

Лема Б.4. *Система $\mathcal{L}$ цілком невироджена за деякою вагою тоді і тільки тоді, коли система $\mathcal{L}_{\rm p}$ цілком невироджена за цією вагою, розширеною на похідні потенціалів.*

Доведення. Повну множину $L_{{\rm p}[k]}$ незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ з розширеними вагами не вище, ніж k, вичерпують рівняння $\breve L^{\breve\mu}=0$, $\breve\mu=\overline{1,\breve l}$, $v^{sij}_{\alpha+\delta_j}=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}G^{si}$, де рівняння $\breve L^{\breve\mu}=0$, $\breve\mu=\overline{1,\breve l}$, утворюють повну множину $L_{[k]}$ незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$, з вагами не вище, ніж k, і $v^s_\alpha=\partial^{|\alpha|}v^s/\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}$. Для фіксованих i та s мультиіндекс $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ пробігає множину мультиіндексів, в якій $\varrho(v^s) + |\alpha| < k$ і додатково $\alpha_1 = 0$, якщо $i = 1$. Далі доведення повторює доведення леми 4.9. □

Подібно до двовимірних потенціальних систем і систем, що зображають абелеві накриття, багатовимірні потенціальні системи розшаровані над відповідними вихідними системами у спеціальний спосіб. Окрім всіх тверджень підрозділу 4.7, це дозволяє доводити більш сильні твердження про закони збереження таких систем, індуковані законами збереження вихідних систем.

Лема Б.5. *Якщо характеристика потенціальної системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ залежить тільки від локальних змінних (тобто від незалежних і непотенціальних залежних), то асоційований закон збереження цієї системи має вектор густини, не залежний від потенціалів.*

Доведення. За припущенням, потенціальна система $\mathcal{L}_{\rm p}$ має характеристику $(\alpha^{si}, \gamma^\nu,\ s = \overline{1,p},\ i = 1, \dots, n,\ \nu \in \mathcal{N})$, не залежну від потенціалів $v^1, \dots, v^p$. (Завдяки (Б.3) залежністю характеристики від похідних потенціалів ненульового порядку можна нехтувати з точністю до відношення еквівалентності характеристики.) Компоненти α^{si} і γ^ν, що є диференціальними функціями від u, відповідають рівнянням $D_j v^{sij} = G^{si}$ і $L^\nu = 0$. Тому існує вектор F, що зберігається, потенціальної системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ з

$$D_i F^i = \alpha^{si}(v^{sij}_j - G^{si}) + \gamma^\nu L^\nu =: V. \tag{Б.4}$$

Оскільки $V = V[u, v]$ — повна дивергенція, то розширений оператор Ейлера $\mathsf{E} = (\mathsf{E}_{u^1}, \dots, \mathsf{E}_{u^m}, \mathsf{E}_{v^{1ij}}, \dots, \mathsf{E}_{v^{pij}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n)$ переводить V у набір нулів. Зокрема, $-\,\mathsf{E}_{v^{sij}} V = D_j\alpha^{si} - D_i\alpha^{sj} = 0$. Ці умови означають, що для кожного значення s "горизонтальна" диференціальна 1-форма $\omega^s = \alpha^{si}[u]\,dx_i$ замкнена відносно повного диференціалу D, оскільки

$$\mathsf{D}\,\omega^s = D_j\alpha^{si}\,dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j}(D_j\alpha^{si} - D_i\alpha^{sj})dx_j \wedge dx_i = 0.$$

"Горизонтальний" комплекс [7] де Рама (або D-комплекс [31]) над цілком зірчастою областю незалежної змінної x і залежної змінної u є точним (див., наприклад, теорему 5.59 з [31]). Отже, 1-форма ω^s — D-точна, тобто існує “горизонтальна” диференціальна 0-форма (іншими словами, диференціальна функція) $\Phi^s = \Phi^s[u]$ така, що $\omega^s = \mathsf{D}\Phi^s$. Покомпонентно остання рівність має вигляд $\alpha^{si} = D_i\Phi^s$.

Розглянемо збережний вектор $\hat{F}$, еквівалентний вихідному вектору F, з компонентами $\hat{F}^i = F^i - \Phi^s(v^{sij}_j - G^{si})$. Тоді рівняння (Б.4) можна переписати як

$$D_i\hat{F}^i = -\Phi^s(v^{sij}_{ij} - D_iG^{si}) + \gamma^\nu L^\nu = \Phi^s D_iG^{si} + \gamma^\nu L^\nu.$$

Права частина цього рівняння є диференціальною функцією від u і щезає на многовиді $\mathcal{L}_{(k)}$ у просторі струменів $J^k(x|u)$, де k — найвищий порядок похідних у цьому виразі. Використовуючи лему Адамара і “інтегрування по частинах” як при виведенні загальної характеристичної форми законів збереження, отримаємо, що $D_i\check{F}^i = \check{\gamma}^\mu L^\mu$ для деяких диференціальних функцій $\check{\gamma}^\mu[u]$. Вектор $\check{F}$, що зберігається, еквівалентний вектору $\hat{F}$ і, отже, вектору F, оскільки його різниця з $\hat{F}$ щезає на множині розв’язків системи $\mathcal{L}$. Права частина $\check{\gamma}^\mu L^\mu$ залежить тільки від x і похідних функцій u, тому в силу наслідку 4.1 з цієї рівності випливає, що існує вектор $\tilde{F}$, що зберігається, системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, який залежить тільки від x і похідних функцій u і еквівалентний вектору $\check{F}$ і, отже, вектору F. □

Лема Б.6. *Якщо розширену характеристику потенціальної системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ індуковано характеристикою системи $\mathcal{L}$, то асоційований закон збереження системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має характеристику, не залежну від потенціалів.*

Доведення. Нехай багатовимірна потенціальна система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ має розширену характеристику, індуковану характеристикою λ вихідної системи $\mathcal{L}$. Отже, існує вектор $F = (F^1, \dots, F^n)$, що зберігається, системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ такий, що $D_iF^i = \lambda^\mu[u]L^\mu[u]$. Оскільки деякі рівняння системи $\mathcal{L}$ можуть не входити до мінімальної множини рівнянь, що канонічно зображають потенціальну систему $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, це співвідношення не обов'язково є характеристичною формою закону збереження системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$.

