Олексій Р Е Б Е Н К О

ОСНОВИ СУЧАСНОЇ ТЕОРІЇ ВЗАЄМОДІЮЧИХ КВАНТОВАНИХ ПОЛІВ

К и ї в — 2 0 0 7

Анотація

Монографія присвячена систематичному викладенню основ сучасної квантової теорії поля. На відміну від попередніх видань тут подано більш детальний аналіз логічного та математичного обґрунтування лагранжевого та гамільтонового підходів, описано проблеми введення взаємодії між полями, квантування, тощо. Детально викладена теорія матриці розсіяння у рамках як теорії збурень, так і строгих методів конструктивної та евклідової теорії поля. Коротко викладені існуючі аксіоматичні підходи до квантової теорії полів, а також евклідова аксіоматична теорія. Останній розділ присвячений проблемам побудови квантового калібрувального поля методом континуальних інтегралів, розглянуто моделі електромагнітних, слабких і сильних взаємодій та існуючі підходи до їх об'єднання.

Для студентів старших курсів, аспірантів та початківців, які хочуть зрозуміти зв'язок квантової теорії поля з класичною і квантовою механікою, релятивістською класичною механікою полів та методами сучасної математичної фізики, які інтенсивно розвивалися в останні три десятиріччя минулого століття.

Ця монографія є першим виданням на таку тематику, що друкується українською мовою.

Передмова

Бурхливий розвиток теорії калібрувальних полів та пов'язаний з ним прогрес фізики елементарних частинок, а також значні успіхи у вирішенні математичних проблем квантової теорії поля (конструктивна та евклідова теорія) вимагають сьогодні строгого, логічно завершеного, математично і фізично повного висвітлення питань побудови сучасної квантової теорії. Пропонована монографія є розширеним варіантом лекцій, що читалися автором упродовж багатьох років у Київському університеті ім. Тараса Шевченка, вважається , мабуть, першою спробою поєднання сучасного підходу до теорії квантових полів із більш глибоким вивченням математичних проблем теорії і конструктивних методів їх розв'язування. Ідея написання цієї книги виникла завдяки численним запитанням від допитливих студентів, які вимагали логічного обґрунтування деяких положень (аксіом), що становлять основу побудови квантової теорії поля, і які часом подаються без належних пояснень. Більшість монографій з квантової теорії поля мають занадто професійний виклад матеріалу і тому не є такими, що безперечно зрозумілі початківцям. Особливо велика кількість запитань виникає у математично налаштованої аудиторії. Викладений тут матеріал є певною спробою ліквідувати вказані недоліки попередніх видань.

Звичайно ж, у рамках короткого курсу не можна висвітлити усіх питань квантової теорії поля, тому в книзі дуже часто буде лише формулювання тої чи іншої проблеми із вказівкою на основні джерела, де вона викладена ширше. Мета, яку переслідує автор, полягає у тому, щоб читач не тільки оволодів необхідним багажем знань квантової теорії поля, а й зміг застосувати їх у різних галузях теоретичної фізики.

Книга складається зі вступу та семи розділів. На початку кожного розділу подається коротка вступна частина, у якій у стислій формі викладається зміст розділу і обґрунтування його важливості у схемі побудови квантової теорії поля. У кінці кожного розділу пропонуються задачі для самостійного опрацювання, до більшості з яких додаються вказівки до їх розв'язання.

У вступі дається коротка історична довідка про виникнення та еволюцію основних ідей, що лежать в основі побудови квантової теорії полів.

У першому розділі "Групи симетрій елементарних частинок"аналізуються різні групи симетрій, пов'язаних із найважливішими законами фізики взаємодіючих елементарних частинок.

У другому розділі "Класична теорія вільних полів"викладається лагранжів формалізм класичної теорії поля, вивчаються рівняння вільних полів Клейна – Гордона – Фока, Дірака та Максвелла, векторного поля. Стисло описуються елементи теорії полів із вищими спінами.

Третій розділ "Класична теорія взаємодіючих полів"присвячено обґрунтуванню концепції введення взаємодії, побудови теорії калібрувальних полів і деяким основним питанням, що пов'язані з загальними принципами симетрії та її порушення. Наведений вигляд лагранжианів, що відповідають основним типам взаємодій та їх об'єднань у рамках калібрувальних теорій. Коротко обговорюється питання розв'язків класичних рівнянь.

У четвертому розділі "Вторинне квантування полів"розглядаються загальні принципи квантування та їх реалізація на прикладі вільних полів. Будуються канонічні комутаційні та антикомутаційні співвідношення і їх представлення у просторі Фока. Обговорюються проблеми, пов'язані з уведенням взаємодії між квантовими полями. Виводяться рівняння для взаємодіючих полів, вивчаються гамільтоніани взаємодії та проблеми їх математичного осмислення у просторі Фока.

У п'ятому розділі "Квантова теорія взаємодіючих полів. Загальні проблеми"висвітлюються математичні проблеми, пов'язані з побудовою взаємодіючого поля, вивчається оператор розсіяння. Наводиться побудова матриці розсіяння за теорією збурень, графічне представлення матриці розсіяння та її матричних елементів за допомогою діаграм Фейнмана, стисло викладається теорія перенормувань. Детально описується метод континуальних інтегралів і його застосування в теорії квантованих полів.

У шостому розділі "Аксіоматична та евклідова теорія поля"читач коротко ознайомлюється з існуючими аксіоматичними підходами до квантової теорії поля, а також більш строгим (з математичної точки зору) вивченням матриці розсіяння та функцій Гріна в евклідовій метриці простору-часу. Евклідове формулювання дозволяє при певних обмеженнях побудувати матрицю розсіяння та функції Гріна поза рамками теорії збурень.

Сьомий розділ "Квантова теорія калібрувальних полів"присв'ячується проблемам побудови квантового калібрувального поля методом континуального інтегрування. Детально розглянуті моделі КЕД і КХД. Коротко обговорюються моделі слабких та електрослабких взаємодій.

Більшість викладеного матеріалу можна знайти в інших виданнях. Це перш за все праці [3], [7], [10-11], [13], [15-17], [23], [31], [34], [41], [67-68], [72], [86], [88], [102], подані серед інших у списку літератури.

Хочу висловити щиру подяку своїм колегам В.П. Гусиніну, В.М.Горкавенко та Д.Я.Петрині за ряд критичних зауважень і порад, які сприяли покращенню рукопису.

Автор

Список позначень

Нумерація формул, теорем, означень та зауважень виконується двома цифрами, що розділяються крапкою. Перша цифра відноситься до номера параграфа, а друга є номером відповідної формули, теореми, означення або зауваження.

1. Позначення, що скорочують запис

БМП — Боголюбова — Медведєва — Поліванова

ВВФ — віківсько-впорядкований функціонал

КЕД — квантова (класична) електродинаміка

КТП — квантова теорія поля

ККТП — конструктивна квантова теорія поля

КХД — квантова (класична) хромодинаміка

ЛСЦ — Леманна-Симанзика-Циммермана

ТРХР — теорія розсіяння Хаага-Рюеля

$a := b$ — визначення величини a формулою b

$[A, B]_- := AB - BA$ — комутатор

$[A, B]_+ := AB + BA$ — антикомутатор

$\{F, G\}_P := \{F, G\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial F}{\partial q_i} \dfrac{\partial G}{\partial p_i} - \dfrac{\partial F}{\partial p_i} \dfrac{\partial G}{\partial q_i} \right)$ — дужки Пуассона

$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \sum\limits_{s,s'}^{S} \{F, \varphi_s\} (C^{-1})_{s,s'} \{\varphi_{s'}, G\}$ — дужки Дірака

$\widehat{p} := \gamma_\mu p^\mu = \sum\limits_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu p^\mu$

$\dot{\varphi} := \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ — похідна за часом у класичній механіці

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^\mu := \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$

$a \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu b := a \partial_\mu b - (\partial_\mu a) b$

$*$–**спряження** :

— для скалярів збігається з операцією комплексного спряження : $\overset{*}{\varphi} \equiv \overline{\varphi}$

— для вектор–стовпчиків або спіноров означає комплексне спряження компонент і операцію транспонування, тобто стовпчик перетворюється у стрічку (див. ф-ли (5.17)–(5.18))

— для матриць означає комплексне спряження компонент і операцію транспонування: $(\overset{*}{A})_{ij} = \overline{A_{ji}}$

$(dx)^n := dx_1 \cdots dx_n$ — добуток диференціалів

$(a)_n := (a_1, ..., a_n); \quad (\alpha, a)_n := \big((\alpha_1, a_1), ..., (\alpha_n, a_n)\big)$

$(a)_n \setminus \{a_{i_1}, ..., a_{i_k}\}$ — послідовність $(a)_n$ без елементів $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$

2. Позначення основних просторів або множин

$\mathbb{E}^s \equiv \mathbb{R}^s$, $s = 1, 2, 3$ — евклідів s-вимірний простір

$\mathbb{E}^3 \equiv \mathbb{E}$

$\mathbb{M}^d$, $d = 1, 2, 3, 4$ — d-вимірний простір Мінковського

$\mathbb{M}^4 \equiv \mathbb{M}$

$\mathbb{MC} \equiv \mathbb{MC}^4$ — комплексний простір Мінковського

$C := \{x \in \mathbb{M} \ \mid \ x^2 = 0\}$ — світловий конус

$V_\pm(\overline{V}_\pm)$ — відкриті (замкнуті) конуси майбутнього $(+)$ або минулого $(-)$

$\mathscr{H}$ — гільбертів простір станів

$\mathscr{H}_B$ — гільбертів простір станів бозонів

$\mathscr{H}_F$ — гільбертів простір станів ферміонів

$\mathscr{F}$ — простір Фока

$\mathscr{F}_B$ — простір Фока бозонів

$\mathscr{F}_F$ — простір Фока ферміонів

$\mathscr{D}$ — простір основних функцій з фінітним носієм

$\mathscr{S}$ — простір основних функцій, що маліють швидше довільного степеня

$\mathscr{D}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathscr{D}$

$\mathscr{S}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathscr{S}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^s$, $s = 1, 2, 3$

$a \cdot b$ — скалярний добуток в $\mathbb{M}^d$, $\quad d = s + 1$

3. Позначення і величини деяких основних констант

$c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с — швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі

h — постійна Планка $\left(\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34}$ эрг·сек.$\right)$

$\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \dfrac{1}{137}$ — константа електромагнітної взаємодії

$e = |q_{\text{ел}}|, \qquad q_{\text{ел}} = -1,60219 \cdot 10^{-19} K$ — заряд електрона.

4. Позначення операторів, матриць, тензорів

$\nabla = \{\partial_k\}_{k=1}^3$ — градієнт

$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ — оператор Лапласа

$\Box = \Delta - \partial_0^2$ — оператор д'Аламбера

$\widehat{C}$ — оператор зарядового спряження

$\widehat{P}$ — оператор просторової інверсії

$\widehat{T}$ — оператор часової інверсії

Q — оператор заряду

Y — оператор гіперзаряду

J_k — генератори ізотопічного спіну

σ_k — матриці Паулі, $\quad k = 1, 2, 3$

λ_j — матриці Гелл-Манна (генератори групи SU(3)), $j = 1, ..., 8$

γ^μ — матриці Дірака, $\quad \mu = 0, 1, 2, 3, 5$

ε_{ijk} — структурні константи групи $SU(2)$

f_{ijk} — структурні константи групи $SU(N), N \geq 3$

$F_{\mu\nu}$ — тензор електромагнітного або калібрувального полів

5. Групи, підгрупи, окремі перетворення

$\widetilde{\mathscr{L}}$ — загальна група Лоренца

$\Lambda = ((\Lambda_\mu^\nu))$ — перетворення групи Лоренца

$\mathscr{L}_+^\uparrow$ — власні ортохронні перетворення Лоренца
$(\Lambda_0^0 \geqslant 1, \det\Lambda = +1)$

$\mathscr{L}_+^\downarrow$ — власні неортохронні перетворення Лоренца
$(\Lambda_0^0 \leqslant -1, \det\Lambda = +1)$

$\mathscr{L}_-^\uparrow$ — невласні ортохронні перетворення Лоренца
$(\Lambda_0^0 \geqslant 1, \det\Lambda = -1)$

$\mathscr{L}_-^\downarrow$ — невласні неортохронні перетворення Лоренца
$(\Lambda_0^0 \leqslant -1, \det\Lambda = -1)$

$\mathscr{L}(\mathbb{C})$ — комплексні перетворення Лоренца

$U(1)$ — унітарна Абелева група

$SU(n)$ — спеціальна унітарна група

G — калібрувальна група

Вступ

Квантова теорія поля (КТП) виникла з метою теоретичного обґрунтування фізики елементарних частинок і є, по суті, релятивістською квантовою механікою, тобто описує квантові явища з урахуванням спеціальної теорії відносності. В основі такого опису лежить гіпотеза корпускулярно-хвильового дуалізму. Це означає, що поля і частинки – це не два різні об'єкти, а лише два різні способи вивчення одного і того ж фізичного об'єкта. Яскравим експериментальним підтвердженням цієї гіпотези були відкриття фотоефекту, що дали змогу трактувати світло (електромагнітні хвилі) як потік частинок (фотонів) та відкриття у електрона властивостей хвилі (дифракція електронів). На початку XX століття було відомо лише дві елементарні частинки: електрон і протон. На сьогодні їх уже більше двох сотень. Але самé поняття елементарної частинки є відносним поняттям. Так, за теорією представлень групи Лоренца, яка є теоретичною основою релятивістських явищ, і про яку ми більш детально поговоримо у наступному розділі, будь-яка частинка з конкретним значенням маси та спіну (наприклад, атом) є елементарною. Але, якщо ми будемо розглядати взаємодію елементарних частинок, то при досить високих енергіях виявляється, що атоми розпадаються на більш елементарні об'єкти — протони і нейтрони, а при збільшенні енергій деякі частинки внаслідок розпаду або внаслідок зіткнення з іншими можуть породжувати нові. Чим вищий рівень енергії, при якому взаємодіють елементарні частинки, тим складніші фізичні явища відбуваються у мікросвіті і тим складнішим є апарат теорії для теоретичного аналізу цих явищ. Так, при низьких енергіях відбувається тільки пружне розсіяння елементарних частинок. Це явище можна описати навіть звичайною класичною механікою або класичною теорією поля. Для вивчення більш складних атомних явищ треба застосовувати апарат квантової механіки, а вже розрахунки процесів народження частинок вимагають застосування апарата квантової теорії поля. Саме у такому історичному плані, пов'язаному зі збільшенням енергетичних можливостей експерименту, і розвивалась теорія взаємодії елементарних частинок. Тому основні постулати і положення класичної механіки, класичної хвильової механіки та ідеї, що покладені в основу побудови квантової механіки, були домінуючими при побудові класичної та квантової теорії поля. Звичайно, слід зауважити, що ця спадкоємність хоч і була вирішальною при побудові квантової теорії, але, разом із тим, могла бути основною причиною появи великої кількості математичних проблем квантової теорії поля. Це дискусійне питання може бути предметом

подальших досліджень. Зв'язок між згаданими теоріями можна подати у вигляді блок-схеми(рис. 1). Тут використанні такі позначення:

c – швидкість передачі інформації (швидкість світла у вакуумі);

$\hbar = h/2\pi$, h – стала Планка;

N – число ступенів вільності системи;

$u(x)$ – поле або хвильова функція частки.

Зауважимо, що в класичній механіці поняття поля не існує, а в класичній теорії поля $u(x)$ є звичайною функцією (c – числом). У квантовій механіці $u(x)$ є хвильова функція і також є c – число, а у квантовій теорії поля $u(x)$ є q – число, тобто має операторну природу.

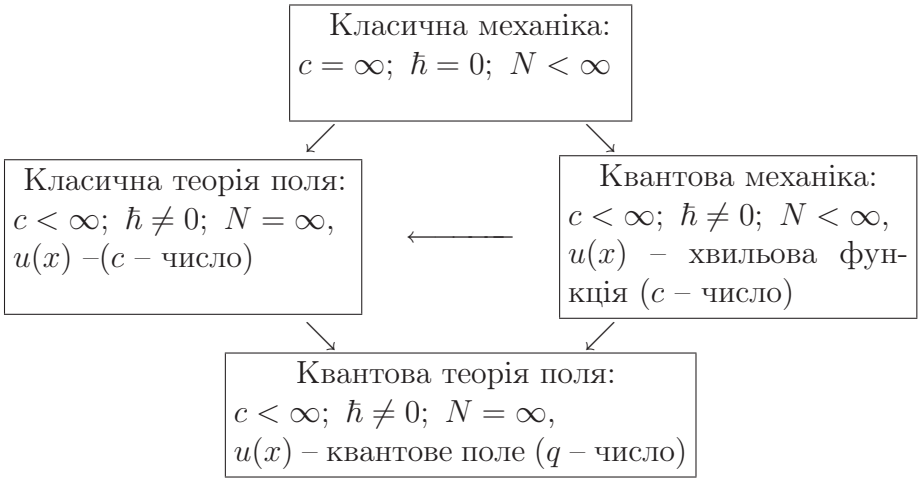


Рис. 1.

Ще один історичний аспект побудови квантової теорії поля пов'язаний із поняттям взаємодії між частинками. Відомо три типи взаємодії (крім гравітаційної): слабкі, електромагнітні і сильні. Кожній із цих взаємодій відповідає своя константа зв'язку, яка й характеризує силу взаємодії. Причому слабка взаємодія існує між усіма частинками (крім фотонів), електромагнітна – між зарядженими частинками і фотонами, а сильна – між адронами. Перші спроби описати фізичні процеси були пов'язані з моделями, що розглядають якусь конкретну взаємодію. Так виникли квантова електродинаміка, теорія слабких та теорія сильних взаємодій. Але дуже часто вплив на якесь фізичне явище можуть вносити як електромагнітні, так і сильні взаємодії або, навіть, усі три типи взаємодій. Тому згодом виникла ідея побудови моделі, що об'єднує усі взаємодії. Реалізація цієї ідеї тісно пов'язана з дуже важливими властивостями фізики елементарних частинок – властивостями їх симетрій. Властивості симетрій елементарних частинок можна розділити на два класи: просторово-часові симетрії і внутрішні симетрії.

Математично властивості симетрій описуються відповідними групами симетрій. Закони взаємодії елементарних частинок є інваріантними щодо тієї чи іншої групи симетрій. Причому просторово-часові симетрії пов'язані з геометрією

простору, в якому відбувається взаємодія, і є однаковими для всіх елементарних частинок. Інваріантність відносно деякої групи внутрішньої симетрії може виконуватись тільки для деякої певної сукупності частинок, які взаємодіють у межах даної конкретної взаємодії, а порушення цієї симетрії може свідчити про появу у системі якихось нових частинок (можливо, ще не відомих). Отже, основою для побудови квантової теорії поля є класична та квантова механіки, а також різні групи симетрій, що пов'язані з фізичними законами мікросвіту елементарних частинок.

В історії вивчення розвитку квантової теорії взаємодіючих полів можна виділити три важливі періоди, протягом яких виникли і розвивались хоч і близькі, але все ж принципово різні концепції введення взаємодії. У рамках *стандартного підходу* взаємодія між полями фактично постулюється, хоча цей постулат і спирається на механізм уведення електромагнітної взаємодії, про обґрунтування якого ми детально поговоримо у другому розділі (зауваження 4.3). Інший підхід базується на принципі калібрувальної інваріантності, який також є узагальненням градієнтної інваріантності електромагнітного поля. У рамках такого принципу лагранжіан взаємодії вже не постулюється, а виводиться з відповідного принципу калібрувальної інваріантності, який покладено в основу побудови теорії. Такий принцип був запропонований ще в 1953 році Янгом і Міллсом [105], але справжнього розвитку ця теорія набула тільки в кінці 60-х на початку 70-х років минулого століття після робіт Фаддєєва і Попова [118], Де Вітта [114–116], т'Хофта [191–193], Славнова [83,84], Тейлора [190] та ін. Після чого почався справжній бум. Теорія калібрувальних полів фактично "врятувала"стандартний підхід до теорії кварків, а точніше — до теорії сильних взаємодій, утворивши самостійний розділ теорії елементарних частинок — квантову хромодинаміку (КХД). Фактично початок 70-х років можна також вважати і початком створення теорії слабких взаємодій, а також їх об'єднання в єдину модель електрослабкої взаємодії. Крім того, розвиток нестандартних моделей не приніс успіху у подоланні математичних проблем побудови теорії, але дещо навіть збільшив їх число і складність. Особливо це відчутно при спробі включити в теорію гравітаційну взаємодію, яка може чинити досить значний вплив на фізичні процеси, що проходять при надзвичайно високих енергіях. У зв'язку з накопиченням проблем теорії взаємодіючих полів, метою якої була (та й є) побудова єдиної теорії елементарних частинок, виникла цілком природна ідея, що існуюча теорія не є фундаментальною. На роль теорії, з якої може бути отримана сучасна теорія взаємодіючих полів, претендує *теорія релятивістської струни*, яка не є предметом обговорення у цьому виданні, і ми радимо читачеві звернутись, наприклад, до праць [4], [178]. Ми також радимо читачеві уважно перечитати історичні огляди про виникнення і розвиток теорії квантованих полів [16,17], а також еволюцію поглядів і нових ідей у теорії побудови елементарних частинок, що ґрунтується на теорії кварків [98], [41].

У цій книзі ми детально зупинимось на проблемах побудови стандартних моделей і моделей калібрувальних полів.

Розділ I. Групи симетрій елементарних частинок

Методи, що пов'язані з властивостями симетрій, є одними з основних у вивченні багатьох фізичних явищ фізики елементарних частинок. Перш за все це класифікація частинок у рамках відповідних взаємодій, побудова лагранжіанів взаємодій, знаходження інтегралів руху (величин, що зберігаються) тощо. Властивості симетрій описуються відповідними групами симетрій, а елементарна частинка розглядається як об'єкт, стани якого утворюють базис незвідного представлення тієї чи іншої групи симетрії. У першому параграфі цього розділу ми коротко зупинимося на питаннях, пов'язаних з релятивістською інваріантністю (*коваріантністю*). Це є природна вимога до фізичної теорії, бо всі фізичні закони не повинні залежати від системи відліку.

Інваріантність законів фізики елементарних частинок відносно повної неоднорідної групи Лоренца покладається в основу побудови квантової теорії поля і є фактично основним постулатом теорії.

§ 1. Група Лоренца

У цьому параграфі ми наведемо деякі основні факти з теорії групи Лоренца та її *представлень*. Для більш глибокого вивчення цих питань читач може звернутись до праць [18,26,54,102,104].

1.1. Простори Евкліда та Мінковського. Релятивістські позначення

Звичайний s-вимірний евклідів простір $\mathbb{E}^s = \mathbb{R}^s$– це декартів добуток $(\times\mathbb{R}^1)^s$ ($\mathbb{R}^1$ — дійсна числова вісь), у якому визначена відстань (метрика) між двома точками $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^s)$ і $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^s)$ за формулою

$$\rho_{\mathbb{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots + (x^s - y^s)^2} := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

У випадку $s = 3$ будемо позначати просто $\mathbb{E}$.

Простір Мінковського $\mathbb{M} = \mathbb{M}^4$ ($\mathbb{M}^d$ –у випадку $d \neq 4$) теж визначається як декартів добуток $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$, але числова вісь $\mathbb{R}^1 = cT$, де $T = [-\infty, +\infty]$ — часова вісь, а відстань між двома точками $x = (x^\mu)_{\mu=0}^{\mu=3} = (x^0 = ct,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$ і y задається формулою

$$\rho_{\mathbb{M}}(x, y) = \sqrt{(x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2}. \tag{1.1}$$

Для скорочення запису і побудови тензорного аналізу на просторі $\mathbb{M}$ вводиться *метричний тензор* $G = (g_{\mu\nu})$:

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = 0, \quad \text{коли } \mu \neq \nu, \\ &g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Точки простору $x \in \mathbb{M}$ будемо називати контраваріантними координатними векторами, а їх координати позначимо x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Усі вектори a, що перетворюються при зміні координат за таким самим законом як і x^μ, будемо називати контраваріантними і позначати їх компоненти через a^μ, а вектори b, які перетворюються як 4-вимірний градієнт $\partial := \left(\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$, будемо називати коваріантними і позначати b_μ (з індексом унизу). Грецькі індекси $(\mu, \nu, \alpha, \beta, \ldots)$ використовуватимуться для позначення просторово-часових компонент, які змінюються від 0 до 3 (або від 0 до s, якщо розглядається $d = (s+1)$-вимірна теорія), а латинські індекси $(i, j, k, a, b, c, \ldots)$ будуть використовуватись тільки для просторових компонент і змінюватись від 1 до 3 (або від 1 до s) або використовуватись для переліку компонент поля.

Перехід від контраваріантних компонент до коваріантних виконується за допомогою тензора $g_{\mu\nu}$:

$$a_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} a^\nu := g_{\mu\nu} a^\nu \quad \text{або} \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu.$$

Тут і далі за індексами, що повторюються, проводиться сумування. Окремі випадки, коли сумування немає, ми будемо обумовлювати.

Вектори в евклідовому просторі $\mathbb{E}$ ми будемо виділяти жирним шрифтом. Для того, щоб не було плутанини в позначеннях, зауважимо, що

$$(a^\mu)_{\mu=0}^3 = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}),$$

$$(a_\mu)_{\mu=0}^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, -\mathbf{a}),$$

а для 4-градієнта ці правила змінюються:

$$\begin{aligned} &(\partial_\mu)_{\mu=0}^3 = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) := (\partial_0,\ \boldsymbol{\nabla}), \\ &(\partial^\mu)_{\mu=0}^3 = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) := (\partial^0, -\ \boldsymbol{\nabla}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Простір Евкліда $\mathbb{E}^s$ буде повним гільбертовим простором, якщо в ньому ввести скалярний добуток двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ за формулою

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{s} a^i b^i = a^i b^i.$$

Зауважимо, що для векторів a і b з $\mathbb{E}^4$ евклідів скалярний добуток будемо позначати так:

$$(a, b)_{\mathbb{E}^4} = a^0 b^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\mu b^\mu. \tag{1.4}$$

Простір Мінковського $\mathbb{M}$ інколи називають гільбертовим простором з *індефінітною або псевдоевклідовою метрикою*, яка визначається формулою (1.1) і скалярним добутком

$$a \cdot b = (a, b)_{\mathbb{M}} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = (a, Gb)_{\mathbb{E}^4} = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{1.5}$$

Завдяки такому визначенню квадрат вектора $v \in \mathbb{M}$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Будемо називати вектор v *часо-подібним*, якщо $v^2 = v \cdot v = (v, v)_{\mathbb{M}} > 0$, *просторово-подібним*, якщо $v^2 < 0$, та *ізотропним*, якщо $v^2 = 0$. З кожним ізотропним вектором v можна пов'язати одновимірний *ізотропний підпростір* $\mu_v := \{u \in \mathbb{M} \mid u = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, який називають *світловим променем*. Об'єднання усіх світлових променів (вони виконують роль твірних) утворює поверхню *світлового конуса* C. Рівняння цього конуса у звичайній 4-вимірній системі координат матиме вигляд:

$$C : s^2 := \rho_{\mathbb{M}}(0, v)^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad v = (t, x, y, z). \tag{1.6}$$

Зручним зображенням цієї поверхні (див. рис. 1.1) є двовимірне, яке можна розглядати як проекцію поверхні (1.6) на координатну площину $\{x^0, x^1\}$:

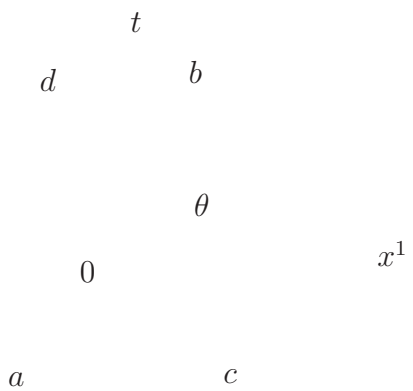


Рис. 1.1

Фізично цей рисунок можна інтерпретувати як розповсюдження двох сигналів зі швидкістю $c = \operatorname{ctg}\theta$ уздовж прямих (ab) і (cd) через точку 0, тобто нескінченного числа (континууму) таких променів уздовж поверхні (1.6). Поверхня (1.6) розділяє простір $\mathbb{M}$ на чотири області, які також називають конусами:

$$V_\pm := \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 > 0, \quad \pm x^0 > 0\},$$

або (1.7)

$$\overline{V}_\pm := \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 \geqslant 0, \quad \pm x^0 \geqslant 0\}.$$

$V_+(\overline{V}_+)$ називають відкритим (замкнутим) верхнім конусом або *конусом майбутнього*, а $V_-(\overline{V}_-)$ називають відкритим (замкнутим) нижнім конусом або *конусом минулого*. Конус

$$N := \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 < 0\}, \tag{1.8}$$

який містить усі просторово-подібні координатні вектори, інколи називають *бічним конусом*.

Зауваження 1.1. *Далі (за винятком окремих формул) ми будемо використовувати традиційну систему одиниць, у якій $c = \hbar = 1$. У цій системі одиниць енергія, маса, обернена довжина та обернений час мають однакову розмірність. Для того, щоб відновити у формулах константи c і $\hbar$, треба зробити заміни*

$$X \to \hbar^{\alpha_X} c^{\beta_X} X \tag{1.9}$$

кожної величини X, що входить у формулу. Значення показників α_X і β_X легко встановити з розмірності доданків, в які входять величини X. Крім того, треба врахувати звязок релятивістських позначень величин x^0 і p^0 з нерелятивістськими t і E:

$$x^0 \;=\; ct, \qquad p^0 \;=\; \frac{E}{c}.$$

Наприклад, для імпульсів p^μ координат x^μ і маси m $\quad \alpha_p = \alpha_m = 0$, $\alpha_x = -1$, $\beta_p = 1$, $\beta_x = -1$, $\beta_m = 2$. Це випливає з того, що релятивістське співвідношення між енергією і масою $E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$ в системі одиниць $\hbar = c = 1$ виглядає як $p^2 = m^2$ у класичному випадку і $\widehat{p}^2 = m^2$, $\widehat{p}^\mu = i\partial^\mu$ у квантовому.

1.2. Однорідна група Лоренца

Означення 1.1. *Загальною групою Лоренца $\widetilde{\mathscr{L}}$ називають групу дійсних однорідних лінійних перетворень координат простору Мінковського $\mathbb{M}$, які залишають інваріантною квадратичну форму (1.1)і скалярний добуток (1.5)координатних векторів $x \cdot y$.*

Загальний вигляд лінійного однорідного перетворення можна записати за допомогою системи рівнянь

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.10}$$

або у матричній формі

$$x' = \Lambda x, \quad (\Lambda)_{\mu\nu} := \Lambda^{\mu}_{\nu}, \quad \Lambda \in \widetilde{\mathscr{L}}. \tag{1.11}$$

Тоді з означення 1.1 та формул (1.4),(1.5) маємо:

$$\begin{aligned}(x', y')_{\mathbb{M}} &= (x', Gy')_{\mathbb{E}^4} = (\Lambda x, G\Lambda y)_{\mathbb{E}^4} \\ &= (x, \Lambda^T G \Lambda y)_{\mathbb{E}^4} = (x, y)_{\mathbb{M}} = (x, Gy)_{\mathbb{E}^4}.\end{aligned}$$

Звідси

$$\Lambda^T G \Lambda = G \quad \text{або} \quad (\Lambda^T)_{\alpha\mu} g_{\mu\nu} (\Lambda)_{\nu\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}, \tag{1.12}$$

де Λ^T — матриця транспонована до Λ. Враховуючи, що $\det \Lambda^T = \det \Lambda$, маємо з (1.12) таку умову:

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{або} \quad \det \Lambda = \pm 1. \tag{1.13}$$

Отже, для кожного перетворення Λ існує обернене. Під добутком двох перетворень Λ_1 і Λ_2 треба розуміти перетворення, що утворюється послідовною дією перетворень Λ_1 і Λ_2. Перетворення $\Lambda_2\ \Lambda_1$ задається матрицею, що дорівнює добутку матриць перетворень Λ_2 і Λ_1. З рівності

$$\begin{aligned}(\Lambda_2\Lambda_1 x, \Lambda_2\Lambda_1 y)_{\mathbb{M}} = (x, \Lambda_1^T \Lambda_2^T G \Lambda_2 \Lambda_1 y)_{\mathbb{E}^4} = \\ = (x, \Lambda_1^T G \Lambda_1 y)_{\mathbb{E}^4} = (x, Gy)_{\mathbb{E}^4} = (x, y)_{\mathbb{M}}\end{aligned}$$

випливає, що добуток $\Lambda_2\ \Lambda_1$ двох перетворень Лоренца також є перетворення Лоренца, тобто сукупність усіх перетворень Лоренца утворює групу.

Зробимо короткий аналіз тих важливих підгруп однорідної групи Лоренца, що мають самостійне значення при вивченні симетрій у теорії взаємодіючих частинок. Група Лоренца містить у собі підгрупу, що є ізоморфною групі $\mathbb{O}_3$ – тривимірних ортогональних перетворень. Цю групу в $\mathbb{E}^4$ можна задати за допомогою матриць

$$\Lambda_{O_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

де R – дійсна матриця 3×3 така, що

$$R^T R = R R^T = 1.$$

Далі з (1.12) (при $\alpha = \beta = 0$), знаходимо:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^0_i)^2 \geq 1, \tag{1.14}$$

тобто або $\Lambda^0_0 \geq 1$, або $\Lambda^0_0 \leq -1$.

Перетворення Лоренца, для яких $\Lambda^0_0 \geq 1$, називають *ортохронними перетвореннями* Лоренца. Ці перетворення також утворюють групу. Для перетворень з цієї підгрупи має місце наступна важлива властивість.

Пропозиція 1.1.

Ортохронні перетворення Лоренца зберігають інваріантним конус часоподібних позитивних векторів, тобто переводять вектори x, для яких $x^0 > 0$ та $x \cdot x = x^2 > 0$, у вектори x', у яких $x'^0 > 0$ та $x' \cdot x' = x'^2 > 0$.

Доведення. Для довільного часо-подібного вектора $x = (x^0, \mathbf{x})$ і ортохронного перетворення $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$ визначимо вектор $\mathbf{\Lambda}_0 = (\Lambda^0_1, \Lambda^0_2, \Lambda^0_3) \in \mathbb{R}^3$ і запишемо нерівність Шварца для скалярного добутку векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{\Lambda}_0$ у $\mathbb{R}^3$:

$$\big|(\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{x})_{\mathbb{R}^3}\big| \le \big|\mathbf{\Lambda}_0\big|\,\big|\mathbf{x}\big|. \tag{1.15}$$

Використовуючи (1.14), розпишемо (1.15):

$$\big|\Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3\big| \le \sqrt{(\Lambda^0_0)^2 - 1}\,\sqrt{\mathbf{x}^2}. \tag{1.16}$$

Тоді для часо-подібних векторів ($\mathbf{x}^2 < (x^0)^2$), для яких $x^0 > 0$, і перетворень Лоренца з $\Lambda^0_0 > 1$ права частина (1.16) менша за $\Lambda^0_0 x^0$. Отже, тоді перетворений вектор $x' = \Lambda x$ має компоненту

$$x'^0 = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 \geqslant \Lambda^0_0 x^0 - |\Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3| > 0.$$

Часо-подібність x' випливає з означення перетворення Лоренца ($x'^2 = x' \cdot x' = x \cdot x = x^2 > 0$). *Пропозиція доведена.*

У залежності від значень $\det \Lambda$ і Λ^0_0 групу Лоренца можна розбити на чотири компоненти:

1) підгрупа *власних ортохронних перетворень* (proper ortochronous) (інколи її називають *обмеженою* однорідною групою Лоренца) $\mathscr{L}^\uparrow_+$ з $\det \Lambda = +1$ і $\Lambda^0_0 \ge 1$;

2) власні неортохронні перетворення ($\mathscr{L}^\downarrow_+$) з $\det \Lambda = +1$ і $\Lambda^0_0 \le -1$;

3) невласні ортохронні перетворення ($\mathscr{L}^\uparrow_-$) з $\det \Lambda = -1$ і $\Lambda^0_0 \ge 1$;

4) невласні неортохронні перетворення ($\mathscr{L}^\downarrow_-$) з $\det \Lambda = -1$ і $\Lambda^0_0 \le -1$.

Зауваження 1.1. *Перетворення Лоренца з $\Lambda^0_0 \ge 1$ утворюють підгрупу ортохронних перетворень (о р т о х р о н н у групу). Підгрупа власних ортохронних перетворень є 6-ти параметричною групою Лі. Вона має назву в л а с н о ї групи Лоренца. Її також називають о б м е ж е н о ю однорідною групою Лоренца. Перетворення з 3-х інших компонент (вони не утворюють підгруп групи Лоренца) можна отримати з власних ортохронних перетворень за допомогою трьох дискретних перетворень:*

1) просторового віддзеркалення:

$$\widehat{P}x = \Lambda_{i_s}(x^0, \mathbf{x}) = (x^0, -\mathbf{x}); \tag{1.17}$$

2) часового віддзеркалення:

$$\widehat{T}x = \Lambda_{i_t}(x^0, \mathbf{x}) = (-x^0, \mathbf{x}); \tag{1.18}$$

3) просторово-часового віддзеркалення:

$$\widehat{P}\widehat{T}x = \Lambda_{i_{st}}(x^0, \mathbf{x}) = (-x^0, -\mathbf{x}). \tag{1.19}$$

Загальну групу Лоренца можна тоді символічно записати у вигляді

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L}_+^\uparrow + \widehat{P}\mathscr{L}_+^\uparrow + \widehat{T}\mathscr{L}_+^\uparrow + \widehat{P}\widehat{T}\mathscr{L}_+^\uparrow.$$

Зауваження 1.2. *Треба зауважити, що існує глибока відмінність неперервних перетворень із цієї групи від дискретних перетворень $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ і $\widehat{P}\widehat{T}$ загальної групи Лоренца. Ця відмінність полягає у тому, що, застосовуючи послідовно нескінченно малі перетворення, ми можемо перейти від однієї інерціальної системи до іншої, не змінюючи фізичної суті явищ або об'єктів, тобто забезпечуючи їх інваріантність у різних системах відліку. Від просторових або часових віддзеркалень ідентичність деяких явищ або об'єктів може порушуватись. Цей факт є наслідком експериментальних спостережень.*

Кожне перетворення Лоренца належить до одного з доданків $\widetilde{\mathscr{L}}$ і може бути записане за допомогою добутку перетворень з $\mathscr{L}_+^\uparrow$ і перетворень $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ або $\widehat{P}\widehat{T}$ якщо вони не належать до $\mathscr{L}_+^\uparrow$. Тому достатньо вивчити групу $\mathscr{L}_+^\uparrow$ і її можливі представлення. Ця група є 6-ти параметричною групою Лі. Число незалежних параметрів, які визначають групу власних ортохронних перетворень Лоренца, можна пов'язати з обертанням в шести площинах $(x^\mu x^\nu)$ на кути $\alpha^{\mu\nu}$. Із загальної теорії груп Лі відомо, що кожне перетворення Лоренца може бути задано своїм генератором. Для його знаходження розглядаються нескінченно малі *інфінітезимальні* повороти на кути $\varepsilon^{\mu\nu}$. Тоді

$$\Lambda = \Lambda(\varepsilon) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu} l_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2).$$

Генератори $l_{\mu\nu} = -l_{\nu\mu}$ і є лінійними операторами(матрицями) у просторі Мінковського. Їх матричні елементи легко підрахувати (див. наприклад [102,Гл. 2,§2]). Вони мають вигляд

$$(l_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \;=\; -g_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}$$

Легко переконатися, що вони задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[l_{\mu\nu}, l_{\alpha\beta}]_- = g_{\mu\alpha}l_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}l_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}l_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}l_{\mu\beta}.$$

Лінійна оболонка матриць $l_{\mu\nu}$ з дійсними коефіцієнтами утворює *алгебру Лі групи Лореца.*

1.3. Неоднорідна група Лоренца – група Пуанкаре

Неважко помітити, що псевдоевклідова відстань (1.1) між двома точками у просторі Мінковського є інваріантною не тільки відносно однорідних перетворень (1.10) , (1.11), а й відносно просторово-часових трансляцій, отже , і лінійних перетворень більш загального вигляду:

$$x'^{\mu} = (Lx)^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{1.20}$$

Ці перетворення задаються матрицею Λ і 4-вектором a та позначаються $L = (\Lambda, a)$. Сукупність перетворень (1.20) утворює групу, якщо під добутком двох перетворень $L_1 = (\Lambda_1, a_1)$ і $L_2 = (\Lambda_2, a_2)$ розуміти перетворення

$$L = L_2 L_1 = (\Lambda_2 \Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1).$$

Неоднорідні перетворення (1.20) з $\Lambda \in \mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$ утворюють 10-ти параметричну неперервну групу Лі. Генератори зсувів t_μ відносно осей x^μ комутують між собою і задовольняють такі комутаційні співвідношення із генераторами поворотів (див. [18,26,54,102]):

$$\lfloor l_{\mu\nu}, t_\alpha \rfloor_{-} = (g_{\nu\alpha} t_\mu - g_{\mu\alpha} t_\nu),$$

а оператор L, що відповідає зсуву на 4- вектор a^μ, має вигляд

$$L(\mathbb{1}, a) = e^{-ia^\mu g^{\mu\nu} t^\nu} = e^{-ia^\mu t_\mu}.$$

1.4. Комплексні перетворення Лоренца

При вивченні аналітичних властивостей функцій, інваріантних відносно перетворень із групи $\mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$, необхідно поширити означення 1.1 на комплексний простір Мінковського $\mathbb{MC} = \mathbb{MC}^4$, у якому для $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ з x_i, $y_i \in \mathbb{M}$, $i = 1, 2$, визначається білінійна форма

$$z_1 \cdot z_2 = (z_1, z_2)_{\mathbb{MC}} = g_{\mu\nu} z_1^{\mu} z_2^{\nu}. \tag{1.21}$$

Означення 1.2. *Групою комплексних перетворень Лоренца* $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ *називають групу перетворень простору* $\mathbb{MC}$*, які залишають інваріантною квадратичну форму* (1.21)*, тобто*

$$(\Lambda z_1, \Lambda z_2)_{\mathbb{MC}} = (z_1, z_2)_{\mathbb{MC}}. \tag{1.22}$$

Легко переконатися, що вимога (1.22) веде до того самого співвідношення (1.12) для комплексних матриць Λ і такої самої умови (1.13). Отже, $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ можна записати у вигляді двох компонент

$$\mathscr{L}(\mathbb{C}) = \mathscr{L}_{+}(\mathbb{C}) \cup \mathscr{L}_{-}(\mathbb{C}), \tag{1.23}$$

де $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ відповідає перетворенням з $\det \Lambda = +1$, а $\mathscr{L}_-(\mathbb{C})$– перетворенням із $\det \Lambda = -1$. На відміну від дійсних перетворень $\mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ є вже зв'язною півгрупою Лі групи $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ (див., наприклад, [11], Гл. 5, § 1.2).

Узагальнення на комплексні неоднорідні перетворення є тривіальним.

1.5. Представлення групи Лоренца і Пуанкаре, польові функції та фізичні стани

У квантовій механіці кожній частинці приписують деяку хвильову функцію, яка задовольняє рівняння Шредінгера, а її фізичний зміст пов'язаний із густиною імовірності знайти відповідну частинку у конкретному квантовому стані. У релятивістській теорії такою функцією є польова функція $u(x)$ (або поле), яка загалом є багатокомпонентною і залежить не тільки від просторово-часових, а й від інших внутрішніх змінних(таких як маса, спін та ін.). Як правило ця функція задовольняє деяке диференціальне рівняння або систему рівнянь у випадку взаємодії багатьох частинок. Перехід від однієї системи відліку до іншої за допомогою перетворень Лоренца не повинен змінювати законів руху, тобто повинен залишати рівняння незмінним. А це означає, що поле $u(x)$ буде змінюватися з допомогою лінійного перетворення

$$u(x) \to u'(x') = S(L)u(x) = S(\Lambda, a)u(x), \tag{1.24}$$

причому оператор $S(L)$ визначається перетворенням Лоренца $L = (\Lambda, a)$. Таким чином, кожному лоренцовому перетворенню $L = (\Lambda, a)$ відповідає лінійній оператор $S(L)$, причому, очевидно, що одиничному елементу групи Лоренца відповідає одиничний оператор $S(1, 0) = \mathbb{1}$, а добутку двох елементів групи Лоренца — добуток двох лінійних перетворень $S(L)$: $S(L_2)S(L_1) = S(L_2L_1)$. Система операторів $S(L)$, що відповідає таким властивостям, називається лінійним представленням групи Лоренца. Вигляд оператора $S(L)$ залежить від простору, у якому він діє, тобто від структури функцій $u(x)$. У тому випадку, коли число компонент $u(x)$ є скінченне, оператор $S(L)$ буде скінченновимірною матрицею, а відповідне представлення називається *скінченновимірним представленням* групи Лоренца. Інколи може виявитись, що простір, у якому діє представлення $S(L)$, можна розбити на підпростори, які є інваріантними відносно усіх операторів $S(L)$. Таке представлення називають звідним. Якщо таких підпросторів не існує, представлення є незвідне.