Утворимо множину $\mathcal{N}' = \{\nu'\}$ з індексів таких рівнянь і припустимо, що $\mathcal{N}' \neq \varnothing$. Тоді згідно леми 4.7, $L^{\nu'}$, що є диференціальним наслідком системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, можна зобразити як $L^{\nu'} = A^{\nu'\nu}L^\nu + B^{\nu's}D_iG^{si}$, де $A^{\nu'\nu}$ і $B^{\nu's}$ — многочлени від операторів повного диференціювання D_i з коефіцієнтами, залежними від x і похідних функцій u. З рівнянь $D_iG^{si} = D_i(v^{sij}_j - G^{si})$ випливає, що

$$D_iF^i = \lambda^\nu L^\nu + \lambda^{\nu'}A^{\nu'\nu}L^\nu + \lambda^{\nu'}B^{\nu's}D_i(v^{sij}_j - G^{si}),$$

і інтегрування по частинах справа приводить до

$$D_i\tilde{F}^i = \alpha^{si}(v^{sij}_j - G^{si}) + \gamma^\nu L^\nu.$$

Тут $\alpha^{si} = -D_iB^{s\nu'*}\lambda^{\nu'}$ і $\gamma^\nu = \lambda^\nu + A^{\nu\nu'*}\lambda^{\nu'}$ — диференціальні функції від u, $A^{\nu\nu'*}$ і $B^{s\nu'*}$ — оператори, формально спряжені до $A^{\nu'\nu}$ і $B^{\nu's}$. Вектори F і $\tilde{F}$, що зберігаються, еквівалентні, бо їх різниця щезає на $\mathcal{L}_\mathrm{p}$.

Це дає характеристику $(\alpha^{si}, \gamma^\nu,\ s = \overline{1,p},\ i = 1,\dots,n,\ \nu \in \mathcal{N})$ закону збереження з вектором густини F, яка залежить тільки від x і похідних від u, що і вимагалося довести. □

Результати твердження 4.8, теореми 4.7 і лем Б.5 і Б.6 підсумовує версія теореми 4.2 для багатовимірних потенціальних систем.

Зауваження Б.2. Властивості локальності законів збереження стійкі відносно еквівалентності потенціальних систем. Іншими словами, якщо потенціальні системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_\mathrm{p}$ системи $\mathcal{L}$ еквівалентні, то відповідне перетворення еквівалентності відображає будь-який закон збереження системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ з властивостями локальності, про які йдеться у теоремі 4.2, у закон збереження системи $\tilde{\mathcal{L}}_\mathrm{p}$ з такими ж властивостями.

При $n > 2$ рівняння (Б.3), асоційовані з фіксованим розв'язком $u = u(x)$ системи $\mathcal{L}$, утворюють недовизначену систему на потенціали v^{sij}. Отже, до $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ можна додати калібрувальні умови на потенціали. Насправді такі додаткові умови абсолютно необхідні при $n > 2$ для того, щоб потенціальна система мала нетривіальний симетрії і закони збереження. Так, у теоремі 2.7 з [53] при досить загальних припущеннях стверджується, що кожна локальна симетрія потенціальної системи з незв'язаними додатково потенціалами проектовна у локальну симетрію вихідної системи, тобто така потенціальна система не дає нетривіальних потенціальних симетрій. Більш того, кожний закон збереження такої система інваріантний відносно калібрувальних перетворень потенціалів [56].

Означення Б.2. Систему $\mathcal{L}_{\mathrm{g}}$ диференціальних рівнянь з незалежними змінними x і залежними змінними u і v називають *калібруванням* на потенціали v^{sij}, визначеним рівняннями (Б.3), якщо будь-який диференціальний наслідок зчепленої системи $\mathcal{L}_{\mathrm{gp}} = \mathcal{L}_{\mathrm{p}} \cap \mathcal{L}_{\mathrm{g}}$, в якому немає потенціалів v^{sij}, є диференціальним наслідком вихідної системи $\mathcal{L}$. Зчеплену систему $\mathcal{L}_{\mathrm{gp}}$ називають *каліброваною потенціальною системою*. Калібровку $\mathcal{L}_{\mathrm{g}}$ називають *слабкою*, якщо мінімальна множина рівнянь, що породжують всі диференціальний наслідки системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, міститься у мінімальній множині рівнянь, що зображають зчеплену систему $\mathcal{L}_{\mathrm{gp}}$, яку назвемо у цьому випадку *слабо каліброваною потенціальна система.*

Калібрована потенціальна система $\mathcal{L}_{\mathrm{gp}}$ є розшарованою системою над базовою системою $\mathcal{L}$. Отже, твердження підрозділу 4.7 вірні для законів збереження таких систем і їх можна посилити до теореми 4.2.

Послаблену версію теореми 4.2 про потенціальні системи без калібрувань можна поширити на слабо калібровані потенціальні системи. Доведення аналогічне вже наведеним, тільки замість найпростішої версії леми Адамара для розшарувань (лема 4.7) необхідно застосувати загальну версію (лема 4.8).

Теорема Б.1. *Закон збереження слабо каліброваної потенціальної системи містить вектор густини, не залежний від потенціалів, тоді і тільки тоді, коли він має характеристику, яка також не залежить від потенціалів і чиї компоненти, відповідні калібрувальним рівнянням, щезають.*

Б.3. Загальні накриття

Ідею загальних накриттів запропоновано у відомій статті Волквіста і Естабрука [283] у вигляді продовжених структур із залученням *псевдопотенціалів*. Пізніше цю ідею було строго сформульовано і розвинуто у геометричних термінах [7, 178, 179, 280]. Далі накриття розглянуто в рамках локального підходу з введенням локальних координат.

Твердження про одночасну локальність векторів, що зберігаються, і характеристик не вірне для законів збереження загальних накриттів.

Припустимо, що система $\mathcal{L}$ допускає p псевдопотенціалів $v^1, \ldots, v^p$, визначених рівняннями

$$v^s_i = G^{si}[u|v], \tag{Б.5}$$

де диференціальні функції $G^{si} = G^{si}[u|v]$ задовольняють умову сумісності $\hat{D}_j G^{si} = \hat{D}_i G^{sj}$ на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. Позначення $G[u|v]$ означає, що G — диференціальна функція від u і v, що залежить лише від x, v і похідних від u (похідних від v порядків вище 0 немає!). Такі функції будемо називати диференціальними функціями від $(u|v)$. $\hat{D}_i$ — оператор повного диференціювання, що діє на диференціальні функції від $(u|v)$ згідно системи (Б.5), тобто $\hat{D}_i = \partial_{x_i} + u^a_{\alpha,i}\partial_{u^a_\alpha} + G^{si}[u|v]\partial_{v^s}$.