У зв'язку з тим, що всі відомі на цей час фізичні поля описуються функціями зі скінченним числом компонент, для встановлення типу можливих полів та їх класифікації важливо вивчити усі можливі незвідні скінченновимірні представлення однорідної групи Лоренца. З детального аналізу перетворень групи Лоренца, який був зроблений у п.1.2 можна зробити висновок, що вивчення усіх представлень групи Лоренца можна обмежити вивченням усіх незвідних представлень власної групи Лоренца. У цьому пункті будуть наведені деякі основні

характеристики скінченновимірних спінорних представлень власної групи Лоренца. Для ознайомлення з детальними викладками і структурою цих представлень радимо читачу звернутися до книги [26]. Зауважимо, що кожне незвідне представлення власної групи Лоренца визначається деяким цілим або напівцілим числом j, яке називають *вагою* відповідного незвідного представлення. Число j відповідає максимальному власному значенню генератора просторових поворотів $H_3 = M_{12}$, а базис, у якому базисні вектори є власними векторами оператора H_3 називають *канонічним базисом*.

Для того, щоб мати елементарні уявлення про побудову незвідних представлень групи Лоренца, встановимо зв'язок цієї групи з групою комплексних унімодулярних матриць другого порядку $SL(2,c)$, тобто 2×2 матриць $A = ((a_{ij}))$, $(i,j = 1,2)$ з умовою $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$. Розглянемо четвірку матриць σ_μ, де $\sigma_0 = \mathbb{1}$, а три інших є відомі матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

Зіставимо з кожним 4-вектором простору Мінковського x^μ ермітову матрицю X за правилом

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Враховуючи, що $Tr(\sigma_\mu \sigma_{\mu'}) = 2\delta_{\mu\mu'}$, знаходимо:

$$x^\mu = \frac{1}{2} Tr(X\sigma_\mu),$$

а

$$\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^2. \tag{1.27}$$

Для довільної матриці $A \in SL(2,c)$ розглянемо перетворення $X \to X'$:

$$X' = AXA^+, \tag{1.28}$$

де A^+–ермітово спряжена матриця ($A^+ = \overline{A}^T$).

Як наслідок унімодулярності матриці A ($\det A = \det A^+ = 1$) $\det X' = \det X$, що еквівалентно (див. (1.27)) умові

$$x'^2 = x^2.$$

Тоді з означення 1.1 перетворення (1.28) буде описувати однорідне перетворення групи Лоренца 4-вектора x^μ. Щоб встановити співвідношення між матрицею A і матрицею лоренцового повороту Λ, підставимо визначення X' і X з (1.26) у форму (1.28)

$$X' = \sigma_\mu x'^\mu = \sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu x^\nu = A\sigma_\nu A^+ x^\nu.$$

Домножуючи на σ_μ і застосовуючи операцію сліду, маємо:

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} Tr(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+). \tag{1.29}$$

Із формули (1.29) видно, що кожне перетворення Λ^μ_ν може бути задане двома матрицями $\pm A$, тобто $\Lambda^\mu_\nu(A) = \Lambda^\mu_\nu(-A)$.

Розглянемо тепер величини, які ми будемо називати двокомпонентними спінорами (або спінорами 1-го рангу)

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{1/2} \\ \xi_{-1/2} \end{pmatrix}$$

і які будуть перетворюватися за допомогою матриці A за правилом $\xi \to \xi'$:

$$\xi'_\alpha = A_{\alpha\beta}\xi_\beta, \quad \alpha, \beta = \pm 1/2 \quad \text{або} \quad \xi' = A\xi. \tag{1.30}$$

Спінор ξ можна розглядати як вектор у лінійному комплексному просторі двох вимірів, який перетворюється при перетвореннях Лоренца (1.10) відповідно до закону (1.30). Оскільки відповідність $\Lambda \to \pm A$ двозначна, то спінор у кожній системі відліку визначається з точністю до знаку.

При перетворенні Лоренца комплексно спряжена пара чисел $\xi^*_{\pm 1/2}$ перетворюється за допомогою матриці $\overline{A} = (\overline{A}_{\alpha\beta})$:

$$\xi'^*_\alpha = \overline{A}_{\alpha\beta}\xi^*_\beta.$$

Замість ξ^*_α пишуть $\xi_{\dot\alpha}$, а відповідне перетворення запишеться як

$$\xi'_{\dot\alpha} = \overline{A}_{\dot\alpha\dot\beta}\xi_{\dot\beta}. \tag{1.31}$$

Перетворення (1.30) реалізує 2-вимірне представлення власної групи Лоренца, яке називають *спінорним* представленням 1-го рангу, а перетворення (1.31) *спряженим спінорним* представленням 1-го рангу.

Аналогічно можна розглядати перетворення спінорів вищих рангів:

$$\Psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\dot\alpha_1,\ldots,\dot\alpha_n} = A_{\alpha_1\beta_1}\cdots A_{\alpha_m\beta_m}\overline{A}_{\dot\alpha_1\dot\beta_1}\cdots\overline{A}_{\dot\alpha_n\dot\beta_n}\Psi_{\beta_1,\ldots,\beta_m;\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_n}, \tag{1.32}$$

який є одночасно спінором m-го рангу і спряженим спінором n-го рангу. Сукупність таких спінорів утворює лінійний простір розмірності 2^{m+n}. Формула (1.32) задає представлення власної групи Лоренца (m,n)-го рангу. Ранг (m,n) пов'язаний з вагою (j,j') формулами

$$m = 2j, \quad n = 2j'.$$

Внаслідок того, що спінори (m,n)-го рангу перетворюються як добуток m спінорів 1-го і n спряжених спінорів 1-го рангу, то таке представлення є добутком

незвідних представлень ваги $1/2$ і взагалі може бути звідним. Виявляється (див. [26, Ч.2,Гл.1,§4]), що кожне незвідне представлення реалізується у просторі *симетричних* спіноров, тобто таких, що не змінюються при перестановці як індексів $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ між собою, так і $\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_n$ між собою. Легко зрозуміти, що розмірність відповідного лінійного простору, у якому діє представлення $D^{(j,j'0}$, а значить і матриці $S(L) = S(\Lambda, 0)$ у формулі (1.24) дорівнює:

$$d = (2j+1)(2j'+1). \tag{1.33}$$

Із (1.32) видно, що представлення $D^{(j,j')}$ буде однозначним, якщо $j + j'$ ціле, і двозначним, якщо $j + j'$ –напівціле. Матрицю $D^{(j,j')}(A)$ можна записати у вигляді прямого добутку матриць $D^{(j,0)}(A)$ і $D^{(0,j')}(A) = D^{(j',0)}(A^+)$. Зауважимо також, що добуток двох представлень $D^{(j_1,0)}$ і $D^{(j_2,0)}$ є звідним і розкладається на суму:

$$D^{(j_1,0)} \times D^{(j_2,0)} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} \oplus D^{(j,0)}. \tag{1.34}$$

Наведемо декілька основних реалізацій цих представлень.

1. Представлення $D^{(0,0)}$.

Із формули (1.33) розмірність $d = 1$, а отже, $S(\Lambda, 0) = C_\Lambda \cdot \mathbf{1}$, $C_\Lambda \in \mathbb{C}$. Простір, у якому реалізується це представлення, складається з однокомпонентних функцій $u(x)$. Відповідне поле ми будемо позначати $\varphi(x)$. Закон перетворення (1.24) має вигляд

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = C_\Lambda \varphi(x).$$

Враховуючи те, що у спостережувані величини завжди входять інваріантні білінійні комбінації типу $|\varphi(x)|^2$, можна вважати $|C_\Lambda| = 1$, а якщо розглядати дійсні поля, то $C_\Lambda = \pm 1$. Відповідно може бути реалізовано два типи представлень нульового рангу. Перший тип – це коли довільному лоренцовому перетворенню (1.20) відповідає перетворення поля

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x), \tag{1.35}$$

що еквівалентне перетворенню функції поля

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi\big(\Lambda^{-1}(x-a)\big). \tag{1.36}$$

Таке поле називають скалярним полем. Воно описує так звані скалярні мезони.

Другий тип представлень задається перетворенням (1.35), (1.36) для всіх неперервних Λ, а закон перетворення поля $\varphi(x)$ при просторовому віддзеркаленні $\widehat{P}$ (див. (1.17)) має вигляд

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = -\varphi(x). \tag{1.37}$$

Таке поле називають псевдоскалярним. Воно описує псевдоскалярні мезони. Частинки, що перетворюються за представленням $D^{(0,0)}$, мають нульовий спін.

2. Представлення $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ та $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$.

Розмірність цього представлення $d = 2$. Польові функції, що перетворюються за $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ та $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$, називають двокомпонентними спінорами. Закони перетворення для цих величин задаються формулами (1.30) і (1.31). Базисні вектори просторів, у яких реалізуються представлення $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ та $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$, можна вибрати таким чином, що матриці, які реалізують ці представлення, будуть взаємно спряжені. Двокомпонентні спінори описують частинки і античастинки із напівцілим спіном.

У сучасній зарубіжній літературі часто замість індексів α і $\dot{\alpha}$ для спінорів ψ вживають позначення ψ_L для спінорів, на яких реалізується представлення $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$, і ψ_R для спінорів, на яких реалізується представлення $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$.

3. Представлення $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

Згідно з (1.30)–(1.32) відповідний спінор $\Psi_{\alpha,\dot{\beta}}$ перетворюється за законом

$$\Psi'_{\alpha,\dot{\beta}}(x') = A_{\alpha\gamma}(\Lambda)\bar{A}_{\dot{\beta}\dot{\delta}}(\Lambda)\Psi_{\gamma,\dot{\delta}}(x). \tag{1.38}$$

Але згідно з формулою (1.33) розмірність представлення $d = 4$. Тобто можна вважати, що спінор $\Psi_{\alpha,\dot{\beta}}$ перетворюватися як коваріантний 4-вектор. Щоб це побачити, аналогічно (1.26), представимо $\Psi_{\alpha,\dot{\beta}}$ у вигляді розкладу

$$\Psi_{\alpha,\dot{\beta}}(x) = V^{\mu}(x)(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{1.39}$$

Тоді з (1.38), використовуючи (1.39), отримаємо (див. задачу 1.4)

$$V'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu}V^{\nu}(x), \tag{1.40}$$

тобто формула (1.39) задає однозначну відповідність між спінором $\Psi_{\alpha,\dot{\beta}}$ і коваріантним 4-вектором, що перетворюється за формулою (1.40).

Наступним важливим моментом є інваріантність *фізичних станів*. В наступних розділах буде дано визначення як класичних так і квантових станів системи елементарних частинок. Вимога релятивістської інваріантності приводить до того, що вектори станів повинні перетворюватися за незвідними *унітарними* представленнями групи Пуанкаре. Це означає, що генератори представлення $M_{\mu\nu}$, що відповідають генераторам поворотів $l_{\mu\nu}$ і P_{μ}, що відповідають генераторам зсувів t_{μ} є ермітовими матрицями (або самоспряженими операторами у випадку нескінченновимірного простору), а відповідне інфінітезімальне представлення оператора, що відповідає перетворенню (1.20) має вигляд

$$U(L) = U(\Lambda, \delta a) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \delta a^{\mu}P_{\mu} + O(\varepsilon^2, (\delta a)^2). \tag{1.41}$$

Генератори $M_{\mu\nu}$ і P_μ задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}]_- = -i(g_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}M_{\mu\beta}), \tag{1.42}$$

$$\lfloor M_{\mu\nu}, P_\alpha \rfloor_- = i(g_{\nu\alpha}P_\mu - g_{\mu\alpha}P_\nu) \tag{1.43}$$

і

$$\lfloor P_\mu, P_\nu \rfloor_- = 0, \tag{1.44}$$

які відрізняються від співвідношень між $l_{\mu\nu}$ і t_μ тільки множником $i = \sqrt{-1}$.

Проблема знаходження представлень неоднорідної групи Лоренца еквівалентна проблемі знаходження усіх представлень комутаційних співвідношень (1.42)–(1.44) за допомогою самоспряжених операторів $M_{\mu\nu}$ і P_μ. Виявляється, що єдиним скінченновимірним унітарним представленням однорідної групи Лоренца є тривіальне представлення $U(\Lambda, 0) = \mathbb{1}$. Представлення генераторів P_μ, що відповідають зсувам уздовж 4-х осей координат будується дуже просто, оскільки сукупність усіх 4-вимірних зсувів є комутативною підгрупою групи Пуанкаре (див. (1.44)). Це означає, що усі незвідні унітарні представлення цієї підгрупи є одновимірними, а оператор, що відповідає зсуву на 4-вектор a^μ має вигляд

$$U(\mathbb{1}, a) = e^{-ia^\mu P_\mu}. \tag{1.45}$$

У просторі, де діють відповідні генератори можна вибрати базис, у якому оператор $U(\mathbb{1}, a)$ просто домножує базисний вектор на функцію exp $(-ia^\mu p_\mu)$. Тоді всі незвідні представлення неоднорідної групи Лоренца можна класифікувати відповідно до того, яким буде вектор p_μ, тобто чи він буде просторово-подібним, чи часо-подібним, або ізотропним. Але, враховуючи відоме співвідношення $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ між енергією та імпульсом вільної релятивістської частинки, важливими з точки зору фізичних застосувань є ті представлення, для яких $p^2 = m^2$ або $p^2 = 0$ і $p^0 > 0$. Отже оператор $P^2 = P^\mu P_\mu$, який є інваріантом групи, відповідає за спектр мас релятивістських частинок, тобто кожне значення параметра $m \geq 0$ характеризує відповідне представлення. Іншим інваріантом є оператор

$$W = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}P_\alpha P^\alpha + M_{\mu\alpha}M^{\alpha\nu}P^\mu P_\nu, \tag{1.46}$$

який комутує з усіма генераторами $M_{\mu\nu}$ і P_μ. Тому для кожного незвідного представлення неоднорідної групи Лоренца він є кратним до одиничного оператора, а його власні значення можна виразити через параметр, що фіксує дане представлення. У випадку $m > 0$ у вище згаданому базисі можна вибрати "систему спокою", у якій $W = m^2\mathbf{S}^2$, де $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, а $S_i, i = 1, 2, 3$ —генератори незвідного представлення 3-вимірної групи поворотів. Власні значення оператора $\mathbf{S}^2$ є числа $s(s+1)$, де $s = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$ відповідають значенню спіна частинки маси m. Розмірність відповідного представлення $d = 2s + 1$.

У випадку нульової маси не можна вибрати "систему спокою"оскільки відповідна релятивістська частинка рухається з швидкістю світла у вакуумі c, а $p^0 = |\mathbf{p}|$. У цьому випадку існує два типи представлень. Перший тип відповідає випадку коли разом з $P^2 = 0$, і $W = 0$. Тоді для характеристики представлень вибирають власні значення оператора *спіральності*

$$S(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \tag{1.47}$$

де $\mathbf{M} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$. Оператор $S(\mathbf{p})$ детальніше буде розглядатися у п.5.3.2. Власні значення оператора $S(\mathbf{p})$ відповідають станам поляризації частинки і виражаються формулою:

$$\lambda_{\mathbf{p}} = s_0 + n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

а $s_0 = 0$ для однозначних представлень і $s_0 = 1/2$ для двозначних представлень. Отже у випадку $s_0 = n = 0$ існує тільки один стан релятивістської безмасової частинки, а при $\lambda_{\mathbf{p}} \neq 0$—тільки два незалежних стани, що відповідають двом станам поляризації, за напрямком руху частинки і проти. У природі реалізується тільки два представлення з $\lambda_{\mathbf{p}} = 1/2$, що відповідає нейтрино (якщо все ж таки нейтрино є безмасовою частинкою) і $\lambda_{\mathbf{p}} = 1$, що відповідає фотону.

І, нарешті, другий тип представлень виникає якщо $W = \alpha^2 \mathbb{I}$, де α–дійсне число. Тоді відповідне нескінченновимірне представлення характеризується неперервним спіном. Мабуть такий тип представлень не відповідає реальним частинкам.

Підсумовуючи, можна сказати, що для опису за допомогою представлень групи Пуанкаре релятивістської теорії елементарних частинок, усі цікаві фізичні представлення характеризуються двома параметрами (m, s), де m—маса частинки, приймає довільні значення $m \geq 0$, а $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ...$, спін частинки. Детальніше про це можна прочитати в працях [102, Гл.2],[104].

§ 2. Групи внутрішніх симетрій

Ще з класичної механіки відомо, що інваріантність теорії відносно деяких груп симетрій (наприклад, просторових та часових трансляцій або обертань) пов'язана з існуванням законів збереження (імпульсу, енергії або моменту кількості руху). Тому пошуки нових груп симетрії є одним з найважливіших напрямків розвитку теорії елементарних частинок. У попередньому параграфі ми розглянули групи, що пов'язані з перетвореннями 4-вимірного простору-часу. Разом з ними існують такі перетворення, при яких просторово-часові координати залишаються незмінними, а замінюються лише функції полів:

$$\begin{aligned} &x \to x' = x \\ &u(x) \to u'(x') = \varphi(x, u). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Перетворення (2.1) пов'язані з внутрішніми властивостями полів, а відповідні групи перетворень називають групами *внутрішніх симетрій*. Звичайно ж детальне вивчення таких груп може бути предметом написання великої монографії. Тому у цьому розділі ми коротко познайомимося лише з групами, що найбільш часто зустрічаються, а саме — унітарними групами, що породжують так звану *унітарну симетрію*. Інші групи, що будуть зустрічатися при вивченні тих чи інших аспектів теорії, будуть розглянуті у контексті вивчення різних полів та їх взаємодій.

2.1. Абелева унітарна група U(1)

Це однопараметрична група, що породжується фазовими перетвореннями вигляду

$$\begin{aligned} u(x) &\to u'(x) = e^{igq}u(x), \\ \overset{*}{u}(x) &\to \overset{*}{u}'(x) = e^{-igq}\overset{*}{u}(x), \end{aligned} \tag{2.2}$$

де g– параметр групового перетворення, а константа q виділена для зручності і відповідає заряду частинок, що описуються полями $u(x)$. Усі фізичні величини залежать від білінійних комбінацій $\overset{*}{u}(x)u(x)$ або їх похідних і будуть інваріантними відносно перетворень (2.2). Із загальної теорії груп Лі відомо, що всі незвідні представлення *абелевої* (або іншими словами комутативної) групи є одновимірні, а отже, вони будуть унітарно еквівалентними перетворенню (2.2). Перетворення (2.2) мають назву калібрувальних перетворень 1-го роду.

Зауваження 2.1. *Симетрію відносно перетворень (2.2) не обов'язково пов'язувати з законом збереження електричного заряду. Це може бути закон збереження, наприклад, баріонного чи лептонного зарядів, при умові, що для даного типу взаємодії він має місце.*

Якщо групу перетворень (2.2) пов'язати з законом збереження електричного заряду, то параметр $q = -e$ для поля електронів, $q = e$ для поля протонів, $q = 0$ для поля нейтронів і т.д. Якщо групу перетворень (2.2) пов'язати з законом збереження баріонного заряду, то для протонного і нейтронного полів $q = B = 1$, а для електрон-позитронного поля $q = B = 0$. Якщо ж, наприклад, перетворення (2.2) пов'язані з лагранжіаном, що відповідає взаємодії, при якій зберігається число лептонів, тоді $q = L = 1$ для електрон-позитронного, нейтронного, мюонного полів, і $q = L = 0$ для всіх баріонних і мезонних полів.

2.2. Зарядове спряження C

У теорії сильних взаємодій важливим дискретним перетворенням є операція *зарядового спряження*. Вона визначається у просторі хвильових функцій як оператор, що замінює хвильову функцію частинки на хвильову функцію античастинки:

$$\widehat{C}\Psi_a = \Psi_{\bar{a}}. \tag{2.3}$$

Для опису зарядової симетрії можна розглядати частинку і античастинку як два різні стани однієї і тієї ж частинки, що відрізняється значеннями зарядового квантового числа q або інших квантових чисел у випадку нейтральних частинок (якщо частинка і античастинка не є тотожними). Більш детально ми познайомимося з виглядом оператора C при вивченні конкретних полів (див. розділ II).

2.3. Спеціальна унітарна група SU(n)

Розглянемо спершу групу U (n) – групу унітарних комплексних $n \times n$ матриць, за допомогою яких n-компонентне поле $u(x) = \left\{u_j(x)\right\}_{i=1}^{i=n}$ перетворюється за законом

$$u(x) \to u'(x) = Vu(x). \tag{2.4}$$

З властивості унітарності $V^+V = I$ виходить, що $|\det V| = 1$, а це, в свою чергу, дозволяє представити V у вигляді

$$V = e^{ig}U, \quad UU^+ = 1 \quad \text{і} \quad \det U = 1. \tag{2.5}$$

Це означає, що з групи $U(n)$ можна виділити підгрупу унітарних, унімодулярних ($\det U = 1$) матриць, яка носить назву *спеціальної унітарної групи* SU (n), причому

$$U(n) = U(1) \otimes \mathrm{SU}(n).$$

Число незалежних параметрів, за допомогою яких задається ця група, дорівнює n^2-1. Дійсно, кожна $n \times n$ матриця має n^2 комплексних або $2n^2$ дійсних параметрів. Умова унітарності дає n^2 рівнянь, а умова унімодулярності $\det U = 1$ — ще одну умову. Отже, число незалежних параметрів буде $2n^2-n^2-1 = n^2-1$. Тому відповідна алгебра Лі групи SU (n) містить у собі n^2-1 генераторів. Детальний аналіз цих груп та їх представлень можна знайти у монографіях [58,91]. Тут ми наведемо лише деякі найбільш загальні факти, які важливі при побудові теорії елементарних частинок.

У зв'язку з застосуванням груп внутрішніх симетрій до полів різного виду, тобто скалярних, векторних, спінорних тощо, необхідно зробити важливе технічне зауваження.

Зауваження 2.2. *Компонента $u_j(x)$ поля $u(x)$ може сама мати складну багатокомпонентну структуру. Наприклад, якщо $u_j(x)$ описує скалярне поле, то це є простою функцією, якщо ж $u_j(x)$ описує векторне поле, то*

$$u_j(x) = \{u_{j,\mu}\}_{\mu=0}^{3}.$$

У випадку, коли $u_j(x)$ описують ферміонні поля, вони є або 2-компонентними, або 4-компонентними спінорами. Це означає, що матриці V і матриці γ (див. далі § 5) будуть діяти за різними групами індексів.

2.3.1. SU(2) – симетрія

При вивченні зарядової незалежності ядерних сил ще В. Гейзенберг помітив, що протон і нейтрон можна вважати однією частинкою – нуклоном, яка може перебувати у двох станах (у стані протона або у стані нейтрона). Щоб розрізнити ці два стани, було введено поняття ізотопічного спіну. Хвильова функція нуклона двокомпонентна:

$$\Psi_N(x) = \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Будь-яка функція типу (2.6) може бути записана як суперпозиція чистих станів протона і нейтрона:

$$\Psi_N(x) = c_1\Psi_p(x) + x_2\Psi_n(x),$$

$$\Psi_p(x) = \begin{pmatrix} \Psi_p(x) \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Причому дві такі довільні суперпозиції пов'язані між собою за допомогою деякої унітарної матриці V з $\det V = 1$.

$$\Psi'_N(x) = V\Psi_N(x). \tag{2.7}$$

Сукупність матриць V можна трактувати як представлення групи SU (2), розмірність якого збігається з розмірністю самої групи (тобто фундаментальне представлення). Відомо, що у цьому випадку генераторами відповідної групи Лі є матриці $1/2\sigma_k$, де σ_k, $k = 1, 2, 3$ матриці Паулі (1.25), тобто

$$V = V(g) = e^{\frac{1}{2}ig_k\sigma_k}. \tag{2.8}$$

Матриці σ_k задовольняють співвідношення

$$[\sigma_j, \sigma_k]_- = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l, \tag{2.9}$$

де ε_{jkl} – структурні константи групи SU (2), ε_{jkl} — повністю антисиметричний тензор з $\varepsilon_{123} = 1$.

У загальному випадку розмірність представлення можна визначити через величину вищезгаданого *ізотопічного спіну* J:

$$n = 2J + 1.$$

Величина $J(J + 1)$ є власним значенням квадрата вектора ізоспіну $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$, де J_1, J_2, J_3 – генератори відповідного представлення, а J може приймати цілі або напівцілі значення, тобто аналогічно до вектора звичайного оператора спіну. Проекція ізоспіну J_3 змінюється в межах $-J \leq J_3 \leq J$ і приймає

$n = 2J + 1$ значень, тобто збігається з розмірністю мультиплету. Генератори відповідного представлення задовольняють ті самі співвідношення (2.9), а відповідне перетворення хвильових функцій набуває вигляду:

$$\Psi' = e^{\frac{1}{2}i\mathbf{g}\cdot\mathbf{J}}\Psi.$$

Отже, дублету нуклона відповідає $J = 1/2$. Крім дублета нуклона, двовимірні представлення групи SU (2) описують дублети $\Xi = (\Xi^0,\ \Xi^-)$-баріони і $\mathbf{K} = (K^+,\ K^0)$, $\mathbf{K} = (K^-,\ K^0)$-мезони. Для того, щоб розрізняти ці дублети Гелл-Манном і Нішіджимою був уведений гіперзаряд Y для нуклона $Y = 1$ (для Ξ-баріона $Y = -1$). Причому електричний заряд у дублеті розраховується за формулою

$$Q = J_3 + \frac{1}{2}Y.$$

Крім 2-вимірних представлень групи SU(2), можна реалізувати тривіальне 1-вимірне представлення, що описує ізосинглети. Цим представленням описують Λ і Σ^--баріони та η-мезон. Крім того, можна розглянути представлення вищих розмірностей, якими, наприклад, описують триплети (3-вимірне представлення), квартети і т.п. Прикладом триплета є триплет піонів π^+, π^0, π^-.

Мультиплети, що складаються з античастинок, перетворюються за спряженим представленням групи SU (2). Ці представлення унітарно еквівалентні. Якщо матриці представлень є дійсними, то відповідні мультиплети є *самоспряженими*. Це означає, що частинки і античастинки входять в один мультиплет.

Більш детально див. [58].

2.3.2. SU(3) – симетрія

Існування дублетів, які мають однакове значення ізоспіну і відрізняються величиною деякого стороннього (з точки зору SU(2)) квантового числа Y (гіперзаряд), вказує на те, що SU(2) симетрія є досить вузькою і на те, що повинна існувати більш широка внутрішня симетрія, у яку вказані дублети входять як складові. Ізоспінова група повинна бути підгрупою нової групи симетрій. Така симетрія була знайдена Гелл-Манном і Неєманом у 1961 році [24,56,127]. Вона описується групою SU(3)–групою унітарних, унімодулярних 3×3-матриць. Вісім її генераторів задовольняють комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &[\lambda_j, \lambda_k]_- = 2if_{jkl}\lambda_l, \\ &j, k, l, = \overline{1, 8}, \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

де f_{jkl} — структурні константи, антисиметричні за індексами j, k, l. Вони приймають такі значення:

$$f_{123} = 1,$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Структурні константи, що відповідають іншим значенням індексів тотожно рівні нулю. Для повноти опису наведемо також вигляд матриць λ_j:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Генератори представлення можна вибрати пропорційні генераторам самої групи, тобто

$$T_j = \frac{1}{2}\lambda_i, \quad [T_j, T_k]_- = i f_{jkl} T_l. \tag{2.11}$$

Вони діють у просторі 3-компонентних спінорів

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \\ \Psi_k \end{pmatrix} \equiv \{\Psi_i\}_{i=1}^3.$$

Порівняно з (2.6) спінор Ψ має три компоненти, тобто SU (3)-триплет об'єднує ізодублет Ψ_1, Ψ_2 і ізосинглет Ψ_3.

У теорії SU(3) з генераторами представлення можна пов'язати не тільки компоненти ізоспіну, а й гіперзаряд Y. Виявляється, що завжди можна вибрати базис таким чином, щоб перші три генератори F_j $(j = 1, 2, 3)$ збігалися з компонентами ізоспіну J_j, а гіперзаряд Y був пропорційний генератору F_3. Електричний заряд кварків

$$Q = J_3 + \frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}\left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right)$$

приймає дробові значення.

Для побудови незвідних представлень вищих розмірностей треба розглянути функції — спінори (або функції-тензори) вищих рангів

$$\Psi = \left(\Psi^{j_1,\ldots,j_q}_{k_1,\ldots,k_p}\right). \tag{2.12}$$

У загальному випадку функції (2.12) будуть описувати звідне представлення групи SU(3). Для того, щоб виключити представлення нижчої розмірності, треба накласти на функції (2.12) деякі додаткові умови. Незвідне представлення,

за яким перетворюються функції (2.12) (позначаються $D(p,q)$), має розмірність (тобто число незалежних компонент спінора (2.12))

$$n = n(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2).$$

Це число характеризує число частинок у мультиплеті, що описується представленням $D(p,q)$. Найбільш прості мультиплети $n(0,0) = 1$,

$$n(0,1) = n(1,0) = 3; \quad n(2,0) = n(0,2) = 6; \quad n(1,1) = 8;$$

$$n(3,0) = n(0,3) = 10$$

і т.д. Але пізніше з'ясувалось, що крім синглета резонанси заповнюють тільки октет 8 (мезони і баріони) та декуплети 10 і 10^* (баріони). У зв'язку з особливим статусом октету, кажуть, що природа еволюціонує восьмирічним шляхом [127]. Треба зауважити, що SU(3) симетрія є досить наближеною, і розподіл частинок за мультиплетами може не відповідати ситуації, що реалізується у природі. Детальний вигляд теорії і застосувань SU(3) симетрії можна знайти в оглядовій праці [55].

Наступним узагальненням є вищі SU(N)-симетрії. Група SU (N) описується (N^2-1)-незалежними параметрами і має (N^2-1)-генератор, які задовольняють таким самим співвідношенням (2.10) тільки зі своїми структурними константами f_{jkl}.

Генераторами представлень цієї групи є $M \times M$ $(M > N)$ матриці, які можна задати співвідношеннями (2.11).

SU(N)-симетрії привели до значних успіхів у вивченні і класифікації частинок і навіть до передбачення деяких нових частинок. Крім того, розширення групи симетрій приводить до майже непереборних труднощів, пов'язаних із об'єднанням властивостей симетрії та релятивістської інваріантності (див., наприклад, [174], [153]).

Для більш детального аналізу груп симетрій і вивченню групових властивостей елементарних частинок ми радимо звернутись до праць [58], [98].

2.4. Групи локальних перетворень. Калібрувальна група

Перетворення внутрішніх симетрій (2.2)–(2.5) та (2.7) мають глобальний характер, тобто є однаковими в усіх точках простору-часу $\mathbb{M}$. Проте виходячи з елементарних фізичних міркувань, можна зрозуміти, що така інваріантність не може зберігатись при описі більшості реальних фізичних явищ. Дійсно, якщо помістити заряджені частинки у деяку область простору, то виникне електромагнітне поле. Це поле не буде однорідним, а отже, говорити про симетрію, пов'язану із законом збереження електричного заряду, є сенс тільки в околі

окремих точок простору-часу. Тобто вимога глобальної інваріантності (2.2) повинна бути замінена вимогою локальної інваріантності

$$\begin{aligned} u(x) &\to u'(x) = e^{ig(x)q}u(x), \\ \overset{*}{u}(x) &\to \overset{*}{u}'(x) = e^{-ig(x)q}\overset{*}{u}(x) \end{aligned} \tag{2.13}$$

або у випадку неабелевих перетворень (2.4), (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} u(x) &\to u'(x) = e^{\frac{1}{2}ig_k(x)\sigma_k}u(x), \\ \overset{*}{u}(x) &\to \overset{*}{u}'(x) = e^{-\frac{1}{2}ig_k(x)\sigma_k}\overset{*}{u}(x), \end{aligned} \tag{2.14}$$

де σ_k – матриці Паулі (константу 1/2 виділяють, щоб виразити генератори через матриці Паулі). Перетворення (2.13),(2.14) називаються *локальними калібрувальними перетвореннями 1-го роду.*

Зрозуміло, що перетворення (2.13),(2.14) так само як і перетворення (2.2), (2.7),(2.8), будуть зберігати інваріантними комбінації полів $\overset{*}{u}\,u$, але порушуватимуть симетрію усього лагранжиану, бо він обов'язково містить комбінації з похідними типу $\partial_\mu \overset{*}{u}(x)\,\partial^\mu u(x)$. Так само буде порушена інваріантність рівнянь руху (наприклад, рівняння Шредінгера для нерелятивістської частинки або релятивістських рівнянь, які ми будемо вивчати у наступних розділах). Щоб зберегти інваріантність теорії відносно локальних перетворень (2.13),(2.14), треба одразу розглядати взаємодію поля з деяким векторним калібрувальним полем $B_\mu(x)$, а саме—з електромагнітним полем $A_\mu(x)$ у випадку перетворень (2.13) або полями Янга-Міллса $W^k_\mu(x)$ у випадку перетворень (2.14).

При цьому поля $B_\mu(x)$ змінюються за допомогою градієнтних перетворень

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x' = x \\ B_\mu(x) &\longrightarrow B'_\mu(x) = B_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x), \end{aligned} \tag{2.15}$$

де $\chi(x)$—деяка диференційовна функція, яка пов'язана з перетвореннями (2.13),(2.14). Градієнтні перетворення (2.15) ще називають калібрувальними перетвореннями 2-го роду. Більш детально ці питання ми розглянемо у розділі III.

На завершення цього розділу опишемо коротко структуру *калібрувальної групи*, яка лежить в основі побудови теорії взаємодії калібрувальних полів з полями матерії.

Калібрувальною групою будемо називати прямий добуток груп G_x, що діють у кожній точці x простору Мінковського $\mathbb{M}$:

$$G = \bigotimes_{x\in\mathbb{M}} G_x. \tag{2.16}$$

Отже, кожний елемент S групи G є функцією на $\mathbb{M}$ і приймає значення в G_x. У побудові моделей взаємодії елементарних частинок основну роль відіграють такі конструкції лагранжианів взаємодії, що грунтуються на використанні в якості групи G_x згадуваної у попередньому підрозділі групи $\mathrm{SU}(N)$, $N = 1, 2, \ldots$.

Найбільш поширеним (з практичної точки зору) представленням групи $\mathrm{SU}(N)$ є *фундаментальне представлення*, яке може бути реалізоване у просторі полів, що мають N-компонент. Такі поля можна записати у вигляді стовпчика

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Треба, однак, зауважити, що самі компоненти ψ^i, $i = \overline{1, N}$ теж можуть бути багатокомпонентними функціями, на яких може реалізовуватись представлення інших груп. Саме таку ситуацію ми будемо розглядати в теорії взаємодіючих калібрувальних полів з полями матерії, які представляють поля різного роду кварків. У цьому випадку дія групи $\mathrm{SU}(N)$ буде здійснюватись по верхніх індексах, а дія групи Лоренца – по нижніх ψ^i_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. За означенням дія елемента групи $S \in G_x$ буде задаватись формулою

$$\psi(x) \to (S\psi)(x), \quad S^+S = SS^+ = \mathbb{1}, \quad \det S = 1. \tag{2.18}$$

$N \times N$-матриця $S = S_\omega(x)$ для кожного $x \in \mathbb{M}$ описується (N^2-1)-незалежними параметрами $\omega^a(x)$, $a = \overline{1, N^2-1}$, $N \geqslant 2$ і може бути представлена у вигляді

$$S_\omega(x) = e^{i\omega^a(x)T^a}, \tag{2.19}$$

де T^a, $a = \overline{1, N^2-1}$ називають генераторами групи. У випадку $N = 1$ параметр $\omega^a(x) = \omega(x) = q \cdot g(x)$ є дійсною функцією, а $T^a \equiv \mathbb{1}$.

Генератори T^a представляються числовими ермітовими матрицями і задовольняють такі співвідношення:

$$[T^a, T^b]_- = if^{abc}T^c, \tag{2.20}$$

$$Tr(T^a) = 0, \quad Tr(T^aT^b) = 2\delta^{ab}. \tag{2.21}$$

Вибір останнього сліду є довільним і фіксує набір T^a, $a = 1, \ldots, N^2-1$ як базис у відповідній алгебрі Лі. При такому виборі структурні константи алгебри Лі

$$f^{abc} = \frac{1}{2i}Tr([T^a, T^b]_-T^c) \tag{2.22}$$

і є дійсними, антисиметричними за кожною парою індексів. Структурні константи задовольняють співвідношення (задача 2.1)

$$f^{abd}f^{dce} + f^{cad}f^{dbe} + f^{bcd}f^{dae} = 0, \tag{2.23}$$

яке є наслідком (2.20) і тотожності Якобі

$$[[T^a, T^b]_-, T^c]_- + [[T^c, T^a]_-, T^b]_- + [[T^b, T^c]_-, T^a]_- = 0. \tag{2.24}$$

Співвідношення (2.23) збігається з (2.20), якщо вибрати матриці T^a у вигляді:

$$(T^a)^{bc} = -if^{abc}. \tag{2.25}$$

Отже, у цьому випадку матриці (2.25) задають інше представлення групи SU(N), розмірність якого збігається з числом генераторів, тобто дорівнює $N^2 - 1$. Таке представлення називають *приєднаним*, де матриці $S_\omega(x)$ є дійсними і ортогональними (задача 2.2). Тому у приєднаному представленні вектори, на які діють матриці групи, можна записати у вигляді дійсного вектора-стовпчика $\mathbf{B}_\mu(x) = \{B^a_\mu(x)\}$, $a = 1, \ldots, N^2 - 1$. Тоді дія генераторів (2.25) на вектор (за компонентами a) $\mathbf{B}_\mu(x)$ буде задаватися формулою

$$(T^a\mathbf{B}_\mu)^b(x) = -if^{abc}B^c_\mu(x). \tag{2.26}$$

Закон перетворення вектора $\mathbf{B}_\mu(x)$ можна записати мовою дії елементів групи $S_\omega(x)$ на матриці вигляду

$$\mathscr{A}_\mu(x) = B^a_\mu(x)T^a. \tag{2.27}$$

Тоді (2.26) буде еквівалентне дії генератора T^a на матрицю $\mathscr{A}_\mu(x)$ за правилом

$$T^a \circ \mathscr{A}_\mu(x) := (T^a\mathbf{B}_\mu)^b(x)T^b,$$

а перетворення

$$\mathscr{A}_\mu(x) \to \mathscr{A}^\omega_\mu(x) = S_\omega(x)\mathscr{A}_\mu(x)S^{-1}_\omega(x) \tag{2.28}$$

задає приєднане представлення групи $G_x \equiv SU(N)$ на об'єктах (матрицях) $\mathscr{A}_\mu(x)$ (задача 2.3).

Для того, щоб розвинути цей формалізм для застосування в теорії взаємодіючих полів, розглянемо спершу найбільш простий випадок —групу SU(1) $\equiv$ $U(1)$. Тоді елементи групи будуть простими функціями-множниками, що змінюють фазу функції $\psi(x)$ (див. (2.13)).

У наступному розділі, при введенні взаємодії електромагнітного поля з зарядженими частинками, ми встановимо, що квантова (або класична) електродинаміка (КЕД) є інваріантною теорією відносно градієнтних перетворень 1-го роду (2.13) з $q = -e$ і одночасно перетворень 4-векторного потенціалу $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu g(x). \tag{2.29}$$

Формули (2.13), (2.29) можна розглядати як реалізацію представлення групи $U(1)$ на просторі полів $\{\psi(x), A_\mu(x)\}$. Тоді узагальнення цієї ситуації на довільну калібрувальну групу буде задаватись перетвореннями (задача 2.4):

$$\psi(x) \to \psi^\omega(x) = S_\omega(x)\psi(x), \tag{2.30}$$

$$\mathscr{A}_\mu(x) \to \mathscr{A}^\omega_\mu(x) = S_\omega(x)\mathscr{A}_\mu(x)S^{-1}_\omega(x) - i\lambda(\partial_\mu S_\omega(x))S^{-1}_\omega(x), \tag{2.31}$$

де λ– довільна стала. У випадку КЕД треба прирівняти $\mathscr{A}_\mu(x) \equiv A_\mu(x)$, $\omega(x) = -eg(x)$ і $\lambda = 1/e$.

Формули (2.28), (2.30)-(2.31) не обов'язково пов'язувати саме з приєднаним представленням калібрувальної групи (2.16). Їх можна розглядати як реалізацію довільного представлення на об'єктах $\{\psi(x), \mathscr{A}_\mu(x)\}$, де $\mathscr{A}_\mu(x)$ виражаються через калібрувальні поля співвідношеннями (2.27), а ψ має вигляд стовпчика (2.17) з числом компонент, що відповідає розмірності представлення (для фундаментального представлення це число дорівнює N, тобто збігається з розмірністю групи).

Користуючись формулою (2.31) і властивостями генераторів (2.20),(2.21), реалізацію довільного представлення калібрувальної групи можна записати безпосередньо на просторі полів $\{\psi(x), B^a_\mu(x)\}$. Для цього подіємо генератором T^a на обидві частини рівняння (2.31) і візьмемо операцію сліду Tr. Тоді, враховуючи (2.19) і властивість (2.21) отримаємо наступний закон перетворення:

$$B^a_\mu(x) \to (B^\omega)^a_\mu(x) = \Omega^{ab}(x)B^b_\mu(x) + \lambda\partial_\mu\omega^a(x), \tag{2.32}$$

де

$$\Omega^{ab}(x) = \frac{1}{2} \quad Tr\big(T^a S_\omega(x) T^b S^{-1}_\omega(x)\big). \tag{2.33}$$

Операцію сліду у правій частині (2.33) можна обрахувати за допомогою формули (див., наприклад, [51], Гл.5, п.5.9, задача 7):

$$e^{-X}Ye^X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{YX^n\}}{n!}, \tag{2.34}$$

де операція $\{\cdots\}$ визначається на алгебрі Лі за допомогою комутаторів

$$\{YX^n\} := [...[Y, X]_-, ..., X]_-. \tag{2.35}$$

Підставимо у формули(2.34),(2.35) $X = i\omega^c(x)T^c$, а $Y = T^a$. Подіємо на отриману рівність генератором T^b справа і застосуємо операцію сліду до обох частин. Тоді, враховуючи (2.21), отримаємо наступний ряд:

$$\Omega^{ab}(x) = \delta^{ab} + i\widetilde{\omega}^{ab} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \widetilde{\omega}^{ac_1}\widetilde{\omega}^{c_1c_2}\cdots\widetilde{\omega}^{c_{n-1}b}, \tag{2.36}$$

де

$$\widetilde{\omega}^{ab} := -if^{abc}\omega^c(x). \tag{2.37}$$

Внаслідок антисиметричності структурних констант f^{abc} матриця $\widetilde{\omega}$ є завжди $(N^2-1 \times N^2-1)$–вимірною антисиметричною матрицею, незалежно від розмірності представлення, тобто розмірності матриці $S_\omega(x)$. Отже

$$\widetilde{\omega}^{ab} = -\widetilde{\omega}^{ba} \quad \text{і} \quad \widetilde{Tr}\,\widetilde{\omega} = 0, \tag{2.38}$$

а матриця повороту у просторі калібрувальних полів

$$\Omega(x) = e^{i\widetilde{\omega}} \quad \text{і} \quad Det\ \Omega(x) = 1. \tag{2.39}$$

Остання рівність є наслідком відомої формули

$$Det\ \Omega(x) = \exp\left[\widetilde{Tr} \ln \Omega(x)\right] =$$

$$= \exp\left[i\widetilde{Tr}\ \widetilde{\omega}(x)\right] = e^0 = 1$$

і формули (2.38), а знак $\widetilde{Tr}$ означає, що операція сліду виконується за індексами $a, b, c, ..$, що пробігають значення від 1 до $N^2 - 1$. Отже, остаточний вигляд представлення калібрувальної групи у просторі полів

$$\left\{\psi(x) = \{\psi^i_\alpha(x)\},\ \mathbf{B}_\mu = \{B^a_\mu\}\right\}$$

задається формулами (2.30), (2.32) з матрицями (2.19)–(2.22), (2.37)–(2.39).

На завершення зауважимо, що з визначення (2.37) і формули (2.26) видно, що у приєднаному представленні

$$\Omega(x) \equiv S_\omega(x). \tag{2.40}$$

Задачі до розділу I

Задача 1.1. Довести, що з умов 1) $(x,y)_{\mathbb{M}}=0$ та 2) $x^2>0$ випливає, що $y^2<0$.

Задача 1.2. Знайти групу однорідних перетворень Лоренца для 2-вимірного простору Мінковського (тобто $\mu,\nu,\alpha,\ \beta\in\{0,1\}$), що відповідає фізичній ситуації, коли система координат $\{x'\}$ рухається вздовж осі x^1 нерухомої системи $\{x\}$. Тобто $x'^{\mu}=x^{\mu}$ для $\mu=2,3$. Скільки параметрів має ця група? Записати перетворення через відносну швидкість двох систем відліку v або параметр $\beta=\dfrac{v}{c}$.

Задача 1.3. Обрахувати генератори лоренцових поворотів у шести площинах $(x^{\mu}x^{\nu})$.

Задача 1.4. Довести, що однорідному перетворенню Лоренца $x'\to\Lambda x$ відповідає перетворення коваріантного 4-вектора $V^{\mu}(x)$ у вигляді

$$V^{\mu}(x)\to V'^{\mu}(x')=\Lambda^{\mu}_{\nu}V^{\nu}(x).$$

Задача 2.1. Довести, що структурні константи (2.22) задовольняють співвідношенню (2.23).

Задача 2.2. Показати, що матриці $S_{\omega}(x)$, генератори яких діють згідно формули (2.26) є дійсними і задовольняють співвідношеннями (2.18).

Задача 2.3. Показати, що формула (2.31) задає представлення групи G_x на матрицях $\mathscr{A}_{\mu}(x)$.

Задача 2.4. Показати, що перетворення (2.30) утворюють групу.

Розділ II. Класична теорія вільних полів

§ 3. Лагранжів та гамільтонів формалізм класичної теорії поля

Для побудови теорії класичних полів скористаємося лагранжевим підходом, оскільки саме формалізм теорії Лагранжа є найбільш зручний для побудови релятивістської теорії внаслідок явної коваріантності. Гамільтонів формалізм (або формалізм канонічних змінних) є зручним для встановлення аналогій між класичною і квантовою теоріями. З точки зору загальної теорії відносності цей формалізм на перший погляд не є інваріантним відносно перетворень Лоренца, оскільки змінна часу $t = x^0$ має виділений характер. Але ця характерна риса формалізму фактично означає, що фіксується система відліку, пов'язана з часовою змінною. У такому підході релятивістська інваріантність є прихованою, а її перевірка—окремою (інколи досить нетривіальною) задачею. Зауважимо також, що усі виклади цього параграфа є справедливими не тільки для вільних полів, а й для класичних взаємодіючих полів.

Побудова класичної теорії еволюції полів, які в межах корпоскулярно-хвильового дуалізму пов'язані з відповідними елементарними частинками, опирається на добре розвинений апарат класичної механіки. Для повноти логічних викладів коротко нагадаємо читачеві положення класичної механіки, які будемо використовувати при побудові теорії полів.

3.1. Варіаційний принцип і канонічний формалізм класичної механіки

3.1.1. Рівняння Лагранжа

Якщо механічна система складається з N матеріальних точок, що рухаються і взаємодіють у просторі $\mathbb{R}^s$, то її стан у момент часу t повністю визначається сукупністю координат і швидкостей

$$\mathbf{r}_i(t), \quad \dot{\mathbf{r}}_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \tag{3.1}$$

Проте для більшості задач класичної механіки зручно перейти від декартових координат (3.1) до *узагальнених координат* q_i, $q_i \in \mathbb{R}^1$ і *узагальнених швидкостей* $\dot{q}_i(t)$, вибір яких залежить від конкретної задачі (наприклад сферичні або циліндричні координати). Очевидно, що $q_i = q_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$, $i = \overline{1, n}$ $(n \leqslant sN)$. Число $n < sN$ буде у тому випадку, коли в системі будуть присутні додаткові *зв'язки*, які можна задати відповідними рівняннями:

$$\varphi_l(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad l = \overline{1, m}. \tag{3.2}$$

Тоді $n = sN - m$. Далі будемо розглядати узагальнені координати q_i, $i = \overline{1, n}$, як незалежні змінні, якщо в системі відсутні зв'язки, а у випадку наявності зв'язків записувати рівняння (3.2) у термінах координат q_i.

Згідно з законом Ньютона рух системи N матеріальних точок визначається системою sN рівнянь

$$\frac{d}{dt}(m_i r_i^{(\alpha)}) \; + \; \frac{\partial U}{\partial r_i^{(\alpha)}} \; = \; 0, \; i = \overline{1, N}, \; \alpha = \overline{1, s},$$

де m_i–маси частинок, а U–потенціальна енергія їх взаємодії. Перевагою узагальнених координат q_i є та обставина, що у більшості випадків зв'язки (3.2) враховуються самим вибором цих координат. Це значно спрощує побудову розв'язку.

Лагранжів формалізм класичної механіки є більш загальним. Він дозволяє глибше дослідити ряд важливих задач. Для скінченної механічної системи, що складається з N-матеріальних точкових частинок, визначають функцію Лагранжа

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i - U(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - U_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L_i, \tag{3.3}$$

де U_i і L_i—потенціальна енергія та функція Лагранжа, що припадає на i-ту частинку. За варіаційним принципом або *принципом найменшої дії Гамільтона* характер руху ньютонівської потенціальної системи матеріальних точок визначається наступною теоремою.

Теорема 3.1 [2]. *Рух механічної системи у проміжку часу* $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ *збігається з екстремалями функціоналу дії*

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt, \tag{3.4}$$

де $L(t) = T - U$*—функція Лагранжа (*T*—кінетична енергія системи,* U*—потенціальна енергія).*

Наслідок. Якщо виразити L через узагальнені координати q_i та узагальнені швидкості $\dot{q}_i$, то з принципу стаціонарної дії

$$\delta\mathcal{A} = 0 \tag{3.5}$$

можна отримати систему диференціальних рівнянь (рівняння Лагранжа):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.6}$$

які і визначають екстремалі $q_i(t)$ дії (3.4).

Зауваження 3.1. *Тут і далі розглядаються системи, лагранжіани яких явно від часу не залежать.*

3.1.2. Канонічні змінні. Рівняння Гамільтона

У рамках гамільтонового формалізму разом із узагальненими координатами q_i вводяться *узагальнені імпульси* p_i, що визначаються формулою

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.7}$$

Гамільтоніан класичної системи є перетворенням Лежандра (відносно змінних $\dot{q}_i(t)$) функції Лагранжа, що розглядається як функція від узагальнених координат q_i та узагальнених швидкостей $\dot{q}_i$ (див. детальніше [2, §14]):

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q}). \tag{3.8}$$

Система рівнянь Лагранжа (3.6) еквівалентна системі $2n$ рівнянь Гамільтона (задача 3.1)

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Рівняння (3.9) називають *канонічними рівняннями руху*, а множину $\{q_i, p_i\}_{i=1}^n$ – канонічно спряженими змінними.

Перетворення координат, внаслідок якого для нових змінних

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i'(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t), \\ p_i' &= p_i'(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t), \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

зберігається форма рівнянь Гамільтона (3.9), називають *канонічними перетвореннями.*

3.1.3. Дужки Пуассона. Інтеграли руху

Надзвичайно важливе значення в класичній механіці мають *дужки Пуассона*. Для пари динамічних характеристик системи $F = F(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ і $G = G(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ дужки Пуассона визначаються за формулою

$$\{F, G\}_P \equiv \{F, G\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \tag{3.11}$$

Легко побачити, що внаслідок канонічних рівнянь Гамільтона (3.9) повна похідна за часом динамічної величини F має вигляд

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}, \tag{3.12}$$

де H—гамільтоніан системи (3.9).

З виразу (3.12) випливає: якщо динамічна характеристика F явно не залежить від часу, то для того, щоб вона була *інтегралом руху*, досить, щоб її дужки Пуассона з гамільтоніаном перетворювалися в нуль.

Рівняння (3.12) описує еволюцію динамічної характеристики F. Наприклад, у випадку, коли динамічною характеристикою є узагальнені координати та імпульси, рівняння (3.12) будуть мати вигляд

$$\frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q} = \{q_i, H\}. \tag{3.13}$$

Легко побачити з визначення (3.11), що рівняння (3.13) збігаються із рівняннями (3.9) і безпосередньо випливають наступні властивості дужок Пуассона:

$$\begin{aligned} &\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad \text{звідки} \ \ \{F, F\} \equiv 0, \\ &\{F, G_1 + G_2\} = \{F, G_1\} + \{F, G_2\}, \\ &\{F, G_1 G_2\} = G_1\{F, G_2\} + \{F, G_1\} G_2, \end{aligned} \tag{3.14}$$

і, як наслідок, *тотожність Якобі* (задача 3.2)

$$\{G_1, \{G_2, G_3\}\} + \{G_2, \{G_3, G_1\}\} + \{G_3, \{G_1, G_2\}\} = 0. \tag{3.15}$$

Важливу роль у побудові квантової теорії будуть мати так звані *фундаментальні* дужки Пуассона між координатами q_i і імпульсами p_j:

$$\begin{aligned} &\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \\ &\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

де δ_{ij}—символ Кронекера.

У пп. 3.1.1–3.1.3 наведено основні положення класичної механіки систем з n ступенями вільності. Ці положення будуть відправною точкою для *первинного*

квантування, тобто побудови канонічного формалізму *квантової механіки* у випадку, коли в системі відсутні додаткові зв'язки (*constraints*). Проте для побудови квантової теорії калібрувальних полів цього буде недостатньо, оскільки в теорії з'являються додаткові рівняння, які, фактично, накладають жорсткі умови на польові функції. Тому у наступному підпункті ми коротко викладемо ідеологію канонічного формалізму для систем зі зв'язками, яку розвинув Дірак (див. лекції з квантової механіки (лекція 1) в кн. [31]).

3.1.4. Канонічний формалізм при наявності зв'язків

Розглянемо механічну систему, в якій $2n$ незалежних змінних q_i, p_i, $i = \overline{1,n}$ пов'язані m_1 співвідношеннями

$$\varphi_k(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) = 0, \quad k = \overline{1,m_1}. \tag{3.17}$$

Згідно з термінологією Дірака [31] такі співвідношення мають назву *первинних зв'язків* (primary constraints).

Гамільтоніан такої системи вже не буде однозначною функцією змінних q і p. Можна визначити більш загальний гамільтоніан

$$\widetilde{H} = H + \sum_{k=1}^{m_1} u_k\varphi_k, \tag{3.18}$$

де H—визначений виразом (3.8), u_k—довільні коефіцієнти, а φ_k—це функції узагальнених координат і узагальнених імпульсів, які знаходяться у лівій частині (3.17). У загальному випадку u_k повинні бути диференційовними функціями q_j і p_j.

Важливо зробити зауваження, що суть канонічного формалізму при наявності зв'язків (3.17) полягає в тому, що у рівнянні (3.18) і в усіх розрахунках, пов'язаних із гамільтоніаном $\widetilde{H}$, вважаємо усі q_i і p_i незалежними (тобто φ_k не перетворюються тотожно в нуль), а вже в остаточних формулах треба врахувати умови (3.17). Тому рівняння еволюції (3.12) для довільної динамічної характеристики G буде мати такий вигляд:

$$\frac{dG}{dt} = \{G,H\} + \sum_{k=1}^{m_1} u_k\{G,\varphi_k\}. \tag{3.19}$$

оскільки з попереднього зауваження випливає: не зважаючи на умови (3.17) може бути, що $\{G,u_k\} \neq 0$, але члени $\{G,u_k\}\varphi_k = 0$ унаслідок (3.17), навіть якщо u_k є функціями q_i, p_j.

Важливим питанням у такому формалізмі є питання *несуперечності* рівнянь еволюції і зв'язків (3.17). Очевидно: внаслідок того, що $\dot{\varphi}_k$ повинно бути тотожне нулю, покладаючи у виразі (3.19) $G = \varphi_j$, отримаємо умови несуперечності:

$$\{\varphi_j,H\} + \sum_{k=1}^{m_1} u_k\{\varphi_j,\varphi_k\} = 0, \quad j = \overline{1,m_1}. \tag{3.20}$$

Ці умови разом із рівняннями Лагранжа (3.6) накладають певні обмеження на вибір функції Лагранжа L.

Як правило (3.20) приводять до трьох видів співвідношень:

1) тотожності $0 = 0$;

2) нових рівнянь, які не містять у собі довільних коефіцієнтів u_k:

$$\chi_j(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = 0, \quad j = \overline{1, m_2}; \tag{3.21}$$

3) рівняння, що містять у собі коефіцієнти u_k.

Рівняння (3.21) називаються *вторинними зв'язками* (secondary constraints).

Далі з умовами (3.21) треба провести такі ж виклади, як і з (3.17). Тобто, вважаючи їх первинними, записати умову несуперечності, вимагаючи $\dot{\chi} = 0$ і знову виявити (якщо такі є) умови виду 2). Виявлені таким чином зв'язки (і первинні, і вторинні) будемо позначати через φ_j:

$$\varphi_j(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad m = m_1 + m_2 + \cdots \ . \tag{3.22}$$

Залишилося врахувати рівняння (3.20), що містять у собі невизначені коефіцієнти u_k. Розглядаючи ці рівняння відносно невідомих змінних u_k, завжди можна знайти їх розв'язок, який є функцією q_k, p_k, $k = \overline{1, n}$,

$$u_k = U_k = U_k(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n).$$

Він завжди повинен існувати, оскільки в іншому випадку це означало б несумісність вибраного лагранжіану з даним формалізмом. Цей розв'язок не є однозначний, оскільки до нього можна додати довільний розв'язок однорідної системи:

$$\sum_{k=1}^{m_i} V_k\{\varphi_j, \varphi_k\} = 0. \tag{3.23}$$

Тоді, позначивши усі незалежні розв'язки системи (3.23) V_{jk}, коефіцієнти u_k можна записати у вигляді

$$u_k = U_k + \sum_{j=1}^{m_k} c_j V_{jk}, \quad m_k < m, \tag{3.24}$$

де коефіцієнти c_j є довільними. Вони можуть залежати від часу. Отже, незважаючи на вимоги несуперечності, не можна позбутися довільності при визначенні динамічних характеристик. На перший погляд, ситуація досить дивна. Вважається, що стан системи повністю визначається змінними q і p. Якщо в початковий момент $t = 0$ однозначно визначили цей стан, задавши початкові значення q_0, p_0, то в наступні моменти часу $t > 0$ значення узагальнених координат і імпульсів визначаються неоднозначно через наявність довільних коефіцієнтів c_j. Проте насправді може існувати ціла множина значень $\{q, p\}$, які відповідають одному і тому самому стану, оскільки стан системи однозначно

визначається тільки величинами, які можна спостерігати в експерименті, тобто *спостережуваними величинами*. Така ситуація спостерігається в класичній електродинаміці, де узагальненими координатами є потенціали електричного і магнітного полів. Самі потенціали не є спостережуваними величинами і можуть змінювати свої значення, залишаючи значення напруженості полів незмінними. Саме значення напруженості електричного і магнітного полів визначають стан електромагнітного поля.

Отже, для заданого виду зв'язків і заданого лагранжіану, що не є суперечливими, побудувано рівняння еволюції (3.19) з коефіцієнтами u_k, що визначаються з виразу (3.24).

З точки зору переходу до квантових систем усі динамічні характеристики діляться на два типи.

Згідно з визначенням Дірака [31] віднесемо динамічну характеристику G до *першого роду*, якщо її дужки Пуассона з усіма φ_k рівні нулю:

$$\{G, \varphi_k\} = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

при виконанні рівностей (3.22). Тобто, дужки Пуассона повинні бути лінійною однорідною функцією зв'язків φ_j, $j = \overline{1, m}$:

$$\{\varphi_j, \varphi_k\} = \sum_{l=1}^{m} c_{jkl}\varphi_l. \tag{3.25}$$

Звичайно, можна допустити, що права частина є більш складною функцією зв'язків φ_l і стає нулем при $\varphi_l = 0$. Але тоді ситуація значно ускладнюється і потребує більш складного аналізу, який у кожному конкретному випадку зв'язків (3.22) вимагає окремого розгляду.

Усі інші динамічні характеристики відносяться до змінних *другого роду*.

Така сама класифікація відноситься і до самих зв'язків φ_k, $k = \overline{1, m}$, тобто ті з них, для яких дужка Пуассона з усіма останніми є нуль, належать до зв'язків першого роду, а ті, для яких дужки Пуассона, не рівні нулю хоча б із одним з інших зв'язків, є величинами другого роду.

Очевидно, що з умов несуперечності (3.20) випливає: $\widetilde{H}$ є завжди змінною першого роду, а гамільтоніан H–тільки тоді, коли усі зв'язки φ_j є змінними першого роду.

Отже, для зв'язків першого роду рівняння для динамічних характеристик першого роду не змінюється:

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = \{G, \widetilde{H}\}.$$

Це фактично означає, що в системах зі зв'язками першого роду за допомогою деякого канонічного перетворення можна усунути "зайві" змінні і розвинути гамільтонів формалізм із меншим числом незалежних узагальнених координат та імпульсів.

У випадку зв'язків другого роду Дірак запропонував замінити дужки Пуассона (3.11) іншими дужками:

$$\{F,G\}_D := \{F,G\} - \sum_{s,s'=1}^{S} \{F,\varphi_s\}(C^{-1})_{ss'}\{\varphi_{s'},G\}, \tag{3.26}$$

де $C = ((C_{ij}))$—матриця зв'язків другого роду. Вона будується за способом, що поданий нижче. Будемо вважати, що серед усіх зв'язків (3.22) перші S зв'язків є зв'язками другого роду, а останні $m-S$ є зв'язками першого роду. Тоді згідно з означенням

$$C_{ij} := \{\varphi_i,\varphi_j\}.$$

Унаслідок означення зв'язків другого роду $C_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$.

Виявляється (див. детальніше [31]), що число зв'язків другого роду завжди парне, а матриця C завжди має обернену, оскільки $\det C \neq 0$. Можна також перевірити (задача 3.3), що дужки Дірака (3.26) задовольняють таким самим властивостям (3.14),(3.15), що й дужки Пуассона. Крім того, з виразу (3.26) і того, що $\widetilde{H}$ є завжди змінною першого роду,

$$\{G,\widetilde{H}\}_D = \{G,\widetilde{H}\} - \sum_{s,s'=1}^{S} \{G,\varphi_s\}(C^{-1})_{ss'}\{\varphi_{s'},\widetilde{H}\} = \{G,\widetilde{H}\} \tag{3.27}$$

і

$$\{G,\varphi_j\}_D = \{G,\varphi_j\} - \sum_{s,s'=1}^{S} \{G,\varphi_s\}(C^{-1})_{ss'}C_{s'j} = 0 \tag{3.28}$$

для будь-якої динамічної характеристики G. Це означає, що рівняння еволюції динамічної змінної G не змінять свого виду, якщо замінити в них дужки Пуассона на дужки Дірака, а внаслідок рівняння (3.28)

$$\frac{dG}{dt} = \{G,\widetilde{H}\}_D = \{G,H\}_D.$$

Пізніше в роботі Маскава і Накаджіма [167] було показано: якщо в системі $\{q_j,p_j\}$, $j=\overline{1,n}$, є $2m$ зв'язків другого роду, то завжди можна за допомогою канонічних перетворень перейти до нових змінних:

$$\{Q_1,\ldots,Q_l,Q'_1,\ldots,Q'_m;\mathscr{P}_1,\ldots,\mathscr{P}_l,\mathscr{P}'_1,\ldots,\mathscr{P}'_m\},\ \ l+m=n, \tag{3.29}$$

таким чином, що нові зв'язки будуть мати вигляд:

$$Q'_j = \mathscr{P}'_j = 0, \quad j=\overline{1,m}.$$

У такій системі матрицю зв'язків легко побудувати, враховуючи, що

$$\{Q'_i,Q'_j\} = \{\mathscr{P}'_i,\mathscr{P}'_j\} = 0, \quad \{Q'_i,\mathscr{P}'_j\} = \delta_{ij}.$$

Тоді

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ -C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{0}$ і $\mathbb{1}$ відповідно нульова і одинична $m \times m$ матриці. Крім того,

$$\{G, Q'_j\} = -\frac{\partial G}{\partial \mathscr{P}'_j}, \quad \{G, \mathscr{P}'_j\} = \frac{\partial G}{\partial Q'_j}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тоді дужки Дірака для F і G у системі змінних (3.29) мають такий вигляд (треба врахувати, що $C^{-1} = -C$):

$$\begin{aligned} \{F, G\}_D &= \{F, G\} + \sum_{s=1}^{m} [\{F, Q'_s\}\{\mathscr{P}'_s, G\} - \{F, \mathscr{P}'_s\}\{\mathscr{P}'_s, G\}] = \\ &= \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial \mathscr{P}_j} - \frac{\partial G}{\partial Q_j} \frac{\partial F}{\partial \mathscr{P}_J} \right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Отже, права частина (3.30) збігається з дужками Пуассона в системі "урізаних" змінних:

$$\{Q_1, \ldots, Q_l, \mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_l\}.$$

Вище наведений формалізм буде використаний при квантуванні систем, у яких є додаткові зв'язки.

Більш детальний аналіз читач може знайти в працях [31,16].

3.2. Від класичної до квантової механіки. Первинне квантування

У цьому пункті спробуємо дуже стисло обґрунтувати перехід до нового формалізму, необхідність якого виникла ще на початку минулого сторіччя в результаті неспроможності пояснити багаточисленні явища мікросвіту в межах формалізму класичної механіки. Для ширших уявлень радимо читачу звернутися до книг із квантової механіки, наприклад, [46], [31], [97] та ін.

Звичайно, перехід до нового формалізму перш за все є наслідок інтуїції, яка ґрунтувалась на експериментальних явищах. Було, наприклад, помічено, що для атомарних систем деякі динамічні характеристики набувають дискретних значень. З математичної точки зору це означає, що ця динамічна характеристика не може бути звичайною функцією.

Такими об'єктами в математиці є *оператори*, які можуть мати дискретний спектр і діють у певному гільбертовому просторі, а тоді, очевидно, що їх власні функції повинні описувати стан тієї системи, одну з характеристик якої спостерігаємо у даному експерименті.

У зв'язку з такою ідеєю виникає природне питання: які ж оператори повинні відповідати динамічним характеристикам і перш за все канонічним змінним

p_j і q_j. Очевидно, що для цього треба звернутися до рівнянь руху (3.12), які є спільними для всіх динамічних характеристик, тобто треба побудувати квантовий аналог таких рівнянь. У класичному підході еволюцію кожної динамічної характеристики визначають дужки Пуассона, які мають загальні алгебраїчні властивості, що задаються рівняннями (3.14). Таким чином для побудови квантового рівняння треба знайти квантовий аналог дужок Пуассона, виходячи із найбільш загальних властивостей (3.14). Виявляється (радимо читачеві уважно прочитати розділ IV праці [31]) для операторів $\widehat{F}$ і $\widehat{G}$, що відповідають динамічним характеристикам F і G, квантові дужки Пуассона збігаються (з точністю до константи) з комутатором операторів $\widehat{F}$ і $\widehat{G}$, тобто

$$\widehat{\{F,G\}} = a[\widehat{F},\widehat{G}]_- = a(\widehat{F}\widehat{G} - \widehat{G}\widehat{F}), \tag{3.31}$$

де a – поки що не визначена константа.

Порівнюючи рівності (3.31) і (3.16), можемо визначити, які правила комутації повинні задовольняти фундаментальні величини—оператори канонічних змінних $\hat{p}_j$ і $\hat{q}_j$:

$$[\hat{q}_i,\hat{q}_j]_- = [\hat{p}_i,\hat{p}_j]_- = 0, \quad \hat{q}_i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{q}_i = \frac{1}{a}\delta_{ij}. \tag{3.32}$$

Для визначення явного вигляду операторів $\hat{q}_i$ і $\hat{p}_j$ можна, наприклад, скористатися гіпотезою корпускулярно-хвильового дуалізму, згідно з яким швидкість матеріальної частинки еквівалентна груповій швидкості хвильового пакета. Тоді для вільної нерелятивістської частинки хвиля $\Psi(\mathbf{r},t)$ може бути представлена у вигляді суперпозиції:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \int \widetilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} d\mathbf{p},$$

де енергія E та імпульс $\mathbf{p}$ частинки задовольняють відоме співвідношення:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \tag{3.33}$$

Можна переконатися, що завдяки цьому співвідношенню функція $\Psi(\mathbf{r},t)$ задовольняє наступне диференціальне рівняння:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\mathbf{r},t), \tag{3.34}$$

де $\boldsymbol{\Delta} = \nabla\cdot\nabla$—оператор Лапласа в $\mathbb{R}^s$.

Це означає, що класичне співвідношення (3.33) перетворюється в операторне:

$$\widehat{E}\Psi = \frac{1}{2m}\widehat{\mathbf{p}}^2\Psi.$$

Таким чином, оператору енергії вільної частинки $\widehat{H}_0 \equiv \widehat{E}$ і оператору імпульсу $\hat{p}$ можна зіставити величини

$$\widehat{E} = \widehat{H}_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{і} \quad \widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \tag{3.35}$$

Тепер легко перевірити, що операторне співвідношення (3.32) будуть задовольняти оператори $\hat{p}_i$ і $\hat{q}_j$, якщо оператори $\hat{q}_j$ визначити як оператори множення на компоненти вектора $\mathbf{r}$, а константу a вибрати у вигляді:

$$a = 1/i\hbar. \tag{3.36}$$

І, нарешті, треба зауважити, що ці оператори діють у гільбертовому просторі квадратично-інтегрованих функцій $L^2(\mathbb{R}^s, d\mathbf{r})$, який є простором станів для більшості задач квантової механіки.

Рівняння (3.34) називається *рівнянням Шредінгера* для вільної нерелятивістської частинки. Зауважимо також: вигляд операторів, що відповідають довільним динамічним характеристикам F, можна побудувати, використовуючи математичну теорію побудови функцій від операторів $\hat{p}_j$ та $\hat{q}_i$. Але через те, що оператори $\hat{p}_j$ і $\hat{q}_j$ не комутують між собою, така побудова є нетривіальною.

Аналогом класичного рівняння руху (3.12) для оператора, що відповідає довільній динамічній характеристиці F, буде *рівняння Гейзенберга* (для F, що явно не залежить від часу):

$$i\hbar\frac{d\widehat{F}}{dt} = [\widehat{F}, \widehat{H}]_-. \tag{3.37}$$

Наведений вище формалізм називають *квантуванням* (первинним, оскільки вторинне буде пов'язане з квантуванням хвильових функцій $\Psi(\mathbf{r}, t)$) класичної механічної системи.

На завершення цього пункту опишемо ситуацію, яка виникає при квантуванні класичних механічних систем, в яких існують додаткові зв'язки (3.22) між змінними p_j і q_j, $j = \overline{1,n}$.

Розглянемо спершу випадок, коли усі зв'язки (3.22) є зв'язками першого роду (див. п. 3.1.4). У квантовій теорії рівняння (3.22) треба замінити на операторні рівняння:

$$\widehat{\varphi}_j\Psi = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{3.38}$$

де $\hat{\varphi}_j$ є операторами, які діють на хвильову функцію стану. Отже, (3.38) є рівняннями для функції стану Ψ. З рівнянь (3.38) легко також отримати рівняння

$$[\hat{\varphi}_j, \hat{\varphi}_k]_-\Psi = 0, \quad j,k = \overline{1,m}.$$

У випадку зв'язків першого роду це рівняння узгоджене з (3.38), оскільки внаслідок відповідності (3.31) і правила (3.25) комутатор $[\hat{\varphi}_j, \hat{\varphi}_k]_-$ є лінійною однорідною функцією величин $\hat{\varphi}_l$, $l = \overline{1,m}$, і завдяки (3.38) перетворює стан Ψ у

нуль. Таку саму несуперечливість ми повинні мати і з рівнянням (3.37). Для цього треба, щоб

$$\left[\widehat{\varphi}_j, \widehat{H}\right]_- \Psi = 0, \tag{3.39}$$

тобто комутатор $\hat{\varphi}_j$ з $\widehat{H}$ повинен бути лінійною однорідною функцією операторів $\hat{\varphi}_l$, $l = \overline{1,m}$, або ж такою, що перетворює в нуль стан Ψ, який є розв'язком (3.38). Тоді (3.39) не буде новим рівнянням для Ψ. Отже, у цьому випадку так само, як і у класичному контексті, гамільтоніан $\widetilde{H}$ може бути замінений на деякий оператор $\widehat{\widetilde{H}}$, що включає оператори $\hat{\varphi}_j$. Це, фактично, є наслідком інваріантності теорії відносно деяких перетворень, за допомогою яких можна зменшити число незалежних операторних змінних і повернутися до ситуації, яку розглядали перед цим.

Зовсім іншою є ситуація при квантуванні систем, в яких існують зв'язки другого роду. Щоб це побачити, розглянемо простий приклад (див. [31]) зв'язку:

$$q_1 = 0, \quad p_1 = 0.$$

Квантовий варіант такої ситуації означає, що розглядається стан системи Ψ, у якому

$$\hat{q}_1\Psi = 0 \quad \text{і} \quad \hat{p}_1\Psi = 0. \tag{3.40}$$

Але ці рівняння суперечать співвідношенням (3.32), згідно з якими

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1]_-\Psi = i\hbar\Psi, \tag{3.41}$$

оскільки внаслідок виразу (3.40) ліва частина рівняння (3.41) стає нулем і при $\Psi \neq 0$, а права тільки при $\Psi \equiv 0$. Проте в цій ситуації вихід дуже простий. Треба розглянути стани, що залежать тільки від змінних $q_2, \ldots, q_n$; $p_2, \ldots, p_n$ і застосувати аргументи, що були розглянуті вище. У випадку більш складних зв'язків, наприклад,

$$p_1 = 0, \quad q_1 = f(q_2, \ldots, q_n; p_2, \ldots, p_n),$$

Дірак запропонував замінити правило (3.31) на нове правило, згідно з яким комутатор повинен бути пропорційний новим дужкам (3.26) (дужкам Дірака):

$$\left[\widehat{F}, \widehat{G}\right]_- = \frac{1}{c}\widehat{\{F, G\}}_D. \tag{3.42}$$

Тоді, фактично, з формули (3.30) буде випливати, що комутаційні співвідношення розраховані за методикою Дірака (тобто за допомогою (3.42)) збігаються з комутаційними співвідношеннями, розрахованими за звичайною методикою (3.31) для нового скороченого числа незалежних змінних. Комутаційні співвідношення між змінними, що залишились у новому наборі і тими, які "випали" з нього, можна отримати, враховуючи рівняння для зв'язків. Ми розглянемо дію цього методу у розділі IV при квантуванні масивного векторного поля.

На завершення цього підрозділу треба зробити одне важливе зауваження.

Зауваження 3.2. *Ситуація з квантуванням значно ускладнюється, якщо зв'язки (3.22) виражаються нелінійними рівняннями відносно змінних q_j і p_j. У цьому випадку при визначенні операторів $\hat{\varphi}_j$ може з'явитись неоднозначність, що пов'язана з порядком, в якому треба розмістити оператори $\hat{p}$ і $\hat{q}$, оскільки вони не комутують між собою. Тоді у кожному конкретному випадку треба стежити за тим, щоб усі рівняння узгоджувалися одне з одним, тобто треба перевірити несуперечливість усіх додаткових умов із рівняннями руху.*

3.3. Загальні вимоги до лагранжіанів теорії поля

Для неперервної системи, якою є класичне поле, суму у виразі (3.3) треба замінити інтегралом

$$L = L(t) = L(x^0) := \int\limits_{\Lambda} d\mathbf{x}\ \mathscr{L}(x),$$

де $\mathscr{L}(x)$—це густина функції Лагранжа або лагранжіан, а $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$—об'єм системи, в якому розглядається взаємодія полів. Відповідний вираз дії на інтервалі часу $T = [t_0, t_1]$ має такий вигляд:

$$\mathcal{A} = \int\limits_{T} dx^0 L(x^0) = \int\limits_{\Delta} dx\ \mathscr{L}(x), \quad \Delta = \Lambda \times T \subset \mathbb{M}. \tag{3.43}$$

За аналогією до класичної механіки будемо вважати, що $\mathscr{L}(x)$ залежить тільки від значень полів $u_i(x)$ (як узагальнених координат) і їх перших похідних $\partial_\mu u_i(x) := \dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x^\mu}$ (як узагальнених „швидкостей") і не залежить від самих координат x.

Зауваження 3.1. *Одразу треба зауважити, що величини $\partial_\mu u_i(x)$, які названо узагальненими „швидкостями" (взявши це слово у лапки), є просто коваріантними похідними полів $u_i(x)$. Справжніми узагальненими швидкостями, що відповідають поняттям канонічного формалізму, є величини $\partial_0 u_i(x) \equiv \dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x^0}$. Але для того, щоб будувати з самого початку лоренц-інваріантну теорію, треба припустити, що лагранжіан залежить від $\partial_\mu u_i(x)$ з $\mu = 0, 1, 2, 3$.*

Крім того, ми будемо розглядати теорію, для якої залежність лагранжиіну від $u_i(x)$ і $\partial_\mu u_i(x)$ є локальною, тобто $\mathscr{L}(x)$ не залежить від полів та їх похідних, зосереджених в інших точках. Отже,

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(u_i(x), \partial_\mu u_i(x)). \tag{3.44}$$

Нелокальний лагранжіан у загальному вигляді можна представити у вигляді:

$$\mathscr{L}(x) = \int dy\, F(u_i(x), u_i(y), \partial_k u_i(x), \partial_k u_i(y)).$$

Відповідна теорія називається *нелокальною теорією поля*. Найбільш послідовний виклад цієї теорії можна знайти у працях [32,33].

Одним із найважливіших постулатів, що стосується властивостей лагранжіану, є його інваріантність відносно повної неоднорідної групи Лоренца. Це означає, що при перетворенні (1.20)

$$\mathscr{L}(x) \to \mathscr{L}'(x') = F(u_i'(x'), \partial_\mu' u_i'(x')) = F(u_i(x), \partial_\mu u_i(x)) = \mathscr{L}(x),$$

тобто перетворюється як скаляр.

І нарешті, знову звертаючись до класичної механіки, де лагранжіан є сумою кінетичної і потенціальної енергії, будемо вважати, що $\mathscr{L}(x)$ є дійсною функцією (а в квантовій теорії самоспряженим оператором). Це означає, що поля і їх похідні входять у лагранжіан тільки у вигляді білінійних комбінацій виду:

$$\overset{*}{u}_i(x)u_i(x); \quad \partial_\mu \overset{*}{u}_i(x)\partial^\mu u_i(x); \quad \gamma^\mu \partial_\mu \overset{*}{u}_i(x)u_i(x) + \overset{*}{\gamma}{}^\mu \overset{*}{u}_i(x)\partial_\mu u_i(x).$$

3.4. Рівняння Лагранжа–Ейлера

Будемо вважати, що, так само, як і в класичній механіці, в теорії поля існує принцип стаціонарної дії (3.4). Накладемо ще одну умову на функції поля, вважаючи, що варіації полів $\delta u_i(x)$ на межі 4-об'єму Δ зникають:

$$\delta u_i(x)|_{x\in\partial\Delta} = 0. \tag{3.45}$$

Умова (3.45) означає, що поле на межі $\partial\Delta$ області Δ приймає якесь стале значення. Природно, коли це поле просто зникає на $\partial\Delta$, оскільки Δ завжди дуже великий об'єм. Тоді кажуть, що поле задовольняє граничні умови Дирихле на межі області Δ. Підставимо у вираз (3.5) вигляд дії (3.43):

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= \int\limits_\Delta \delta\mathscr{L}(x)dx = \int\limits_\Delta dx\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i(x)}\delta u_i(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_i(x))}\delta(\partial_\mu u_i(x))\right) = \\ &= \int\limits_\Delta dx\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_i(x))}\right)\delta u_i(x) = 0.\end{aligned} \tag{3.46}$$

У другому доданку (3.46) змінений порядок дій δ з ∂_μ і проінтегровано частинами, використовуючи умову (3.45). Рівність нулю лівої частини (3.46) повинна виконуватись для довільного 4-об'єму Δ. Це означає, що

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_i(x))} = 0, \tag{3.47}$$

де $i = 1, 2, \ldots, N$, а N–це число компонент поля $u(x)$.

Ця система рівнянь для компоненти поля $u(x)$ називається рівняннями Лагранжа–Ейлера.

Внаслідок умов для лагранжіану, які були сформульовані в п. 3.3, система (3.47) є системою диференціальних рівнянь 1-го або 2-го порядку.

Зауваження 3.2. *Оскільки фізичні властивості системи визначаються значеннями дії, то лагранжіан $\mathscr{L}(x)$, який визначає дану дію формулою (3.43), не є однозначним. Дійсно, якщо вибрати*

$$\tilde{\mathscr{L}}(x) = \mathscr{L}(x) + \partial_\mu F^\mu(u_i(x), \partial_\nu u_i(x)),$$

то, враховуючи умову (3.45), принцип стаціонарної дії $\delta\tilde{A} = 0$ приводить до того ж самого рівняння (3.47), що й лагранжіан $\mathscr{L}(x)$.

3.5. Теорема Нетер і динамічні інваріанти

Так само, як і в класичній механіці, крім рівнянь руху, важливо знати інтеграли руху системи або так звані динамічні інваріанти. Вигляд цих інваріантів встановлює наступна теорема.

Теорема Нетер. *Кожній s-параметричній групі перетворень функцій поля (і координат), яка перетворює в нуль варіацію дії, відповідають s динамічних інваріантів.*

Доведення. Розглянемо деяку довільну s-параметричну групу Лі і запишемо інфінітезимальні (безмежно малі) перетворення цієї групи:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{3.48}$$

$$u_i(x) \to u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i(x). \tag{3.49}$$

Згідно із загальною теорією груп Лі ці безмежно малі перетворення виражаються через параметри групи ω^n, $n = \overline{1, s}$, (точніше, через їх безмежно малі варіації $\delta\omega^n$):

$$\delta x^\mu = \sum_{n=1}^{s} X^\mu_{(n)} \delta\omega^n, \tag{3.50}$$

$$\delta u_i(x) = \sum_{n=1}^{s} \Psi_{i,(n)} \delta\omega^n, \tag{3.51}$$

де $X^\mu_{(n)}$ та $\Psi_{i,(n)}$–деякі структурні константи, що залежать від групи, яка розглядається.

Перш ніж записати варіацію дії (3.43), обчислимо варіацію функцій поля, що враховує зміну її форми в тій самій точці:

$$\bar{\delta} u_i(x) = u'_i(x) - u_i(x) = u'_i(x') - u_i(x) -$$

$$-u'_i(x') + u'_i(x) \approx \delta u_i(x) - \partial_\mu u_i(x) \delta x^\mu. \tag{3.52}$$

Остання рівність записана з точністю до безмежно малих першого порядку, враховуючи, що $u_i'(x') - u_i'(x) \approx \partial_\mu u_i'(x)\delta x^\mu$, а $u_i'(x) = u_i(x) + \bar{\delta}u_i(x)$. Враховуючи тепер (3.50) і (3.51), остаточно маємо

$$\bar{\delta}u_i(x) = \sum_{n=1}^{s}\left(\Psi_{i,(n)} - \partial_\mu u_i(x) X^\mu_{(n)}\right)\delta\omega^n. \tag{3.53}$$

Повна варіація дії

$$\delta A = \int\limits_{\Delta'} \mathscr{L}'(x')dx' - \int\limits_{\Delta} \mathscr{L}(x)dx. \tag{3.54}$$

При перетворенні координат (3.48) $\Delta' \to \Delta$. Якобіан такого перетворення визначає перетворений елемент об'єму dx' з точністю до нескінченно малих першого порядку за формулою

$$dx' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}dx \simeq \left(1 + \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right)dx. \tag{3.55}$$

Тоді, враховуючи формулу (3.55), а також аналогічну їй–(3.52) для $\bar{\delta}\mathscr{L}(x)$, перетворимо (3.54) таким чином:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= \int\limits_{\Delta} dx\left[\delta\mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(x)\partial_\mu\delta x^\mu\right] = \int\limits_{\Delta} dx\left[\bar{\delta}\mathscr{L}(x) + \partial_\mu(\mathscr{L}(x)\delta x^\mu)\right] = \\ &= \int\limits_{\Delta} dx\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}\bar{\delta}u_i + \mathscr{L}(x)\delta x^\mu\right].\end{aligned}$$

В останній рівності використано вираз варіації $\bar{\delta}\mathscr{L}$ через $\bar{\delta}$–варіації полів і їх похідних, а також рівняння руху Лагранжа–Ейлера (3.47). Враховуючи (3.50) і (3.53), остаточно отримаємо:

$$\delta\mathcal{A} = -\sum_{n=1}^{s}\delta\omega^n \int\limits_{\Delta}\partial_\mu\theta^\mu_{(n)}(x)dx,$$

де

$$\theta^\mu_{(n)}(x) = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}\left(\Psi_{i,(n)} - \partial_\nu u_i(x)X^\nu_{(n)}\right) - \mathscr{L}(x)X^\mu_{(n)}. \tag{3.56}$$

За умови довільності 4-х об'єму Δ і параметрів $\delta\omega_n$ отримаємо рівняння неперервності:

$$\partial_\mu\theta^\mu_{(n)}(x) = 0. \tag{3.57}$$

Інтегруючи вираз (3.57) за гіперплощиною $x^0 = \text{const}$ і враховуючи припущення, що на межі просторово-подібної поверхні (тобто об'єму Λ) поле (а значить і $\theta^\mu_{(n)}$) перетворюються в нуль, отримаємо

$$J_{(n)} = \int d\mathbf{x}\,\theta^0_{(n)}(x) = \text{const}\,, \quad \text{n} = \overline{1,\text{s}}. \tag{3.58}$$

Отже, кожному неперервному s-параметричному перетворенню координат і функцій поля (3.48),(3.49) відповідає s інтегралів руху $J_{(n)}$. *Теорема доведена.* □

Зауваження 3.3. *Величини $\theta^{\mu}_{(n)}$ неоднозначні. До них можна додати вирази виду $\partial_\nu f^{\mu\nu}_{(n)}$ за умови, що $f^{\mu\nu}_{(n)} = -f^{\nu\mu}_{(n)}$. При цьому значення інтегралів (3.58) не зміниться.*

Зауваження 3.4. *Якщо розглядається комплексне поле $u_i(x)$, то в усіх формулах, де виконується сумування за компонентами поля (сума за i), треба розуміти сумування за всіма компонентами поля $u_i(x)$ і за всіма компонентами спряженого поля $\overset{*}{u}_i(x)$.*

Розглянемо тепер приклади основних груп, яким відповідають найбільш важливі інтеграли руху.

3.6. Вектор енергії-імпульсу

Розглянемо групу просторово-часових трансляцій уздовж осей x^μ. Тоді

$$\delta x^\mu = \delta\omega^\mu, \quad X^\mu_{(n)} = \delta^\mu_n, \quad \Psi_{i,(n)} = 0,$$

а вираз (3.56) буде мати вигляд

$$\theta^\mu_\nu(x) := T^\mu_\nu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_i(x))}\partial_\nu u_i(x) - \mathscr{L}(x)\delta^\mu_\nu, \tag{3.59}$$

або в контрваріантному вигляді

$$T^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha}T^\mu_\alpha = g^{\nu\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_i(x))}\partial_\alpha u_i(x) - g^{\mu\nu}\mathscr{L}(x). \tag{3.60}$$

Динамічним інваріантом є 4-вектор

$$P^\mu = \int d\mathbf{x}\, T^{\mu 0}(x). \tag{3.61}$$

Порівнюючи з відповідними виразами класичної механіки, легко бачити, що нульова компонента P^0 відповідає функції Гамільтона, тобто є виразом для енергії системи, а компоненти P^i, $i = 1, 2, 3$, вектору повного імпульсу. Тому, враховуючи коваріантність, 4-вектор P^μ називають 4-вектором енергії-імпульсу, а тензор $T^{\mu\nu}$—тензором енергії-імпульсу.