Канонічне зображення відповідної потенціальної системи $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ складається з псевдопотенціальної частини (Б.5) і рівнянь системи $\mathcal{L}$, за виключенням підмножини рівнянь, які є диференціальними наслідками системи (Б.5) разом з іншими рівняннями системи $\mathcal{L}$. Система $\mathcal{L}_\mathrm{p}$ визначає *накриття* системи $\mathcal{L}$. Це приклад розшарованої системи з базовою системою $\mathcal{L}$.

Два набори псевдопотенціалів $v = (v^1, \ldots, v^p)$ і $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^p)$ системи $\mathcal{L}$ *еквівалентні*, якщо існують диференціальні функції $\Omega^s[u|v]$ такі, що $|\Omega^s_{v^\sigma}| \neq 0$ і перетворення Ω: $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{v}^s = \Omega^s[u|v]$ відображає систему $\mathcal{L}_\mathrm{p}$, асоційовану з v, у систему $\tilde{\mathcal{L}}_\mathrm{p}$, асоційовану з $\tilde{v}$. Функції $G^{si}[u|v]$ і $\tilde{G}^{si}[u|\tilde{v}]$ із псевдопотенціальних частин цих систем пов'язано співвідношенням $(\tilde{G}^{si} - \hat{D}_i\Omega^s)\big|_{\mathcal{L}} = 0$. Тому продовження операторів повного диференціювання на еквівалентні набори псевдопотенціалів співпадають на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$. У дійсності, в локально-координатному підході накриття системи $\mathcal{L}$ є класом еквівалентності наборів псевдопотенціалів, розглянутих разом з відповідними рівняннями у формі (Б.5) і продовженнями операторів повного диференціювання, що співпадають на множині розв'язків системи $\mathcal{L}$.

Оскільки збережні вектори системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, різниця яких щезає тотожно в силу підсистеми (Б.5), еквівалентні, то кожен закон збереження системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ містить вектор густини $F[u|v]$, компоненти $F^i[u|v]$ якого не залежать від похідних ненульових порядків від псевдопотенціалів. Згідно леми 4.7, формулу $D_iF^i\big|_{\mathcal{L}_{\mathrm{p}}} = 0$ для векторів цього типу можна переписати у вигляді $\hat{D}_iF^i\big|_{\mathcal{L}} = 0$. Те саме вірне для характеристик і розширених характеристик системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$, тобто з точністю до еквівалентності, визначеної підсистемою (Б.5), компоненти будь-якої (розширеної) характеристики системи $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ можна вважати диференціальними функціями від $(u|v)$. Збережні вектори, характеристики і розширені характеристики, компоненти яких не містять похідних ненульового порядку від псевдопотенціалів, назвемо *зведеними*.

Завдяки структурі рівнянь (Б.5), будь-яку вагу, визначену для змінних x і u^a_α, можна поширити на похідні псевдопотенціалів. А саме, можна вважати, що всі псевдопотенціали v мають однакову вагу, рівну, наприклад, $\varrho_v = \max\big(0, \varrho(G^si) - 1,\ s = \overline{1,p},\ i = 1,\dots,n\big)$. Отже, $\varrho(v^s_\alpha) = \varrho_v + |\alpha|$. Використане правило поширення відображає той факт, що псевдопотенціали містяться у правих частинах рівнянь (Б.5).

Лема Б.7. *Система $\mathcal{L}$ цілком невироджена по деякій вазі тоді і тільки тоді, коли система $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}$ цілком невироджена по цій вазі, поширеній на похідні псевдопотенціалів.*

Лема Б.7 доводиться аналогічно лемі Б.1, тільки замість стандартних потрібно використовувати модифіковані оператори повного диференціювання $\hat{D}_i$. Отже, для коректної роботи із звичайними і розширеними характеристиками законів збереження обох систем $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}_{\rm p}$ достатньо припускати лише повну невиродженість системи $\mathcal{L}$. Оскільки будь-яка потенціальна система, що визначає накриття системи $\mathcal{L}$, розшарована над базовою системою $\mathcal{L}$, твердження підрозділу 4.7 вірні також для законів збереження таких систем (після необхідних замін у доведенні теореми 4.7, враховуючих градуювання простору струменів). Об'єднавши ці твердження, отримаємо версію теореми 4.2 для випадку загальних накриттів.

На жаль, властивість локальності характеристик не можна включити до ланцюжка еквівалентних властивостей і, більш того, ця властивість не зберігається при перетвореннях еквівалентності наборів псевдопотенціалів. Дійсно, якщо потенціальні системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_{\rm p}$ системи $\mathcal{L}$ еквівалентні відносно перетворення Ω і система $\mathcal{L}_{\rm p}$ має закон збереження $\mathcal{F}$ з локальною характеристикою, то немає ніякої гарантії, що закон збереження $\tilde{\mathcal{F}}$ системи $\tilde{\mathcal{L}}_{\rm p}$, еквівалентний закону збереження $\mathcal{F}$ відносно Ω, також має локальну характеристику.

Властивість часткової локальності розширених характеристик накриваючих систем пов'язана з лінійністю асоційованих збережних векторів по псевдопотенціалам.

Теорема Б.2. *Закон збереження системи, що визначає накриття, містить зведений вектор густини, який лінійно залежить від псевдопотенціалів тоді і тільки тоді, коли він має зведену розширену характеристику, компоненти якої, відповідні псевдопотенціальній частині системи, не залежать від псевдопотенціалів.*

Доведення. Припустимо, що закон збереження $\mathcal{F}$ системи $\mathcal{L}_{\rm p}$ містить зведений вектор густини $F[u|v]$, який лінійно залежить від псевдопотенціалів, тобто $F^i = F^{is}[u]v^s + F^{i0}[u]$. З формули $\hat{D}_iF^i\big|_{\mathcal{L}}=0$ для зведених векторів густини випливає, що $\big((D_iF^{is})v^s + F^{is}G^{si} + D_iF^{i0}\big)\big|_{\mathcal{L}}=0$. Дотримуючись стандартного способу виведення характеристичної форми законів збереження, застосуємо лему Адамара, проінтегруємо по частинах у правій частині виведеної рівності. У результаті отримаємо, що

$$(D_iF^{is})v^s + F^{is}G^{si} + D_iF^{i0} = \gamma^\mu L^\mu + D_i\hat{F}^i$$

для деяких диференціальних функцій $\gamma^\mu = \gamma^\mu[u|v]$ і $\hat{F}^i = \hat{F}^i[u|v]$, причому функції $\hat{F}^i$ щезають на розв'язках системи $\mathcal{L}$ тотожно по v. Отже, набір $\hat{F} = (\hat{F}^1, \dots, \hat{F}^n)$ — тривіальний вектор, що зберігається, системи $\mathcal{L}_\text{p}$. Вектор густини $\tilde{F} = F - \hat{F}$ належить $\mathcal{F}$ (оскільки він еквівалентний вектору F) і задовольняє рівність $D_i\tilde{F}^i = F^{is}(v^s_i - G^{si}) + \gamma^\mu L^\mu$. Це означає, що набір $(F^{is}[u],\ i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,p},\ \gamma^\mu[u|v],\ \mu = \overline{1,l})$ є зведеною розширеною характеристикою системи $\mathcal{L}_\text{p}$, асоційованою із законом збереження $\mathcal{F}$, і очевидно має необхідну властивість.