Зауважимо, що через неоднозначність структура тензора $T^{\mu\nu}$ може змінюватись. Але нас буде цікавити тільки вигляд вектора P^μ, який визначається однозначно.

3.7. Тензор моменту кількості руху і тензор спіну

Розглянемо безмежно малі 4-повороти:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + x_{\nu}\delta\omega^{\mu\nu}. \tag{3.62}$$

У цьому випадку параметрами $\omega^{\mu\nu}$ є кути безмежно малих поворотів у площинах $x^{\mu}x^{\nu}$. Тоді внаслідок антисиметричності $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ є тільки шість лінійно незалежних параметрів $\omega^{\mu\nu}$ $(\mu < \nu)$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Порівнюючи (3.50) і (3.62) та враховуючи антисиметрію величин $\omega^{\mu\nu}$, знайдемо вигляд структурних констант $X^{\mu}_{(n)} = X^{\mu}_{\sigma\nu}$, що входять в означення виразу для $\theta^{\mu}_{(n)} = \theta^{\mu}_{\sigma\nu}$:

$$\begin{aligned}\delta x^{\mu} &= \sum_{\sigma<\nu} X^{\mu}_{\sigma\nu}\delta\omega^{\sigma\nu} = x_{\nu}\delta\omega^{\mu\nu} = x_{\nu}\delta^{\mu}_{\sigma}\delta\omega^{\sigma\nu} = \\ &= \sum_{\sigma<\nu} x_{\nu}\delta^{\nu}_{\sigma}\delta\omega^{\sigma\nu} + \sum_{\sigma>\nu} x_{\nu}\delta^{\mu}_{\sigma}\delta\omega^{\sigma\nu} = \\ &= \sum_{\sigma<\nu} \left(x_{\nu}\delta^{\nu}_{\sigma} - x_{\sigma}\delta^{\mu}_{j}\right)\delta\omega^{\sigma\nu}.\end{aligned}$$

Звідси (внаслідок довільності параметрів $\delta\omega^{\sigma\nu}$) знаходимо, що

$$X^{\mu}_{\sigma\nu} = x_{\nu}\delta^{\mu}_{\sigma} - x_{\sigma}\delta^{\mu}_{\nu}.$$

Для знаходження структурних констант $\Psi_{i,(\sigma\nu)}$ врахуємо той факт, що функції поля повинні перетворюватися за лінійним представленням групи 4-поворотів. Тому повну варіацію компонент поля $\delta u_i(x)$ можна записати у вигляді розкладу за компонентами $u_j(x)$:

$$\delta u_i(x) = \sum_{j,\sigma<\nu} A^{j}_{i,(\sigma\nu)} u_j(x)\delta\omega^{\sigma\nu}. \tag{3.63}$$

Тоді з (3.51) і (3.63) знаходимо, що

$$\Psi_{i,(\sigma\nu)} = \sum_{j} A^{j}_{i,(\sigma\nu)} u_j(x).$$

Коефіцієнти розкладу $A^{j}_{i,(\sigma\nu)}$ є фактично матричними елементами генераторів для відповідного представлення групи 4-поворотів. Наприклад, для представлення $D^{0,0}$ (скалярне поле) $A^{j}_{i,(\sigma\nu)} \equiv 0$, для представлення $D^{(1/2,1/2)}$ (векторне поле)

$$A^{\alpha}_{\beta,(\sigma\nu)} \equiv g_{\beta\sigma}\delta^{\alpha}_{\nu} - g_{\beta\nu}\delta^{\alpha}_{\sigma}.$$

Таким чином з (3.56) знаходимо, що

$$\begin{aligned}\theta^{\mu}_{\sigma\nu} = M^{\mu}_{\sigma\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}u_i(x))}(\partial_{\sigma}u_i(x)x_{\nu} - \partial_{\nu}u_i(x)x_{\sigma}) + \\ + \mathscr{L}(x)(x_{\sigma}\delta^{\mu}_{\nu} - x_{\nu}\delta^{\mu}_{\sigma}) - \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}u_i(x))}A^{j}_{i(\sigma\nu)}u_j(x).\end{aligned}$$

Використовуючи означення тензора енергії імпульсу (3.60), перепишемо вираз для $M^{\mu}_{\sigma\nu}$ у вигляді

$$M^{\mu}_{\sigma\nu} = (x_\nu T^{\mu}_{\sigma} - x_\sigma T^{\mu}_{\nu}) + S^{\mu}_{\sigma\nu}, \tag{3.64}$$

$$S^{\mu}_{\sigma\nu} = -\frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_\mu u_i(x))} A^{j}_{i(\sigma\nu)} u_j(x). \tag{3.65}$$

Легко бачити з (3.64) – (3.65), що, наприклад, для скалярного поля $A^{j}_{i(\sigma\nu)}$ тотожно дорівнює нулю і співвідношення між $M^{\mu}_{\sigma\nu}$ та T^{μ}_{σ} приймають форму, схожу на ту, яка властива класичній механіці точкових мас. Тому член

$$M_0^{\sigma\nu,\mu} = x^\nu T^{\sigma\mu} - x^\sigma T^{\nu\mu} \tag{3.66}$$

відповідає власному *орбітальному моменту кількості руху.* У випадку багатокомпонентного векторного або спінорного поля з'являється додатковий момент $S^{\mu}_{\sigma\nu}$, який характеризує поляризаційні властивості поля і відповідає спіновому моменту частинки, що описується цим полем.

Моменти, що є інтегралами руху:

$$M^{\mu\nu} = \int d\mathbf{x}\; M^{\mu\nu,0}(x) = M_0^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \tag{3.67}$$

$$M_0^{\mu\nu} = \int d\mathbf{x}\; (x^\nu T^{\mu 0} - x^\mu T^{\nu 0}), \tag{3.68}$$

$$S_{\mu\nu} = -\int d\mathbf{x}\; \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_0 u_i(x))} A^{j}_{i(\mu\nu)} u_j(x). \tag{3.69}$$

Щоб отримати звичайний 3-компонентний вектор спіну, треба згорнути просторові компоненти спінового моменту S_{jk} з повністю антисиметричним тензором третього рангу ε_{ijk} ($\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$ $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ і з рівними нулю усіма іншими компонентами):

$$S_i = \varepsilon_{ijk} S_{jk}. \tag{3.70}$$

3.8. Заряд і вектор струму

У попередніх пунктах ми розглянули інтеграли руху, що відповідають перетворенням неоднорідної групи Лоренца. Розглянемо тепер перетворення (2.2), що відповідає внутрішнім симетріям елементарних частинок. Зрозуміло, що таке перетворення може залишати інваріантними теорії, лагранжіани яких залежать від комплексно значних полів. Відповідне інфінітезимальне перетворення буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &x \to x' = x, \\ &u_j(x) \to u'_j(x) = u_j(x) + iq\delta g u_j(x), \\ &\overset{*}{u}{}'_j(x) \to \overset{*}{u}{}'_j(x) = \overset{*}{u}{}_j(x) - iq\delta g \overset{*}{u}{}_j(x), \end{aligned} \tag{3.71}$$

а величини $X^{\mu}_{(n)}$ і $\Psi_{i,(n)}$, що входять у формули (3.50) і (3.51), дорівнюють:

$$X^{\mu}_{(n)} \equiv 0,\ \Psi_{j(n)} = iqu_j(x),\ \overset{*}{\Psi}_{j(n)} = -iq\overset{*}{u}_j(x),\ \delta\omega^n = \delta g.$$

Індекс n можна опустити, бо маємо тільки один безмежно малий параметр.

Тензору $\theta^{\mu}_{(n)}$ відповідає вектор

$$j^{\mu} = -iq\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_j(x))}u_j(x) + iq\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \overset{*}{u}_j(x))}\overset{*}{u}_j(x). \tag{3.72}$$

Цей вектор має назву 4-вектора струму, а інтегралом руху є заряд

$$Q = iq\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 u_j(x))}u_j(x) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \overset{*}{u}_j(x))}\overset{*}{u}_j\right)d\mathbf{x}. \tag{3.73}$$

Аналогічно можна розглянути більш загальні перетворення типу (2.4), що відповідають вищим внутрішнім симетріям.

Зауваження 3.5. *Формули (3.72) і (3.73) необов'язково пов'язувати з електричним струмом і електричним зарядом. Все буде залежати від того, з інваріантністю якого фізичного явища ми пов'язуємо градієнтні перетворення (2.2) (див. зауваження 2.1.) Зауважимо також, що вигляд вектора струму і заряду для локальних перетворень (2.13),(2.14) буде таким же, як і у формулах (3.72),(3.73).*

На завершення пункту наведемо вираз для варіації дії, що відповідає перетворенню (2.15) для поля $B_\nu(x)$:

$$\delta\mathcal{A} = -\int\limits_{\Delta} dx\ \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu B_\nu)}\partial_\nu\chi(x)\right]. \tag{3.74}$$

Цей вираз безпосередньо збігається з варіацією п.3.5, якщо врахувати, що

$$\overline{\delta}u_i \equiv \overline{\delta}B_\nu = \delta B_\nu = -\partial_\nu\chi(x), \quad \text{а} \quad \delta x^\mu = 0.$$

Відповідні вирази для векторів струму ми наведемо пізніше, коли будемо розглядати конкретні види полів $B_j(x)$.

3.9. Канонічні змінні

Для побудови теорії поля ми обрали лагранжів формалізм, оскільки в ньому час і три просторові координати є рівноправними. Це дає змогу з самого початку розвивати теорію релятивістсько-коваріантним чином. Канонічний або гамільтонів формалізм звичайно є еквівалентним, а релятивістська інваріантність — прихованою.

Перевага канонічного підходу полягає у тому, що він дає можливість більш наглядно використати аналогію до класичної механіки, а точніше переходу від

класичної до квантової механіки. Ця аналогія буде покладена в основу побудови квантової теорії полів. Саме з цієї причини наведемо у цьому пункті вигляд основних канонічних змінних.

Канонічними координатами, так само як і у лагранжевому підході, є компоненти полів $u_j(x)$ та $\overset{*}{u}_i(x)$ (у випадку комплексного поля). Відповідно узагальнені імпульси, канонічно спряжені до узагальнених координат $\{u_i(x),\ \overset{*}{u}_j(x)\}$ визначаються згідно з (3.7) за формулами

$$\overset{*}{\pi}_i\,(x) = \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_0 u_i(x))}, \quad \pi_j(x) = \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_0 \overset{*}{u}_j(x))}. \tag{3.75}$$

Тоді, згідно із співвідношенням (3.8), відповідний гамільтоніан

$$H = \int d\mathbf{x} \left[\sum_i \left(\partial_0 \overset{*}{u}_i(x)\pi_i(x) + \overset{*}{\pi}_i(x)\partial_0 u_i(x) \right) - \mathscr{L}(x) \right]. \tag{3.76}$$

Цей вираз збігається з (3.61) при $\mu = 0$.

§ 4. Класична теорія вільного скалярного поля

Поняття вільного поля, що описує реальні фізичні частинки, є певною мірою штучним поняттям, оскільки у природі всі частинки взаємодіють між собою. Але з математичної точки зору розглядаються вільні (невзаємодіючі) поля як граничний випадок безмежно малої взаємодії. Це допомогає при побудові теорії взаємодіючих полів користуватись аналогією побудови взаємодії у класичній механіці. Тому у цьому та наступних параграфах цього розділу розглядаються основні типи вільних полів, на яких буде ґрунтуватись теорія взаємодіючих полів.

4.1. Рівняння Клейна–Гордона–Фока

Нагадаємо, що рівняння Шредінгера для вільної частинки з масою m можна отримати з нерелятивістського співвідношення між енергією та імпульсом:

$$E - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = 0, \tag{4.1}$$

якщо підставити в нього, згідно з правилами квантової механіки, замість E і $\mathbf{p}$ відповідні оператори

$$\widehat{E} = i\partial_0, \quad \widehat{\mathbf{p}} = -i\,\boldsymbol{\nabla} = (-i\partial_1, -i\partial_2, -i\partial_3) \tag{4.2}$$

і вимагати, щоб оператор

$$\widehat{E} - \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 \equiv i\partial_0 + \frac{1}{2m}\Delta, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2}$$

перетворював у нуль хвильову функцію частинки, тобто

$$i\partial_0\varphi(x) = H\varphi(x), \quad H = -\frac{1}{2m}\Delta. \tag{4.3}$$

Аналогічно можна отримати і релятивістське рівняння для вільної частинки маси m, якщо скористатися релятивістським співвідношенням між енергією та імпульсом

$$E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0. \tag{4.4}$$

Тоді отримаємо для $\varphi(x)$ рівняння

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^0} + \Delta - m^2\right)\varphi(x) = 0.$$

Якщо ввести оператор д'Аламбера

$$\Box = -\partial_0^2 + \Delta = -\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu, \tag{4.5}$$

то прийдемо до відомого рівняння Клейна – Гордона – Фока:

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0. \tag{4.6}$$

Воно було незалежно запропоноване в 1926 р. у працях [158,138,123,124,160,113].

Функцію $\varphi(x)$ називають функцією поля або просто полем, а рівняння (4.6) буде розглядатись як рівняння вільного поля.

4.2. Релятивістська інваріантність рівняння Клейна–Гордона–Фока

Вимога релятивістської інваріантності рівняння (4.6) означає, що при перетворенні (1.20) і оператор $\Box - m^2$, і хвильова функція $\varphi(x)$ перетворюються у нові величини $\Box'$ і $\varphi'(x')$ таким чином, щоб фізичні закони (у даному випадку рівняння руху) були незмінні, тобто

$$(\Box' - m^2)\varphi'(x') = 0. \tag{4.6$'$}$$

З'ясуємо спершу вигляд оператора $\Box'$. З виразу (1.20) знаходимо

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu_\nu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu_\nu\partial'_\mu. \tag{4.7}$$

Враховуючи формулу (1.11), переписуємо перетворення (4.7) у матричній формі

$$\partial = \Lambda^\top\partial', \quad \partial' = (\Lambda^\top)^{-1}\partial \tag{4.7$'$}$$

Зі співвідношення (1.12) $(\Lambda^\top)^{-1} = G\Lambda G$ і тоді

$$\partial' = G\Lambda G\partial. \tag{4.8}$$

Оператори ∂ і ∂' треба розглядати як вектори-стовпчики:

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}. \tag{4.8'}$$

Тоді з означення оператора $\Box$ (див. (4.5)) маємо

$$\Box = -\partial^\top G\partial, \tag{4.9}$$

де $\partial^\top$–вектор, транспонований до вектора-стовпчика ∂, тобто—вектор стрічка

$$\partial^\top = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3). \tag{4.10}$$

Тоді з (4.8),(4.9), враховуючи, що $G^\top = G$ і $G^2 = 1$, маємо

$$\Box' = -\partial'^\top G\partial' = -\partial^\top G\Lambda^\top GGG\Lambda G\partial = -\partial^\top G\Lambda^\top(\Lambda^\top)^{-1}\partial = -\partial^\top G\partial = \Box. \tag{4.11}$$

З іншого боку, польові функції повинні перетворюватися за лінійним представленням групи Лоренца, тобто

$$\varphi'(x') = S(\Lambda, a)\varphi(x). \tag{4.12}$$

Враховуючи (4.11) і (4.12), рівняння (4.6) можна записати у такому вигляді:

$$(\Box' - m^2)S^{-1}(\Lambda, a)\varphi'(x') = 0.$$

Для того, щоб це рівняння збігалося з (4.6′), треба щоб

$$S^{-1}(\Lambda, a) = \pm 1.$$

Звідси

$$\varphi'(x') = \pm\varphi(x) \quad \text{або} \quad \varphi'(x) = \pm\varphi(\Lambda^{-1}(x - a)).$$

Це означає, що функція $\varphi(x)$ є або скаляром, або псевдоскаляром.

Отже, релятивістсько-інваріантне рівняння Клейна–Гордона–Фока описує вільні частинки, що відповідають скалярним або псевдоскалярним полям. Ці частинки називаються скалярними або псевдоскалярними мезонами.

Зауваження 4.1. *Для комплексних скалярних полів рівняння (4.6) задовольняє також польова функція* $\overset{*}{\varphi}(x)$*. У цьому випадку інваріантність рівняння (4.6) буде мати місце також при антилінійному перетворенні:*

$$\varphi'(x') = \pm\overset{*}{\varphi}(x). \tag{4.13}$$

Пізніше побачимо, що таке перетворення задовольняють польові функції скалярних частинок при часовій інверсії.

4.3. Розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока

Легко переконатися, що рівняння (4.6) має розв'язки у вигляді плоских хвиль

$$\varphi_p^{\pm}(x) = N\, e^{i(\pm p^0 x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \tag{4.14}$$

де N–константа нормування.

Розв'язки (4.14) є власними функціями оператора енергії $\widehat{E} = i\partial_0$:

$$\widehat{E}\varphi^{\pm}(x) = \mp p^0 \varphi_p^{\pm}(x). \tag{4.15}$$

Отже, рівняння Клейна–Гордона–Фока має розв'язки як з додатною, так і з від'ємною енергіями. У наступних пунктах буде детальніше проаналізовано цю ситуацію, а тут лише зауважимо, що існування розв'язків з від'ємною енергією пояснюється лоренц-інваріантністю рівняння (4.6). Дійсно, часовому відображенню (1.18) відповідає перетворення скалярного поля, а, отже, і розв'язків (4.6) у вигляді

$$\varphi'_p(x') = \varphi'_p(-x^0, \mathbf{x}) = \varphi_p(x).$$

Розв'язки (4.14) задовольняють таке перетворення , якщо

$$\varphi'_p(x) = \varphi^{\pm}_{-p^0,\mathbf{p}}(x).$$

У загальному випадку будемо шукати розв'язки рівняння (4.6) у вигляді неперервної суперпозиції плоских хвиль (хвильового пакета) або у вигляді інтеграла Фур'є

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk\, e^{ik\cdot x} \tilde{\varphi}(k), \tag{4.16}$$

де $k \cdot x = k^0 x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$, $dk = dk^0 d\mathbf{k}$, а множник $(2\pi)^{-3/2}$ вибраний для зручності, оскільки далі перейдемо до 3-вимірного інтегралу. Підставляючи вираз (4.16) у рівняння (4.6), отримаємо

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk\, (k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) e^{ik\cdot x} = 0.$$

Звідси внаслідок єдиності перетворення Фур'є маємо:

$$(k^2 - m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0. \tag{4.17}$$

Розв'язки алгебраїчного рівняння (4.17) у значенні узагальнених функцій можна представити у вигляді

$$\tilde{\varphi}(k) = \delta(k^2 - m^2) a(k), \tag{4.18}$$

де $a(k)$—довільна функція. У 4-вимірному імпульсному просторі Мінковського поверхню $k^2 - m^2 = k^{0^2} - \mathbf{k}^2 - m^2 = 0$ називають *енергетичною або масовою поверхнею.* Вона являє собою два 3-вимірні гіперболоїди $k^0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Підставляючи тепер співвідношення (4.18) у (4.16) і знімаючи інтегрування за змінною k^0 за допомогою формули (задача 4.1):

$$\delta(k^{0^2} - \mathbf{k}^2 - m^2) = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}\Big(\delta(k^0 - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}) + \delta(k^0 + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})\Big), \quad (4.19)$$

запишемо розв'язок $\varphi(x)$ у вигляді суми додатно і від'ємно-частотної частини

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad (4.20)$$

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}\, \frac{e^{\pm ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}} \varphi^\pm(\mathbf{k}), \quad (4.21)$$

де

$$\varphi^\pm(\mathbf{k}) = \frac{a(\pm k^0, \pm\mathbf{k})}{\sqrt{2k^0}}, \quad k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (4.22)$$

Очевидно, що $\varphi^+(x)$ і $\varphi^-(x)$ окремо задовольняють рівняння (4.6). У випадку, коли поле $\varphi(x)$ комплексне, тобто $\overset{*}{\varphi}(x) \neq \varphi(x)$, воно теж задовольняє рівняння (4.6). З фізичної точки зору (див. п. 3.7) ці поля відповідають зарядженим частинкам. Тут і далі поле у конфігураційному просторі і в імпульсному просторі буде позначатися однією буквою φ, але це різні функції, оскільки $\varphi(x) = \varphi(x^0, \mathbf{x}) = \varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$, а $\varphi(\mathbf{k}) = \varphi(k^1, k^2, k^3)$. Комплексне поле $\overset{*}{\varphi}(x)$ також представляється у вигляді додатно і від'ємно-частотної частини:

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \overset{*}{\varphi}{}^+(x) + \overset{*}{\varphi}{}^-(x).$$

У зв'язку з цим треба зауважити, що правила спряження для функції $\varphi^\pm(x)$ вже будуть не тривіальні і матимуть вигляд

$$(\varphi^\pm(x))^* = \overset{*}{\varphi}{}^\mp(x).$$

Щоб переконатися у справедливості цього правила треба записати представлення, аналогічне (4.21) і (4.22) для функцій$\overset{*}{\varphi}{}^\pm(x)$, виконати операцію спряження у виразах (4.21), (4.22) і порівняти отримані вирази.

Запишемо розв'язки (4.20) – (4.22) у явно коваріантному вигляді

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk\, e^{\pm ik\cdot x} \delta(k^2 - m^2) a^\pm(k), \quad (4.23)$$

де $a^\pm(k) = \theta(k^0) a(\pm k^0, \pm\mathbf{k})$, а $\theta(k^0)$ – *функція Хевісайда:* $\theta(k^0) = 1$, при $k^0 > 0$ і $\theta(k^0) = 0$, при $k^0 < 0$.

Зауваження 4.2. *Розв'язки $\varphi^\pm(x)$ називаються додатно-частотними і від'ємно-частотними компонентами поля $\varphi(x)$. Згідно з (4.15) додатно-частотні компоненти відповідають розв'язкам з від'ємним значенням енергії, а від'ємно-частотні—розв'язкам з додатними значеннями енергії. У цьому*

відношенні будемо притримуватися позначень монографії [13]. Такі позначення більш природні для квантового поля $\varphi(x)$, для якого $\varphi^+(x)$ буде відповідати оператору народження, а $\varphi^-(x)$ – оператору знищення. У зарубіжній літературі (див., наприклад, [102], Гл. 7, § 3) навпаки, додатно-частотні розв'язки відповідають додатнім значенням енергії, а від'ємно-частотні від'ємним, а відповідне квантове поле $\varphi^+(x)$ оператору знищення, а $\varphi^-(x)$—оператору народження.

4.4. Інтерпретація розв'язків. Гільбертів простір станів

При виведенні рівняння Клейна–Гордона–Фока були використані аналогії до виведення квантово-механічного рівняння Шредінгера. Тому природно було б сподіватися, що ці аналогії можна поширити і на інтерпретацію розв'язків. Але, як було видно у п. 4.3, релятивістська інваріантність рівнянь Клейна–Гордона–Фока приводить до того, що з'являються розв'язки як з додатною, так і з від'ємною енергіями. Тому спроба інтерпретувати розв'язок $\varphi(x)$ як хвильову функцію частинки приводить до виникнення проблем, пов'язаних із додатністю деяких фізичних величин. Дійсно, аналогічно тому, як це робиться у квантовій механіці, побудуємо 4-вектор струму $j(x) = (j^0(x),\, j^1(x), \ldots, j^3(x))$:

$$j^\mu(x) = ig^{\mu\nu}\big(\overset{*}{\varphi}(x)\partial_\nu\varphi(x) - \partial_\nu\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)\big) := ig^{\mu\nu}\overset{*}{\varphi}(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\varphi(x). \tag{4.24}$$

Легко перевірити, що $j^\mu(x)$ задовольняє рівняння неперервності:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \tag{4.25}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}\partial_0 j^0(x) + \partial_k j^k(x) &= i\overset{*}{\varphi}(x)\partial_0^2\varphi(x) - i\partial_0^2\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x) - i\overset{*}{\varphi}(x)\partial_k^2\varphi(x) + \\ &+ i\partial_k^2\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x) = -i[\overset{*}{\varphi}(x)\Box\varphi(x) - \Box\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)] = \\ &= -im^2[\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x) - \overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)] = 0.\end{aligned}$$

При доведені було враховано, що і $\varphi(x)$, і $\overset{*}{\varphi}(x)$ задовольняють рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6).

Формулу (4.24) і рівняння (4.25) можна також отримати у рамках лагранжевого формалізму з виразу (3.72), підставляючи туди формулу для лагранжіана комплексного скалярного поля (див. далі ф-лу (4.54)), але це буде зроблено нижче.

Згідно з положеннями квантової механіки, 4-вектор $j(x)$ можна було б розглядати як густину 4-вектора потоку ймовірності, а компоненту $j^0(x) = \rho(x)$ – як густину ймовірності. Але з формули (4.24) видно, що ні $j^0(x) = \rho(x)$ не можна інтерпретувати як густину ймовірності, ані $\varphi(x)$ не можна розглядати як

амплітуду ймовірності знайти частинку в точці x. Це стає зрозумілим із того, що $\varphi(x)$ задовольняє диференціальне рівняння другого порядку і тому у початковий момент і $\varphi(x)$, і $\partial_0\varphi(x)$ можна задавати довільним чином, а, отже, $\rho(x)$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

До аналогічного висновку можна прийти і у часткових розв'язках у вигляді плоских хвиль (4.14).

Дійсно, підставляючи формулу (4.14) у вираз (4.24) при $\mu = 0$, отримаємо, що для розв'язків $\varphi^+(x)$

$$\rho = \rho(\varphi^+) = -2p^0|N|^2 < 0.$$

У 1934 р. Паулі і Вайскопф [177] запропонували розглядати рівняння (4.6) як рівняння для поля (подібно до рівнянь Максвелла, що описують електромагнітне поле). У цьому випадку величини ρ і j стають густиною та струмом квантів цього поля. Проте ситуація з імовірнісною інтерпретацією $\rho(x)$ змінюється, якщо розглянути тільки розв'язки, що відповідають додатнім значенням енергії – тобто від'ємно-частотні розв'язки. Сукупність таких розв'язків утворює лінійний простір, оскільки разом із двома розв'язками $\varphi_1^-(x)$ і $\varphi_2^-(x)$ їх лінійна комбінація $\alpha\varphi_1^-(x) + \beta\varphi_2^-(x)$ теж є від'ємно-частотним розв'язком. У просторі таких розв'язків можна ввести скалярний добуток за формулою

$$\begin{aligned}(\varphi_1^-, \varphi_2^-) &:= i\int\limits_{x^0=\text{const}} d\mathbf{x}\left(\overline{\varphi_1^-(x)}\frac{\partial}{\partial x^0}\varphi_2^-(x) - \overline{\frac{\partial\varphi_1^-(x)}{\partial x^0}}\varphi_2^-(x)\right) = \\ &:= i\int\limits_{x^0=\text{const}} d\mathbf{x}\,\overline{\varphi_1^-(x)}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0\varphi_2^-(x) \qquad (4.26)\end{aligned}$$

для тих функцій, для яких норма, введена за скалярним добутком (4.26), буде скінченна:

$$\|\varphi^-\| = (\varphi^-, \varphi^-)^{1/2} < \infty. \qquad (4.27)$$

У формулах (4.26) риска означає операцію комплексного спряження.

Легко перевірити, що скалярний добуток, визначений формулою (4.26), не залежить від x^0 і задовольняє всім властивостям скалярного добутку. Для того, щоб це побачити, треба скористатись представленням (4.21). Тоді

$$\begin{aligned}(\varphi_1^-, \varphi_2^-) &= \int d\mathbf{x}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{ik_1\cdot x}}{\sqrt{2k_1^0}}\overline{\varphi_1^-(\mathbf{k}_1)}d\mathbf{k}_1\int\frac{e^{-ik_2\cdot x}}{\sqrt{2k_2^0}}k_2^0\varphi_2^-(\mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_2 + \\ &+ \int d\mathbf{x}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{ik_1\cdot x}}{\sqrt{2k_1^0}}k_1^0\overline{\varphi_1^-(\mathbf{k}_1)}\,d\mathbf{k}_1\int\frac{e^{-ik_1\cdot x}}{\sqrt{2k_2^0}}\varphi_2^-(\mathbf{k}_2)d\mathbf{k}_2 = \\ &= \int\overline{\varphi_1^-(\mathbf{k})}\varphi_2^-(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \qquad (4.28)\end{aligned}$$

Тобто в імпульсному просторі скалярний добуток (4.26) набуває вигляду звичайного скалярного добутку в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Тому величину $|\varphi^-(\mathbf{k})|^2$ можна інтерпретувати як густину ймовірності в імпульсному просторі.

Замикаючи лінійний простір від'ємно-частотних розв'язків за нормою (4.27), отримаємо гільбертів простір $\mathscr{H}_1$, який будемо називати *одночастинковим гільбертовим простором станів*. Скалярний добуток (4.28) можна також подати у лоренц-коваріантному вигляді, враховуючи позначення (4.22):

$$(\varphi_1^-, \varphi_2^-) = \int \overline{a_1(-k)} a_2(-k) \frac{d\mathbf{k}}{2k^0} = \int \overline{a_1(-k)} a_2(-k) \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk. \quad (4.29)$$

Зауважимо також: якщо ввести за аналогією до виразу (4.28) скалярний добуток для повних розв'язків рівняння Клейна–Гордона–Фока $\varphi_1(x) = \varphi_1^+(x) + \varphi_1^-(x)$ і $\varphi_2(x) = \varphi_2^+(x) + \varphi_2^-(x)$, то отримаємо:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \left[\overline{\varphi_1^-(\mathbf{k})} \varphi_2^-(\mathbf{k}) - \overline{\varphi_1^+(\mathbf{k})} \varphi_2^+(\mathbf{k}) \right] d\mathbf{k}.$$

Отже, скалярний добуток повних розв'язків є індефінітним, тобто квадрат норми вектора $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення, і навіть перетворюватися в нуль при $\varphi(x) \neq 0$. Тому повним розв'язкам рівняння (4.6) не можна надати традиційного квантово-механічного змісту *хвильової функції*. Але якщо над додатно-частотними розв'язками здійснити операцію комплексного спряження, то він стане від'ємно-частотним розв'язком, і тоді, розраховуючи аналогічно, отримаємо, що

$$(\overline{\varphi^+}, \overline{\varphi^+}) = (\overset{*}{\varphi}{}^-, \overset{*}{\varphi}{}^-) = \int |\overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \int |\overline{\varphi^+(\mathbf{k})}|^2 d\mathbf{k} = \int |\varphi^+(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}.$$

Це дає змогу трактувати додатно частотні розв'язки як хвильові функції античастинок із зарядом, протилежним заряду частинки, а величину $|\varphi^+(\mathbf{k})|^2 = |\overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k})|^2$ – як густину ймовірності в імпульсному просторі античастинок.

Таким чином, інтерпретація розв'язків з від'ємною енергією пов'язується з існуванням античастинок. Ще в 1930 році за два роки до відкриття Андерсоном позитрону (як античастинки до електрону) Дірак запропонував свою знамениту „теорію дірок" [117] (див. детальніше, наприклад, [102, 1.4, § 7]), яка обґрунтувала наявність розв'язків із від'ємною енергією в теорії рівняння Дірака (див. наступний § 5), а також фактично передбачила існування позитрону. Проте ця теорія опирається на принцип Паулі, який забороняє знаходитись у кожному стані більш ніж одному електрону, і тому не може бути застосована до частинок з цілим спіном. Пізніше Фейнман [94,95] запропонував свої знамениті діаграми для опису процесів розсіяння, на яких рух позитронів розглядався як рух електронів у протилежному за часом напрямку. Отже, розповсюдження частинки

з від'ємною енергією від точки $(x_1^0, \mathbf{x}_1)$ до точки $(x_2^0, \mathbf{x}_2)$ $(x_2^0 > x_1^0)$ можна трактувати як розповсюдження античастинки з додатною енергією з точки $(x_2^0, \mathbf{x}_2)$ до точки $(x_1^0, \mathbf{x}_1)$, тобто в оберненому напрямі за часом.

Щоб така інтерпретація відповідала фізичній реальності, треба розглянути рух вільної частинки, скажімо π^+ мезона, між двома розсіювальними центрами, розташованими в точках $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ (див. рис. 4.1а і 4.1б).

На рис. 4.1а зафіксовано розсіяння π^+ мезона на центрах 1 і 2, що відповідає звичайному нерелятивістському опису. Інваріантність руху частинки відносно групи Лоренца приводить до того, що треба враховувати можливість розповсюдження і в оберненому за часом напрямі (рис. 4.1б). Щоб останнє відповідало реальній події, треба припустити, що в точці 1 деякий розсіювальний потенціал породжує пару $\pi^+\pi^-$ у момент часу x_1^0, а в точці 2 інший потенціал поглинає пару $\pi^+\pi^-$ в момент часу x_2^0. Тоді між точками 1 і 2 розповсюджується античастинка π^- у напрямі зростання часу з додатною енергією, а рух вільного π^+ мезона, що відповідає рис. 4.1 б, розглядається як складний процес теорії розсіяння, зображений на рис. 4.2.

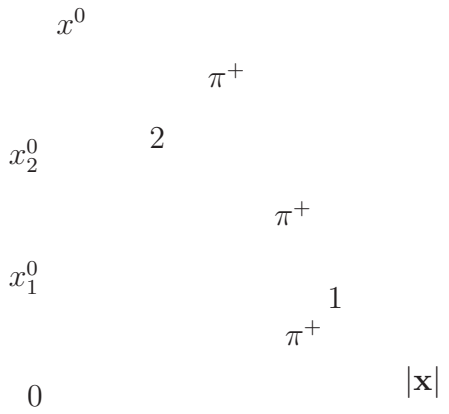


Рис. 4.1а

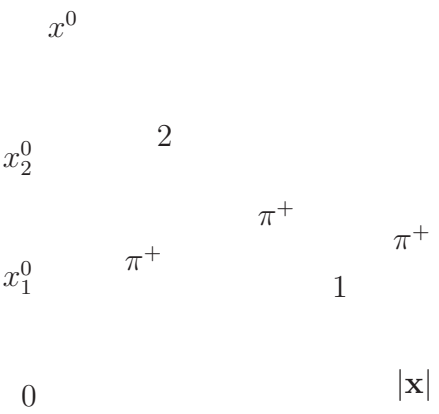


Рис. 4.1б

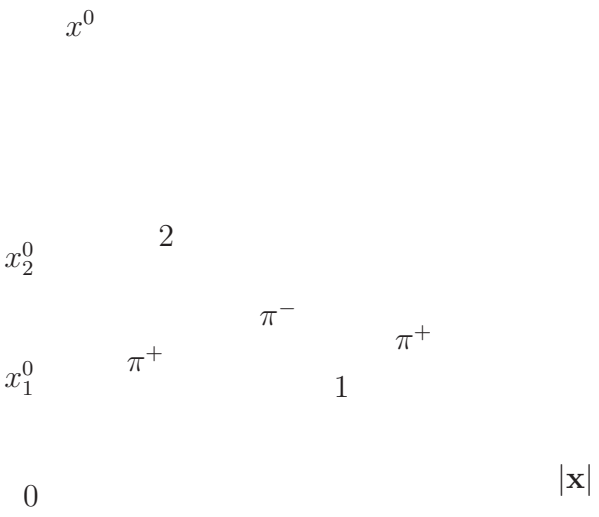


Рис. 4.2

Отже, для пояснення руху вільної частинки ми повинні розглянути велике число частинок, що взаємодіють між собою.

4.5. Перетворення $\widehat{C}$, $\widehat{P}$, $\widehat{T}$

4.5.1. Перетворення зарядового спряження $\widehat{C}$

З аналізу, наведеного у попередньому пункті, стає зрозумілим, що оператор $\widehat{C}$, визначений формулою (2.3), діє на нейтральне скалярне поле за формулами

$$\widehat{C}\varphi = \varphi^c = \overset{*}{\varphi} = \varphi, \quad (\widehat{C}\varphi)^{\pm} = \varphi^{c,\pm} = (\varphi^{\pm})^* = \varphi^{\mp}. \tag{4.30}$$

Щоб визначити дію оператора $\widehat{C}$ на комплексне скалярне поле, що описує заряджені частинки, запишемо рівняння Клейна–Гордона–Фока для цього поля у зовнішньому електромагнітному полі $A_\mu(x)$. Як відомо, для цього у рівнянні (4.6) треба зробити заміну:

$$i\partial_0 \to i\partial_0 - qA_0(x),$$

$$-i\,\boldsymbol{\nabla} \to -i\,\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(x)$$

або у коваріантному вигляді

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu(x), \tag{4.31}$$

де $A_0(x)$ і $\mathbf{A} = (A^k(x))_{k=1}^{k=3}$ – скалярний і векторний *потенціали* електромагнітного поля, а q – заряд частинки. Зауважимо, що у випадку електрона $q = -e$.

Зауваження 4.3. *Для того, щоб зрозуміти, чому саме заміна (4.31) враховує взаємодію цього поля з електромагнітним полем, треба розглянути рух вільної частинки у такому полі. Згідно з законом Лоренца, сила, що діє на таку частинку, задається формулою*

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{m}\mathbf{p} \times \mathbf{B}\right).$$

Функція Гамільтона, що відповідає такому виразу, може бути записана у вигляді

$$H = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + qA_0,$$

або в нерелятивістському наближенні:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA_0,$$

що відповідає виразам (4.1)–(4.3) після перетворень (4.31). Детальні обрахунки можна знайти в [45 Т. II, § 16.]

Тепер, щоб отримати з рівняння Шредингера

$$i\,\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}(-i\nabla)^2\psi(r,t)$$

для вільної частинки, рівняння Шредінгера

$$i\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = \widehat{H}\psi(r,t),$$

для частинки у зовнішньому електромагнітному полі, що відповідає класичному гамільтоніану H, треба зробити заміни (4.31).

Рівняння (4.6) набуде вигляду

$$(i\partial_0 - qA_0(x))^2\varphi(x) - (-i\ \boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(x))^2\varphi(x) - m^2\varphi(x) = 0. \tag{4.32}$$

Тоді поле $\varphi^c(x)$, що описує частинки з протилежними зарядами $-q$ (тобто античастинки), повинно задовольняти рівняння

$$(i\partial_0 + qA_0(x))^2\varphi^c(x) - (-i\ \boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A}(x))^2\varphi^c(x) - m^2\varphi^c(x) = 0. \tag{4.33}$$

З рівнянь (4.32), (4.33) знаходимо:

$$\varphi^c(x) = \widehat{C}\varphi(x) = \overset{*}{\varphi}(x). \tag{4.34}$$

Але дія оператора $\widehat{C}$ на частотні характеристики поля $\varphi(x)$ уже не зводиться до простого комплексного спряження, як це було у випадку нейтральних частинок (4.30), оскільки згідно з формулою (2.3) оператор $\widehat{C}$ замінює частинку античастинкою, тобто

$$(\widehat{C}\varphi)^{\pm} = \varphi^{c,\pm} = \overset{*}{\varphi}{}^{\pm} = (\varphi^{\mp})^*. \tag{4.35}$$

Співвідношення (4.35) записані як для $\varphi^{\pm}(x)$, так і для $\varphi^{\pm}(\mathbf{k})$.

Рівняння (4.34) відображає зарядову симетрію, яка полягає в тому, що і частинки, і античастинки (тобто їх хвильові функції) входять у поле як складові.

Для опису зарядової симетрії можна розглядати частинку і античастинку як два різних "зарядових стани" однієї і тієї ж частинки, що відрізняються значенням зарядового квантового числа $Q = \pm 1$, а хвильова функція системи є добутком орбітальної і зарядової функції.

З визначення оператора $\widehat{C}$ легко побачити, що можна визначити його і рівнянням

$$\varphi^c(x) = \widehat{C}\varphi(x) = -\overset{*}{\varphi}(x).$$

У цьому випадку кажуть, що частинки, що описують поле $\varphi(x)$, є зарядово непарні. Отже, в загальному випадку для безспінових частинок:

$$\varphi^c(x) = \widehat{C}\varphi(x) = \eta^c_\varphi\,\overset{*}{\varphi}(x), \quad \eta^c_\varphi = \pm 1. \tag{4.36}$$

4.5.2. Просторова інверсія $\widehat{P}$

Для скалярного (псевдоскалярного) поля операція просторової інверсії визначається формулою[*)]

$$\widehat{P}\varphi(x) = \varphi^{\widehat{P}}(x) = \pm\varphi(x^0, -\mathbf{x}). \tag{4.37}$$

Таке ж рівняння буде і для $\overset{*}{\varphi}$.

Знак "+" у рівнянні (4.37) відповідає скалярним частинкам, а знак "-" – псевдоскалярним.

Із формули (4.21) видно, що дія оператора $\widehat{P}$ в імпульсному просторі еквівалентна заміні:

$$\widehat{P}: \ \varphi^+(\mathbf{k}) \to \pm\varphi^+(-\mathbf{k}), \ \varphi^-(\mathbf{k}) \to \pm\varphi^-(-\mathbf{k})$$

і такі самі співвідношення для $\overset{*}{\varphi}{}^{\pm}(\mathbf{k})$.

4.5.3. Часова інверсія $\widehat{T}$

З визначення вільних операторів $\varphi(x)$ і $\overset{*}{\varphi}(x)$ (див. (4.20) – (4.22)) видно: якщо визначити оператор часової інверсії аналогічно просторовій інверсії (4.42), то порушиться правильне розбиття полів $\varphi(x)$ і $\overset{*}{\varphi}(x)$ на додатно і від'ємно-частотні розв'язки. Щоб зберегти звичну картину, треба визначити оператор $\widehat{T}$ за формулою (див. (4.13))

$$\widehat{T}\varphi(x) = \varphi^{\widehat{T}}(x) = \pm\overset{*}{\varphi}(-x^0, \mathbf{x}). \tag{4.38}$$

В імпульсному просторі це відповідає заміні:

$$\widehat{T}: \ \varphi^+(\mathbf{k}) \to \pm\overset{*}{\varphi}{}^-(-\mathbf{k}), \quad \varphi^-(\mathbf{k}) \to \pm\overset{*}{\varphi}{}^+(-\mathbf{k}).$$

Означення (4.38) узгоджується з правилом зворотності часу у квантовій механіці, згідно з яким: якщо в момент часу $x^0 = t$ стан системи характеризується хвильовою функцією $\psi(t, \mathbf{r})$, то стан у момент часу $x^0 = -t$ треба описувати функцією $\psi^*(-t, \mathbf{r})$, щоб зберегти правильну залежність від часу. Це вперше помітив Вігнер у 1932 р. [201].

4.5.4. $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$–інваріантність

У першому розділі ми звернули увагу на те, що під релятивістською інваріантністю теорії треба розуміти інваріантність відносно власної групи Лоренца (див. зауваження 1.1). Інваріантність відносно дискретних перетворень $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ і $\widehat{P}\widehat{T}$, а також $\widehat{P}\widehat{C}$, $\widehat{T}\widehat{C}$ може порушуватись в окремих фізичних процесах (див.

[*)] Оператори представлення групи Лоренца, які відповідають просторовим і часовим віддзеркаленням (1.17),(1.18) і діють у просторі функцій–станів, позначаються тими самими буквами $\widehat{P}$ і $\widehat{T}$.

також зауваження 1.2). При 4-інверсії, тобто PT-перетворенні скалярне поле змінюється за законом

$$\widehat{P}\widehat{T}: \ \varphi(x^0,\mathbf{x}) \to \varphi(-x^0,-\mathbf{x}). \tag{4.39}$$

Проте формули (4.37) і (4.38) не узгоджуються з перетворенням (4.39), оскільки перетворення $\widehat{T}$ змінює поле $\varphi(x)$ на спряжене поле $\overset{*}{\varphi}(-x^0,\mathbf{x})$. Виявляється, що повне $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$ – перетворення завжди забезпечує інваріантність теорії. Цей факт називається *теоремою Людерса–Паулі* [64,164], про яку буде йти мова нижче. $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$–перетворення комплексного скалярного поля має такий вигляд:

$$\varphi^{\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}}(x) = \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}\varphi(x) = \varphi(-x^0,-\mathbf{x}).$$

4.6. Представлення групи Лоренца у просторі станів

Розглянемо тепер питання про реалізацію представлення групи Лоренца у просторі одночастинкових станів $\mathscr{H}_1$. Для цього досить вивчити ортохронні перетворення Лоренца. Згідно із законом перетворення скалярного поля (1.36) визначимо оператор $U_{\Lambda,a}$, що діє на від'ємно-частотні розв'язки за формулою

$$(U_{\Lambda,a}\varphi^-)(x) = \varphi^-(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{4.40}$$

Покажемо, що $U_{\Lambda,a}$ є унітарним оператором. Обрахуємо для цього перетворення Фур'є функції $\varphi^-(\Lambda^{-1}(x-a))$. Маємо (див. (4.23)):

$$\varphi^-(\Lambda^{-1}(x-a)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\, e^{-ik\cdot\Lambda^{-1}(x-a)}\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)a(-k). \tag{4.41}$$

Зробимо у виразі (4.41) заміну змінних:

$$k' = \Lambda k, \quad k = \Lambda^{-1}k'.$$

З властивостивостей ортохронних перетворень Лоренца випливає:

$$\det\Lambda = \det\Lambda^{-1} = 1, \quad k'^2 = k^2 \ \text{ і } \ \Lambda^{-1}k'\cdot\Lambda^{-1}(x-a) = k'\cdot(x-a),$$

що приводить до формули

$$\varphi^-(\Lambda^{-1}(x-a)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk'\, e^{-ik'\cdot x}e^{ik'\cdot a}\theta((\Lambda^{-1}k')^0)\delta(k'^2-m^2)\varphi(-\Lambda^{-1}k').$$

Або враховуючи ортохронність групи (пропозиція 1.1), тобто $(\Lambda^{-1}k')^0 > 0$, якщо $k'^0 > 0$, остаточно отримуємо:

$$\varphi^-(\Lambda^{-1}(x-a)) = (U_{\Lambda,a}\varphi^-)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}'}{\sqrt{2k'^0}}\, e^{-ik'\cdot x}e^{ik'\cdot a}\varphi(-\Lambda^{-1}k').$$

Тоді з визначення (4.28),(4.29) і формули (4.19) маємо:

$$(U_{\Lambda,a}\varphi_1^-, U_{\Lambda,a}\varphi_2^-) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{2k'^0}\overline{e^{ik'\cdot a}\varphi_1(-\Lambda^{-1}k')}e^{ik'\cdot a}\varphi_2(-\Lambda^{-1}k') =$$

$$= \int dk'\,\theta(k^0)\delta(k'^2 - m^2)\overline{\varphi_1(-\Lambda^{-1}k')}\varphi_2(-\Lambda^{-1}k') =$$

$$= \int dk\,\overline{\varphi_1(-k)}\varphi_2(-k)\theta(k^0)\delta(k^2 - m^2) = (\varphi_1^-, \varphi_2^-), \quad (4.42)$$

що й доводить наше твердження.

Отже, формула (4.40) задає унітарне представлення неоднорідної групи Лоренца в $\mathscr{H}_1$, оскільки $U_{\Lambda_2\Lambda_1,a_2+\Lambda_2 a_1} = U_{\Lambda_2 a_2}U_{\Lambda_1 a_1}$.

Доведення унітарності оператора $U_{\Lambda,a}$ можна провести в просторі $\mathscr{H}_1$ безпосередньо на функціях конфігураційного простору, тобто використовуючи скалярний добуток (4.26). Однак для цього треба записати скалярний добуток (4.26) у більш загальній формі. У формулі (4.26) інтеграл береться по усьому простору $\mathbb{R}^3$ у момент часу $x^0 = t$. Тепер узагальнимо цей запис, вводячи інтегрування по довільній просторово-подібній поверхні S. Просторово-подібна поверхня визначається умовою, за якою вона не має точок, які можна з'єднати світловим сигналом, тобто для будь-яких двох точок x і y, що лежать на S, інтервали $(x-y)^2 < 0$. Щоб записати елемент поверхні $d\sigma$, визначимо одиничний вектор $n^\mu(x)$-нормалі до S у точці x : $(n_\mu(x)n^\mu(x) = 1)$. У випадку площини T: $x^0 = t = \text{const}$, $n^\mu(x) = (1,0,0,0)$. Тоді елемент поверхні $d\sigma^\mu(x) = n^\mu(x)d\mathbf{x} = n^\mu(x)dx^1dx^2dx^3$. Для довільної поверхні S: $d\sigma^\mu(x) = (dx^1dx^2dx^3,\ dx^0dx^2dx^3,\ dx^0dx^1dx^3,\ dx^0dx^1dx^2)$ визначимо скалярний добуток за формулою

$$(\varphi_1^-, \varphi_2^-) = i\int\limits_S d\sigma^\mu(x)\ \overline{\varphi_1^-(x)}\ \overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi_2^-(x). \quad (4.43)$$

Розглянемо тепер різницю між скалярними добутками, визначеними формулою (4.43) з площинами T і S відповідно:

$$(\varphi_1^-, \varphi_2^-)_S - (\varphi_1^-, \varphi_2^-)_T = i\int\limits_{ST} d\sigma^\mu(x)\ \overline{\varphi_1^-(x)}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi_2^-(x). \quad (4.44)$$

Внаслідок формули (4.28) функції $\varphi_1^-(x)$ і $\varphi_2^-(x)$ прямують до нуля при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Тому поверхню TS можна вважати замкнутою (на безмежності за просторовими змінними) просторово-подібною поверхнею у просторі Мінковського $\mathbb{M}$, що обмежує об'єм $\Delta \subset \mathbb{M}$. Тоді, застосовуючи теорему Гаусса до правої частини (4.44) і враховуючи, що φ_1^- і φ_2^- задовольняють рівняння Клейна–Гордона–Фока, маємо:

$$(\varphi_1^-, \varphi_2^-)_T - (\varphi_1^-, \varphi_2^-)_S = i\int\limits_\Delta dx\,\partial^\mu[\overline{\varphi_1^-(x)}\partial_\mu\varphi_2^-(x) - \partial_\mu\varphi_1^-(x)\,\varphi_2^-(x)] =$$

$$= i \int\limits_{\Delta} dx[\overline{\varphi_1^-(x)}(\Box - m^2)\varphi_2^-(x) - (\Box - m^2)\varphi_1^-(x)\,\varphi_2^-(x)] \equiv 0.$$

Таким чином, скалярний добуток (4.43) не залежить від вигляду просторово-подібної поверхні S.

Так само для довільного вектора $F_\mu(x)$, що внаслідок власного неоднорідного перетворення Лоренца $x' = \Lambda x + a$ змінюється за законом:

$$F'_\mu(x') = \Lambda^\nu_\mu F_\nu(\Lambda^{-1}(x' - a)),$$

і довільної замкнутої просторово-подібної поверхні Q, яка обмежує об'єм Δ, можна записати:

$$\int\limits_{Q'} d\sigma^\mu(x')F'_\mu(x') = \int\limits_{\Delta'} dx'\partial'^\mu F'_\mu(x') = \int\limits_{\Delta} dx|\det\Lambda|\,\partial'^\mu\Lambda^\nu_\mu F_\nu(x) =$$

$$= \int\limits_{\Delta} dx\,\partial^\nu F_\nu(x) = \int\limits_{Q} d\sigma^\nu(x)F_\nu(x). \tag{4.45}$$

У другій рівності використана інваріантність просторово-подібних інтервалів (див. пропозицію 1.1.) відносно власних перетворень Лоренца, а також формула (4.7).

Вибираючи тепер у формулі (4.45) поверхню Q у вигляді ST (див. формулу (4.43)), а

$$F_\mu(x) = \begin{cases} i\overline{\varphi_1^-(x)}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\varphi_2^-(x), & x \in S \\ \\ 0, & x \in T, \end{cases}$$

одержимо ($x' = \Lambda x + a$)

$$i\int\limits_{S'} d\sigma^\mu(x')\overline{\varphi_1^-(x')}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\varphi_2^-(x') = i\int\limits_{S} d\sigma^\mu(x)\varphi_1^-(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\varphi_2^-(x),$$

що еквівалентно (4.42).

Поряд із одночастинковим гільбертовим простором $\mathscr{H}_1$ введемо *n–частинковий гільбертів простір* $\mathscr{H}_n$.

Визначимо його наступним чином. Розглянемо функції $f_n\ (\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$, що залежать від векторів $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$, $\mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^3$, для яких

$$\int |f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)|\, d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n < \infty.$$

Сукупність таких функцій є гільбертовим простором, якщо скалярний добуток двох елементів $g_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ і $f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ ввести звичайним чином:

$$(g_n, f_n) = \int \overline{g_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)}f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n, \tag{4.46}$$

а норму—за формулою $\|f_n\| = (f_n, f_n)^{1/2}$.

За допомогою перетворення Фур'є введемо гільбертів простір у конфігураційному просторі і покажемо, що цей перехід є унітарним оператором. Визначимо функцію $\hat{f}_n\ (x_1, \ldots, x_n)$ в конфігураційному просторі через функцію $f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ в імпульсному просторі за допомогою формули

$$\hat{f}_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int e^{-i \sum\limits_{j=1}^{n} k_j \cdot x_j} f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \frac{d\mathbf{k}_1}{\sqrt{2k_1^0}} \ldots \frac{d\mathbf{k}_n}{\sqrt{2k_n^0}}. \qquad (4.47)$$

Нагадаємо, що $k_i^0 = \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m^2}$. Скалярний добуток $\hat{g}_n(x_1, \ldots, x_n)$ і $\hat{f}_n(x_1, \ldots, x_n)$ визначимо згідно з (4.26) за формулою

$$(\hat{g}_n, \hat{f}_n) = i^n \int \overline{\hat{g}_n(x_1, \ldots, x_n)} \overleftrightarrow{\partial}_1^0 \ \ldots \ \overleftrightarrow{\partial}_n^0 \hat{f}_n(x_1, \ldots, x_n) d\mathbf{x}, \ldots, d\mathbf{x}_n, \qquad (4.48)$$

де оператор $\overleftrightarrow{\partial}_j^0$ діє на j-ту змінну так само, як і в формулі (4.26).

Так само, як і у випадку одночастинкових розв'язків, легко перевірити, що визначення (4.46) і (4.48) збігаються, а перехід із імпульсного простору в конфігураційний є унітарним оператором.

Функції $\hat{f}_n(x_1, \ldots, x_n)$ за кожною змінною задовольняють рівняння Клейна–Гордона–Фока

$$(\Box_{x_j} - m^2)\hat{f}_n(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Їх можна будувати як лінійні комбінації добутків від'ємно-частотних розв'язків рівняння (4.6), а простір $\mathscr{H}_n$ є замиканням лінійних комбінацій $\varphi_{i_1}^- \cdots \varphi_{i_n}^-(x_n)$ за нормою в $\mathscr{H}_n$.

Якщо норма функції $f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)$ дорівнює одиниці, то $|f_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n)|^2$ можна інтерпретувати як густину розподілу імовірностей в імпульсному просторі n-частинок.

У просторі $\mathscr{H}_n$ можна побудувати унітарне представлення групи Лоренца, якщо задати оператор $U_{\Lambda,a}$ тими самими формулами (4.40) за кожною змінною, тобто

$$(U_{\Lambda,a}\hat{f})_n(x_1, \ldots, x_n) = \hat{f}_n(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_n - a)). \qquad (4.49)$$

4.7. Лагранжів формалізм скалярного поля. Динамічні інваріанти

Як уже було з'ясовано в попередніх пунктах, при спробі надати розв'язкам рівняння Клейна–Гордона–Фока звичайне квантово-механічне тлумачення з'являються труднощі, що пов'язані з індефінітністю густини $\rho(x)$ і наявністю розв'язків із від'ємним значенням енергії. У цьому пункті буде показано, що всі труднощі усуваються, якщо розглядати $\varphi(x)$ як скалярне поле, що відповідає елементарним частинкам і розрахувати енергію, імпульс, заряд та інші інваріанти

згідно з принципами формалізму Лагранжа, який викладено в § 3. Розглянемо загальний випадок комплексного скалярного поля $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, тобто фактично двокомпонентного скалярного поля. Зручніше, однак, замість двох дійсних функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ розглядати функції $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ і $\overset{*}{\varphi}(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$. Обидві ці функції задовольняють рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6). Тому згідно з (4.20)–(4.22) маємо представлення:

$$\varphi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}\, e^{\pm ikx} \varphi^{\pm}(\mathbf{k}), \tag{4.50}$$

$$\overset{*}{\varphi}{}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}\, e^{\pm ikx} \overset{*}{\varphi}{}^{\pm}(\mathbf{k}). \tag{4.51}$$

Причому у формулі (4.51) $\overset{*}{\varphi}{}^{+}(x)$ ($\overset{*}{\varphi}{}^{-}(x)$) означає не комплексно спряжену величину до $\varphi^{+}(x)$ ($\varphi^{-}(x)$), а додатно-частотну (від'ємно-частотну) компоненту поля $\overset{*}{\varphi}(x)$. Тому варто навести правила комплексного спряження для полів $\varphi^{\pm}(x)$:

$$(\varphi^{+}(x))^* = \overset{*}{\varphi}{}^{-}(x), \quad (\varphi^{-}(x))^* = \overset{*}{\varphi}{}^{+}(x), \tag{4.52}$$

$$(\varphi^{+}(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{\varphi}{}^{-}(\mathbf{k}), \quad (\varphi^{-}(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{\varphi}{}^{+}(\mathbf{k}), \tag{4.53}$$

які можна отримати з представлень (4.50), (4.51).

Тепер у зв'язку з тим, що буде розглядатися $\varphi(x)$ як класичне поле, а рівняння (4.6) як рівняння для цього поля, виникає задача побудувати лагранжіан $\mathscr{L}(x) = \widetilde{\mathscr{L}}(\varphi, \overset{*}{\varphi})$ таким чином, щоб рівняння Лагранжа–Ейлера (3.47) збігалося з рівнянням Клейна–Гордона–Фока (4.6). Враховуючи всі вимоги п.3.3, приходимо до наступного виразу для лагранжіану:

$$\mathscr{L}(x) = \partial_\mu \overset{*}{\varphi}(x)\, \partial^\mu \varphi(x) - m^2\, \overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x). \tag{4.54}$$

Маючи вираз для лагранжіану, легко побудувати тензор енергії-імпульсу згідно з (3.60):

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \overset{*}{\varphi}(x)\, \partial^\nu \varphi(x) + \partial^\nu \overset{*}{\varphi}(x)\, \partial^\mu \varphi(x) - g^{\mu\nu} \mathscr{L}(x).$$

Звідси маємо:

$$T^{00} = \partial_\mu \overset{*}{\varphi}(x)\, \partial_\mu \varphi(x) + m^2\, \overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x) \tag{4.55}$$

і

$$T^{0k} = \partial^0 \overset{*}{\varphi}(x)\, \partial^k \varphi(x) + \partial^k \overset{*}{\varphi}(x) \partial^0 \varphi(x). \tag{4.56}$$

Тепер 4-вектор енергії-імпульсу отримаємо з формули (3.61), підставляючи туди вирази (4.55) і (4.56). Вираз 4-вектора енергії-імпульсу у координатному просторі є дуже незручним для дослідження, тому скористаємося представленням полів через додатно-частотні і від'ємно-частотні компоненти і їх вирази

(4.50),(4.51) через фур'є-компоненти і запишемо його в імпульсному просторі. Розрахуємо, наприклад, вираз для енергії P^0. Якщо підставити в (4.55) та (3.61) замість полів $\varphi(x)$ та $\overset{*}{\varphi}(x)$ їх представлення через $\varphi^{\pm}(x)$ та $\overset{*}{\varphi}^{\pm}(x)$, то завдяки квадратичності за φ і $\partial_\mu\varphi$ виразу для T^{00} отримаємо:

$$P^0 = P^0_{++} + P^0_{--} + P^0_{+-} + P^0_{-+},$$

де (наприклад)

$$P^0_{++} = \int d\mathbf{x}(\partial_\mu \overset{*}{\varphi}^+(x)\partial_\mu\varphi^+(x) + m^2\overset{*}{\varphi}^+(x)\varphi^+(x)). \tag{4.57}$$

Підставимо в (4.57) відповідні вирази з (4.50), (4.51) і скористаємося відомою формулою перетворення Фур'є для δ-функції Дірака:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}\, e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') := \delta(k^{(1)}+k'^{(1)})\delta(k^{(2)}+k'^{(2)})\delta(k^{(3)}+k'^{(3)}). \tag{4.58}$$

Тоді маємо

$$P^0_{++} = \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0}\overset{*}{\varphi}^+(\mathbf{k})\varphi^+(-\mathbf{k})\, e^{2ik^0x^0}(m^2 - k^{0^2} + \mathbf{k}^2) = 0.$$

Остання рівність є наслідком релятивістського співвідношення (4.4) між енергією та імпульсом частинки: $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Аналогічні розрахунки показують, що $P^0_{--} = 0$. При обчисленні P^0_{+-} і P^0_{-+} треба врахувати, що інтегрування за $d\mathbf{x}$ дасть $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, а експоненти з часовим показником будуть мати протилежні знаки аргументів. Тому внаслідок цього маємо

$$P^0_{+-} + P^0_{-+} = \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0}(m^2 + k^{0^2} + \mathbf{k}^2)[\overset{*}{\varphi}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \overset{*}{\varphi}^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k})].$$

Враховуючи (4.4), маємо остаточний вираз для енергії вільного скалярного поля:

$$P^0 = \int d\mathbf{k}\, k^0[\overset{*}{\varphi}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \overset{*}{\varphi}^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k})], \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \tag{4.59}$$

Аналогічно розраховується вираз для 3-вектора імпульсу. Остаточно

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}\, k^\mu[\overset{*}{\varphi}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \overset{*}{\varphi}^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k})]. \tag{4.60}$$

Використовуючи формули (3.65), (3.66), (3.72) і (3.73), можна так само обчислити вирази для моменту кількості руху, електричного струму і заряду. Випишемо тут вираз для 4-вектора густини струму $j^\mu(x)$ і заряду Q(див. задачу 4.3):

$$j^\mu(x) = i\, q\, g^{\mu\nu}\,\overset{*}{\varphi}(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu\varphi(x),$$

$$Q = q \int j^0(x) d\mathbf{x} = q \int d\mathbf{k} \left[\overset{*}{\varphi}{}^+(\mathbf{k}) \varphi^-(\mathbf{k}) - \overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k}) \varphi^*(\mathbf{k}) \right], \tag{4.61}$$

де q – це заряд частинки, що описується полем $\varphi(x)$, а вираз (4.61) можна інтерпретувати як повний заряд системи. З формул (4.59), (4.61) видно, що величину $\overset{*}{\varphi}{}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) = |\varphi^-(\mathbf{k})|^2$ можна розглядати як густину середнього числа частинок з енергією k^0, імпульсом $\mathbf{k}$ і зарядом $+q$, а величину $\overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k}) = |\varphi^+(\mathbf{k})|^2$ – як густину середнього числа часток з енергією k^0, імпульсом $\mathbf{k}$, зарядом $-q$.

Таким чином, комплексне скалярне поле описує заряджені частинки. Від'ємно-частотні розв'язки $\varphi^-(x)$ є хвильовою функцією частинки з зарядом $+q$, а $\overline{\varphi^+(x)} = \overset{*}{\varphi}{}^-(x)$—хвильовою функцією частинки з зарядом $-q$, тобто рівняння Клейна–Гордона–Фока описує частинки і античастинки.

На завершення розділу наведемо за аналогією до класичної механіки вирази для узагальнених канонічно спряжених координат та імпульсів. Узагальненими координатами є значення полів $\overset{*}{\varphi}(x)$ та $\varphi(x)$. Тоді відповідними є такі вирази для канонічно спряжених величин (див. (3.75)):

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_0 \overset{*}{\varphi}(x))} = \partial_0 \varphi(x), \tag{4.62}$$

$$\overset{*}{\pi}(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \varphi(x))} = \partial_0 \overset{*}{\varphi}(x). \tag{4.63}$$

Вираз для енергії через канонічні координати та імпульси має такий вигляд (див. (3.76)):

$$P^0 = \int d\mathbf{x} [\overset{*}{\pi}(x)\pi(x) + \boldsymbol{\nabla} \overset{*}{\varphi}(x) \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi(x) + m^2 \overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)]. \tag{4.64}$$

§ 5. Спінорне поле

У попередньому параграфі було встановлено, що загальні розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока не можна трактувати як хвильові функції частинок, оскільки густина імовірності, що відповідає цим розв'язкам, може приймати від'ємні значення. Було з'ясовано, що причиною цього є та обставина, що це рівняння другого порядку, і густина ймовірності виражається через хвильову функцію та її похідну, які в початковий момент можуть задаватись довільними функціями. Щоб запобігти цьому, треба, щоб у виразі для густини ρ не було похідних за часом. Тому хвильове рівняння повинно включати похідну хвильової функції за часом не вище першого порядку. З другого боку, вимога релятивістської коваріантності вимагає, щоб і похідні за просторовими координатами були не вище першого порядку, тобто це повинно бути лінійне диференціальне

рівняння першого порядку. До таких висновків прийшов Дірак у 1828 р., аналізуючи труднощі, що склалися у зв'язку з інтерпретацією розв'язків рівняння Клейна – Гордона – Фока. Це спонукало Дірака до відкриття нового релятивістського рівняння, яке назвали на його честь.

5.1. Рівняння Дірака

5.1.1. Вивід рівняння Дірака

Щоб отримати нове рівняння, треба врахувати всі наведені вище аргументи і той факт, що це рівняння повинно описувати вільну частинку маси m, а отже, хвильова чи польова функція, що задовольняє це рівняння, повинна також задовольняти рівняння Клейна–Гордона–Фока, оскільки воно є наслідком співвідношення (4.4) між енергією та імпульсом релятивістської частинки. Тому природно, що Дірак дійшов до такого рівняння, розкладаючи диференціальний оператор другого порядку у лівій частині (4.6) на два лінійні оператори першого порядку. Дійсно, з означення (4.5) видно, що оператор д'Аламбера $\Box$ можна записати у вигляді

$$\Box = \widehat{P}^{\mu}\widehat{P}_{\mu}, \quad \widehat{P}_{\mu} = i\partial_{\mu}. \tag{5.1}$$

Будемо тепер шукати лінійний оператор $\widehat{P}$ у вигляді

$$\widehat{P} = \widehat{P}_{\mu}\gamma^{\mu}, \tag{5.2}$$

де γ^{μ}–деякі постійні величини, такі, щоб

$$(\Box - m^2) = (\widehat{P} - m)(\widehat{P} + m). \tag{5.3}$$

Підставляючи (5.1),(5.2) у вираз (5.3) і прирівнюючи коефіцієнти при $\widehat{P}^{\mu}\widehat{P}^{\nu}$, отримаємо таке співвідношення для величин γ^{μ}:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

Величини γ^{μ} не можуть бути числами, оскільки вони антикомутують при $\mu \neq \nu$. Отже, у скінченновимірному випадку їх можна виразити у вигляді матриць(*матриць Дірака*). Якщо у просторі, де діють матриці γ^{μ}, вибрати деяку матрицю O, яка має обернену O^{-1}, і побудувати нові матриці

$$\gamma'^{\mu} = \pm O\gamma^{\mu}O^{-1}, \tag{5.5}$$

то легко перевірити, що матриці (5.5) задовольняють таким же антикомутаційним співвідношенням (5.4). Тому представлення антикомутаційних співвідношень (5.4) може бути задане з точністю до невиродженого перетворення (5.5). Отже, тепер можна вимагати, щоб функції поля, які задовольняють рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6), задовольняли також одному із рівнянь першого порядку

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi(x) = 0 \tag{5.6}$$

або

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{5.7}$$

Рівняння (5.6),(5.7) є менш загальними, ніж рівняння (4.6), і тому містять більш детальну інформацію про частинки, що описуються полем $\psi(x)$. За основне рівняння для $\psi(x)$ приймають рівняння (5.7). Через матричний характер оператора $i\gamma^\mu\partial_\mu$ функція $\psi(x)$ є багатокомпонентною, а число її компонент визначається рангом матриці γ^μ. У наступному підпункті визначимо ранг матриць γ^μ і встановимо їх властивості.

5.1.2. Властивості матриць Дірака. Спряжене рівняння

Завдяки тому, що індекси μ, ν приймають скінченне число значень 0, 1, 2, 3, використовуючи (5.4), можна побудувати всеможливі добутки та лінійні комбінації цих добутків з усіма можливими комплексними коефіцієнтами. Отримана таким чином множина буде інваріантною відносно операцій додавання і множення на комплексні числа, тобто утворюватиме деяку а л г е б р у $\mathscr{A}$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Скористаємося відомим фактом із теорії представлень алгебри (див., наприклад, [18]), що ранг n незвідного матричного представлення пов'язаний із числом N лінійно-незалежних елементів алгебри $\mathscr{A}$ співвідношенням:

$$N = n^2. \tag{5.8}$$

Утворимо за допомогою γ^μ, $\mu = \overline{0,3}$, шістнадцять матриць Γ_i, $i = \overline{1,16}$, що є усіма можливими добутками матриць γ^μ і уявної одиниці:

$$\mathbb{1} = \frac{1}{4}g^{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad i\gamma^\mu, \quad \sigma^{\mu\nu} := i\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}i(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\ (\mu < \nu),$$
$$\gamma^5 := -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \mathcal{D}^\mu := \gamma^\mu\gamma^5 \quad (\mu = 0,1,2,3). \tag{5.9}$$

Усі останні добутки можна звести до цих шістнадцяти за допомогою (5.4). Доведемо три основні властивості матриць Γ_i:

1. $\Gamma_i^2 = 1,\ \Gamma_i\Gamma_j = \zeta\Gamma_k,\ i \neq j,\ i,j,k = \overline{1,16},\ \zeta = \pm 1$ або $\pm i (i = \sqrt{-1})$.

Ці властивості легко перевірити, використовуючи (5.4):

2. $$\mathrm{Tr}\,\Gamma_i = 0, \quad i = \overline{2,16}.$$

Ця властивість випливає з інваріантності сліду від добутку матриць відносно циклічних перестановок

$$\mathrm{Tr}\,ABC = \mathrm{Tr}\,BCA = \mathrm{Tr}\,CAB.$$

Дійсно, користуючись тим, що $\mathbb{1} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu\gamma^\mu$ (немає сумування) і співвідношеннями (5.4) при $\mu \neq \nu$, маємо

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\nu = g^{\mu\mu}\mathrm{Tr}\,\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu = g^{\mu\mu}\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\mu =$$

$$= -g^{\mu\mu}\mathrm{Tr}\,\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\mu = -\mathrm{Tr}\,\gamma^\nu,$$

що можливо тільки при $\operatorname{Tr}\gamma^\nu = 0$. Аналогічно отримаємо

$$\operatorname{Tr}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \operatorname{Tr}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0) = -\operatorname{Tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0,$$
$$\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^5 = \operatorname{Tr}\gamma^5\gamma^\mu = -\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^5 = 0,$$

оскільки γ^μ і γ^5 антикомутують, що випливає з означення γ^5 і співвідношень (5.4). І, нарешті, при $\mu \neq \nu$ з властивостей сліду і комутації (5.4) випливає:

$$\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = \operatorname{Tr}\gamma^\nu\gamma^\mu = -\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 0.$$

3. Матриці Γ_i, $i = \overline{1,16}$, лінійно незалежні, тобто

$$\sum_{i=1}^{16}\alpha_i\Gamma_i = 0$$

тільки тоді, коли всі числа α_i, $i = \overline{1,16}$, тотожно рівні нулю. Дійсно, обраховуючи операцію сліду від обох частин останньої рівності і враховуючи властивість 2, одержуємо, що $\alpha_1 \equiv 0$. Далі, домножуючи цю рівність на Γ_k, $k = \overline{2,16}$, і враховуючи властивості 1 і 2, маємо $\alpha_k \equiv 0$. Отже, алгебру $\mathscr{A}$ можна побудувати за допомогою 16-ти лінійно незалежних матриць Γ_i, які утворюють базис. Тому згідно з виразом (5.8) $n^2 = 16$, а $n = 4$. Як було зауважено: конкретний вигляд матриць γ^μ, що задовольняють співвідношенням (5.4), може бути заданий із точністю до невиродженого перетворення (5.5). Найбільш часто зустрічаються такі представлення:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix},\ \gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathbb{0} \end{pmatrix},\ \gamma^5 \equiv -\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

у яких діагональною є матриця γ^0, і

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix},\ \gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

у якому діагональною є матриця[1)] $\gamma^5 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а σ_k–матриці Паулі (1.25).

Всі останні представлення можна отримати з (5.10),(5.11) за допомогою перетворення (5.5). Представлення (5.11) інколи називають представленням Вейля.

Зауваження 5.1.

Вибір базису Γ_i так само, як і матриць γ^μ, не є однозначним. Тому у літературі формули для одних і тих самих величин можуть відрізнятись множниками ± 1 або $\pm i$. Для перевірки знаку треба завжди з'ясувати, з яким конкретним представленням матриць γ^μ ви маєте справу.

[1)] У монографії [102] $\gamma_5 = -\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Крім матриць γ^μ, часто зустрічаються матриці α_k, β, σ_k, ρ_k, які безпосередньо пов'язані з матрицями γ^μ співвідношеннями, які у різних авторів можуть відрізнятися знаком або множником $\pm i$,–

$$\alpha^k = \gamma^0\gamma^k,\ \beta = \gamma^0,\ \sigma_k = \gamma^5\gamma^k\gamma^0,\ \rho_1 = -\gamma^5,\ \rho_2 = i\gamma^0\gamma^5,\ \rho_3 = \gamma^0. \tag{5.12}$$

На завершення цього пункту зауважимо, що внаслідок перетворення (5.5), вибираючи $O = \gamma^5$, можна змінити знак перед γ^μ, і тоді рівняння (5.6) і (5.7) поміняються місцями. Польова функція $\psi(x)$ є комплексною. Рівняння для $\overset{*}{\psi}(x)$ можна отримати зі співвідношення (5.7), якщо врахувати правило ермітового спряження матриць γ^μ:

$$\overset{*}{\gamma}{}^0 = \gamma^0, \quad \overset{*}{\gamma}{}^k = -\gamma^k,\ k = 1, 2, 3, \tag{5.13}$$

що випливає з (5.10) і (5.11). Тоді з (5.7) отримаємо рівняння:

$$i\partial_\mu \overset{*}{\psi}\, g^{\mu\mu}\gamma^\mu + m\overset{*}{\psi} = 0. \tag{5.14}$$

Для того, щоб зберегти вигляд, подібний виразу (5.7), домножимо справа (5.14) на γ^0. Тоді, визначаючи функцію:

$$\bar{\psi}(x) = \overset{*}{\psi}(x)\gamma^0, \tag{5.15}$$

яка називається дираківськи спряженою функцією, отримаємо для неї рівняння

$$i\partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0. \tag{5.16}$$

Функцію $\psi(x)$ зручно розглядати як 4-компонентний стовпчик, який будемо називати 4-компонентним с п і н о р о м:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Тоді $\overset{*}{\psi}$ буде мати вигляд стрічки або транспонованого спінора з комплексно спряженими компонентами:

$$\overset{*}{\psi}(x) = (\overset{*}{\psi}_1(x), \ldots, \overset{*}{\psi}_4(x)), \tag{5.18}$$

а рівняння (5.7) або (5.16) можна записати як систему рівнянь для компонент $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = \overline{1,4}$:

$$(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta})\psi_\beta(x) = 0. \tag{5.19}$$

5.2. Релятивістська інваріантність

Фізичні явища, які описуються рівнянням Дірака, не повинні залежати від системи відліку, що означає інваріантність їх відносно перетворень (1.20). Ця вимога задає правила перетворення функцій поля $\psi(x)$ і $\bar{\psi}(x)$. У цьому підрозділі ми проведемо дослідження лоренц-інваріантності рівняння (5.7) відносно перетворень (1.20) і встановимо його зв'язок з представленнями неоднорідної групи Лоренца.

5.2.1. Трансформаційні властивості спінорного поля

Згідно з (4.7) і (4.7') $\partial_\nu = \Lambda^\mu_\nu \partial'_\mu$ або у матричній формі $\partial = \Lambda^T \partial'$. Тому оператор $i\gamma^\nu \partial_\nu$ переходить в оператор $i\gamma^\nu \Lambda^\mu_\nu \partial'_\mu$. Нехай перетворення функції $\psi(x)$ задається формулою

$$\psi'(x') = S(\Lambda, a)\psi(x), \tag{5.20}$$

де $S(\Lambda, a)$—матриця з коефіцієнтами, що залежать від параметрів (Λ, a) і задовольняє групову властивість

$$S(\Lambda_2, a_2)S(\Lambda_1, a_1) = S(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2), \quad S(\mathbb{1}, 0) = \mathbb{1}.$$

Ця рівність є наслідком того, що матриці $S(\Lambda, a)$ при різних (Λ, a) задають представлення групи Пуанкаре у просторі, до якого належать функції $\psi(x)$.

Матрицю $S(\Lambda, a)$ будемо шукати, дотримуючись вимоги, щоб рівняння для $\psi'(x')$ у системі відліку $\{x'\}$ ($x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$) мало такий самий вигляд, як і рівняння (5.7) для $\psi(x)$ у системі відліку $\{x\}$. Підставимо у (5.7) $\psi(x) = S^{-1}(\Lambda, a)\psi'(x')$, а замість оператора Дірака $i\gamma^\nu\partial_\nu - m$ оператор $i\gamma^\nu\Lambda^\mu_\nu\partial'_\mu - m$. Тоді маємо, що

$$(i\gamma^\nu \Lambda^\mu_\nu \partial'_\mu - m)S^{-1}(\Lambda, a)\psi'(x') = 0. \tag{5.21}$$

Домноживши вираз (5.21) на $S(\Lambda, a)$ зліва, отримаємо

$$(iS(\Lambda, a)\gamma^\nu \Lambda^\mu_\nu S^{-1}(\Lambda, a)\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0.$$

Легко пересвідчитися: для того, щоб для $\psi'(x')$ рівняння Дірака мало вигляд (5.7), треба, щоб

$$S(\Lambda, a)\gamma^\nu \Lambda^\mu_\nu S^{-1}(\Lambda, a) = \gamma^\mu$$

або

$$\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda, a)\gamma^\mu S(\Lambda, a). \tag{5.22}$$

Щоб знайти явний вигляд матриці $S(\Lambda, a)$, скористаємося груповою властивістю цих матриць як таких, що задають представлення групи Пуанкаре, і тим фактом, що довільне перетворення неоднорідної групи Лоренца $x' = Lx = \Lambda x + a$ можна подати у вигляді добутку двох перетворень: чистого лоренцового повороту Λx, а потім трансляції на 4-вектор a. Відповідно до цього матрицю $S(\Lambda, a)$ будемо шукати у вигляді

$$S(\Lambda, a) = S(\mathbb{1}, a)S(\Lambda, 0) := S(\mathbb{1}, a)S(\Lambda).$$

Завдяки тому, що для чистих трансляцій $\partial'_\mu = \partial_\mu$, то з вимоги лоренц-інваріантності випливає, що $S(\mathbb{1}, a) = \mathbb{1}$, а тому досить визначити матрицю $S(\Lambda)$.

Згідно із зауваженням 1.1, щоб знайти $S(\Lambda)$ для загального лоренцового перетворення, досить знайти цю матрицю для власної ортохронної неперервної підгрупи, тобто коли $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$, і дискретних перетворень $\widehat{P}$, $\widehat{T}$, $\widehat{P}\widehat{T}$ (див. (1.17) – (1.19)).

Розглянемо спершу нескінченно малі ($0 < \varepsilon << 1$) лоренцові 4-повороти:

$$\Lambda = \mathbb{1} + \varepsilon\lambda, \quad x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{5.23}$$

З умови (1.12) випливає, що $\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$ ($\lambda^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha}\lambda^\mu_\alpha$). Матрицю $S(\Lambda)$ відповідно до перетворення (5.23) будемо шукати у вигляді

$$S(\mathbb{1} + \varepsilon\lambda) = \mathbb{1} + \varepsilon T, \quad S^{-1}(\mathbb{1} + \varepsilon\lambda) = \mathbb{1} - \varepsilon T. \tag{5.24}$$

Тоді рівняння (5.22) набуде вигляду

$$\gamma^\mu + \varepsilon\lambda^\mu_\nu\gamma^\nu = (\mathbb{1} - \varepsilon T)\gamma^\mu(\mathbb{1} + \varepsilon T).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях ε і нехтуючи нескінченно малою величиною порядку ε^2, отримаємо

$$\gamma^\mu T - T\gamma^\mu = \lambda^\mu_\nu\gamma^\nu. \tag{5.25}$$

Покажемо, що рівняння (5.25) має єдиний розв'язок із точністю до адитивного члена, рівного матриці, що кратна одиничній.

Дійсно, якщо існує інша матриця T', для якої

$$\gamma^\mu T' - T'\gamma^\mu = \lambda^\mu_\nu\gamma^\nu, \tag{5.26}$$

тоді, віднімаючи (5.26) від (5.25), маємо

$$\gamma^\mu(T - T') - (T - T')\gamma^\mu = 0.$$

Отже, матриця $T - T'$ комутує з усіма матрицями γ^μ, а значить, і з усією алгеброю $\mathscr{A}$. Тоді за відомою лемою Шура (див., наприклад, [18]) вона кратна одиничній матриці. Якщо прийняти умову $\mathrm{Tr}\ T = 0$ (що еквівалентно нормуванню $\det S = 1$, бо $\det\Lambda = 1$ для $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$), то для таких матриць розв'язок рівняння (5.25) буде єдиним. Безпосередньою перевіркою, використовуючи правило комутації матриць γ^μ (5.4), легко перевірити, що

$$T = \frac{1}{4}\lambda_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu, \tag{5.27}$$

а $\mathrm{Tr}\ T = 0$.

Формула (5.27) дає змогу отримати вигляд довільного власного ортохронного перетворення. Очевидно, що для цього досить встановити вигляд оператора $S(\Lambda)$ для довільних поворотів у площинах (x^α, x^β), $\alpha, \beta = \overline{0,3}$. Нехай (наприклад, у площині (x^α, x^β)) такий поворот характеризується кутом повороту $\lambda_{\alpha\beta} \equiv \theta$. Тоді, враховуючи що $\lambda_{\beta\alpha} = -\theta$, а всі $\lambda_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \alpha$, $\nu \neq \beta$ або $\mu \neq \beta$, $\nu \neq \alpha$, з формули (5.27) отримаємо

$$T = \frac{1}{2}\theta\gamma^\alpha\gamma^\beta := \theta T^{\alpha\beta}. \tag{5.28}$$

Побудуємо оператор $S(\Lambda) = S_{\alpha\beta}(\theta) = S(\theta)$ у випадку, коли кут θ не є нескінченно малий. Знову скористаємося груповою властивістю $S(\theta_1 + \theta_2) = S(\theta_2)S(\theta_1)$ і виведемо диференціальне рівняння для матриці $S(\theta)$. Для цього розглянемо $\theta_1 = \theta$, а $\theta_2 = \Delta\theta$. У цьому разі маємо

$$\frac{S(\theta + \Delta\theta) - S(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{S(\theta)(S(\Delta\theta) - 1)}{\Delta\theta} = \frac{S(\theta)T^{\alpha\beta}\Delta\theta}{\Delta\theta}.$$

Тоді у границі $\Delta\theta \to 0$ знаходимо

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = S(\theta)T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}S(\theta), \quad S(\theta) = \mathbb{1}.$$

Звідки

$$S(\theta) = e^{\theta T^{\alpha\beta}} = e^{\frac{1}{2}\theta\gamma^\alpha\gamma^\beta}. \tag{5.29}$$

Матрицю $S(\Lambda)$, що відповідає довільному повороту, можна отримати як суперпозицію матриць, що відповідають поворотам у кожній із площин (x^α, x^β), $(\alpha, \beta) = \overline{0,3}$.

Розглянемо тепер два важливі часткові випадки. Спершу розглянемо перетворення, що відповідають тривимірним евклідовим поворотам у площинах (x^k, x^l), $k, l = \overline{1,3}$ на кут $\theta_{kl} = \theta$:

$$x'^k = x^k\cos\theta - x^l\sin\theta, \quad x'^l = x^l\cos\theta + x^k\sin\theta.$$

Відповідна матриця T_{kl} згідно з (5.28) має вигляд

$$T^{kl} = \frac{1}{2}\gamma^k\gamma^l. \tag{5.30}$$

Підставляючи (5.30) у вираз (5.29), розкладаючи експоненту в ряд Тейлора і користуючись співвідношеннями (5.4) для матриць γ^k, легко порахувати, що

$$S(\theta) = S(\theta_{kl}) = \mathbb{1}\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \gamma^k\gamma^l\sin\frac{\theta}{2}. \tag{5.31}$$

Розглянемо тепер перетворення Лоренца, що відповідають просторово-часовим перетворенням, тобто поворотам у площинах (x^0, x^k) на кут $\theta_{0k} = \theta$:

$$x'^0 = x^0\mathrm{ch}\,\theta - x^k\mathrm{sh}\,\theta, \quad x'^k = x^k\mathrm{ch}\,\theta - x^0\mathrm{sh}\,\theta.$$

Аналогічно з (5.28) знаходимо

$$T^{0k} = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^k,$$

і, відповідно, матриця $S(\theta)$ має вигляд

$$S(\theta) = S(\theta_{0k}) = \mathbb{1} \cdot \operatorname{ch}\frac{\theta}{2} - \gamma^0\gamma^k \operatorname{sh}\frac{\theta}{2}. \tag{5.32}$$

Щоб остаточно завершити побудову матриці $S(\Lambda)$ для довільного перетворення Лоренца Λ, залишилось розглянути дискретні перетворення (1.17) – (1.19), тобто $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ і $\widehat{P}\widehat{T}$ перетворення. Легко бачити, що при перетворенні (1.17), тобто просторовому віддзеркаленні $\widehat{P}$, оператор Дірака $i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma_k\partial'_k - m$ стає $i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^k\partial_k - m$. Тому рівняння Дірака знову буде мати вигляд (5.7), якщо

$$\psi'(x') = S(\Lambda_{i_s})\psi(x) = \eta_\psi^{\widehat{P}}\gamma^0\psi(x), \tag{5.33}$$

де $\eta_\psi^{\widehat{P}} = \pm 1$, або $\pm i$, оскільки, якщо домножити його зліва на γ^0, то

$$\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^k\partial_k - m)\gamma^0 = (i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^k\partial_k - m) = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m).$$

Аналогічні міркування приводять до того, що при часових віддзеркаленнях $\widehat{T}$ (1.18):

$$\psi'(x') = S(\Lambda_{i_t})\psi(x) = \eta_\psi^{\widehat{T}}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi(x) = \eta_\psi^{\widehat{T}}\gamma^0\gamma^5\psi(x). \tag{5.34}$$

Зауваження 5.2. *При часових віддзеркаленнях (1.18) можливе інше тлумачення інваріантності, а саме тоді, коли рівняння (5.7) для перетвореного спінора $\psi'(x')$ збігається з рівнянням (5.16) для діраківськи спряженого спінора $\bar\psi(x)$. У цьому випадку часовій інверсії (1.18) відповідає антилінійне перетворення:*

$$\psi'(x') = \eta_\psi^{\widehat{T}}\gamma^1\gamma^3\gamma^0\bar\psi^T(x). \tag{5.35}$$

У цьому легко пересвідчитись, якщо врахувати властивості матриць γ^μ при операції транспонування (див. (5.10) – (5.11),(1.25)):

$$\gamma^{0^T} = \gamma^0, \quad \gamma^{1^T} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2^T} = \gamma^2, \quad \gamma^{3^T} = -\gamma^3. \tag{5.36}$$

Дійсно, тоді рівняння $(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$ перетворюється у рівняння

$$(-i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 + i\gamma^3\partial_3 - m)\gamma^1\gamma^3\gamma^0\bar\psi^T(x) = 0.$$

Домножуючи його зліва на $\gamma^1\gamma^3\gamma^0$ і враховуючи властивості матриць γ^μ (5.4) і (5.36), отримаємо

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)^T\bar\psi^T(x) = 0,$$

що збігається з транспонованим виглядом рівняння (5.16).

Далі буде з'ясовано, що саме антилінійне перетворення (5.35) відповідає фізично правильному вибору перетворення електронно-позитронного поля при часових відзеркаленнях.

Перетворення діраківськи спряженого спінора, що відповідає (5.35), матиме вигляд

$$\bar{\psi}'(x') = -\overset{*}{\eta}\overset{\widehat{T}}{_{\psi}}\psi^T(x)\gamma^1\gamma^3\gamma^0. \tag{5.37}$$

Зрозуміло, що

$$S(\Lambda_{i_{st}}) = S(\Lambda_{i_t}\Lambda_{i_s}) = S(\Lambda_{i_t})S(\Lambda_{i_s}).$$

Вибір константи зробимо тоді, коли визначимо перетворення зарядового спряження.

На завершення цього підпункту зауважимо, що з формули (5.31) легко встановити двозначність представлення $S(\Lambda)$, оскільки $S(0) = \mathbb{1}$, а повному повороту на кут $\theta = 2\pi$ відповідає матриця $S(2\pi) = -\mathbb{1}$. Величини, що перетворюються за двозначним лінійним представленням групи Лоренца, називаються *спінорами*.