Навпаки, нехай $(F^{is}[u],\ i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,p},\ \gamma^\mu[u|v],\ \mu = \overline{1,l})$ — зведена розширена характеристика, асоційована із законом збереження $\mathcal{F}$ системи $\mathcal{L}_\text{p}$. Тоді в $\mathcal{F}$ існує такий вектор густини F, що

$$D_iF^i = F^{is}(v^s_i - G^{si}) + \gamma^\mu L^\mu. \tag{Б.6}$$

Діючи розширеним оператором Ейлера $\mathsf{E} = (\mathsf{E}_{u^1}, \dots, \mathsf{E}_{u^m}, \mathsf{E}_{v^1}, \dots, \mathsf{E}_{v^p})$ на рівність (Б.6), зокрема маємо $0 = \mathsf{E}_{v^s}\, D_iF^i = -D_iF^{is} - F^{is}G^{si}_{v^s} + \gamma^\mu_{v^s}L^\mu$. Інтегруючи ці рівняння разом, отримаємо, що

$$-F^{is}G^{si} + \gamma^\mu L^\mu = (D_iF^{is})v^s + H$$

для деякої диференціальної функції $H = H[u]$. Підстановка останнього виразу в (Б.6) приводить до умови $D_iF^i = F^{is}v^s_i + (D_iF^{is})v^s + H$, тобто $D_i(F^i - F^{is}v^s) = H$. У силу наслідку 4.1 з цього безпосередньо випливає, що існують n-набір $\breve{F} = \breve{F}[u]$ і нульова дивергенція $\check{F} = \check{F}[u,v]$ такі, що $F^i - F^{is}v^s = \breve{F}^i + \check{F}^i$. Остаточно, набір $\tilde{F} = F - \check{F}$ відрізняється від F на нульову дивергенцію $\check{F}$ і, отже, також є вектором густини закону збереження $\mathcal{F}$. Його компоненти $\tilde{F}^i = F^{is}[u]v^s + \breve{F}^i[u]$ лінійні по псевдопотенціалам. $\square$

Додаток В

Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала

Для групової класифікації узагальнень рівнянь ейконала та Гамільтона–Якобі використаємо комбінований метод, в якому кількість випадків, що розглядаються при інтегруванні визначальних рівнянь, суттєво зменшується за рахунок вивчення можливої структури алгебри симетрії [36].

Постановка задачі. Розглянемо рівняння вигляду

$$u_a u_a = F(t, u, u_t) \tag{B.1}$$

для однієї дійсної функції $u = u(t, x)$ від $n+1$ незалежних змінних $t = x_0$ і $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$. Тут і надалі індекси a і b змінюються від 1 до n. Клас рівнянь (B.1) включає як частинні випадки деякі відомі рівняння:

$F = 2mu_t$ — рівняння Гамільтона–Якобі;
$F = u_t^2 - 1$ — релятивістське рівняння Гамільтона;
$F = u_t^2$ — рівняння ейконала.

Симетрійні властивості цих рівнянь та зв'язок між ними вивчено в роботах [48, 82, 132, 133].

Виконаємо групову класифікацію рівнянь вигляду (B.1) за довільним елементом — гладкою функцією $F = F(t, u, u_t)$ з $F_{u_t} \neq 0$.

Ядро основних груп і група еквівалентності. Нехай оператор $Q = \xi^0(t, x, u)\partial_t + \xi^a(t, x, u)\partial_a + \eta(t, x, u)\partial_u$ належить МАІ рівняння (B.1).

Тоді з інфінітезімального критерію інваріантності отримаємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0, \qquad a \neq b, \qquad \xi^1_1 = \dots = \xi^n_n, \tag{B.2}$$

$$(\xi^a_t + \xi^a_u u_t)F_{u_t} - 2\xi^a_u F + 2\eta_a - 2u_t\xi^0_a = 0, \tag{B.3}$$

$$\xi^0 F_t + \eta F_u + (\eta_t + (\eta_u - \xi^0_t)u_t - \xi^0_u u_t^2)F_{u_t} = 2(\eta_u - \xi^1_1 - \xi^0_u u_t)F. \tag{B.4}$$

Якщо не фіксувати функцію F, то розщеплюючи в (B.3) та (B.4) за "змінними" F, F_t, F_u, F_{u_t}, u_t, отримаємо $\eta = \xi^0 = 0$, $\xi^1_1 = 0$, $\xi^a_t = \xi^a_u = 0$. Звідси з урахуванням (B.2) випливає, що перетином максимальних груп ліївської симетрії рівнянь вигляду (B.1) є група Евкліда $E(n)$, алгебра Лі якої $A^\cap = e(n) = \langle \partial_a,\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \rangle$.

Алгебра Лі групи еквівалентності класу (B.1) співпадає з алгеброю ліївської інваріантності системи

$$u_a u_a = F, \quad w = u_t, \quad F_a = 0, \tag{B.5}$$

що складається з операторів вигляду $\widehat{Q} = \hat\xi^0(t,x,u)\partial_t + \hat\xi^a(t,x,u)\partial_a + \hat\eta(t,x,u)\partial_u + \hat\theta(t,x,u,w)\partial_w + \hat\chi(t,x,u,w,F)\partial_F$. З інфінітезімального критерію інваріантності отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\widehat{Q}$, звідки випливає, що інфінітезімальний оператор будь-якої однопараметричної групи еквівалентності класу (B.1) є лінійною комбінацією операторів

$$\partial_a, \quad J_{ab}, \quad x_a\partial_a - 2F\partial_F, \quad \bar\xi\partial_t + \bar\eta\partial_u + 2(\bar\eta_u - \bar\xi_u u_t)F\partial_F, \tag{B.6}$$

де $\bar\xi$ і $\bar\eta$ — довільні гладкі функції змінних t і u. Отже, перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на параметр F, мають вигляд

$$\begin{gathered}\tilde t = \zeta(t,u), \quad \tilde u = \varphi(t,u), \quad \tilde x = \delta x,\\ \tilde F = \delta^{-2}(\varphi_u - \zeta_u\tilde u_{\tilde t})^2 F = \delta^{-2}\left(\frac{\zeta_t\varphi_u - \zeta_u\varphi_t}{\zeta_t + \zeta_u u_t}\right)^2 F,\end{gathered} \tag{B.7}$$

де δ — ненульова стала, ζ та φ — довільні гладкі функції змінних t і u, причому $\zeta_t\varphi_u - \zeta_u\varphi_t \neq 0$. (У (B.7) також враховано дискретні перетворення заміни знаків у t, x і u.)