І, нарешті, запишемо закон перетворення спінора $\psi(x)$ для довільного неоднорідного перетворення Лоренца як функції, тобто в одній і тій самій точці x простору Мінковського:

$$\psi'(x) = S(\Lambda, a)\psi(\Lambda^{-1}(x-a)), \tag{5.38}$$

де $S(\Lambda, a)$ визначаються формулами (5.31) і (5.32) залежно від вигляду перетворення.

5.2.2. Про звідні та незвідні спінорні представлення

У пункті 1.4 було коротко проаналізовано представлення $D^{1/2,0}$ та $D^{0,1/2}$ групи Лоренца. Польові функції, які перетворюються за цими представленнями, є 2-компонентними спінорами. У зв'язку з цим виникає питання, яке відношення мають 4-компонентні спінори Дірака до 2-компонентних спінорів, які перетворюються за незвідними представленнями. Виявляється, що представлення (5.31) і (5.32), що відповідають власним ортохронним перетворенням, тобто підгрупі $\mathscr{L}_+^{\uparrow}$, є звідними. Щоб у цьому переконатись, зручно використати представлення γ матриць у вигляді (5.11). Тоді легко підрахувати, користуючись формулами (5.31),(5.32), що відповідні матриці мають вигляд

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} S_1(\theta) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & S_2(\theta) \end{pmatrix},$$

де $S_i(\theta)$, $i = 1, 2$ – матриці 2×2.

Аналогічний вигляд має також матриця T (5.27), у чому можна пересвідчитись прямим підрахунком. Матриця $S(\theta)$ діє на 4-компонентний спінор ψ (5.17) таким чином, що компоненти $\{\psi_1, \psi_2\}$ і компоненти $\{\psi_3, \psi_4\}$ перетворюються незалежно, що й означає: представлення (5.31), (5.32) є звідним. Проте якщо

розглядати повну групу Лоренца, то треба врахувати також просторові та часові віддзеркалення (див. (5.33), (5.34)). Такі перетворення переставляють двокомпонентні спінори, що перетворюються за представленнями $D^{1/2,0}$ і $D^{0,1/2}$, місцями, і для того, щоб теорія була інваріантна відносно цих перетворень, треба розглядати 4-компонентні спінори. Отже завершуємо розгляд релятивістської інваріантності спінорних полів вивченням трансформаційних властивостей білінійних форм $\bar\psi(x)O\psi(x)$, де O – деяка невироджена матриця. Такі форми часто зустрічаються при побудові різних фізичних величин.

5.2.3. Трансформаційні властивості білінійних форм $\bar\psi O\psi$

Розглянемо спершу, як перетворюється спряжений за Діраком спінор при лоренцових поворотах та віддзеркаленнях. Будемо виходити з означення $\bar\psi(x) = \overset{*}{\psi}(x)\gamma^0$ і законів трансформації (5.20). Тоді

$$\bar\psi'(x') = (S(\Lambda)\psi(x))^*\gamma^0 = \overset{*}{\psi}(x)\,\overset{*}{S}(\Lambda)\gamma^0 = \bar\psi(x)\gamma^0\,\overset{*}{S}(\Lambda)\gamma^0.$$

Покажемо, що

$$\gamma^0\,\overset{*}{S}(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda). \tag{5.39}$$

Щоб довести формулу (5.39), досить встановити її справедливість для безмежно малих перетворень Λ, тобто для матриці $\mathbf{1}+\varepsilon T$. Для цього треба довести, що

$$\gamma^0\,\overset{*}{T}\,\gamma^0 = -T,$$

а це випливає з формули

$$\begin{aligned}\gamma^0\,\overset{*}{T}\,\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{1}{4}\lambda_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)^*\gamma^0 = \frac{1}{4}\lambda_{\mu\nu}\gamma^0\,\overset{*}{\gamma}{}^\nu\,\overset{*}{\gamma}{}^\mu\gamma^0 = \\ &= \frac{1}{4}\lambda_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu = -\frac{1}{4}\lambda_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu = -T,\end{aligned}$$

де використали співвідношення (5.13), (5.4) і антисиметричність $\lambda_{\mu\nu}$. Тоді остаточно одержуємо

$$\bar\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}(\Lambda). \tag{5.40}$$

При віддзеркаленні просторових координат запишемо

$$\bar\psi'(x') = (\eta_\psi^{\widehat{P}}\gamma^0\psi(x))^*\gamma^0 = \overset{*}{\eta}{}_\psi^{\widehat{P}}\bar\psi(x)\gamma^0 = \bar\psi(x)S^{-1}(\Lambda_{i_s}).$$

І, нарешті, при часовому віддзеркаленні маємо

1. Для лінійних перетворень (5.34):

$$\bar\psi'(x') = \bar\psi(x)\gamma^0(\eta_\psi^{\widehat{T}}\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^*\gamma^0 = -\overset{*}{\eta}{}_\psi^{\widehat{T}}\bar\psi(x)\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -\bar\psi(x)\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

тобто закон трансформації має вигляд

$$\bar{\psi}'(x') = -\bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda_{i_t}). \tag{5.41}$$

Отже, з формул (5.20), (5.40) і (5.41) випливає, що при довільних лоренцових перетвореннях

$$\bar{\psi}'(x')O\psi'(x') = \pm\bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)OS(\Lambda)\psi(x). \tag{5.42}$$

2. Для антилінійних перетворень (5.35), (5.37):

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')O\psi'(x') &= -|\eta_\psi^{\widehat{T}}|^2\psi^T(x)\gamma^1\gamma^3\gamma^0O\gamma^1\gamma^3\gamma^0\bar{\psi}^T(x) = \\ &= -\psi^T(x)(\gamma^1\gamma^3\gamma^0O^T\gamma^1\gamma^3\gamma^0)^T\bar{\psi}^T(x) = \\ &= -[\bar{\psi}(x)(\gamma^1\gamma^3\gamma^0O^T\gamma^1\gamma^3\gamma^0)\psi(x)]^T = \\ &= -\bar{\psi}(x)(\gamma^1\gamma^3\gamma^0O^T\gamma^1\gamma^3\gamma^0)\psi(x).\end{aligned}$$

Розглянемо частинні випадки:

1. $O = 1$.

Тоді з виразу (5.42) видно, що при лоренцових поворотах білінійна форма $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ перетворюється як скаляр, при часовому віддзеркаленні, що відповідає лінійним перетворенням (5.34), як псевдоскаляр, а для антилінійних перетворень (5.35)– знову як скаляр, оскільки $(\gamma^1\gamma^3\gamma^0)^2 = -\mathbb{1}$, а $|\eta_\psi^{\widehat{T}}|^2 = 1$.

2. $O = \gamma^\mu$.

Тоді з формули (5.42) і (5.22) маємо

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \pm\Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x),$$

тобто при лоренцових поворотах величина $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ перетворюється як звичайний 4-вектор, а по відношенню до часового відзеркалення вона є псевдовектором (для лінійного перетворення (5.34)).

3. $O = \gamma^5$.

Виходячи з означення матриці $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ і формули (5.22), легко порахувати, що

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3S(\Lambda)\psi(x) =$$

$$= \frac{1}{4!}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\Lambda^\rho_\delta\Lambda^\sigma_\varepsilon\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}(x)\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\varepsilon\psi(x) = (\det\Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x), \tag{5.43}$$

де використано співвідношення

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

і

$$(\det\Lambda)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\Lambda^\rho_\gamma\Lambda^\sigma_\delta,$$

а $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$—повністю антисиметричний одиничний тензор з $\varepsilon_{0123} = 1$.

З формули (5.43) видно, що величина $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ перетворюється як *скаляр* при власних ($\det\Lambda = +1$) перетвореннях Лоренца і як *псевдоскаляр* при всіх перетвореннях з $\det\Lambda = -1$.

4. $O = \gamma^5\gamma^\mu$.

Аналогічним чином форма $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ при лоренцових поворотах перетворюється як *4-вектор*, а при віддзеркаленнях змінює знак, тобто перетворюється як *псевдовектор*.

5. $O = \dfrac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \sigma^{\mu\nu}$. (5.44)

Цю величину називають матричним тензором спіну.

З тих самих міркувань можна показати, що величини $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ є компонентами антисиметричного коваріантного тензора (псевдотензора) другого роду і т.д.

Знаючи трансформаційні властивості білінійних форм $\bar{\psi}O\psi$, можна будувати довільні інваріантні величини, що описують взаємодії різних полів.

5.3. Розв'язки рівняння Дірака

5.3.1. Структура розв'язків в імпульсному просторі

Як вже відзначалося у п. 5.1.1, розв'язки рівняння Дірака (5.7) є одночасно розв'язками рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6) і тому їх можна записати у такому вигляді

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\, e^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)\tilde{\psi}(k). \tag{5.45}$$

Щоб знайти $\tilde{\psi}(k)$, підставимо (5.45) у рівняння (5.7). Тоді отримаємо, що

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\, e^{ik\cdot x}\delta(k^2 - m^2)(i\gamma^\mu ik_\mu - m)\tilde{\psi}(k) = 0.$$

Внаслідок єдиності перетворення Фур'є знаходимо, що

$$\delta(k^2 - m^2)(\gamma^\mu k_\mu + m)\tilde{\psi}(k) = 0,$$

звідки

$$(\hat{k} + m)\tilde{\psi}(k)|_{k^2=m^2} = 0. \tag{5.46}$$

Крім того, так само, як і для розв'язків рівняння Клейна–Гордона–Фока (див. формули (4.20) – (4.22)), запишемо поле $\psi(x)$ у вигляді суми додатно і від'ємно-частотних складових:

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x), \tag{5.47}$$

$$\psi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\, e^{\pm ik\cdot x}\psi^\pm(\mathbf{k}), \tag{5.48}$$

де

$$\psi^\pm(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\psi}(\pm k^0, \pm\mathbf{k})}{2k^0}, \quad k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \tag{5.49}$$

Нагадаємо, що формули (5.47) – (5.49) легко отримати з (5.45), застосовуючи формулу (4.19). Тоді з виразів (5.46) і (5.49) маємо рівняння для $\psi^{\pm}(\mathbf{k})$:

$$(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\gamma} + m)\psi^{+}(\mathbf{k}) = 0, \tag{5.50}$$

$$(-k^0\gamma^0 + \mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\gamma} + m)\psi^{-}(\mathbf{k}) = 0. \tag{5.51}$$

Розглянемо спершу рівняння (5.51). Домножуючи його на γ^0 і враховуючи (5.4) і (5.12), маємо

$$(\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\alpha} + m\gamma^0)\psi^{-}(\mathbf{k}) = k^0\psi^{-}(\mathbf{k}), \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \tag{5.52}$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\psi^{-}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \psi_1^{-}(\mathbf{k}) \\ \psi_{11}^{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix},$$

де $\psi_1(\mathbf{k})$ і $\psi_{11}^{-}(\mathbf{k})$—двокомпонентні спінори, а представлення для матриць γ^{μ} виберемо у вигляді (5.10). Тоді рівняння (5.52) запишеться так:

$$\left[\mathbf{k}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_1^{-}(\mathbf{k}) \\ \psi_{11}^{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = k^0\begin{pmatrix} \psi_1^{-}(\mathbf{k}) \\ \psi_{11}^{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix},$$

а рівняння для двокомпонентних спінорів $\psi_1^{-}(\mathbf{k})$ і $\psi_{11}^{-}(\mathbf{k})$ будуть мати вигляд:

$$\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\sigma}\psi_{11}^{-}(\mathbf{k}) + m\psi_1^{-}(\mathbf{k}) = k^0\psi_1^{-}(\mathbf{k}), \tag{5.53}$$

$$\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\sigma}\psi_1^{-}(\mathbf{k}) - m\psi_{11}^{-}(\mathbf{k}) = k^0\psi_{11}^{-}(\mathbf{k}). \tag{5.54}$$

З рівняння (5.54) виходить, що

$$\psi_{11}^{-}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m}\psi_1^{-}(\mathbf{k}). \tag{5.55}$$

Підставляючи вираз (5.55) у (5.53), отримаємо

$$\frac{(\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\sigma})^2}{k^0 + m}\psi_1^{-}(\mathbf{k}) + m\psi_1^{-}(\mathbf{k}) = k^0\psi_1^{-}(\mathbf{k}). \tag{5.56}$$

Користуючись (1.25), легко обрахувати, що $(\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{k}^2$, а (5.65) набуде вигляду

$$\frac{\mathbf{k}^2 + m^2 - k^{0^2}}{k^0 + m}\psi_1^{-}(\mathbf{k}) = 0. \tag{5.57}$$

Внаслідок того, що $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, рівняння (5.57) тотожно обертається в нуль для довільних $\psi_1^{-}(\mathbf{k})$. Отже, загальним розв'язком рівняння (5.51) є 4-компонентний спінор

$$\psi^{-}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \psi_1^{-}(\mathbf{k}) \\ \\ \dfrac{\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\sigma}}{k^0 + m}\psi_1^{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \tag{5.58}$$

де $\psi_1^-(\mathbf{k})$—довільний 2-компонентний спінор.

Зовсім аналогічно можна отримати розв'язок рівняння (5.50). Його можна записати так:

$$\psi^+(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{k^0+m}\psi_{11}^+(\mathbf{k}) \\ \\ \psi_{11}^+(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \tag{5.59}$$

де $\psi_{11}^+(\mathbf{k})$—довільний 2-компонентний спінор.

5.3.2. Класифікація розв'язків. Спіральність

Рівняння (5.50) і (5.51) можна записати у вигляді рівняння для власних значень (так само, як (5.52)):

$$H(\pm\mathbf{k})\psi^\pm(\mathbf{k}) = \pm k^0\psi^\pm(\mathbf{k}),$$

де

$$H(\mathbf{k}) = \gamma^0\gamma^n k^n + m\gamma^0 = \ \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k} + m\gamma^0$$

можна інтерпретувати як оператор Гамільтона вільної діраковської частинки. При цьому так само, як і при розгляді рівняння Клейна–Гордона–Фока, виникають труднощі з інтерпретацією розв'язків з від'ємною енергією для вільної частинки. Це питання буде розглянуто у п. 5.3.4, а зараз повернемося до питання вибору довільних 2-компонентних спіноров $\psi_1^-(\mathbf{k})$ і ψ_{11}^+ у виразах (5.58) і (5.59). Довільний 2-компонентний спінор $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ можна розкласти, наприклад, за двома лінійно-незалежними 2-компонентними спінорами $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Цей факт вказує на те, що частинки при фіксованому значенні k^0 можуть перебувати у двох різних станах. Покажемо, що ці стани пов'язані з двома можливими проекціями спіна на напрямок руху частинки, що є інтегралами руху. Так само, як і у квантовій механіці, вектор-оператор спіну пропорційний вектор-матриці Паулі $\boldsymbol{\sigma}$ або, точніше, враховуючи обидва значення знака енергії $\pm k^0$, вектор-матриці

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \\ \\ \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

Тоді легко зрозуміти, що оператор, який відповідає проекції спіну на напрям руху, можна записати у вигляді

$$S(\mathbf{k}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \tag{5.61}$$

Цей оператор називається оператором *спіральності*. Він комутує з оператором Гамільтона $H(\mathbf{k})$. Дійсно,

$$[H(\mathbf{k}),\ S(\mathbf{k})]_- = \left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{k} + m\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\right]\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}\cdot\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} -$$

$$-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\cdot\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\left[\begin{pmatrix}\mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{k}+m\begin{pmatrix}\mathbb{1} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & -\mathbb{1}\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\frac{1}{|\mathbf{k}|}\begin{pmatrix}\mathbb{O} & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})^2\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})^2 & \mathbb{O}\end{pmatrix}+\frac{m}{|\mathbf{k}|}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})\end{pmatrix}-$$
$$-\frac{1}{|\mathbf{k}|}\begin{pmatrix}\mathbb{O} & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})^2\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})^2 & \mathbb{O}\end{pmatrix}-\frac{m}{|\mathbf{k}|}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})\end{pmatrix}=0.$$

Цей факт свідчить про те, що $S(\mathbf{k})$ і $H(\mathbf{k})$ мають спільні власні вектори. А співвідношення

$$S^2(\mathbf{k})=\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})^2 & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k})^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{1} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{1}\end{pmatrix}$$

вказує на те, що власні значення оператора $S(\mathbf{k})$ дорівнюють ±1 внаслідок ермітовості оператора $S(\mathbf{k})$. Будемо вимагати, щоб розв'язки (5.58) (або (5.59)) були власними функціями оператора і спробуємо знайти такі значення довільних 2-компонентних спінорів $\psi_1^-(\mathbf{k})$ (або $\psi_{11}^+(\mathbf{k})$), які б відповідали власним числам ±1. Проробимо це спершу для $\psi^-(\mathbf{k})$. Отже,

$$S(\mathbf{k})\psi^-(\mathbf{k})=\pm\psi^-(\mathbf{k}). \tag{5.62}$$

З виразів (5.58) і (5.60) знаходимо, що

$$\begin{aligned}&\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\psi_1^-(\mathbf{k})=\pm\psi_1^-(\mathbf{k}),\\ &\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{k^0+m}\psi_1^-(\mathbf{k})=\pm\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{k^0+m}\psi_1^-(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{5.63}$$

Зрозуміло, що друге рівняння є наслідком першого. Знайдемо розв'язки рівнянь (5.63). Позначимо одиничний вектор напрямку руху через $\mathbf{n}=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|=(n_1,n_2,n_3)$. Тоді рівняння (5.63) для двох компонент спінора

$$\psi_1^-(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\psi_{1;1}^-(\mathbf{k})\\ \\ \psi_{1;2}^-(\mathbf{k})\end{pmatrix}$$

запишеться у вигляді однорідної системи двох лінійних рівнянь, які легко отримати, враховуючи явний вигляд матриць Паулі (1.25):

$$\begin{aligned}&(n_3\mp1)\psi_{1;1}^-(\mathbf{k})+(n_1-in_2)\psi_{1;2}^-(\mathbf{k})=0\\ &(n_1+in_2)\psi_{1;1}^-(\mathbf{k})+(-n_3\mp1)\psi_{1;2}^-(\mathbf{k})=0.\end{aligned}$$

Однорідна система має нетривіальний розв'язок, якщо визначник системи перетворюється в нуль. Дійсно,

$$\begin{vmatrix}n_3\mp1 & n_1-in_2\\ n_1+in_2 & -n_3\mp1\end{vmatrix}=1-n_3^2-n_2^2-n_1^2=1-\mathbf{n}^2=1-1=0.$$

Тоді два лінійно незалежні, нормовані розв'язки, що відповідають власним значенням $\lambda = \pm 1$ оператора $S(\mathbf{k})$, можна вибрати у вигляді

$$v_1^{1,-}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+in_2 \end{pmatrix} \quad \text{для } \lambda = +1 \tag{5.64}$$

і

$$v_1^{2,-}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \begin{pmatrix} -n_1+in_2 \\ n_3+1 \end{pmatrix} \quad \text{для } \lambda = -1. \tag{5.65}$$

Зауваження 5.3. *Легко пересвідчитись, що в системі координат $k^1 = k^2 = 0$, $k^3 = -|\mathbf{k}| = -1$, розв'язок (5.65) тотожно перетворюється в нуль, оскільки $n_1 = n_2 = 0$, а $n_3 = -1$. У цьому випадку замість розв'язків (5.64) – (5.65) треба взяти інші нормовані розв'язки:*

$$v_1^{1,-}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1-n_3)}} \begin{pmatrix} n_1-in_2 \\ 1-n_3 \end{pmatrix} \quad \textit{для } \lambda = +1$$

$$v_1^{2,-}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1-n_3)}} \begin{pmatrix} 1-n_3 \\ -n_1-in_2 \end{pmatrix} \quad \textit{для } \lambda = -1,$$

які не можна брати при $n_3 = 1$. А при $n_3 = -1$ вони мають вигляд

$$v_1^{1,-}(0,0,-|\mathbf{k}|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1^{2,-}(0,0,-|\mathbf{k}|) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи вирази (5.58) і (5.63) та зауваження 5.3, остаточні нормовані розв'язки рівняння (5.62) для від'ємно-частотної компоненти можна записати у наведеному нижче вигляді.

Для власного значення спіну $\lambda = +1$:

$$v^{1,-}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}} \frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}} \begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+in_2 \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(n_3+1) \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(n_1+in_2) \end{pmatrix}, \; n_3 \neq -1, \tag{5.66}$$

$$v^{1,-}(\mathbf{k})|_{n_3=-1} = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m} \end{pmatrix}. \tag{5.67}$$

Для власного значення спіну $\lambda = -1$:

$$v^{2,-}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}}\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} -n_1+in_2 \\ n_3+1 \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(n_1-in_2) \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(-n_3-1)\end{pmatrix},\ n_3\neq -1, \tag{5.68}$$

$$v^{2,-}(\mathbf{k})|_{n_3=-1} = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m} \\ \\ 0\end{pmatrix}. \tag{5.69}$$

Рівняння на власні значення для додатно-частотної (що відповідає від'ємним значенням енергії $-k^0(k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2})$) власної функції (5.59)

$$S(\mathbf{k})\psi^+(k) = \pm\psi^+(\mathbf{k}) \tag{5.70}$$

зводиться до таких самих рівнянь (5.63) для 2-компонентного спінора $\psi^+_{11}(\mathbf{k})$, тобто

$$\psi^+_{11}(\mathbf{k}) = v^{\nu,+}_{11}(\mathbf{k}) = v^{\nu,-}_{1}(\mathbf{k}),\quad \nu = 1,2.$$

Тоді, враховуючи (5.59), остаточно запишемо нормований розв'язок рівняння (5.70) у вигляді, поданому нижче.

Для власного значення спіну $\lambda = +1$:

$$v^{1,+}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}}\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(n_3+1) \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(n_1+in_2) \\ \\ n_3+1 \\ n_1+in_2\end{pmatrix},\ n_3\neq -1, \tag{5.71}$$

і

$$v^{1,-}(\mathbf{k})|_{n_3=-1} = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}}\begin{pmatrix} 0 \\ \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m} \\ \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}. \tag{5.72}$$

Для власного значення спіну $\lambda = -1$:

$$v^{2,+}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}}\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(-n_1+in_2) \\ \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m}(n_3+1) \\ n_1-in_2 \\ -n_3-1 \end{pmatrix},\ n_3 \neq -1 \qquad (5.73)$$

і

$$v^{2,-}(\mathbf{k})|_{n_3=-1} = \sqrt{\frac{k^0+m}{2k^0}}\begin{pmatrix} \dfrac{|\mathbf{k}|}{k^0+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.74)$$

Отже, 4-компонентні спінори (5.67)–(5.72) є власними функціями операторів *енергії* $H(\mathbf{k})$ і *спіральності* $S(\mathbf{k})$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} H(\mathbf{k})v^{\nu,\mp}(\mathbf{k}) = \pm k^0 v^{\nu,\mp}(\mathbf{k}), & k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2},\ \nu = 1,2 \\ S(\mathbf{k})v^{1,\mp}(\mathbf{k}) = +v^{1,\mp}(\mathbf{k}), & \nu = 1 \\ S(\mathbf{k})v^{2,\mp}(\mathbf{k}) = -v^{2,\mp}(\mathbf{k}), & \nu = 2. \end{array}} \qquad (5.75)$$

Довільні додатно і від'ємно-частотні спінори $\psi^{\pm}(\mathbf{k})$ можна розкласти за нормованими спінорами $v^{\nu,\pm}(\mathbf{k})$

$$\psi^{\pm}(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1}^{2} a_\nu^{\pm}(\mathbf{k})v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}), \qquad (5.76)$$

як і для спінора спряженого за Діраком:

$$\bar\psi^{\pm}(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1}^{2} \overset{*}{a}{}_\nu^{\pm}(\mathbf{k})\bar v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}), \quad \bar v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) = \overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}(k)\gamma^0, \qquad (5.77)$$

де

$$\overset{*}{a}{}_\nu^{\pm}(\mathbf{k}) = (a_\nu^{\mp}(\mathbf{k}))^*, \quad \overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) = (v^{\nu,\mp}(\mathbf{k}))^*. \qquad (5.78)$$

Тоді остаточні вирази для полів $\psi(x)$ і $\bar\psi(x)$ матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x), \\ &\psi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\, e^{\pm ik\cdot x}\sum_{\nu=1}^{2} a_\nu^{\pm}(\mathbf{k})v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) \end{aligned} \qquad (5.79)$$

і

$$\bar\psi(x) = \bar\psi^{+}(x) + \bar\psi^{-}(x),$$
$$\bar\psi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}\, e^{\pm ik\cdot x} \sum_{\nu=1}^{2} \overset{*}{a}{}^{\pm}_{\nu}(\mathbf{k}) \bar v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}). \tag{5.80}$$

5.3.3. Співвідношення між спінорами

Для конкретних обрахунків потрібні можливі співвідношення між спінорами $v^{\nu,\pm}$ і $\overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}$. Звичайно, ці співвідношення легко отримати з явного вигляду цих спінорів (5.64)–(5.74), а також співвідношень (5.78), але ці обрахунки досить громіздкі, і тому варто виписати деякі найбільш потрібні співвідношення у вигляді окремих формул.

Зрозуміло, що нормовані спінори $v^{1,\pm}(\mathbf{k})$ і $v^{2,\pm}(\mathbf{k})$ ортогональні, оскільки є власними векторами самоспряженого оператора спіральності $S(\mathbf{k})$ відповідно з власними значеннями $+1$ і -1. Це співвідношення ортогональності запишеться у такому вигляді (враховуючи (5.78)):

$$\boxed{\overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) v^{\mu,\mp}(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1}^{4} \overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}_{\alpha}(\mathbf{k}) v^{\mu,\mp}_{\alpha}(\mathbf{k}) = \delta^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2.} \tag{5.81}$$

Співвідношення, аналогічне (5.81), для спінорів спряження за Діраком має вигляд:

$$\boxed{\bar v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) v^{\mu,\mp}(\mathbf{k}) = \pm \frac{m}{k^0} \delta^{\mu\nu}.} \tag{5.82}$$

Дійсно, спінор $v^{\mu,-}(\mathbf{k})$ є нормованим розв'язком рівняння (5.51) і тому

$$(-k^0\gamma^0 + \mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\gamma} + m) v^{\mu,-}(\mathbf{k}) = 0.$$

Домножуючи це рівняння зліва на $\overset{*}{v}{}^{\nu,+}(\mathbf{k})$, маємо

$$-k^0 \bar v^{\nu,+}(\mathbf{k}) v^{\mu,-}(\mathbf{k}) + k^n \overset{*}{v}{}^{\nu,+}(\mathbf{k}) \gamma^n v^{\mu,-}(\mathbf{k}) + m \overset{*}{v}{}^{\nu,+}(\mathbf{k}) v^{\mu,-}(\mathbf{k}) = 0.$$

Беручи операцію ермітового спряження і враховуючи, що $(\gamma^n)^* = -\gamma^n$, $n = 1,2,3$, отримаємо (переставляючи μ та ν)

$$-k^0 \bar v^{\nu,+}(\mathbf{k}) v^{\mu,-}(\mathbf{k}) - k^n \overset{*}{v}{}^{\nu,+}(\mathbf{k}) \gamma^n v^{\mu,-}(\mathbf{k}) + m \overset{*}{v}{}^{\nu,+}(\mathbf{k}) v^{\mu,-}(\mathbf{k}) = 0.$$

Додаючи ці рівняння і враховуючи (5.81), отримаємо перше співвідношення (5.82). Друге отримується аналогічно. Так само отримуються співвідношення ортогональності між спінорами з протилежними значеннями імпульсів:

$$\boxed{\overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) v^{\mu,\pm}(-\mathbf{k}) = 0.} \tag{5.83}$$

Для цього треба домножити рівняння (5.50) для $v^{\nu,+}(\mathbf{k})$ на $\bar{v}^{\mu,+}(-\mathbf{k})$, а рівняння (5.51) для $v^{\mu,-}(-\mathbf{k})$ на $\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})$ і в другому рівнянні виконати операцію спряження. Аналогічними прийомами можна отримати ще два такі співвідношення [13]:

$$\overset{*}{v}{}^{\mu,\pm}(\mathbf{k})[(k^n\gamma^m - k^m\gamma^n) - m\gamma^n\gamma^m]v^{\nu,\pm}(-\mathbf{k}) = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{3} k^m[\overset{*}{v}{}^{\mu,\pm}(\mathbf{k})(\gamma^m\gamma^n - \gamma^n\gamma^m)v^{\nu,\mp}(\mathbf{k})] = 0.$$

І, нарешті, завершимо розгляд цього підпункту формулами сумування за спіновим індексом $\mu = 1, 2$:

$$\sum_{\mu=1,2} v_\alpha^{\mu,+}(\mathbf{k})\bar{v}_\beta^{\mu,-}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{k} - m)\alpha\beta}{2k^0}, \tag{5.84}$$

$$\sum_{\mu=1,2} v_\alpha^{\mu,-}(\mathbf{k})\bar{v}_\beta^{\mu,+}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{k} + m)\alpha\beta}{2k^0}, \tag{5.85}$$

$$\hat{k} = k_\mu\gamma^\mu; \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

Доведемо, наприклад, (5.84). Розглянемо для цього рівняння (5.50) для лінійно незалежного розв'язку $v^{\mu,+}(\mathbf{k})$:

$$(k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\gamma} + m)v^{\mu,+}(\mathbf{k}) = 0. \tag{5.86}$$

Додамо до обох частин (5.86) тотожність (праву частину до правої, а ліву до лівої):

$$-2mv^{\mu,+}(\mathbf{k}) = -2m\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,+}(\mathbf{k})\delta^{\mu\nu} = 2k^0\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,+}(\mathbf{k})\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})v^{\mu,+}(\mathbf{k}),$$

де було використано співвідношення (5.82). Тоді маємо

$$\left[2k^0\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,+}(\mathbf{k})\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}) - (\hat{k} - m)\right]v^{\mu,+}(\mathbf{k}) = 0. \tag{5.87}$$

З рівняння (5.87) виходить: матриця, яка стоїть у квадратних дужках або знову зводиться до оператора $\hat{k} + m = k^0\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\gamma} + m$, який перетворює $v^{\mu,+}$ у нуль, або є тотожна нулю , що є аналогічним співвідношенню (5.84). Перший випадок приводить до того, що, наприклад, при $\mathbf{k} = 0$:

$$\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,+}(0)\bar{v}^{\nu,-}(0) = \gamma^0,$$

але, користуючись явним виглядом $v^{\mu,\pm}(\mathbf{k})$ (ф-ли (5.59), (5.72)), легко обрахувати:

$$\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,+}(0)\bar{v}^{\nu,-}(0) = \frac{1}{2}(\gamma^0 - \mathbb{I}),$$

що збігається з формулою (5.84) при $\mathbf{k} = 0$.

Отже, матриця, що стоїть у квадратних дужках у виразі (5.87), є тотожна нулю, що й доводить співвідношення (5.84). Аналогічно можна отримати співвідношення (5.85).

5.3.4. Хвильові функції електрона і позитрона. Операція зарядового спряження

З опису скалярних заряджених частинок видно, що повне поле $\varphi(x)$ не можна інтерпретувати як хвильову функцію частинки. Але якщо вибрати від'ємно-частотну частину $\varphi^-(x)$, що відповідає розв'язку з додатною енергією за хвильову функцію частинки, то хвильовою функцією античастинки буде від'ємно-частотна складова зарядово спряженої функції, тобто

$$\varphi^{c,-}(x) = (\widehat{C}\varphi)^-(x) = \overset{*}{\varphi}{}^-(x),$$

а додатно-частотна частина $\varphi^+(x)$ є комплексно спряженою величиною до хвильової функції античастинки.

Рівняння Дірака, так само як і рівняння Клейна–Гордона–Фока, має розв'язки з від'ємними значеннями енергії. У цьому легко пересвідчитись, записавши рівняння (5.7) у вигляді рівняння Шредінгера. Для цього треба у правій частині рівняння залишити лише член $i\gamma^0\partial_0$ і перенести всі інші члени у праву частину, домноживши все рівняння на матрицю γ^0. Внаслідок цього отримаємо рівняння:

$$i\frac{\partial}{\partial x^0}\psi(x) = (-i\gamma^0\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\,\boldsymbol{\nabla} + \gamma^0 m)\psi(x). \tag{5.88}$$

Тоді, згідно з отриманими розв'язками (5.56), польові функції $\psi^{\pm}_{\mp\mathbf{k}}(x^0) := \exp[\pm ik^0x^0]\psi^{\pm}(\mp\mathbf{k})$, що є перетвореннями Фур'є додатно і від'ємно-частотних розв'язків $\psi^{\pm}(x)$, будуть власними функціями оператора, що стоїть у правій частині рівняння Шредінгера (5.88) в імпульсному просторі

$$\widehat{H}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{k} + \gamma^0 m, \tag{5.89}$$

який можна інтерпретувати як гамільтоніан вільної дираківської частинки:

$$\widehat{H}\psi^{\pm}_{\mp\mathbf{k}}(x^0) = \mp k^0\psi^{\pm}_{\mp\mathbf{k}}(x^0).$$

Довгий час фізична інтерпретація розв'язків із від'ємною енергією викликала великі труднощі. У 1930 р. Дірак запропонував свою знамениту "теорію дірок", яка пізніше значно ініціювала відкриття античастинки для електрона

(тобто позитрона). Не будемо тут розглядати історичний аспект цієї проблеми і радимо читачу звернутись до монографії С. Швебера ([102], Гл. 4, § 7). Зауважимо тільки, що фізична інтерпретація розв'язків з від'ємною енергією для рівняння Клейна–Гордона–Фока з'явилась значно пізніше, після теорії рівняння Дірака:

Отже, з таких самих міркувань за *хвильову функцію* електрона можна прийняти від'ємно-частотний розв'язок рівняння Дірака

$$\Psi_{\text{ел.}}(x) = \psi^{-}(x). \tag{5.90}$$

Щоб з'ясувати фізичний зміст додатно-частотного розв'язку, знову розглянемо рівняння Дірака у зовнішньому електромагнітному полі $A_\mu(x)$. Тоді, виконуючи заміни (4.31) з $q = -e$ (заряд електрона), будемо мати для рівняння (5.7):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x), \tag{5.91}$$

і так само для рівняння (5.16):

$$(i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x)) = +e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x). \tag{5.92}$$

Рівняння, що описує поле, яке відповідає частинці з зарядом $+e$, тобто античастинці, повинно мати такий самий вигляд (5.91) з $+e$ замість $-e$, тобто

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^c(x) = +e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi^c(x), \tag{5.93}$$

де

$$\psi^c(x) = \widehat{C}\psi(x), \tag{5.94}$$

а $\widehat{C}$—оператор, що відповідає зарядовому спряженню. Рівняння (5.92) можна отримати з рівняння (5.91), якщо його транспонувати, домножити на деяку невироджену матрицю C, що задовольняє умові

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \tag{5.95}$$

і покласти

$$\psi^c(x) = \widehat{C}\psi(x) := C\bar{\psi}^T(x) = C(\overset{*}{\psi}(x)\gamma^0)^T. \tag{5.96}$$

Нагадаємо, що $\bar{\psi}(x)$—це спінор-стрічка, а $\bar{\psi}^T(x)$ це знову спінор-стовпчик, як і $\psi(x)$. Крім співвідношення (5.95), можна отримати ще одну умову на матрицю C, яка випливає з вимоги релятивістської інваріантності операції зарядового спряження і полягає в тому, що і спінор $\psi(x)$, і спінор $\psi^c(x)$ повинні мати однакові трансформаційні властивості при перетвореннях Лоренца, тобто

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= S(\Lambda)\psi(x), \\ \psi'^c(x') &= S(\Lambda)\psi^c(x). \end{aligned} \tag{5.97}$$

Тоді, згідно з (5.95), (5.96),

$$\psi'^c(x') = S(\Lambda)C\bar{\psi}^T(x), \tag{5.98}$$

а згідно з (5.95) і (5.40) записуємо

$$\psi'^c(x') = C\bar{\psi}'^T(x') = CS^{-1}(\Lambda)^T\bar{\psi}^T(x).$$

Порівнюючи (5.97) і (5.98), отримуємо

$$C^{-1}S(\Lambda)C = S^{-1}(\Lambda)^T.$$

Зокрема, для безмежно малих лоренцових поворотів (5.23), (5.24) і (5.27) маємо

$$C^{-1}\left(\mathbb{1} + \frac{1}{4}\varepsilon\lambda_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\right)C = \mathbb{1} - \frac{1}{4}\varepsilon\lambda_{\mu\nu}(\gamma^\mu\gamma^\nu)^T.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при довільних параметрах $\lambda_{\mu\nu}$, знаходимо, що $(\mu \neq \nu)$

$$C^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu C = -\gamma^{\nu T}\gamma^{\mu T}.$$

Враховуючи той факт, що матриці γ^μ задовольняють співвідношення (5.36), легко перевірити, що матриця C може бути вибрана у вигляді

$$C = \gamma^0\gamma^2. \tag{5.99}$$

Зауваження 5.4. *З наведених вище викладів зрозуміло, що перетворення (5.94) можна вибрати і у більш загальному вигляді*

$$\psi(x) \to \psi^c(x) = \widehat{C}\psi(x) = \eta_\psi^c C\bar{\psi}^T(x), \tag{5.100}$$

де з умови $\widehat{C}^2 = 1$ *треба, щоб*

$$\eta_\psi^c \overset{*}{\eta}{}_\psi^c = |\eta_\psi^c|^2 = 1.$$

На завершення цього підпункту зауважимо, що від'ємно-частотний розв'язок $\psi(x)$ рівняння Дірака, що є власною функцією оператора енергії в імпульсному просторі (див. 5.89), можна трактувати як хвильову функцію електрона, у той час як від'ємно-частотну частину зарядово спряженого спінора

$$\Psi_{\text{поз}}(x) = \psi^{c,-}(x) = \gamma^0\gamma^2(\bar{\psi}^-)^T = \gamma^0\gamma^2\gamma^0(\overset{*}{\psi}{}^-)^T \tag{5.101}$$

як хвильову функцію позитрона.

Звідси легко знайти, що

$$\psi^+(x) = \widehat{C}\Psi_{\text{поз}}(x), \tag{5.102}$$

тобто додатно-частотний розв'язок, що відповідає від'ємним значенням енергії, зв'язаний співвідношенням (5.102) з хвильовою функцією позитрона.

І тепер наведемо явний вигляд зарядово спряжених спінорів:

$$\begin{aligned}\psi^c(x) &= \psi^{c,+}(x) + \psi^{c,-}(x),\\ \psi^{c,\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k} e^{\pm ik\cdot x}\sum_{\nu=1}^{2} \overset{*}{a}{}^{\pm}_{\nu}(\mathbf{k}) v^{c,\nu,\pm}(\mathbf{k}),\end{aligned} \tag{5.103}$$

де згідно з (5.96)

$$v^{c,\nu,\pm}(\mathbf{k}) = C\left(\bar{v}^{\nu,\pm}(\mathbf{k})\right)^T. \tag{5.104}$$

5.3.5. $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$-перетворення

У підпункті 5.2.1 показано, що лінійні перетворення (5.33), (5.34) і антилінійне перетворення (5.35) забезпечує інваріантність рівняння Дірака при просторовій та часовій інверсії (1.17) та (1.18). Зупинимось більш детально на цих перетвореннях і виборі множника η.

З формули (5.33) випливає, що можна визначити операцію просторової інверсії для спінорів $\psi(x)$, які є розв'язками рівняння Дірака, формулою

$$\widehat{P}\psi(x) := \psi'(x) = \psi^{\widehat{P}}(x) = \eta^{\widehat{P}}_{\psi}\gamma^0\psi(x^0, -\mathbf{x}). \tag{5.105}$$

Розглянемо також перетворення зарядово спряженого спінора $\psi^c(x)$ при перетворенні (1.17). Згідно з визначеннями (5.94), (5.96) перетворений спінор $\psi'^c(x)$ визначається формулою

$$\psi'^c(x) = C\bar{\psi}'^T(x). \tag{5.106}$$

Тоді, враховуючи визначення (5.15), (5.94) і (5.96) та властивості (5.95), (5.36), можна записати

$$\begin{aligned}\widehat{P}\psi^c(x) &= \psi'^c(x) = C(\overset{*}{\psi}{}'\gamma^0)^T = C([\eta^{\widehat{P}}_{\psi}\gamma^0\psi(x^0,-\mathbf{x})]^*\gamma^0)^T =\\ &= \overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} C\overset{*}{\psi}{}^T(x^0,-\mathbf{x}) = \overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} C\gamma^0\bar{\psi}^T(x^0,-\mathbf{x}) =\\ &= \overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} C\gamma^0 C^{-1}\psi^c(x^0,-\mathbf{x}) = -\overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi}\gamma^0\psi^c(x^0,-\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{5.107}$$

Для визначення числового множника $\eta^{\widehat{P}}_{\psi}$ будемо виходити з того, що подвійна інверсія може бути еквівалентна або тотожному перетворенню, або повороту на кут $\theta = 2\pi$. У випадку тотожного перетворення $\eta^{\widehat{P}}_{\psi} = \pm 1$, а у випадку повного повороту на кут $\theta = 2\pi$ згідно з функцією (5.31) $S(2\pi) = -\mathbb{1}$, а, отже, $(\eta^{\widehat{P}}_{\psi})^2 = -1$, тобто $\eta^{\widehat{P}}_{\psi} = \pm i$. Щоб визначити, яке $\eta^{\widehat{P}}_{\psi}$ треба вибрати, будемо вимагати, щоб закон перетворення зарядово спряженого спінора $\psi^c(x)$ при

просторовій інверсії був такий самий, як і спінора $\psi(x)$. Порівнюючи (5.105) і (5.107), знаходимо, що $\overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} = -\eta^{\widehat{P}}_{\psi}$, тобто $\eta^{\widehat{P}}_{\psi} = \pm i$. Залежно від знаку "+" або "−" відрізняють два типи спінорних полів $\psi(x)$. Тобто може існувати два типи елементарних частинок, польові функції яких задовольняють одне і те саме рівняння Дірака, але по-різному перетворюються при перетвореннях просторової інверсії. Кажуть, що вони мають різну внутрішню парність.

Розглянемо тепер перетворення інверсії часу. У підпункті 5.2.1 встановлено, що при інверсії часу (1.18) можна забезпечити інваріантність вільного рівняння Дірака лінійним перетворенням (5.34) і антилінійним перетворенням (5.35). Але абсолютно вільного поля $\psi(x)$, пов'язаного з зарядженими частинками, не може існувати без його взаємодії з електромагнітним полем. Тому інваріантності треба вимагати від рівняння Дірака у електромагнітному полі, тобто рівняння (5.92) і (5.93). Крім того, як вже згадувалось у підпункті 4.5.3, у нерелятивістській квантовій механіці інверсія у часі приводить до антилінійного перетворення хвильової функції $\psi(r,t) \to \overset{*}{\psi}(r,-t)$. Тому природно визначити операцію часової інверсії для спінорів $\psi(x)$, що є розв'язками рівняння Дірака, формулою (див. (5.35))

$$\widehat{T}\psi(x) = \psi^{\widehat{T}}(x) = \eta^{T}_{\psi}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\bar{\psi}^T(-x^0,\mathbf{x}). \tag{5.108}$$

Щоб не заплутати читача у позначеннях, збережено знак " $\widehat{\ }$ " для операції часової інверсії, в той самий час як T без " $\widehat{\ }$ " означає операцію транспонування спінорів (див. (5.17) і (5.18)). Щоб довести інваріантність рівнянь (5.91) – (5.93) відносно перетворення (5.108), треба встановити закон перетворення електромагнітного поля відносно часової інверсії. Детально це питання буде розглянуто у наступному параграфі (§ 6), а зараз випишемо без доведення ці правила для просторової та часової інверсії:

$$x' = \Lambda_{i_s}x = (x^0,-\mathbf{x});\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \widehat{P}A_\mu(x) = A^{\widehat{P}}_\mu(x') = \\ = g^{\mu\mu}A_\mu(x) \quad (\text{немає сумування}), \tag{5.109}$$

$$x' = \Lambda_{i_t}x = (-x^0,\mathbf{x});\ A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \widehat{T}A_\mu(x) = A^{\widehat{T}}_\mu(x') = \\ = g^{\mu\mu}A_\mu(x) \quad (\text{нема сумування}). \tag{5.110}$$

Зауважимо, що із (5.109) і (5.105) легко випливає інваріантність рівняння (5.91) відносно перетворень просторової інверсії.