Якщо обмежити клас рівнянь (B.1), наклавши додаткову умову $F_t = 0$ (цей підклас виділяється при класифікації), то для обчислення відповідної групи еквівалентності цю умову необхідно приєднати до системи (B.5). В результаті група еквівалентності звужується: інфінітезімальний оператор будь-якої однопараметричної групи еквівалентності рівняння (B.1) з $F = F(u, u_t)$ є лінійною комбінацією оператора $t\partial_t$ та операторів (B.6), де функції $\bar{\xi}$ і $\bar{\eta}$ тепер залежать лише від змінної u, а тому перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на параметр F, мають вигляд

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = \hat{\delta}t + \zeta(u), \quad \tilde{u} = \varphi(u), \quad \tilde{x} = \delta x, \\ &\tilde{F} = \delta^{-2}(\varphi_u - \zeta_u \tilde{u}_{\tilde{t}})^2 F = \delta^{-2}\left(\frac{\hat{\delta}\varphi_u}{\hat{\delta} + \zeta_u u_t}\right)^2 F, \end{aligned} \tag{B.8}$$

де δ, $\hat{\delta}$ — ненульові сталі, ζ та φ — довільні гладкі функції змінної u, причому $\varphi_u \neq 0$.

Подальше обмеження класу рівнянь (B.1) може призводити до появи перетворень еквівалентностності вигляду (B.7), відмінних від (B.8) (див. доведення).

Результат класифікації. *Всі можливі випадки розширення МАІ рівнянь з класу* (B.1) *з точністю до перетворень* (B.7) *і додаткових перетворень еквівалентності вичерпуються випадками з таблиці B.0.*

У таблиці B.1 $F = F(t, u, u_t)$, $f = f(u, u_t)$, $h = h(u_t)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, δ — стала, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (-1, -1)$, $J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a$, $D = t\partial_t + u\partial_u + x_a\partial_a$. У випадку 7 $g_{\mu\nu}$ — метричний тензор простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,n}$, тобто $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$; c^μ, $b^{\mu\varkappa}$, d, $a^\varkappa$, η — довільні гладкі функції змінної u (для того, щоб оператори такого вигляду утворювали алгебру, необхідно вимагати, щоб ці функції були нескінченно диференційовними); індекси μ, ν, $\varkappa$ змінюються від 0 до 3.

Зауважимо, що відомі рівняння (рівняння Гамільтона–Якобі і ейконала та релятивістське рівняння Гамільтона) виділяються в сім'ї рівнянь (B.1) як представники класів еквівалентних рівнянь, що мають найширшу симетрію. Випадки 7–12 і частина випадку 1 таблиці B.1 утворюють повний набір нееквівалентних випадків розширення максимальної алгебри інваріантності у підкласі рівнянь з правими частинами $F = A(t,u)u_t^2 + B(t,u)u_t + C(t,u)$. Випадки $F = 2mu_t$ та $F = \mathrm{const} > 0$ еквівалентні відповідно випадкам 8 (з $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$) та 7 таблиці B.1.

Таблиця B.1

	F	Базисні оператори симетрії
0	$F(t,u,u_t)$	$\partial_a,\ J_{ab}$
1	$e^{\delta t}f(u,u_t),\ \delta\in\{0;1\}$	$\partial_a,\ J_{ab},\ 2\partial_t - \delta x_a\partial_a$
2	$e^u h(u_t)$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ 2\partial_u - x_a\partial_a$
3	$\|u\|^{2-\delta}h(u_t),\ \delta\neq 2$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ 2t\partial_t + 2u\partial_u + \delta x_a\partial_a$
4	$h(u_t)$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D$
5	e^{u_t}	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D,\ x_a\partial_a - 2t\partial_u$
6	$\|u_t\|^\beta,\ \beta\neq 0,1,2$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D,\ (\beta-2)x_a\partial_a - 2u\partial_u$
7	u_t^2	$2g_{\mu\nu}c^\mu(u)x_\nu x_\varkappa\partial_\varkappa - c^\varkappa(u)g_{\mu\nu}x_\mu x_\nu\partial_\varkappa + g_{\mu\nu}b^{\mu\varkappa}(u)x_\nu\partial_\varkappa +$ $+d(u)x_\varkappa\partial_\varkappa + a^\varkappa(u)\partial_\varkappa + \eta(u)\partial_u$
8	$\varepsilon_2u_t^2 + \varepsilon_1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \partial_u,\ D,\ J_{ua} = u\partial_a + \varepsilon_1x_a\partial_u,\ J_{ta} = t\partial_a + \varepsilon_2x_a\partial_t,$ $J_{ut} = u\partial_t - \varepsilon_1\varepsilon_2t\partial_u,\ K_a = 2x_aD - s^2\partial_a,\ K_u = 2uD + \varepsilon_1s^2\partial_u,$ $K_t = 2tD + \varepsilon_2s^2\partial_t$, де $s^2 = x_ax_a - \varepsilon_1u^2 - \varepsilon_2t^2$
9	$\varepsilon_2e^uu_t^2 + \varepsilon_1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ t\partial_t + 2\partial_u,\ (t^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2e^u)\partial_t + 4t\partial_u$
10	$\cos^{-2}u\,u_t^2 + 1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \cos t\,\mathrm{tg}\,u\,\partial_t - \sin t\,\partial_u,\ \sin t\,\mathrm{tg}\,u\,\partial_t + \cos t\,\partial_u$
11	$\pm(\cos^{-2}u\,u_t^2 - 1)$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \mathrm{ch}\,t\,\mathrm{tg}\,u\,\partial_t + \mathrm{sh}\,t\,\partial_u,\ \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{tg}\,u\,\partial_t + \mathrm{ch}\,t\,\partial_u$
12	$\mathrm{ch}^{-2}u\,u_t^2 + 1$	$\partial_a,\ J_{ab},\ \partial_t,\ \mathrm{ch}\,t\,\mathrm{th}\,u\,\partial_t - \mathrm{sh}\,t\,\partial_u,\ \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{th}\,u\,\partial_t - \mathrm{ch}\,t\,\partial_u$

5. Доведення. Максимальну в сенсі Лі алгебру інваріантності рівняння (B.1) позначимо як $A^{\max}$. При дослідженні визначальних рівнянь (B.2)–(B.4) виникають два суттєво різних випадки: $F_{u_tu_tu_t} \neq 0$ і $F_{u_tu_tu_t} = 0$.

Якщо $\boldsymbol{F_{u_t u_t u_t} \neq 0}$, то з (В.3) і (В.4) випливає, що $\eta_a = \xi^0_a = \xi^a_t = \xi^a_u = 0$, $\xi^1_{1a} = 0$, отже $A^{\max} = A^{\cap} + A^{\text{ext}}$, причому $A^{\text{ext}} \subset \langle \delta x_a \partial_a + \xi^0(t,u)\partial_t + \eta(t,u)\partial_u \rangle$, де δ — довільна стала, ξ і η — довільні гладкі функції змінних t і u. $A^{\cap}$ є ідеалом, а A^{ext} — підалгеброю алгебри $A^{\max}$ і $\forall Q \in A^{\text{ext}}$ $(Q \neq 0)$: $(\xi^0, \eta) \neq (0,0)$. Розмірність A^{ext} визначає розмірність розширення алгебри $A^{\max}$.

Якщо $\dim A^{\text{ext}} > 0$, то виберемо будь-який ненульовий оператор Q з A^{ext}. Перетвореннями еквівалентності (В.7) його завжди можна привести до вигляду $Q = 2\partial_t - \delta x_a \partial_a$, де $\delta \in \{0; 1\}$, після чого, розв'язавши рівняння (В.4) з $\xi^0 = 2$, $\xi^a = -\delta x_a$, $\eta = 0$ відносно F, отримаємо перший випадок розширення алгебри $A^{\max}$.

Нехай $\dim A^{\text{ext}} > 1$. Тоді A^{ext} обов'язково містить оператор Q з $\delta = 0$. Перетвореннями еквівалентності (В.7) зведемо Q до оператора ∂_t. Надалі одразу вважаємо, що $\partial_t \in A^{\text{ext}}$, звідки $F_t = 0$, тобто $F = F(u, u_t)$, і будемо казати, що є додаткове розширення симетрії, коли для такого F справедливе співвідношення $\dim A^{\max} > \dim A^{\cap} + 1$.

Припустимо, що $\dim A^{\text{ext}} = 2$, причому

$$A^{\text{ext}} = \langle Q^1 = \partial_t,\ Q^2 = \delta x_a \partial_a + \xi^0(t,u)\partial_t + \eta(t,u)\partial_u \rangle \quad \text{і} \quad \eta \neq 0.$$

Якщо алгебра A^{ext} комутативна, то $\xi^0_t = 0$, $\eta_t = 0$, і перетворенням (В.8) оператор Q^2 приводиться до вигляду $\widetilde{Q}^2 = 2\partial_u - \widetilde{\delta} x_a \partial_a$, де $\widetilde{\delta} \in \{0; 1\}$ (оператор Q^1 при цьому не змінюється). Підставимо коефіцієнти оператора $\widetilde{Q}^2$ у рівняння (В.4) і проінтегруємо його відносно F: $F = e^{\widetilde{\delta} u} h(u_t)$, де h — гладка функція змінної u_t. Якщо $\widetilde{\delta} = 1$, а h не спеціалізується, то алгебра A^{ext} дійсно двовимірна (другий випадок розширення).

Якщо алгебра A^{ext} некомутативна, можна вважати, що $[Q^1, Q^2] = 2Q^1$, звідки $\xi^0_t = 2$, $\eta_t = 0$, і перетворенням (В.8) оператор Q^2 приводиться до вигляду $\widetilde{Q}^2 = 2t\partial_t + 2u\partial_u + \delta x_a \partial_a$. Підставимо коефіцієнти оператора $\widetilde{Q}^2$ у рівняння (В.4) і проінтегруємо його відносно F: $F = |u|^{2-\delta} h(u_t)$, де h — гладка функція змінної u_t. Якщо $\delta \neq 2$, а h

не спеціалізується, то алгебра $A^{\rm ext}$ дійсно двовимірна (третій випадок розширення).

Припустимо, що $\dim A^{\rm ext}=3$, причому

$$A^{\rm ext}=\langle Q^i=\delta_i x_a\partial_a+\xi^{0i}(t,u)\partial_t+\eta^i(t,u)\partial_u,\ i=1,2,\ Q^3=\partial_t\rangle,$$

функції η^1 і η^2 лінійно незалежні, а рівняння $\eta^1\cdot$(B.4.2) $-\,\eta^2\cdot$(B.4.1) є тотожністю відносно F (тут (B.4.i) — рівняння, отримане з (B.4) підстановкою коефіцієнтів оператора Q^i). В силу останньої умови коефіцієнти операторів Q^1 і Q^2 повинні задовольняти наступні рівняння:

$$\eta^1\eta^2_t=\eta^2\eta^1_t,\quad \eta^1(\eta^2_u-\delta_2)=\eta^2(\eta^1_u-\delta_1),$$
$$\eta^1(\eta^2_u-\xi^{02}_t)=\eta^2(\eta^1_u-\xi^{01}_t),\quad \eta^1\xi^{02}_u=\eta^2\xi^{01}_u,$$

з яких випливає, що $(\delta_1,\delta_2)\neq(0,0)$, $\eta^i_t=0$, $\xi^{0i}_t=\delta_i$, $i=1,2$, $\eta^1=(\delta_1-{}$ $-\,\delta_2\varphi)/\varphi_u$, $\eta^2=\varphi\eta^1$ для деякої функції $\varphi=\varphi(u)\neq\mathrm{const}$. Замінимо при необхідності оператори Q^1 і Q^2 їх лінійними комбінаціями $\widetilde{Q}^1$ і $\widetilde{Q}^2$ таким чином, щоб $\widetilde{\delta}_1=1$, $\widetilde{\delta}_2=0$. Перетворенням (B.8) оператори $\widetilde{Q}^1$ і $\widetilde{Q}^2$ приводяться до вигляду $\widehat{Q}^1=t\partial_t+u\partial_u+\delta x_a\partial_a$, $\widehat{Q}^2=\partial_u$. Після підстановки коефіцієнтів операторів $\widehat{Q}^1$ і $\widehat{Q}^2$ в рівняння (B.4) отримаємо одне рівняння на функцію F: $F_u=0$, тобто $F=h(u_t)$, де h — гладка функція змінної u_t. Якщо h не спеціалізується, то алгебра $A^{\rm ext}$ дійсно тривимірна (четвертий випадок розширення).