Покажемо тепер, що при інверсії часу рівняння Дірака у електромагнітному полі (5.91) для спінора $\psi^{\widehat{T}}(x)$ буде мати такий самий вигляд

$$(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi^{\widehat{T}}(x') = -e\gamma^\mu A^{\widehat{T}}_\mu(x')\psi^{\widehat{T}}(x'). \tag{5.111}$$

Дійсно, враховуючи (5.108) і (5.110), рівняння (5.111) набуває вигляду

$$\left(-i\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + i\gamma^k\partial_k - m\right)\gamma^0\gamma^1\gamma^3\bar{\psi}^T(x) = -e(\gamma^0A_0(x) - \gamma^kA_k(x))\gamma^0\gamma^1\gamma^3\bar{\psi}^T(x).$$

Домножуючи це рівняння на $\gamma^0\gamma^1\gamma^3$ зліва і враховуючи співвідношення (5.4) та (5.36), отримуємо рівняння (5.91).

Тепер так само, як і у випадку просторової інверсії, для визначення фазового множника $\eta_\psi^{\widehat{T}}$ з $|\eta_\psi^{\widehat{T}}|^2 = 1$ будемо вимагати, щоб зарядово спряжений спінор $\psi^c(x)$ перетворювався при інверсії часу $x' = \Lambda x$, як і спінор $\psi(x)$, тобто

$$\psi'^c(x') = \eta_\psi^{\widehat{T}}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\bar{\psi}^{c^T}(x). \tag{5.112}$$

Враховуючи визначення (5.96) і (5.15), а також властивості (5.13), (5.36), з (5.112) легко отримати, що (задача 5.2)

$$\psi'(x') = \overset{*}{\eta}{}_\psi^{\widehat{T}}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\bar{\psi}^T(x), \tag{5.113}$$

тобто, порівнюючи (5.113) і (5.108), отримаємо, що $\overset{*}{\eta}{}_\psi^{\widehat{T}} = \eta_\psi^{\widehat{T}}$, тобто $\eta_\psi^{\widehat{T}} = \pm 1$.

І на завершення обрахуємо повне $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$ перетворення:

$$\psi^{\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}}(x) = \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}\psi(x) = i\gamma^5\psi(-x^0, -\mathbf{x}).$$

Спінор $\psi^{\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}}(x)$ задовольняє рівняння (5.91).

5.4. Лагранжів формалізм

Щоб записати лагранжіан, що відповідає полю Дірака, треба вибрати його таким чином, щоб рівняння Ейлера–Лагранжа (3.47) збігалися з рівняннями Дірака (5.7) або (5.16) відповідно для полів $\psi(x)$ або $\bar{\psi}(x)$. Легко пересвідчитись, що ці рівняння збігаються, якщо вибрати лагранжіан у вигляді

$$\mathscr{L}(x) = \frac{i}{2}(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) - m\bar{\psi}(x)\psi(x). \tag{5.114}$$

Цей лагранжіан перетворюється в нуль, якщо поля ψ і $\bar{\psi}$ задовольняють рівняння (5.7) і (5.16), але варіації лагранжіану за полями $\psi(x)$ і $\bar{\psi}(x)$ відмінні від нуля.

Треба зауважити, що рівняння поля (5.7), (5.16) отримуються з варіаційного принципу (3.5), у якому фігурує не сам лагранжіан, а інтеграл від $\mathscr{L}(x)$ і тому до тих самих рівнянь приведе лагранжіан, який можна записати у такому вигляді:

$$\mathscr{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \tag{5.114′}$$

Легко побачити, що дія $\mathcal{A}$ для (5.114) і (5.114′) буде одна і та сама, якщо формально скористатись формулою інтегрування за частинами у другому доданку (5.114) (у виразі для $\mathcal{A}$), вважаючи, що поле на межі області інтегрування зникає.

Обрахуємо тепер основні динамічні інваріанти, що відповідають групам 4-трансляцій і 4-лоренцовим поворотам, а також градієнтним перетворенням

(2.2). Почнемо з вектора струму $j^\mu(x)$ і заряду Q. Використовуючи загальний вираз (3.72), маємо ($q = -e$)

$$j^\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{5.115}$$

і як наслідок теореми Нетер, рівняння неперервності

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{5.116}$$

є наслідком рівнянь (5.7) і (5.16).

Закон збереження заряду вимагає, щоб

$$\frac{\partial}{\partial x^0}Q = \frac{\partial}{\partial x^0}\int \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)\,d\mathbf{x} = 0.$$

Легко підрахувати, використовуючи вираз (5.114) і те, що $\mathscr{L}(x) = 0$ для ψ і $\bar{\psi}$, що задовольняють (5.7) і (5.16), що тензор $T^{\mu\nu}$ (див. (3.60)) буде мати вигляд

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{2}(\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\partial^\mu\psi(x) - \partial^\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)). \tag{5.117}$$

Звідси 4-вектор енергії імпульсу

$$P^\mu = \int d\mathbf{x}\,T^{0\mu}(x) = \frac{i}{2}\int d\mathbf{x}(\bar{\psi}(x)\gamma^0\partial^\mu\psi(x) - \partial^\mu\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)). \tag{5.118}$$

Враховуючи закон збереження (5.116) при $\mu = 0$ і інтегруючи за частинами при $\mu = 1, 2, 3$, вираз (5.118) можна переписати у такому вигляді

$$P^\mu = i\int d\mathbf{x}\,\bar{\psi}(x)\gamma^0\partial^\mu\psi(x). \tag{5.119}$$

При цьому , звичайно, треба припустити, що поле зникає на безмежності. Інколи вираз (5.119) записують у такому вигляді:

$$P^0 = H_0 = \int d\mathbf{x}\ \overset{*}{\psi}(x)(-i\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi(x), \tag{5.119′а}$$

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{x}\ \ \overset{*}{\psi}(x)(-i\ \boldsymbol{\nabla})(x). \tag{5.119′б}$$

Тут були використані рівняння (5.7) і означення (1.3) і (5.12).

Щоб підрахувати вираз для P^μ через імпульсні змінні, треба скористатися формулами для розв'язків рівнянь Дірака (5.79) і (5.80). Тоді, підставляючи ці вирази в (5.118) і використовуючи співвідношення ортогональності (5.81), отримаємо остаточний вираз (задача 5.3):

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}\,k^\mu\sum_{\nu=1}^{2}(\overset{*}{a}{}^+_\nu(\mathbf{k})a^-_\nu(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}^-_\nu(\mathbf{k})a^+_\nu(\mathbf{k})). \tag{5.120}$$

Із виразу (5.120) видно, що енергія P^0 не є додатною, оскільки амплітуди $a^{\pm}_{\nu}(\mathbf{k})$ і $\overset{*}{a}{}^{+}_{\nu}(\mathbf{k})$ є довільними функціями. Це є недоліком класичної теорії спінорного поля. Цей недолік буде усунено при квантуванні поля Дірака.

Момент кількості руху можна підрахувати аналогічним чином, підставляючи вираз (5.117) для $T^{\mu\nu}$ у формулу (3.66). Більш цікавим є підрахунок спінового моменту і виразу для вектора спіну. Щоб отримати ці вирази з рівнянь (3.69) – (3.70), порахуємо структурні коефіцієнти $A^{j}_{i(\mu\nu)}$, що відповідають перетворенню (3.63) функцій поля при нескінченно малих лоренцових поворотах (3.62). З формул (5.20), (5.24) і (5.27) знаходимо

$$\begin{aligned}\delta\psi(x) &= \psi'(x') - \psi(x) = \frac{1}{4}\varepsilon\lambda_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi(x) = \\ &= \frac{1}{8}\varepsilon\lambda_{\mu\nu}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\psi(x) = \frac{i}{4}\varepsilon\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = \\ &= +\frac{i}{2}\sum_{\mu<\nu}\varepsilon\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi(x), \qquad (5.121)\end{aligned}$$

де скористали антисиметричність величин $\lambda_{\mu\nu}$ і визначення матричного тензора спіну $\sigma^{\mu\nu}$ (див. (5.44)). Тоді для $u_i(x) \equiv \psi_i(x)$, прирівнюючи (5.121) і (3.63) і враховуючи, що $\delta\omega^{\mu\nu} = \varepsilon\lambda^{\mu\nu}$, знаходимо

$$A^{\psi,\mu\nu} = \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}.$$

Зауважимо, що індекси i, j у формулі (3.63) пробігали компоненти поля $u_j(x)$. Тому у формулі (5.121) вони пробігають компоненти спінора $\psi(x)$, а в структурних константах $A^{j,\mu\nu}_{i}$ вони відповідають матричним елементам матриці $\sigma^{\mu\nu}$. Аналогічно можна розрахувати структурні константи, що відповідають полю $u_i(x) = \bar{\psi}_i(x)$:

$$A^{\bar{\psi},\mu\nu} = -\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}.$$

Тоді тензор (3.65), що відповідає спіновому моменту у повністю контрваріантному вигляді, можна представити як

$$\begin{aligned}S^{\alpha,\mu\nu} &= -\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_{\alpha}\psi(x))}A^{\psi,\mu\nu}\psi(x) - \bar{\psi}(x)A^{\bar{\psi},\mu\nu}\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_{\alpha}\bar{\psi}(x))} = \\ &= \frac{1}{4}\bar{\psi}(x)\{\gamma^{\alpha}\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha}\}\psi(x). \qquad (5.122)\end{aligned}$$

Покладемо в (5.122) $\alpha = 0$ і тоді, згідно з (3.69), знаходимо, що

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\int d\mathbf{x}\ \bar{\psi}(x)\{\gamma^{0}\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{0}\}\psi(x). \qquad (5.123)$$

Для того, щоб обрахувати вектор спіну згідно з (3.70), покладемо в (5.122) $(\mu\nu) = (1,2)$, $(2,3)$ і $(3,1)$. Тоді, використовуючи властивості матриць γ^μ (див. (5.10) – (5.11)), знаходимо, що

$$\gamma^1\gamma^2 = -i\begin{pmatrix} \sigma_3 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2\gamma^3 = -i\begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3\gamma^1 = i\begin{pmatrix} \sigma_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді з (5.123) і (3.70) маємо

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\, \overset{*}{\psi}(x)\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\psi(x), \tag{5.124}$$

де $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\tilde\sigma^1, \tilde\sigma^2, \tilde\sigma^3)$

$$\tilde\sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma_k & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma_k \end{pmatrix},$$

а σ_k — матриці Паулі (1.25).

Переходячи за допомогою (5.48) до імпульсного представлення, знаходимо

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}[\overset{*}{\psi}{}^+(\mathbf{k})\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\psi^-(\mathbf{k}) + \overset{*}{\psi}{}^-(\mathbf{k})\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\psi^+(\mathbf{k}) + \\ &+ e^{2ik^0x^0}\ \overset{*}{\psi}{}^+(\mathbf{k})\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\psi^+(-\mathbf{k}) + e^{-2ik^0x^0}\ \overset{*}{\psi}{}^-(\mathbf{k})\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\psi^-(\mathbf{k})]. \end{aligned} \tag{5.125}$$

У загальному випадку два останні доданки не перетворюються в нуль. Це означає, що повний вектор спіну спінорного поля залежить від часу, тобто не є інтегралом руху. Згідно з теоремою Нетер інтегралом руху є повний (власний орбітальний плюс спіновий) момент (див. п. 3.7, ф-ли (3.67)–(3.69)). Однак у деяких випадках можна вибрати систему відліку таким чином, що буде зберігатись проекція спіну на напрям руху. Виберемо, наприклад, поле $\psi(x) = \psi'(x^0, x^{(3)})$. Це означає, що перетворення Фур'є має вигляд

$$\psi^\pm(\mathbf{k}) = \text{const}\cdot\delta(k^{(1)})\delta(k^{(2)})\sum_{\nu=1}^{2} a_\nu^\pm(\mathbf{k})v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}).$$

Обрахуємо у цій системі координат компоненту S^3 вектора спіну (5.125).

Легко порахувати, використовуючи явний вигляд спінорів $v^{\nu,\pm}(\mathbf{k})$ (див. (5.67), (5.72)), що

$$\overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}(\mathbf{k})\tilde\sigma^3 v^{\mu,\pm}(-\mathbf{k})|_{k^1=k^2=0} = 0,$$

враховуючи також, що $\overset{*}{v}{}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}) = (v^{\nu,\mp}(\mathbf{k}))^*$.

Тоді для S^3 маємо

$$\begin{aligned} S^3 &= \text{const}\ \frac{1}{2}\int \mathrm{dk}^3 \sum_{\mu,\nu=1}^{2}[\overset{*}{a}{}_\nu^+(\mathbf{k})a_\mu^-(\mathbf{k})\ \overset{*}{v}{}^{\nu,+}(\mathbf{k})\tilde\sigma^3 v^{\mu,-}(\mathbf{k}) + \\ &+ \overset{*}{a}{}_\nu^-(\mathbf{k})a_\mu^+(\mathbf{k})\ \overset{*}{v}{}^{\nu,-}(\mathbf{k})\tilde\sigma^3 v^{\mu,+}(\mathbf{k})]\Big|_{k^1=k^2=0}. \end{aligned}$$

Знову з явного вигляду спінорів $v^{\nu,\pm}(\mathbf{k})$ при $k^1 = k^2 = 0$, $n_3 = +1$ або $n_3 = -1$ знаходимо

$$\begin{aligned} S^3 &= \text{const } \frac{1}{2}\int \mathrm{dk}^3[\overset{*}{a}{}_1^+(\mathbf{k})a_1^-(\mathbf{k}) + \overset{*}{a}{}_1^-(\mathbf{k})a_1^+(\mathbf{k}) - \\ &- \overset{*}{a}{}_2^+(\mathbf{k})a_2^-(k) - \overset{*}{a}{}_2^-(\mathbf{k})a_2^+(\mathbf{k})_{k^1=k^2=0}. \end{aligned} \tag{5.126}$$

Нарешті, на завершення цього пункту розрахуємо інтеграл руху, що є наслідком інваріантності теорії відносно градієнтних перетворень першого роду (2.2) або в інфінітезимальній формі (3.71). Тоді згідно з (3.72) величина, що відповідає тензору θ_n^μ у теоремі Нетер, є вектор струму, який легко обрахувати, підставляючи (5.114) у формулу (3.72) і враховуючи, що $u(x) \equiv \psi(x)$, а $\overset{*}{u}(x) \equiv \overset{*}{\psi}(x)$, отримаємо (5.115), а величина, що зберігається, є заряд

$$Q = -e\int d\mathbf{x}\ \overset{*}{\psi}(x)\psi(x). \tag{5.127}$$

Якщо застосувати до виразу (5.127) ті ж самі міркування, що і при розрахунку вектора P^μ, то прийдемо до виразу (задача 5.4):

$$Q = -e\int d\mathbf{x}\sum_{\nu=1}^{2}(\overset{*}{a}{}_\nu^+(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k}) + \overset{*}{a}{}_\nu^-(\mathbf{k})a_\nu^+(\mathbf{k})). \tag{5.128}$$

Знак "$-$"означає, що частинками є від'ємно заряджені електрони. У теорії Дірака величину $-j^0(x)$ можна інтерпретувати як густину ймовірності, оскільки вона є додатною величиною, але при цьому енергія (5.119'а) не є додатна, і якщо Q розглядати як заряд системи, то він теж завжди від'ємний, незважаючи на те, що поле $\psi(x)$ описує також позитивно заряджені позитрони. Всі ці недоліки класичної теорії будуть ліквідовані при квантуванні спінорного поля.

Тепер наведемо вирази для канонічно спряжених величин до операторів поля $\psi(x)$ і $\overset{*}{\psi}(x)$ як узагальнених координат, тобто вирази для канонічно спряжених (згідно з (3.75) і (5.114′)) узагальнених імпульсів:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\psi(x))} = i\overset{*}{\psi}(x), \quad \overset{*}{\pi}(x) = -i\psi(x). \tag{5.129}$$

При обчисленні $\pi(x)$ треба користуватись лагранжіаном (5.114′).

І, нарешті, запишемо вираз для енергії $P^0 = H_0$ через гамільтоніан $\mathscr{H}(x)$, виражений згідно з (3.8) через канонічні змінні $\psi(x)$ і $\pi(x)$:

$$H_0 = \int d\mathbf{x}\,\mathscr{H}(x) = \int d\mathbf{x}\,[\pi(x)\partial_0\psi(x) - \mathscr{L}(x)] = \int d\mathbf{x}\,\pi(x)\partial_0\psi(x). \tag{5.130}$$

У цьому легко пересвідчитись, використовуючи рівняння руху (5.7), внаслідок якого $\mathscr{L}(x) \equiv 0$.

5.5. Представлення групи Лоренца

5.5.1. Гільбертів простір станів

Так само, як і у випадку скалярних частинок, розглянемо простір від'ємно-частотних розв'язків рівняння Дірака (див. (5.79) і (5.80)). Для розв'язків, що мають скінченний інтеграл

$$\int \overset{*}{\psi}{}^{+}(x^0,\mathbf{x})\psi^{-}(x^0,\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int (\psi^{-}(x^0,\mathbf{x}))^{*}\psi^{-}(x^0,\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty,$$

визначимо скалярний добуток за формулою

$$(\psi_1^{-},\psi_2^{-}) = \int \overset{*}{\psi}{}_1^{+}(x^0,\mathbf{x})\psi_2^{-}(x^0,\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int d\mathbf{k}\sum_{\nu=1}^{2} \overset{*}{a}{}_{1,\nu}^{+}(\mathbf{k})a_{2,\nu}^{-}(\mathbf{k}), \tag{5.131}$$

де

$$\begin{aligned}\psi_1^{-}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ikx}\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,-}(\mathbf{k})a_{1,\nu}^{-}(\mathbf{k})d\mathbf{k},\\ \psi_2^{-}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ikx}\sum_{\nu=1}^{2} v^{\nu,-}(\mathbf{k})a_{2,\nu}^{-}(\mathbf{k})d\mathbf{k},\end{aligned} \tag{5.132}$$

а остання рівність у (5.131) справедлива через співвідношення ортогональності (5.81).

Із формули (5.131) видно, що скалярний добуток (ψ_1^{-},ψ_2^{-}) не залежить від часу x^0. Гільбертів простір зі скалярним добутком (5.131) і нормою

$$\|\psi^{-}\| = (\psi^{-},\psi^{-})^{1/2}$$

будемо називати одночастинковим Гільбертовим простором станів і позначимо його через $\mathscr{H}_1$.

Таким самим чином побудуємо Гільбертів простір $\overline{\mathscr{H}}_1$, що відповідає від'ємно-частотним розв'язкам спряжених за Діраком спінорів:

$$(\bar\psi_1^{-},\bar\psi_2^{-}) = \int \bar\psi_2^{-}(x^0,\ \boldsymbol{x})(\bar\psi_1^{-}(x^0,\ \boldsymbol{x}))^{*}d\mathbf{x} = \int d\mathbf{k}\sum_{\nu=1}^{2} a_{1,\nu}^{+}(\mathbf{k})\ \overset{*}{a}{}_{2,\nu}^{-}(\mathbf{k}),$$

де

$$\begin{aligned}\bar\psi_1^{-}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ikx}\sum_{\nu=1}^{2} \bar v^{\nu,-}(\mathbf{k})\ \overset{*}{a}{}_{1,\nu}^{-}(\mathbf{k})d\mathbf{k},\\ \bar\psi_2^{-}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ikx}\sum_{\nu=1}^{2} \bar v^{\nu,-}(\mathbf{k})\ \overset{*}{a}{}_{2,\nu}^{-}(\mathbf{k})d\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{5.133}$$

Простір $\overline{\mathscr{H}}_1$ буде гільбертовим простором станів античастинки.

Щоб побудувати Гільбертів простір станів, що відповідає багаточастинковій системі, виберемо в $\mathscr{H}_1$ якийсь ортонормований базис $\{\psi_n^-\}_{n=1}^\infty$. Тоді N-частинковий простір $\mathscr{H}_N$ побудуємо як тензорний добуток N-екземплярів одночастинкових просторів

$$\mathscr{H}_N = \underbrace{\mathscr{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_1}_{N}.$$

Базисом у просторі $\mathscr{H}_N$ будуть функції

$$\Psi_{(i)_N} = \Psi_{i_1,\ldots,i_N}(x_1,\ldots,x_N) = \psi_{i_1}^-(x_1)\cdots\psi_{i_N}^-(x_N), \quad i_j = 1,2,\ldots,m,\ldots \quad (5.134)$$

Розглядаючи усі можливі лінійні комбінації функцій (5.134) і замикаючи їх за нормою (Ψ_1,Ψ_2), отримаємо простір $\mathscr{H}_N$. Так само будується простір для античастинок $\overline{\mathscr{H}}_N$.

$$\Psi_{(i)_M} = \Psi_{i_1,\ldots,i_M}(y_1,\ldots,y_M) = \psi_{i_1}^{c,-}(y_1)\ldots\psi_{i_M}^{c,-}(y_M).$$

Тоді простір $\mathscr{H}_{N,M} = \mathscr{H}_N \otimes \overline{\mathscr{H}}_M$ є простором для обох видів частинок.

Нагадаємо, що кожний із базисних векторів $\psi_{i_j}(x_j)$ є 4-х компонентним спінором із компонентами $\psi_{i_j,\alpha}$, $\alpha = 1,2,3,4$.

Тому функції, що належать $\mathscr{H}_N$, будуть залежати не тільки від координат $x_1,\ldots,x_N$, а й від спінорних індексів $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$, $\alpha_j = 1,2,3,4$. Крім того, для станів, що описують реальні частинки функції станів, можуть залежати і від інших змінних. Так із представлень (5.132) і (5.133) видно: спінори $\psi^-(x)$ і $\bar\psi^-(x)$ є сумою двох спінорів, що відповідають двом значенням спіну (або двом власним значенням оператора спіральності (5.61)) $s = 1$ ($\nu = 1$) і $s = -1$ ($\nu = 2$). Тому інколи зручно виділити залежність елементів $f_{NM} \in \mathscr{H}_{NM}$ від спінових аргументів. У цьому випадку функції будуть мати структуру:

$$f_{NN',MM}(\alpha_1,x_1,\ldots,\alpha_N x_N;\alpha_1'x_1',\ldots,\alpha_{N'}'x_{N'}';\beta_1 y_1,\ldots,\beta_M y_M;\beta_1'y_1',\ldots\beta_M',y_{M'}'),$$

де N—число частинок, що має спін $\nu = 1$, N'—число частинок, що має спін $\nu = 2$, а M і M' мають таке саме значення для античастинок. Відповідний простір позначається $\mathscr{H}_{NN'MM'}$.

Зауваження 5.5. *Насправді побудова багаточастинкового простору станів (який тут коротко описаний) для частинок із напівцілим спіном не відповідає реальній фізичній ситуації, оскільки не враховує принцип Паулі (див., наприклад, [46, § 61]). Це ще одна проблема класичного описання спінорних полів, яка буде усунута у розділі IV.*

5.5.2. Представлення групи Лоренца у просторі станів

Очевидно, що побудова представлення групи Лоренца у просторі $\mathscr{H}_1$ (а, отже, і в $\mathscr{H}_{NM}$) повинна бути узгоджена з трансформаційними властивостями (5.20)

і (5.40) спінорів $\psi(x)$ і $\bar\psi(x)$. Тому власному неоднорідному перетворенню Лоренца

$$x' = \Lambda x + a$$

поставимо у відповідність оператор $U_{\Lambda,a}$ у просторі $\mathscr{H}_1$ за формулою

$$(U_{\Lambda,a}f)(\alpha,x) = S(\Lambda)_{\alpha\alpha'}f(\alpha',\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{5.135}$$

Відповідне представлення у просторах $\mathscr{H}_N$ і $\mathscr{H}_{NM}$ будується аналогічно (4.49), тобто дією операторів (5.135) за кожною змінною $(\alpha,x)_N$ або $(\alpha,x)_N(\beta,y)_M$. Покажемо тепер, що представлення, якому відповідають оператори $U_{\Lambda,a}$, є унітарним представленням.

Узагальнимо для цього скалярний добуток (5.131) наступним чином. Позначимо через S довільну просторово-подібну поверхню, тобто поверхню, всі точки якої розділені просторово-подібними інтервалами. Введемо скалярний добуток за формулою

$$(\psi_1^-,\psi_2^-) = \int\limits_S d\sigma^\mu(x)\bar\psi_1^+(x)\gamma^\nu\psi_2^-(x)g^{\mu\nu}, \quad \bar\psi_1^+(x) = (\psi_1^-(x))^*\gamma^0, \tag{5.136}$$

де

$$d\sigma^0 = dx^1dx^2dx^3, \quad d\sigma^1 = dx^0dx^2dx^3,$$
$$d\sigma^2 = dx^0dx^1dx^3, \quad d\sigma^3 = dx^0dx^1dx^2.$$

Якщо σ має вигляд $x^0 = \text{const}$, то формула (5.131) збігається з (5.136). Оскільки 4-вектор $\bar\psi_1^+(x)\gamma^\mu\psi_2^-(x)$ задовольняє рівняння (задача 5.6)

$$\partial_\mu(\bar\psi_1^+(x)\gamma^\mu\psi_2^-(x)) = 0, \tag{5.137}$$

то скалярний добуток (5.136) не залежить від вибору поверхні σ. Легко побачити, що рівняння (5.137) є тривіальним наслідком рівнянь (5.7) і (5.16), яким задовольняють відповідно $\psi_2^-(x)$ і $\bar\psi_1^+(x)$. Тепер, щоб довести унітарність оператора $U_{\Lambda,a}$, треба довести, що для довільних ψ_1^- і ψ_2^- справедлива формула

$$(U_{\Lambda,a}\psi_1^-, U_{\Lambda,a}\psi_2^-) = (\psi_1^-,\psi_2^-).$$

Ця формула може бути отримана (задача 5.6) так само, як і формула (4.42) у скалярному випадку з загальної формули (4.45), враховуючи, що (див. ф-ли (5.38) і (5.40))

$$(U_{\Lambda,a}\psi^-)(x) = \psi'^-(x) = S(\Lambda)\psi^-(\Lambda^{-1}(x-a)),$$
$$(U_{\Lambda,a}\bar\psi^-)(x) = \bar\psi'^-(x) = \bar\psi^-(\Lambda^{-1}(x-a))S(\Lambda)^{-1},$$

і формулу (5.22), вибираючи в (4.45)

$$F_\mu(x) = \begin{cases} \bar\psi_1^+(x)\gamma_\mu\psi_2^-(x), & x\in S \\ \\ 0 & x\in T. \end{cases}$$

5.6. Застосування рівняння Дірака

5.6.1. Рівняння Дірака у зовнішньому полі

У попередніх пунктах вивчалися різні аспекти одночастинкової інтерпретації вільних рівнянь Дірака. Але навіть у цьому випадку інколи виникає необхідність звертатись до взаємодії дираківських частинок із електромагнітним полем. Як буде описано нижче, розв'язки рівняння Дірака у зовнішньому електромагнітному полі відіграють дуже важливу роль у математичних питаннях побудови як класичної, так і квантової теорії взаємодіючих полів.

Так само, як і в пункті 5.3.4 (рівн. (5.91)), запишемо рівняння Дірака у зовнішньому електромагнітному полі $A_\mu(x)$, використовуючи заміну (4.31):

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x). \tag{5.138}$$

У рівнянні (5.138) $A_\mu(x) = (A_0, -\mathbf{A})$ є потенціалом деякого довільного електромагнітного поля, електрична і магнітна напруженості якого визначаються відомими формулами

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0(x) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}. \tag{5.139}$$

Для розрахунку конкретних фізичних задач треба розглянути більш детальні умови на функції $A_\mu(x)$, для яких рівняння (5.138) може бути розв'язане точно.

Детальніше це розглянемо нижче, а зараз зауважимо, що навіть у такій загальній постановці рівняння (5.138) може передбачити деякі важливі властивості дираківської частинки, а саме—наявність у ній магнітного моменту, що рівний за величиною одному магнетону Бора. Визначимо для цього новий спінор χ за формулою

$$\psi(x) = \frac{1}{m}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)\chi(x).$$

Тоді рівняння для спінора χ буде рівнянням другого порядку:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu(x))^2\chi(x) = m^2\chi(x).$$

Перепишемо це рівняння через уведені в (5.44) матриці $\sigma^{\mu\nu}$, користуючись означенням (5.44) і властивостями (5.4). Тоді, користуючись антисиметричністю $\sigma^{\mu\nu}$, маємо

$$\gamma^\mu\gamma^\nu(i\partial_\mu + eA_\mu)(i\partial_\nu + eA_\nu)\chi = (g^{\mu\nu} + i\sigma^{\mu\nu})(i\partial_\mu + eA_\mu)(i\partial_\nu + eA_\nu)\chi =$$

$$= g^{\mu\nu}(i\partial_\mu + eA_\mu)(i\partial_\nu + eA_\nu)\chi - \frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\chi = m^2\chi, \tag{5.140}$$

де

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.141}$$

— тензор електромагнітного поля.

Порівнюючи рівняння (5.140) з рівнянням Клейна–Гордона (4.32) для скалярної зарядженої частинки у електромагнітному полі видно, що воно має додатковий член $-\frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, який можна обрахувати, враховуючи означення (5.44), (5.141), (5.139), а також співвідношення між матрицями γ^μ, та означення (5.12), (5.60):

$$\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \ \boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{H} - \ \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}$$

що відповідає взаємодії спінового моменту $\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\Sigma}$ $\left(\text{або } \frac{1}{2}\hbar\ \boldsymbol{\Sigma}\right)$ з магнітним полем $\mathbf{H}$ і електричного моменту – з електричним полем $\mathbf{E}$.

Більш детальний аналіз рівняння Дірака в електромагнітному полі можна провести (див., наприклад, [97] п. 35), якщо звести рівняння Дірака, записане у формі рівняння Шредінгера (5.88) для 4-компонентного спінора до рівняння Шредінгера для 2-компонентного спінора u, яке в нерелятивістській границі зводиться до рівняння Паулі [7, § 33] (записуємо його в системі $\hbar \neq 1$ і $c \neq 1$)

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A})^2 - eA_0 + \frac{e\hbar}{2mc}\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}\right]u.$$

Останній член має вигляд потенціальної енергії магнітного диполя із зовнішнім магнітним полем (див. [46, § 110]). Тобто електрон, крім власного механічного моменту (спіну) $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\ \boldsymbol{\sigma}$, має власний магнітний момент

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e\hbar}{2mc}\ \boldsymbol{\sigma}.$$

Величину $\mu_0 = \dfrac{e\hbar}{2mc} = 0,927\cdot 10^{-20}$ ерг/Гс називають магнетоном Бора.

Деякі важливі задачі, пов'язані з поведінкою електрона в електромагнітних полях різної конфігурації, можна розв'язати точно. Найбільш важливими є:

1) рух електрона в сферично-симетричній потенціальній ямі.

2) рух електрона в колонівському полі ядра.

3) рух електрона в постійному однорідному магнітному полі.

Ці задачі розглядались багатьма авторами, тому пропонуємо читачеві звернутися до монографії [7].

Зауваження 5.6. *Звичайно, вільне рівняння Дірака є загальним рівнянням, що описує всі частинки заданої маси m із спіном 1/2, але теорія Дірака дає неправильні результати, скажімо, для визначення магнітних моментів протона і нейтрона. Згідно з цією теорією вони б мали значення:*

$$\mu_p = \frac{e\hbar}{2m_pc} = \mu_N, \quad \mu_n = 0.$$

(Тут μ_N —ядерний магнетон).

Але експериментальні значення магнітних моментів цих частинок є такими:

$$\mu_p = 2,78\mu_N, \quad \mu_n = -1,93\mu_N.$$

Це пояснюється тим, що протон і нейтрон не можна розглядати як вільні частинки. Вони взаємно перетворюються, утворюючи π-мезони, тому їх "аномальні" значення магнітних моментів можна пояснити за допомогою мезонної теорії (див., наприклад, [57, § 3]).

5.7. Спінорне безмасове поле

5.7.1. Двокомпонентність безмасового спінорного поля

Покладаючи в рівнянні Дірака (5.7) $m = 0$, маємо

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0. \tag{5.142}$$

Це рівняння є γ^5-інваріантне, оскільки

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5, \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Тоді, якщо ввести проектори:

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5),$$

і розкласти спінор $\psi(x)$ на два взаємно ортогональні спінори:

$$\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x), \quad \psi_\pm(x) = P_\pm\psi(x), \tag{5.143}$$

то кожен із спінорів $\psi_\pm(x)$ буде задовольняти рівняння (5.142)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\pm(x) = 0. \tag{5.144}$$

Легко побачити, що рівняння (5.144) розпадаються на два незалежні рівняння для двокомпонентних спінорів. Запишемо їх для цього у формі рівняння Шредінгера

$$i\partial_0\psi_\pm(x) = -i\gamma^0\gamma^k\partial_k\psi_\pm(x).$$

Тоді в представленні γ-матриць Дірака (5.10) маємо

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_-(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

де

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix},$$

рівняння для φ_1 і φ_2 будуть мати вигляд

$$\partial_0\varphi_1(x) = \sigma_k\partial_k\varphi_1(x), \tag{5.145а}$$

$$\partial_0\varphi_2(x) = -\sigma_k\partial_k\varphi_2(x). \tag{5.145б}$$

Такі самі рівняння виникають і в представленні матриць Дірака (5.11) з

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Останнє представлення більш зручне, оскільки 4-компонентний спінор ψ_- можна фактично ототожнити з 2-компонентним $\psi_L \equiv \varphi_2$, а ψ_+ з $\psi_R \equiv \varphi_1$, про які згадували у п. 1.5.2. У звязку з цим представлення γ–матриць (5.11) інколи називають *вейлевським*, оскільки рівняння (5.145а) і (5.145б) вперше були запропоновані Вейлем [196]. У 4-х компонентному вигляді за основне безмасове спінорне поле вибирають функцію (спінор)

$$\nu(x) = P_-\psi(x) = \psi_-(x). \tag{5.146}$$

Такий вибір зумовлений тим, що безмасові спінорні частинки спостерігались тільки в процесах зі слабкою взаємодією, в яких вони народжуються тільки в *лівокіральних станах*, тобто власне значення оператора спіральності(див. п. 5.3.2) дорівнює -1. Наприклад, у нейтрино спін завжди протилежний напрямку імпульсу (це експериментально встановлений факт !). У зв'язку з цим дуже часто використовують позначення

$$\nu_L(x) := P_L\psi(x) \equiv P_-\psi(x). \tag{5.146′а}$$

$$\nu_R(x) := P_R\psi(x) \equiv P_+\psi(x). \tag{5.146′б}$$

Тоді поле $\nu_L(x)$ задовольняє рівняння

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L(x) = 0 \tag{5.147}$$

і додаткову умову

$$P_R\nu_L(x) = 0. \tag{5.148}$$

Аналогічно виразу (5.15) визначається дираківськи спряжені спінори

$$\overline{\nu}_L(x) = \overset{*}{\nu}_L(x)\gamma^0 = \overset{*}{\psi}(x)P_L\gamma^0 = \overline{\psi}(x)P_R$$

і

$$\overline{\nu}_R(x) = \overline{\psi}(x)P_L.$$

Спряжений спінор $\overline{\nu}_L$ задовольняє спряжене рівняння

$$i\partial_\mu\bar{\nu}_L(x)\gamma^\mu = 0 \tag{5.149}$$

і додаткову умову

$$\overline{\nu}_L(x)P_L = 0. \tag{5.150}$$

5.7.2. Релятивістська інваріантність

Якщо ввести матрицю $\sigma_0 = 1$, то рівняння (5.145а) можна записати у коваріантній формі

$$\sigma_\mu \partial^\mu \varphi_1(x) = 0.$$

Його інваріантність відносно неоднорідних перетворень Лоренца (1.20) можна показати з таких самих міркувань, як і у випадку рівняння Дірака для 4-х компонентних спінорів. Воно буде інваріантним, якщо $\varphi_1(x)$ перетворюється за законом

$$\varphi_1'(x') = S(\Lambda)\varphi(x),$$

де $S(\Lambda)$ є 2×2 матриця, що задовольняє співвідношення

$$S(\Lambda)\sigma_\nu S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu.$$

Явний вигляд матриць $S(\Lambda)$ легко отримати таким самим способом, як це робилося в п. 5.2.1 для 4-х компонентних спінорів. Детальніше див. [102, Гл. 5].

Аналіз цих представлень показує, що спінор $\varphi_2(\psi_-)$ при власних однорідних перетвореннях Лоренца перетворюється за незвідним представленням $D^{(1/2,0)}$, а спінор $\varphi_1(\psi_+)$ – за представленням $D^{(0,1/2)}$.

Якщо доповнити власні однорідні перетворення Лоренца просторовими віддзеркаленнями, то кожне з рівнянь (5.145а) і (5.145б) перестає бути інваріантним, оскільки представлення $D^{(1/2,0)}$ і $D^{(0,1/2)}$ переходять одне в одне.

5.7.3. Чи відповідає спінорне безмасове поле реальним частинкам? Фізична інтерпретація розв'язків. Нейтрино

Як вже згадувалося, вперше теорія безмасової частинки зі спіном $1/2$ була запропонована Вейлем [196]. Однак Паулі у своїй статті (див. [63]) піддав критиці цю теорію через відсутність у ній інваріантності відносно просторових відображень. Але пізніше він у 1933 р., аналізуючи експериментальні дані енергетичного спектра β-розпаду нейтронів на протони і електрони, зробив висновок, що повинна існувати ще якась частинка. Цей висновок базувався на тому, що, по-перше, енергія, яка припадала на долю електронів, була досить значною (електрони в середньому мали менші енергії), а по-друге, не виконувався закон збереження власного спінового моменту кількості руху. Тому цій гіпотетичній нейтральній частинці була визначена дуже мала маса і спін $\hbar/2$. Тобто реакція радіоактивного розпаду нейтрона повинна бути

$$_0n^1 \to {}_1p^1 + {}_{-1}e^0 + {}_0\bar{\nu}^0. \tag{5.151}$$

Цю гіпотетичну частинку назвали *нейтрино*. Однак експериментально вільне нейтрино було відкрито тільки на початку 50-х років. А після того, як Лі і Янг [49] вказали на можливість порушення просторової інваріантності (парності) у реакціях із слабкою взаємодією, Ландау [44] і Салам (див. [82]) запропонували повернутись до рівнянь Вейля при описі нейтрино. Підставою для цього є

аналіз експериментів, з яких експериментальне значення власної маси спокою нейтрино оцінювалось величиною $m_\nu < 1/2500 m_e$, де m_e — маса електрона. Тому основна тенденція спільної наукової думки зводилась до того, щоб вважати масу спокою нейтрино рівною нулю. Експерименти з визначення маси нейтрино продовжуються і до сьогодні. Їх результат є скоріше позитивний. Тому це питання можна вважати напіввідкритим. Про можливу корекцію теорії нейтрино у разі його масивності поговоримо трохи нижче. Треба також згадати, що існує два (а можливо й три) типи нейтрино (і антинейтрино) (умовно "електронне" ν_e і "мюонне" ν_μ, а також τ-лептонне ν_τ). Взагалі фізика і теорія нейтрино дуже багата, і тому пропонуємо читачеві звернутись до монографій [52], [57], [102], [47], [41] для більш детального вивчення цієї цікавої частинки.

У цьому підпункті проаналізуємо тільки загальну структуру вільних безмасових ферміонних полів спіну $1/2\ \hbar$, не пов'язуючи їх з конкретними частинками.

Так само, як це робилося для рівняння Дірака, шукаємо розв'язок рівнянь Вейля у вигляді перетворень Фур'є:

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha^+(x) + \varphi_\alpha^-(x), \quad \varphi_\alpha^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dp e^{\pm ipx} \tilde{\varphi}_\alpha^\pm(p),\ \alpha = 1, 2.$$

Тоді для функцій $\tilde{\varphi}_\alpha^\pm(p)$ рівняння (5.145) матимуть вигляд

$$(p^0 - \ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \widetilde{\varphi}_1^\pm(p) = 0, \tag{5.152а}$$

$$(p^0 + \ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \widetilde{\varphi}_2^\pm(p) = 0. \tag{5.152б}$$

Для безмасової частинки $p_0 = |p|$ (див. (4.14)), а рухається вона зі швидкістю світла. З другого боку, у п. 5.3.2 було введено оператор спіральності (5.61), що визначає проекцію спіну на напрям руху. З рівнянь (5.152) видно, що спін нейтрино може бути направлений або у напрямку руху частинки, або проти нього. Із експериментів з β-розпадами відомо, що нейтрино завжди орієнтоване антипаралельно до напрямку руху. Тому рівняння, що описує нейтринне поле, є рівнянням (5.145б) або (5.147) і (5.148) у 4-компонентному вигляді. Розв'язки рівняння (5.145а) або (5.149) та (5.150) відповідають частинці, у якій спін направлений паралельно до напрямку руху. Цю частинку можна розглядати як антинейтрино. Вона фактично і з'являється в реакції β-розряду (5.151).

5.7.4. Лагранжіан і динамічні інваріанти

Згідно із формулою (3.47), рівнянню (5.147) відповідає функція Лагранжа

$$\mathscr{L}(x) = \frac{i}{2}(\overline{\nu}_L(x)\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L(x) - \partial_\mu \overline{\nu}_L(x)\gamma^\mu \nu_L(x)). \tag{5.153}$$

Або, враховуючи (5.146) і властивості (5.4),

$$\mathscr{L}(x) = \frac{i}{4}(\overline{\psi}(x)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi(x)). \tag{5.154}$$

Вирази для тензора енергії-імпульсу $T^{\mu\nu}$ і тензора спіну $S^{\alpha,\mu\nu}$ не залежать явно від маси, і тому їх можна отримати простою підстановкою у формули (5.117) і (5.122) спінора $\nu(x)$ замість спінора $\psi(x)$, не покладаючи $m=0$, або безпосередньо з вигляду лагранжіана (5.153). Тоді, наприклад, для вектора енергії-імпульсу отримаємо

$$P^\mu = \frac{i}{4}g^{\mu\nu}\int d\mathbf{x}(\bar{\psi}(x)\gamma^0(1-\gamma^5)\partial_\nu\psi(x) - \partial_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^0(1-\gamma^5)\psi(x)).$$

Так само, як і при розрахунку (5.120), підставляючи (5.48) з $\psi^\pm(\mathbf{k})$ у вигляді (5.76) і такі самі вирази для $\bar{\psi}^\pm(x)$, користуючись тим, що спінори $v^{\nu,\pm}(\mathbf{k})$ при $m=0$ задовольняють умови:

$$P_-v^{1,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)v^{1,\pm}(\mathbf{k}) = 0, \quad P_-v^{2,\pm}(\mathbf{k}) = v^{2,\pm}(\mathbf{k})$$

і умови ортогональності (5.81), маємо для вектора енергії-імпульсу таке рівняння:

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}k^\mu(\overset{*}{a}{}^+_2(\mathbf{k})a^-_2(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}^-_2(\mathbf{k})a^+_2(\mathbf{k})).$$

Розрахунки аналогічні тим, які були зроблені в п. 5.4 для компоненти вектора спіну S^3 із урахуванням того, що спінори $v^\pm$ і $\overset{*}{v}{}^\pm$ повинні задовольняти додаткові умови (5.148) і (5.150), приводять (у системі координат $k^1=k^2=0$) до

$$S^3 = \frac{1}{2}\int dk^3[-\overset{*}{a}{}^+_2(\mathbf{k})a^-_2(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}^-_2(\mathbf{k})a^+_2(\mathbf{k})]_{k^1=k^2=0}.$$

Цей вираз збігається з виразом (5.126), якщо покласти в ньому $a_1=0$.

Якщо замість функції $\nu=\psi_-$ розглянути поле $\psi_+(x)$, то отримаємо такі самі вирази для P^μ і S^3, як і (5.120), (5.126) при $a_2=0$.