Лема B.1. *В усіх інших випадках, коли* $\dim A^{\rm ext}>1$*, функція* F *задовольняє рівняння*

$$(Au_t^2+Bu_t+C)F_{u_t}=(2Au_t+D)F,\tag{B.9}$$

де A*,* B*,* C*,* D *— довільні гладкі функції змінної* u*. Перетворення* (B.8) *є перетворенням еквівалентності на множині рівнянь вигляду* (B.9).

При інтегруванні рівняння (B.9) виникають чотири нееквівалентні випадки, коли $F_{u_tu_tu_t}\neq 0$.

1. $F = \alpha(u)e^{u_t}$ де $\alpha > 0$. У цьому випадку додаткове розширення симетрії можливе лише для $\alpha = A|u|^\nu e^{\mu u}$, де $A, \nu, \mu = \mathrm{const}$, $A > 0$. Масштабними перетвореннями за змінними x_a зробимо $A = 1$. Якщо $\nu = 0$, то також можна покласти $\mu = 0$ (коли це не так, достатньо виконати перетворення $\widetilde{t} = e^{\mu t}/\mu$, $\widetilde{u} = e^{\mu t}(u + 2t - 2/\mu)$; тут і надалі змінні x_a не перетворюються, коли це не обумовлено спеціально). В результаті отримаємо п'ятий випадок розширення. Для $\mu\nu \neq 0$ додаткове розширення симетрії існує лише при $\nu = 2$, але тоді можна покласти $\mu = 0$ (відповідне перетворення еквівалентності — $\widetilde{t} = e^{\mu t}/\mu$, $\widetilde{u} = e^{\mu t}u$). Якщо $\nu \neq 0$ і $\mu = 0$, рівняння (B.1) має таку саму алгебру симетрії, як і в більш загальному третьому випадку розширення.

2. $F = \alpha(u)|u_t + \delta|^{\beta(u)}$, де $\delta \in \{0; 1\}$, $\alpha > 0$. Для додаткового розширення симетрії необхідно, щоб $\beta = \mathrm{const}$ (причому $\beta \notin \{0; 1; 2\}$, бо інакше $F_{u_t u_t u_t} = 0$). Тоді будь-яке рівняння (B.1) з $\delta = 0$ еквівалентно такому ж рівнянню, в якому додатково $\alpha = 1$ (шостий випадок розширення). До цього ж випадку розширення зводяться також рівняння (B.1) з $\delta \neq 0$, якщо $(\alpha'\alpha)' = 0$. Дійсно, тоді $\alpha = Ae^{\mu u}$ і можна покласти $A = 1$ (завдяки масштабним перетворенням за змінними x_a), $\mu = 0$ і $\delta = 0$ (відповідне перетворення еквівалентності при $\mu \neq 0$ має вигляд $\widetilde{t} = e^{\mu\delta t/\beta}\beta/(\mu\delta)$, $\widetilde{u} = e^{\mu(u+\delta t)/(\beta-2)}(\beta - 2)/\mu$, а при $\mu = 0$ — $\widetilde{t} = t$, $\widetilde{u} = u + \delta t$). Якщо $\delta \neq 0$ і $(\alpha'\alpha)' \neq 0$, то нових випадків розширення симетрії не отримаємо.

3. $F = \alpha(u)e^{\beta(u)\,\mathrm{arctg}\, u_t}$, де $\alpha > 0$, $\beta \not\equiv 0$. Додаткове розширення симетрії є лише за умов $\beta = \mathrm{const}$ і α — показникова або степенева функція, але воно не більше за розширення для більш загальних випадків 2–4 з таблиці B.1, тому виокремлювати цей випадок не потрібно.

4. $F = \alpha(u)u_t^2 e^{u_t^{-1}}$, де $\alpha > 0$. Рівняння з такою правою частиною еквівалентне рівнянню з $F = e^{u_t}$. Еквівалентність визначається перетворенням (типу (B.7)) $\widetilde{t} = u$, $\widetilde{u} = t + \int \ln\alpha(u)du$.

Випадок $F_{u_t u_t u_t} \neq 0$ розглянуто повністю.

Нехай надалі $\boldsymbol{F_{u_tu_tu_t}=0}$, тобто

$$F = A(t,u)u_t^2 + B(t,u)u_t + C(t,u), \tag{B.10}$$

де A, B, C — гладкі функції змінних t і u. Розщеплюючи в рівняннях (B.3) та (B.4) за змінною u_t, додатково до (B.2) отримаємо таку систему визначальних рівнянь:

$$\xi^0_a = A\xi^a_t - \tfrac{1}{2}B\xi^a_u, \quad \eta_a = C\xi^a_u - \tfrac{1}{2}B\xi^a_t, \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned} &A_t\xi^0 + A_u\eta + B\xi^0_u = 2A(\xi^0_t - \xi^1_1),\\ &C_t\xi^0 + C_u\eta + B\eta_t = 2C(\eta_u - \xi^1_1),\\ &B_t\xi^0 + B_u\eta + 2A\eta_t + 2C\xi^0_u = B(\eta_u + \xi^0_t - 2\xi^1_1). \end{aligned} \tag{B.12}$$

Група еквівалентності підкласу рівнянь (B.1) з квадратичними по u_t правими частинами співпадає з групою еквівалентності всього класу (B.1). Під дією перетворення (B.7) коефіцієнти A, B, C змінюються наступним чином:

$$\begin{aligned} &\delta^2\widetilde{A} = A\zeta_t^2 - B\zeta_t\zeta_u + C\zeta_u^2,\\ &\delta^2\widetilde{B} = B(\zeta_t\varphi_u + \zeta_u\varphi_t) - 2A\zeta_t\varphi_t - 2C\zeta_u\varphi_u,\\ &\delta^2\widetilde{C} = A\varphi_t^2 - B\varphi_t\varphi_u + C\varphi_u^2. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Умова $B^2-4AC=0$ інваріантна відносно перетворень типу (B.13), що породжуються перетвореннями еквівалентності (B.7), тому вона є класифікуючою умовою. Якщо $B^2-4AC=0$, то можна покласти $A=1$, $B=0$, звідки $C=0$ (сьомий випадок розширення). Надалі $B^2-4AC\neq 0$.

Лема B.2. *За умови $B^2-4AC\neq 0$ з рівнянь* (B.2) *і* (B.11) *випливає, що коефіцієнти будь-якого оператора симетрії рівняння* (B.1) *мають наступний вигляд:*

$$\begin{aligned} &\xi^a = 2\gamma_b x_b x_a - \gamma_a x_b x_b + \sigma_{ab}x_b + \beta x_a + \alpha^a,\\ &\xi^0 = \tfrac{1}{2}(A\beta_t - \tfrac{1}{2}B\beta_u)x_a x_a + (A\alpha^a_t - \tfrac{1}{2}B\alpha^a_u)x_a + \alpha^0,\\ &\eta = \tfrac{1}{2}(C\beta_u - \tfrac{1}{2}B\beta_t)x_a x_a + (C\alpha^a_u - \tfrac{1}{2}B\alpha^a_t)x_a + \alpha^4, \end{aligned} \tag{B.14}$$

де γ_a, σ_{ab} — сталі, β, α^0, α^a, α^4 — гладкі функції змінних t і u.

Підставимо вирази (B.14) в систему (B.12) і розщепимо за змінними x_a. У результаті отримаємо $n+2$ системи однакової структури

$$\begin{aligned} &H^1A_t + H^2A_u + H^1_uB = 2(H^1_t - \lambda)A,\\ &H^1C_t + H^2C_u + H^2_tB = 2(H^2_u - \lambda)C,\\ &H^1B_t + H^2B_u + 2H^2_tA + 2H^1_uC = (H^1_t + H^2_u - 2\lambda)B, \end{aligned} \tag{B.15}$$

де H^1, H^2 і λ приймають такі значення:

$$\begin{aligned} &H^1 = A\beta_t - \tfrac{1}{2}B\beta_u, && H^2 = C\beta_u - \tfrac{1}{2}B\beta_t, && \lambda = 0;\\ &H^1 = A\alpha^a_t - \tfrac{1}{2}B\alpha^a_u, && H^2 = C\alpha^a_u - \tfrac{1}{2}B\alpha^a_t, && \lambda = 2\gamma_a;\\ &H^1 = \alpha^0, && H^2 = \alpha^4, && \lambda = \beta. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Досліджуючи системи визначальних рівнянь (B.15), (B.16), отримаємо наступні твердження.

Лема B.3. *Якщо* $\dim A^{\max} > \dim A^{\cap}$*, то рівняння* (B.1) *за умови* (B.10) *еквівалентно рівнянню такого ж вигляду, в якому додатково* $A = e^{\delta t}\widehat{A}(u)$*,* $B = e^{\delta t}\widehat{B}(u)$*,* $C = e^{\delta t}\widehat{C}(u)$ *і для якого* $A^{\max} \ni 2\partial_t - \delta x_a\partial_a$ *(при цьому, якщо функції* $\widehat{A}(u)$*,* $\widehat{B}(u)$*,* $\widehat{C}(u)$ *не конкретизуються, то* $A^{\max} = \langle\partial_a,\ J_{ab},\ 2\partial_t - \delta x_a\partial_a\rangle$ *— перший випадок розширення).*

Лема B.4. *Якщо* $\dim A^{\max} > \dim A^{\cap} + 1$*, то рівняння* (B.1) *за умови* (B.10) *еквівалентно рівнянню такого ж вигляду, в якому додатково* $A_t = B_t = C_t = 0$*.*

З лем B.3 і B.4 випливає, що для завершення класифікації достатньо дослідити рівняння (B.1) з правими частинами вигляду $F = A(u)u_t^2 + B(u)u_t + C(u)$, де A, B, C — гладкі функції змінної u, $B^2 - 4AC \neq 0$. Група еквівалентності множини цих рівнянь співпадає з загальною групою еквівалентності рівнянь (B.1), праві частини яких не залежать від t. Під дією перетворення (B.8) коефіцієнти A, B, C змінюються наступним чином:

$$\delta^2\widetilde{A} = A\hat{\delta}^2 - B\hat{\delta}\zeta_u + C\zeta_u^2, \quad \delta^2\widetilde{B} = B\hat{\delta}\varphi_u - 2C\zeta_u\varphi_u, \quad \delta^2\widetilde{C} = C\varphi_u^2,$$

а тому додатково можна вважати, що $B = 0$, $C = \varepsilon_1 = \pm 1$. Отже, надалі $F = A(u)u_t^2 + \varepsilon_1$, де $A \neq 0$.

Умова $A_u = 0$ дає восьмий випадок розширення симетрії.

Випадок, коли $\exists \mu = \mathrm{const}$: $(u+\mu)A_u + 2A = 0$, зводиться до випадку $A_u = 0$ перетворенням еквівалентності $\widetilde{t} = u \operatorname{sh} t$, $\widetilde{u} = u \operatorname{ch} t$ при $\varepsilon_1 A < 0$ або $\widetilde{t} = u \sin t$, $\widetilde{u} = u \cos t$ при $\varepsilon_1 A > 0$.

Випадок, коли $\exists \mu, \nu = \mathrm{const}$ $(\nu \neq 0, 2)$: $(u+\mu)A_u + \nu A = 0$, зводиться до більш загального випадку 3 з таблиці B.1 перетворенням еквівалентності $\widetilde{t} = t$, $\widetilde{u} = |u+\mu|^{1-\nu/2}$.

Умова $A_u \neq 0$, $(A_u/A)_u = 0$ дає дев'ятий випадок розширення симетрії.

Нехай функція A задовольняє рівняння $A_u/A = \nu A + \mu$ для деяких ненульових сталих μ і ν. Будь-який розв'язок цього рівняння в залежності від значень констант μ і ν еквівалентний (за зсувами та масштабними перетвореннями за змінною u) одній з наступних функцій:

$$\frac{\varepsilon_2}{\operatorname{ch}^2 u}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\operatorname{sh}^2 u}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\cos^2 u}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (-1, -1). \quad \text{(B.17)}$$

Нехай $\varepsilon_0 = 1$ для перших двох функцій та $\varepsilon_0 = -1$ — для третьої.

Лема B.5. *Рівняння вигляду* (B.1) *з правими частинами* $A(u)u_t^2 + \varepsilon_1$ *і* $\widetilde{A}(u)u_t^2 + \widetilde{\varepsilon}_1$, *де* A *і* $\widetilde{A}$ *вибрані з набору функцій* (B.17), *еквівалентні тоді і тільки тоді коли* $\varepsilon_0\widetilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2$.

Згідно леми B.5 випадки 10–12 таблиці B.1 вичерпують всі можливі нееквівалентні рівняння з цього класу.

Для будь-яких інших функцій $A = A(u)$ розширення симетрії рівняння (B.1) немає.

Нееквівалентність випадків розширення, наведених у таблиці B.1, де це не доведено безпосередньо через застосування перетворень еквівалентності, очевидно випливає з неізоморфності відповідних максимальних алгебр симетрії, зокрема, їх різної розмірності.