Особливої уваги потребує вивчення вектора струму. Якщо виходити з виразу для лагранжіана довільної спінорної частинки (5.114) (поклавши $m=0$) і виразу для струму (3.72) маємо

$$j^\mu(x) \;=\; \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \tag{5.155}$$

Зауважимо, що для нейтральних спінорних частинок (у даному випадку лептонів) параметр q у виразі (3.72) відповідає *лептонному заряду* (тут для зручності покладено $q=1$). Вираз (5.155) можна переписати через введені лівокіральні та правокіральні спінори (5.146′а) і (5.146′б). Використовуючи властивості проекторів P_L і P_R отримаємо таке представлення:

$$j^\mu \;=\; \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi}(P_L+P_R)\gamma^\mu(P_L+P_R)\psi = \overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L + \overline{\nu}_R\gamma^\mu\nu_R. \tag{5.156}$$

Із виразу (5.156) безпосередньо випливає, що спіральність частинки зберігається при будь якій взаємодії, яка будується за допомогою вершин типу $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ (див. розділ III). Крім того, струм (5.156) є інваріантним відносно перетворень просторового віддзеркалення $\widehat{P}$ ($\widehat{P}$-парність). Тому при описі процесів у рамках слабких взаємодій, де відбувається порушення просторової парності треба виходити з лагранжіана (5.153) і відповідного виразу для струму

$$j_L^\mu \;=\; \overline{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi = j_V^\mu - j_A^\mu. \tag{5.157}$$

Струм (5.157) розпадається на два доданки: перший доданок перетворюється як звичайний 4-вектор, а другий як аксіальний 4-вектор (псевдовектор)(див. п. 5.2.3). Це дає змогу врахувати порушення просторової парності в слабких взаємодіях.

5.7.5. Про масу нейтрино і спінори Майорани

До цього моменту теорію безмасових ферміонів було пов'язано з частинками нейтрино і антинейтрино. Якщо припустити, що нейтрино все ж таки має масу $m_\nu \neq 0$, що на сьогодні є фактом, до якого схиляється переважна більшість вчених, тоді в лагранжіані (5.154) треба врахувати масовий член, який в позначеннях (5.146) має такий вигляд:

$$m_\nu\overline{\psi}\psi = m_\nu\overline{\psi}(P_L+P_R)\psi = m_\nu\overline{\psi}(P_L^2+P_R^2)\psi = m_\nu(\overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R). \tag{5.158}$$

Отже, масовий член переплутує правокіральні і лівокіральні ферміони. Це приводить до висновку, що в природі повинні існувати і правокіральні нейтрино. Експериментальних даних, що засвідчують існування таких частинок поки що немає. Це протиріччя можна усунути, використовуючи для опису нейтрино *спінори Майорани.* Вони будуються наступним чином. Легко переконатися, що спінори $\sigma_2\overset{*}{\psi}{}^T_L$ (тут T означає операцію транспонування)перетворюються так само як і спінори ψ_R. Тоді побудуємо спінор

$$\psi^M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \sigma_2\overset{*}{\psi}{}^T_L \end{pmatrix}, \tag{5.159}$$

який є зарядово самоспряжений (задача 5.7).

За допомогою спінорів (5.159) можна побудувати лагранжіан

$$\mathscr{L}_M = \frac{1}{4}\overline{\psi}^M i\gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi^M - \frac{1}{2}m_\nu\overline{\psi}^M\psi^M, \tag{5.160}$$

кінетичний член якого збігається з (5.153) і включає також масовий член. Такий лагранжіан включає тільки лівокіральні спінори і може бути претендентом для опису масивних нейтрино. Більш детальний аналіз величин, що будуються за допомогою спінорів Майорани можна знайти в монографії [74].

§ 6. Векторні поля

Векторне представлення групи Лоренца $D^{(1/2,1/2)}$ — це представлення, за яким перетворюється сам простір Мінковського $\mathbb{M}$ (або асоційований із ним векторний простір). У п. 1.5 коротко розглядалося це представлення і було показано, що його можна реалізувати на 4-векторних функціях $V^\mu(x)$, що перетворюються за формулою (1.40). З тих самих міркувань, що й у випадку вільної скалярної частинки, компоненти вектора $V^\mu(x)$ повинні задовольняти рівняння Клейна–Гордона–Фока

$$(\Box - m^2)V_\mu(x) = 0. \tag{6.1}$$

У випадку, коли поле $V^\mu(x)$ є комплексним, таке саме рівняння задовольняє і комплексно спряжене поле:

$$(\Box - m^2)\overset{*}{V}_\mu(x) = 0.$$

Згідно з квантово-механічними уявленнями хвильові функції частинок із спіном s, мають $2s+1$ компонент. Тому для опису частинки із спіном 1 (три проекції якого є $+1$, 0, -1) треба задати 3-компонентну хвильову функцію. Це означає, що представлення $D^{(1/2,1/2)}$ описує як частинки зі спіном 1, так і частинки зі спіном 0, оскільки його обмеження на групу поворотів $SU(2)$ є такими:

$$D^{(1/2,1/2)}\Big|_{SU(2)} = D^{(\frac{1}{2},0)} \otimes D^{(0,\frac{1}{2})} = D^{(0,0)} + D^{(1,0)} + D^{(0,1)},$$

а, отже, треба накласти на компоненти $V_\mu(x)$ якусь додаткову умову. Найпростішою лінійною релятивістськи-інваріантною умовою є умова Лоренца:

$$\partial_\mu V^\mu(x) = 0. \tag{6.2}$$

Як побачимо нижче, ця умова забезпечує також додатну визначеність енергії векторного поля.

6.1. Лагранжів формалізм

Такі самі міркування, як і у випадку скалярного поля, приводять до такого вигляду лагранжіану комплексного векторного поля:

$$\mathscr{L}(x) = -\partial^\mu \overset{*}{V}_\nu(x)\partial_\mu V^\nu(x) + m^2 \overset{*}{V}_\mu(x)V^\mu(x), \tag{6.3}$$

який для просторових компонент векторного поля збігається з лагранжіаном (4.54) для скалярного комплексного поля. Зауважимо, що лагранжіан дійсного векторного поля ($\overset{*}{V}_\mu = V_\mu$) відрізняється від (6.3) тільки множником $1/2$.

Користуючись формулами (3.60), (3.64) – (3.66) і (3.72), легко обчислити відповідні величини, що задовольняють рівняння неперервності (3.57). Це тензор енергії-імпульсу

$$T^{\mu\nu} = -(\partial^\mu \overset{*}{V}_\sigma(x)\partial^\nu V^\sigma(x) + \partial^\nu \overset{*}{V}_\sigma(x)\partial^\mu V^\sigma(x)) - g^{\mu\nu}\mathscr{L}(x), \tag{6.4}$$

тензор спінового моменту

$$\begin{aligned} S^\mu_{\alpha\beta} &= \overset{*}{V}_\beta(x)\partial^\mu V_\alpha(x) + \partial^\mu \overset{*}{V}_\alpha(x)V_\beta(x) - \\ &- \overset{*}{V}_\alpha(x)\partial^\mu V_\beta(x) - \partial^\mu \overset{*}{V}_\beta(x)V_\alpha(x) \end{aligned} \tag{6.5}$$

і вектор струму

$$j^\mu(x) = -iq(\overset{*}{V}_\nu(x)\partial^\mu V^\nu(x) - \partial^\mu \overset{*}{V}_\nu(x)V^\nu(x)). \tag{6.6}$$

При обчисленні було враховано, що

$$\{u_i(x)\} \equiv \{\overset{*}{V}_\mu(x), V_\mu(x)\}.$$

І на завершення запишемо вигляд динамічних інваріантів: вектора енергії-імпульсу

$$P^0 = \int T^{00}d\mathbf{x} = -\int d\mathbf{x}(\partial_\mu \overset{*}{V}_\nu(x)\partial_\mu V^\nu(x) + m^2 \overset{*}{V}_\nu(x)V^\nu(x)), \tag{6.7}$$

$$P^k = \int T^{0k}d\mathbf{x} = -\int d\mathbf{x}(\partial^0 \overset{*}{V}_\mu(x)\partial^k V^\mu(x) + \partial^k \overset{*}{V}_\mu(x)\partial^0 V^\mu(x)), \tag{6.8}$$

вектора спіну (3.70)

$$S_i = \varepsilon_{ijk}\int d\mathbf{x}\ S^0_{jk}(x) \tag{6.9}$$

і заряду

$$Q = \int d\mathbf{x}\ j^0(x). \tag{6.10}$$

Канонічно спряженим до узагальненої координати $V_\mu(x)$ є імпульс

$$\pi^\mu_V(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 V_\mu(x))} = -\partial_0 \overset{*}{V}{}^\mu(x). \tag{6.11}$$

Зауваження 6.1. *У сучасній теорії взаємодіючих полів векторні поля відіграють роль обмінних бозонних полів взаємодії (вони відносяться до частинок із цілим спіном бозонів) між полями матерії, яку утворюють частинки з напівцілим спіном (ферміони).*

Необхідність введення векторних полів випливає з вимоги калібрувальної інваріантної теорії.

У наступному розділі (розділ III) це питання буде розглянуто детальніше. Але вже зараз треба зауважити, що вигляд лагранжіану (6.3) і канонічних змінних (6.11) буде дещо іншими (див. зауваження 17.2).

На завершення цього розділу доведемо інваріантність лагранжіану (6.3) відносно перетворень Лоренца (1.20).

З формули (1.40) для перетворення контрваріантного 4-вектора легко отримати закон перетворення для коваріантного 4-вектора, використовуючи формули опускання і піднімання індексів. Тоді

$$V'_\mu(x') = g_{\mu\mu'}\Lambda^{\mu'}_\nu g^{\nu\nu'}V_{\nu'}(x) \tag{6.12}$$

або в матричній формі, враховуючи (4.7′)–(4.8) маємо

$$V'(x') \;=\; G\Lambda G V(x) \;=\; (\Lambda^T)^{-1}V(x). \tag{6.12′}$$

Щоб не заплутатись у великому числі індексів, зручно записати лагранжіан (6.3) у матричній формі

$$\mathscr{L}(x) \;=\; -\partial^T G\partial\, \overset{*}{V}(x)GV(x) + m^2\, \overset{*}{V}(x)GV(x), \tag{6.13}$$

де матриця G визначена компонентами метричного тензора (1.2), а диференціальні оператори ∂ і ∂^T визначені формулами (4.8′) і (4.10) таким чином, що похідні вектор-рядка ∂^T діють тільки на компоненти вектор-рядка $\overset{*}{V}(x)$, а похідні вектор-стовпчика ∂ діють на компоненти вектор-стовпчика $V(x)$. У записі (6.13) диференціальний оператор $\partial^T G\partial$ є скалярним оператором, який діє на скалярну функцію $\overset{*}{V}(x)GV(x)$ з урахуванням зазначених вище правил. Тоді, враховуючи правила перетворення (4.7′) і (6.12′), а також властивість (1.12) маємо

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}'(x') \;&=\; -\partial'^T G\partial'\, \overset{*}{V}{}'(x')GV'(x') + \overset{*}{V}{}'(x')GV'(x') = \\
&=\; -\partial^T\Lambda^{-1}G(\Lambda^T)^{-1}\partial\, \overset{*}{V}(x)\Lambda^{-1}G(\Lambda^T)^{-1}V(x) + \\
&+\; m^2\, \overset{*}{V}(x)G\Lambda^T GGG\Lambda GV(x) = \\
&=\; -\partial^T G\partial\, \overset{*}{V}(x)GV(x) + m^2\, \overset{*}{V}(x)GV(x) = \mathscr{L}(x).
\end{aligned}$$

6.2. Представлення в імпульсному просторі

Так само, як і розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока для скалярної частинки, векторні польові функції $V_\mu(x)$ і $V^*_\mu(x)$ можна розкласти на додатно- і від'ємно-частотні частини

$$V_\mu(x) = V^+_\mu(x) + V^-_\mu(x), \quad \overset{*}{V}_\mu(x) = \overset{*}{V}{}^+_\mu(x) + \overset{*}{V}{}^-_\mu(x), \tag{6.14}$$

$$V_\mu^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{e^{\pm ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}} V_\mu^{\pm}(\mathbf{k}),$$
$$\overset{*}{V}{}_\mu^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{e^{\pm ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}} \overset{*}{V}{}_\mu^{\pm}(\mathbf{k}), \tag{6.15}$$

де $\overset{*}{V}{}_\mu^{\pm}(\mathbf{k})$ і $V_\mu^{\pm}(\mathbf{k})$ визначаються так само, як і відповідні скалярні функції у формулах (4.21) та (4.22). Використовуючи формули (6.14) і (6.15), перепишемо вирази (6.7)–(6.10) в імпульсному представленні (див. розрахунок формул (4.59), (4.60)). Маємо для вектора енергії-імпульсу (задача 6.1):

$$P^\mu = -\int d\mathbf{k} k^\mu g^{\nu\alpha} (\overset{*}{V}{}_\nu^{+}(\mathbf{k}) V_\alpha^{-}(\mathbf{k}) + \overset{*}{V}{}_\nu^{-}(\mathbf{k}) V_\alpha^{+}(\mathbf{k})), \tag{6.16}$$

для вектора спіну $\mathbf{S} = (S_k)_{k=1}^3$ (задача 6.2):

$$\mathbf{S} = i \int d\mathbf{k} \{ [\overset{*}{\mathbf{V}}{}^{+}(\mathbf{k}) \times \mathbf{V}^{-}(\mathbf{k})] - [\overset{*}{\mathbf{V}}{}^{-}(\mathbf{k}) \times \mathbf{V}^{+}(\mathbf{k})] \}, \tag{6.17}$$

де $a \times b$ — векторний добуток векторів a, b в $\mathbb{R}^3$.

І, нарешті, заряд системи (задача 6.3):

$$Q = -q \int d\mathbf{k}\ g^{\mu\nu} (\overset{*}{V}{}_\mu^{+}(\mathbf{k}) V_\nu^{+}(\mathbf{k}) - \overset{*}{V}{}_\nu^{-}(\mathbf{k}) V_\mu^{+}(\mathbf{k})). \tag{6.18}$$

Зауважимо: вектор спіну $\mathbf{S}$ не залежить від часу x^0, тобто спін є інтегралом руху, що є наслідком симетрії тензора енергії-імпульсу.

6.3. Розкладання на поздовжні і поперечні складові

Із співвідношення (6.16) видно, що у виразі для енергії P^0 складова, що відповідає $\nu = \alpha = 0$, від'ємна. Тобто енергія не є додатно-визначеною. Це може бути усунено за допомогою додаткової умови Лоренца (6.2). В імпульсному просторі умова (6.2) для компонент $V_\mu^{\pm}(\mathbf{k})$ і $\overset{*}{V}{}_\mu^{\pm}(\mathbf{k})$ записуватиметься таким чином

$$k^\mu V_\mu^{\pm}(\mathbf{k}) = 0, \quad k^\mu\ \overset{*}{V}{}_\mu^{\pm}(\mathbf{k}) = 0. \tag{6.19}$$

З умов (6.19) можна виразити компоненти $V_0^{\pm}(\mathbf{k})$ і $\overset{*}{V}{}_0^{\pm}(\mathbf{k})$ через лінійно-незалежні компоненти

$$V_0^{\pm}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^0} k^j V_j^{\pm}(\mathbf{k}), \quad \overset{*}{V}{}_0^{\pm}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^0} k^j\ \overset{*}{V}{}_j^{\pm}(\mathbf{x}). \tag{6.20}$$

Тоді білінійні форми, що входять у вирази (6.16), (6.18), будуть

$$-g^{\mu\nu}\ \overset{*}{V}{}_\mu^{\pm}(\mathbf{k}) V_\nu^{\mp}(\mathbf{k}) = \overset{*}{V}{}_j^{\pm}(k) V_j^{\mp}(\mathbf{k}) - \frac{1}{(k^0)^2} (k^i\ \overset{*}{V}{}_i^{\pm}(\mathbf{k}))\ (k^l V_l^{\mp}(\mathbf{k})). \tag{6.21}$$

Представимо потенціали $V_i^{\pm}$ у вигляді розкладів на поздовжню і поперечні складові щодо напрямку руху частинки $\mathbf{k}$. Нехай $\mathbf{e}_i$, $(i = 1, 2, 3)$ – одиничні вектори взаємно ортогональні між собою і ортогональні до вектора напрямку руху $\mathbf{k}$. Тобто

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \tag{6.22}$$

$[\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$ і циклічна перестановка.

Тоді покладемо

$$\mathbf{V}^{\pm}(\mathbf{k}) = a_1^{\pm}(\mathbf{k})\mathbf{e}_1 + a_2^{\pm}(\mathbf{k})\mathbf{e}_2 + \frac{k^0}{m} a_3^{\pm}(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \tag{6.23}$$

Легко підрахувати, що

$$-g^{\mu\nu}\, \overset{*}{V}{}_{\mu}^{\pm}(\mathbf{k}) V_{\nu}^{\mp}(\mathbf{k}) = \overset{*}{a}{}_j^{\pm}(\mathbf{k}) a_j^{\mp}(\mathbf{k}). \tag{6.24}$$

Підставляючи цей вираз у формули (6.16), (6.18), маємо

$$P^{\mu} = \int d\mathbf{k}\, k^{\mu} \left(\overset{*}{a}{}_j^{+}(\mathbf{k}) a_j^{-}(\mathbf{k}) + \overset{*}{a}{}_j^{-}(\mathbf{k}) a_j^{+}(\mathbf{k}) \right) \tag{6.25}$$

і

$$Q = q \int d\mathbf{k} \left(\overset{*}{a}{}_j^{+}(\mathbf{k}) a_j^{-}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_j^{-}(\mathbf{k}) a_j^{+}(\mathbf{k}) \right). \tag{6.26}$$

З виразу (6.17) можна підрахувати, наприклад, компоненту S_3 вектора $\mathbf{S}$

$$S_3 = i \int d\mathbf{k} \left(\overset{*}{a}{}_1^{+}(\mathbf{k}) a_2^{-}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_2^{-}(\mathbf{k}) a_1^{-}(\mathbf{k}) + \overset{*}{a}{}_2^{-}(\mathbf{k}) a_1^{+}(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}_1^{-}(\mathbf{k}) a_2^{+}(\mathbf{k}) \right). \tag{6.27}$$

Легко перевірити простими розрахунками, що вирази для P^{μ} і Q не змінюють своєї форми, а вираз для S_3 набуває діагонального вигляду, якщо перейти від амплітуд $a_j^{\pm}$, $\overset{*}{a}{}_j^{\pm}$ до амплітуд $b_j^{\pm}$, $\overset{*}{b}{}_j^{\pm}$ за формулами

$$\begin{aligned} &a_1^{\pm} = \tfrac{b_1^{\pm} + b_2^{\pm}}{\sqrt{2}}, \quad a_2^{\pm} = \tfrac{b_1^{\pm} - b_2^{\pm}}{i\sqrt{2}}, \quad a_3^{\pm} = b_3^{\pm}, \\ &\overset{*}{a}{}_1^{\pm} = \frac{\overset{*}{b}{}_1^{\pm} + \overset{*}{b}{}_2^{\pm}}{\sqrt{2}}, \quad \overset{*}{a}{}_2^{\pm} = \frac{\overset{*}{b}{}_1^{\pm} - \overset{*}{b}{}_2^{\pm}}{-i\sqrt{2}}, \quad \overset{*}{a}{}_3^{\pm} = \overset{*}{b}{}_3^{\pm}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Тоді

$$P^{\mu} = \int d\mathbf{k}\, k^{\mu} \left(\overset{*}{b}{}_j^{+}(\mathbf{k}) b_j^{-}(\mathbf{k}) + \overset{*}{b}{}_j^{-}(\mathbf{k}) b_j^{+}(\mathbf{k}) \right), \tag{6.29}$$

$$Q = q \int d\mathbf{k} \left(\overset{*}{b}{}_j^{+}(\mathbf{k}) b_j^{-}(\mathbf{k}) - \overset{*}{b}{}_j^{-}(\mathbf{k}) b_j^{+}(\mathbf{k}) \right) \tag{6.30}$$

і

$$S_3 = \int d\mathbf{k}\Big(\overset{*}{b}{}_1^+(\mathbf{k})b_1^-(\mathbf{k}) - \overset{*}{b}{}_1^-(\mathbf{k})b_1^+(\mathbf{k}) + \overset{*}{b}{}_2^-(\mathbf{k})b_2^+(\mathbf{k}) - \overset{*}{b}{}_2^+(\mathbf{k})b_2^-(\mathbf{k})\Big). \qquad (6.31)$$

Розклад (6.23) вектор-потенціалу $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ за амплітудами $a_j(\mathbf{k})$ відповідає розкладу за лінійно-поляризованими коливаннями, а розклад $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ за амплітудами $b_j(\mathbf{k})$ відповідає розкладу за круговими поляризаціями. Відповідні вектори поляризації мають вигляд

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2), \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2), \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3. \qquad (6.32)$$

Таким чином, комплексне векторне поле описує позитивно і негативно заряджені частинки з масою m і трьома можливими значеннями проекції вектора спіну на напрям руху, що рівні відповідно ± 1 і 0 (відсутність у S_3 доданку, пропорційного $\overset{*}{b}{}_3^+ b_3^-$ або $b_3^+ \overset{*}{b}{}_3^-$).

6.4. $\widehat{P}, \widehat{T}, \widehat{C}$-перетворення

Так само, як і у скалярному випадку, векторні частинки можна розділити на власне векторні і псевдовекторні. Але, на відміну від скалярного випадку, кожний вектор змінює свій напрям при просторовому віддзеркаленні. Тобто просторова частина векторного потенціалу $V_j(x^0, -\mathbf{x}) = -V_j(x^0, \mathbf{x})$, і тоді, очевидно, псевдовекторний потенціал не буде змінювати свій знак. Отже, P-перетворення буде мати вигляд

$$\widehat{P}: V_\mu \to V_\mu^{\widehat{P}}(x) = \widehat{P}V_\mu(x) = \eta_V^{\widehat{P}} g^{\mu\nu} V_\nu(x^0, \mathbf{x}), \qquad (6.33)$$

де $\eta_V^{\widehat{P}} = +1$ для векторної частинки і $\eta_V^{\widehat{P}} = -1$ – для псевдовекторної. Згідно з тими самими міркуваннями, що і для скалярного поля (див, пп. 4.5.1 і 4.5.3), отримаємо закони перетворення при зарядовому спряженні і часовому віддзеркаленні:

$$\widehat{C}: V_\mu \to V_\mu^c(x) = V_\mu^{\widehat{C}}(x) = \widehat{C}V_\mu(x) = \eta_V^C \overset{*}{V}{}_\mu(x) \qquad (6.34)$$

і

$$\widehat{T}: V_\mu \to V_\mu^{\widehat{T}}(x) = \widehat{T}V_\mu(x) = \eta_V^{\widehat{T}} g^{\mu\nu} \overset{*}{V}{}_\nu(-x^0, \mathbf{x}). \qquad (6.35)$$

§ 7. Електромагнітне поле

7.1. Рівняння Максвелла

Рівняння Максвелла були вперше сформульовані вченим у 60-х роках XIX ст. Вони лягли в основу побудови класичної електродинаміки — науки, що вивчає

електромагнітні явища в різних середовищах. Заслуга Максвелла полягає в тому, що він зумів зібрати і проаналізувати всі відомі на той час закони електромагнетизму, які були відкриті вченими Біо, Саваром, Лапласом, Гауссом, Ампером і Фарадеєм (див. більш детально [14]). Ці закони встановлюють глибокі зв'язки між векторами напруженості електричного $\mathbf{E}$, магнітного $\mathbf{H}$ полів, струмом (густиною) $\mathbf{j}$ і густиною зарядів ρ.

До Максвелла ці закони виглядали так:

1. **Закон Гаусса** або наслідок з теореми Гаусса про потік векторного електричного поля[1)] $\mathbf{E}$:
$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{де } \rho \text{ – густина зарядів.}$$
2. **Закон Фарадея–Ленца**:
$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}.$$
3. **Наслідок з теореми Гаусса** про потік векторного магнітного поля $\mathbf{H}$ (відсутність магнітних зарядів):
$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$
4. **Закон Ампера**:
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{7.1}$$

Максвелл помітив, що з рівняння (7.1) внаслідок того, що $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, випливає, що
$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$
а це суперечить рівнянню неперервності
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$
якщо ρ не є константою у часі.

Аналізуючи ці закони і властивості полів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$, Максвелл дещо модифікував їх і виписав систему диференціальних рівнянь у такому вигляді (див. [45])
$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\\
&\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

[1)] Тут і далі розглядається поле у вакуумі. У випадку середовища треба вектори напруженості поля замінити векторами напруженості індукції (електричної або магнітної).

Ці рівняння описують на класичному рівні взаємодію між зарядженими частинками і полями **E** та **H**. Але спочатку звернемося до вивчення електромагнітного поля у відсутності таких зарядів. Тому розглянемо так звані вільні рівняння Максвелла у вакуумі. Покладаючи в (7.2) $\mathbf{j} = \rho = 0$, маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

7.2. Потенціал електромагнітного поля

Систему рівнянь (7.3) можна записати в більш симетричній формі, яка автоматично встановлює коваріантність рівнянь Максвелла відносно перетворень групи Пуанкаре. Для цього вводять 4-вектор-потенціал електромагнітного поля $A_\mu(x)$, через який поля **H** і **E** виражаються формулами (5.139).

З правих частин рівнянь (5.139) легко побачити, що вони є компонентами 4–вимірного ротора потенціалу $A_\mu(x)$, який називають антисиметричним тензором електромагнітного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{7.4}$$

Тоді, враховуючи (5.139), можна переконатися, що

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Легко пересвідчитися (враховуючи (5.139), що перші два рівняння системи (7.3) перетворюються в тотожності внаслідок відомих з аналізу співвідношень $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = \operatorname{rot}\operatorname{grad} A_0 = 0$. Два інші можна записати у вигляді

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu(x) - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu(x) = 0, \tag{7.6}$$

що свідчить про коваріантність системи (7.3).

7.3. Градієнтні перетворення і умова Лоренца: умова поперечності

З означень полів **E** та **H** через векторний потенціал $A_\mu(x)$ можна побачити, що рівняння (7.6) не змінює свого вигляду, якщо виконати *калібрувальні перетворення* другого роду

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu f(x), \tag{7.7}$$

де $f(x)$ – довільна диференційовна функція. Така інваріантність показує, що вибір потенціалу $A_\mu(x)$ неоднозначний, що є фактично наслідком того, що потенціал $A_\mu(x)$–не спостережувана величина. Такими є вектори електромагнітного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$.

Цією обставиною користуються таким чином, що накладають додаткову умову на $A_\mu(x)$, якою є умова Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \tag{7.8}$$

Умова (7.8) дозволяє записати рівняння (7.6) у більш простій формі

$$-g^{\mu\alpha}\partial_\mu\partial_\alpha A_\nu(x) \equiv \Box A_\nu(x) = 0. \tag{7.9}$$

Виявляється, що рівняння (7.9) і умова Лоренца (7.8) ще не повністю визначають потенціал $A_\mu(x)$. Легко бачити, що ці рівняння залишаються інваріантними відносно *спеціалізованих калібрувальних перетворень Лоренца*:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu f_0(x), \tag{7.10}$$

де $f_0(x)$ задовольняє рівняння Даламбера

$$\Box f_0(x) = 0. \tag{7.11}$$

Завжди можна вибрати $f_0(x)$ так, щоб скалярна частина $A_0(x)$ потенціалу $A_\mu(x)$ перетворювалася у нуль. Тоді умова Лоренца (7.8) набуде вигляду

$$\partial_k A_k(x) = \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{7.12}$$

Фізичний зміст умови (7.12) стає зрозумілим, якщо перейти до перетворення Фур'є.

Так само, як і в пункті 4.3, розв'язки рівнянь (7.12) можна представити у вигляді

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\delta(k^2)e^{ik\cdot x}\widetilde{A}_\mu(k). \tag{7.13}$$

Підставляючи праву частину виразу (7.13) у (7.12), маємо:

$$k_m\widetilde{A}_m(k)|_{k^2=0} = \mathbf{k}\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(k)|_{k^2=0} = 0. \tag{7.14}$$

Цю умову називають *умовою поперечності* електромагнітного поля. Хоч електромагнітне поле описується 4-компонентним потенціалом, фізичний зміст мають лише дві лінійно незалежні компоненти, що ортогональні до хвильового вектора. Із наведених вище викладів легко зробити висновок, що інваріантність рівнянь (7.8) та (7.9) відносно перетворень (7.10) тісно пов'язана з рівністю нулю маси спокою частинки поля $A_\mu(k)$, тобто *фотона*.

Важливо підкреслити: хоч умова поперечності (7.14) не є явно коваріантною, але її виконання можна досягти в довільній лоренцовій системі відліку з допомогою перетворення (7.10) і (7.11).

На завершення цього підпункту зауважимо, що, так само, як і у випадку скалярного поля, вільне електромагнітне поле може бути представлене через свої додатно- і від'ємно-частотні складові:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A^+_\mu(x) + A^-_\mu(x), \\ A^\pm_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{e^{\pm ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}} A^\pm_\mu(\mathbf{k}), \\ A^\pm_\mu(\mathbf{k}) &= \frac{\widetilde{A}_\mu(\pm k^0, \pm\mathbf{k})}{\sqrt{2k^0}}, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2} = |\mathbf{k}|, \end{aligned} \tag{7.15}$$

з правилами спряження, що випливає з умови дійсності $A_\mu(x)$

$$(A^\pm_\mu(\mathbf{k}))^* = A^\mp_\mu(\mathbf{k}). \tag{7.16}$$

Зауваження 7.1. *Як побачимо у розділі IV, при квантуванні електромагнітного поля не вдається задовольнити умову Лоренца (7.8) як співвідношення між операторами $A_\mu(x)$. У квантовій теорії співвідношення (7.8) буде справедливим тільки в сенсі середніх для фізично-допустимих станів.*

7.4. Лагранжів формалізм електромагнітного поля

Легко переконатися, що рівняння (7.9) буде тотожним з рівнянням Лагранжа–Ейлера (3.47), якщо вибрати лагранжіан у вигляді ($u_i(x) \to A_\nu(x)$):

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial^\mu A_\nu(x) \partial_\mu A^\nu(x). \tag{7.17}$$

Рівняння (7.6), яке не враховує умови Лоренца, можна отримати з калібрувально-інваріантного виразу:

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{7.18}$$

яким, як правило, і користуються при побудові електромагнітної взаємодії.

Користуючись (7.5), можна також переписати (7.18) через значення електричного і магнітного полів (задача 7.1):

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2). \tag{7.19}$$

Лагранжіани (7.17) і (7.18) відрізняються один від одного величиною, яка при інтеграції по усьому простору-часу з урахуванням умови Лоренца перетворюється в нуль, не вносячи вкладу в дію (3.43).

Інваріантність лагранжіану відносно перетворень групи Лоренца можна довести так само, як і у випадку векторного поля (див. п. 6.2).

З лагранжіану (7.17) і теореми Нетер легко отримати вирази для динамічних інваріантів (див. ф-ли (3.60), (3.61), (3.64)–(3.70) з $A_\nu(x)$ замість $u_i(x)$).

Тензор енергії-імпульсу

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu A_\alpha(x)\partial^\nu A^\alpha(x) - g^{\mu\nu}\mathscr{L}(x), \tag{7.20}$$

задовольняє рівняння неперервності $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Просторова густина вектора енергії-імпульсу є:

$$T^{00}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(x)\partial_\mu A^\nu(x), \quad T^{0k}(x) = -\partial^0 A_\nu(x)\partial^k A^\nu(x).$$

Канонічно спряженою до поля $A_\mu(x)$ змінною є імпульс

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_0 A_\mu(x))} = -\partial_0 A^\mu(x),$$

який для калібрувально-інваріантного лагранжіану (7.8) матиме трохи інший вигляд

$$\pi^\mu(x) = -F^{0\mu}(x). \tag{7.21}$$

Тоді для виразу 4-вектора енергії-імпульсу матимемо

$$P^0 = -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}[\pi_\mu(x)\pi^\mu(x) + \partial_k A_\mu(x)\partial_k A^\mu(x)], \tag{7.22}$$

$$P^k = \int d\mathbf{x}\,\pi^\mu(x)\partial^k A_\mu(x), \quad k = 1,2,3, \tag{7.23}$$

а для тензора моменту спіну отримаємо

$$S^\alpha_{\mu\nu} = (A_\nu(x)\partial^\alpha A_\mu(x) - A_\mu(x)\partial^\alpha A_\nu(x)) \tag{7.24}$$

і вектор спіну–

$$S_i = \varepsilon_{ijk}\int d\mathbf{x}(A_k(x)\partial_0 A_j(x) - A_j(x)\partial_0 A_k(x)). \tag{7.25}$$

Також буде потрібний вираз енергії і імпульсу електромагнітного поля через значення напруженості цих полів. Для цього зручніше підставити у формулу (3.60) вираз лагранжіану у формі (7.18). Легко підрахувати, що

$$T^{00} = -\partial_0 A^\mu F_{0\mu} - \mathscr{L}(x) = F^2_{0k} - \mathscr{L}(x) + \partial_\mu A_0 F_{0\mu}. \tag{7.26}$$

Тоді, враховуючи (7.5), (7.19) і той факт, що третій доданок у (7.26) не робить внеску у вираз для енергії, оскільки

$$\begin{aligned}\int \partial_\mu A_0 F_{0\mu} d\mathbf{x} &= \int \partial_k A_0 F_{0k} d\mathbf{x} = -\int A_0\partial_k F_{0k} d\mathbf{x} = \int A_0\partial^\mu F_{0\mu} d\mathbf{x} = \\ &= \int A_0\partial_0(\partial^\mu A_\mu) d\mathbf{x} - \int A_0\partial^\mu\partial_\mu A_0 d\mathbf{x} = 0\end{aligned}$$

за умовою Лоренца (7.8) і рівняннями руху (7.9), маємо (враховуючи (7.5))

$$P^0 = \frac{1}{2}\int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d\mathbf{x}. \tag{7.27}$$

Зовсім аналогічно (задача 7.2):

$$\mathbf{P} = \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{x}. \tag{7.28}$$

Зауваження 7.2. *У випадку калібрувально-інваріантного лагранжіану (7.18) відносно перетворень (2.15) ($B_\mu(x) = A_\mu(x)$) вираз для варіації дії (3.74) матиме такий вигляд:*

$$\delta A = \int dx\, \partial_\mu [F^{\mu\nu}(x)\partial_\nu \chi(x)] = \int dx\, j^\nu_A(x)\partial_\nu \chi(x), \tag{7.29}$$

де

$$j^\nu_A(x) = \partial_\mu F^{\mu\nu}(x). \tag{7.30}$$

У другій рівності (7.29) використано антисиметричність тензора $F^{\mu\nu}$. Через антисиметричність вектор струму $j^\nu_A(x)$ задовольняє рівняння неперервності $\partial_\nu j^\nu_A(x) = 0$. Струму (7.30) відповідає величина, що зберігається, тобто заряд $Q_A = \int d\mathbf{x}\, j^\nu_A(x)$. Цю величину називають "зарядом Максвелла". У випадку вільного електромагнітного поля $j^\nu_A(x) \equiv 0$, оскільки права частина (7.30) збігається з лівою частиною (7.6). Випадок взаємодії полів $A_\mu(x)$ з полями матерії розглядатиметься у наступному пункті.

7.5. Поперечні, поздовжні і часові складові електромагнітного поля

Відомо, що електромагнітні хвилі можуть мати різну поляризацію, тобто мати виділений напрям коливання електричного чи магнітного полів. Тому загальний розв'язок (7.13) можна представити як лінійну комбінацію поляризованих складових. Уведемо для цього одиничні вектори $e^\mu = (e^\mu_\nu)^{\nu=3}_{\nu=0}$, де

$$e^0 = (1,0,0,0), (e^0_\alpha = \delta_{0\alpha}), \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij}, \tag{7.31}$$

$[\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2] = \mathbf{e}^3$ і циклічна перестановка.

Тоді розклад векторів $A^\pm_\mu(\mathbf{k})$ запишемо у вигляді

$$A^\pm_\mu(\mathbf{k}) = e^\nu_\mu a^\pm_\nu(\mathbf{k}). \tag{7.32}$$

Легко перевірити, що із (7.31) і (7.32) випливає співвідношення, яке буде використовуватися нижче

$$g^{\mu\nu} A^+_\mu(\mathbf{k}) A^-_\nu(\mathbf{k}) = g^{\mu\nu} a^+_\mu(\mathbf{k}) a^-_\nu(\mathbf{k}). \tag{7.33}$$

Умову Лоренца (7.8) в імпульсному просторі запишемо окремо для додатно-частотної і від'ємно-частотної компоненти:

$$k^\mu A_\mu^\pm(\mathbf{k}) = 0. \tag{7.34}$$

Підставляючи сюди розклад (7.32) і враховуючи (7.31), отримаємо

$$k^0 a_0^\pm(\mathbf{k}) + |\mathbf{k}| a_3^\pm(\mathbf{k}) = 0, \tag{7.35}$$

а враховуючи, що для безмасової частинки $k^0 = |\mathbf{k}|$, маємо з виразу (7.35):

$$a_3^+(\mathbf{k}) a_3^-(\mathbf{k}) = a_0^+(\mathbf{k}) a_0^-(\mathbf{k}). \tag{7.36}$$

Фізичний зміст цього співвідношення полягає в тому, що густина середнього числа *"поздовжніх" фотонів* і *"часових" фотонів* рівна, а їх внесок у білінійну форму (7.33) протилежний за знаком. Отже, остаточно маємо співвідношення

$$-g^{\mu\nu} A_\mu(\mathbf{k}) A_\nu(\mathbf{k}) = \sum_{p=1,2} a_p^+(\mathbf{k}) a_p^-(\mathbf{k}).$$

Застосуємо це співвідношення до обрахування 4-вектора енергії імпульсу. Так само, як і у випадку векторного поля (див. (6.16), при $\overset{*}{V}{}_\mu^\pm(k) = V_\mu^\pm(k) = A_\mu^\pm(\mathbf{k})$) маємо (задача 7.3):

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}\, k^\mu \left\{ -g^{\alpha\nu} A_\alpha^+(\mathbf{k}) A_\nu^-(\mathbf{k}) \right\} = \sum_{p=1,2} \int d\mathbf{k} \cdot k^\mu a_p^+(\mathbf{k}) a_p^-(\mathbf{k}). \tag{7.37}$$

Отже, так само як і у випадку векторного поля, умова Лоренца дозволяє отримати вираз для енергії P^0, що є додатно-визначеною величиною.

Визначимо також у термінах поляризаційних коефіцієнтів $a_\mu^\pm(\mathbf{k})$ вектор спіну (7.25). Підставляючи вирази (7.13) у формулу (7.25) з урахуванням (7.31) та (7.32), маємо (задача 7.4):

$$\mathbf{S} = i \int d\mathbf{k} [A^+(\mathbf{k}) \times A^-(\mathbf{k})] = i \int d\mathbf{k} [a^+(\mathbf{k}) \times a^-(\mathbf{k})].$$

Вектор $\mathbf{S}$ не залежить від часу, тобто зберігається незалежно від моменту руху. Цей факт є наслідком симетрії тензора енергії-імпульсу (7.20).

Проекція вектора спіну на напрям руху є

$$S_3 = i \int d\mathbf{k} (a_1^+(\mathbf{k}) a_2^-(\mathbf{k}) - a_2^+(\mathbf{k}) a_1^-(\mathbf{k})). \tag{7.38}$$

Відповідні канонічні перетворення, що залишають незмінним вигляд P^μ (7.37) і діаганалізують оператор S_3 (7.38), мають вигляд

$$a_1^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1^\pm(\mathbf{k}) \mp i b_2^\pm(\mathbf{k})),$$
$$a_2^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm i b_1^\pm(\mathbf{k}) - b_2^\pm(\mathbf{k})).$$

Відповідні вектори поляризації розкладу за амплітудами $b^{\pm}(\mathbf{k})$ мають вигляд

$$\tilde{e}^{1,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \pm ie^2), \quad \tilde{e}^{2,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp ie^1 - e^2).$$

Вектори e^1, e^2 відповідають лінійній поляризації фотона або, точніше, поля A_μ, а вектори $\tilde{e}^1$, $\tilde{e}^2$–круговій поляризації фотона.

7.6. Квантово-механічні характеристики фотона

Згідно з корпускулярно-хвильовим дуалізмом з електромагнітним полем зіставляється частинка, яка, згідно з лагранжевим формалізмом, має масу спокою, рівну нулю. У цьому пункті спробуємо дати таке *корпускулярне* тлумачення рівнянь електромагнітного поля, опираючись на загальні поняття квантової механіки.

Для цього будемо виходити з системи рівнянь Максвелла (7.3). Так само, як і у випадку скалярних та спінорних полів, шукатимемо розв'язки у вигляді фур'є-перетворень (для зручності знову вживатимемо нерелятивістське позначення часу $x^0 = t$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x},$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Тоді рівняння (7.3) для амплітуд $\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)$ і $\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ мають вигляд

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)}{\partial t} = -i[\mathbf{k} \times \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)], \quad (\mathbf{k} \cdot \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)) = 0,$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)}{\partial t} = \ i[\mathbf{k} \times \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)], \quad (\mathbf{k} \cdot \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)) = 0. \tag{7.39}$$

Рівняння (7.39) треба доповнити умовою дійсності полів $\mathbf{H}$ і $\mathbf{E}$:

$$\overline{\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)} = \widetilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k},t); \quad \overline{\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)} = \widetilde{\mathbf{H}}(-\mathbf{k},t).$$

З рівнянь (7.39) неважко отримати рівняння для компонент $\widetilde{E}_j(\mathbf{k},t)$, $j = 1,2,3$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{k}^2\right) \widetilde{E}_j(\mathbf{k},t) = 0, \tag{7.40}$$

яке можна записати так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i|\mathbf{k}|\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i|\mathbf{k}|\right) \widetilde{E}_j(\mathbf{k},t) = 0. \tag{7.41}$$

Представимо амплітуди $\widetilde{E}_j(\mathbf{k},t)$ у вигляді

$$\widetilde{E}_j(\mathbf{k},t)=\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}}\left(\psi_j(\mathbf{k},t)+\overset{*}{\psi}_j(-\mathbf{k},t)\right) \tag{7.42}$$

(множник $\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}}$ виділений для зручності).

Тоді рівняння другого порядку (7.40) і (7.41) відносно $E_j(\mathbf{k},t)$ можна перетворити у рівняння першого порядку для величин $\psi_j(\mathbf{k},t)$. Легко встановити, що (7.42) задовольняє (7.41), якщо $\psi_j(\mathbf{k},t)$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i|\mathbf{k}|\right)\psi_j(\mathbf{k},t)=0, \tag{7.43}$$

оскільки тоді $\psi_j(-\mathbf{k},t)$ задовольняє спряжене рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-i|\mathbf{k}|\right)\overset{*}{\psi}_j(\mathbf{k},t)=0. \tag{7.44}$$

Рівняння (7.43) можна переписати у формі рівняння Шредінгера

$$i\frac{\partial\psi_j(\mathbf{k},t)}{\partial t}=|\mathbf{k}|\psi_j(\mathbf{k},t). \tag{7.45}$$

Крім того, з останнього рівняння (7.39) випливає, що

$$\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)=0. \tag{7.46}$$

Помножимо вираз(7.46) на $\left(-\frac{k_j}{|\mathbf{k}|}\right)$ і додамо до (7.45). Тоді

$$i\ \frac{\partial\psi_j(\mathbf{k},t)}{\partial t}=|\mathbf{k}|\psi_j(\mathbf{k},t)-\frac{k_j}{|\mathbf{k}|}k_l\psi_l(\mathbf{k},t)$$

або у векторній формі

$$i\frac{\partial\ \boldsymbol{\psi}}{\partial t}=\hat{h}\ \boldsymbol{\psi}, \tag{7.47}$$

де оператор $\hat{h}$ діє на вектор $\boldsymbol{\psi}$ за правилом

$$(\hat{h}\ \boldsymbol{\psi})_j(\mathbf{k},t)=\hat{h}_{jl}\psi_l(\mathbf{k},t),\quad \hat{h}_{jl}=|\mathbf{k}|\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{|\mathbf{k}|^2}\right).$$

З рівняння (7.47) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t))=0,$$

тобто величина $\mathbf{k}\cdot\ \boldsymbol{\psi}(k,t)$ є інтегралом руху і може бути початковою умовою для рівняння (7.47). Рівняння (7.47), (7.46) (при $t=0$) еквівалентні рівнянням Максвелла і мають форму рівняння Шредінгера з оператором Гамільтона $\hat{h}$, власні значення якого є $|\mathbf{k}|$.

Функцію $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)$ можна інтерпретувати як *хвильову функцію* фотона в імпульсному просторі. Щоб у цьому пересвідчитись, запишемо енергію та імпульс (7.27) і (7.28) через функцію $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)$. Насамперед із рівнянь руху (7.43) і (7.44) та представлення (7.42) легко обрахувати, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{k},t)=\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)=-i|\mathbf{k}|\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}}(\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)-\ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}\ (-\mathbf{k},t)).$$

Далі

$$\begin{aligned}
P^0\ &=\frac{1}{2}\int(|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)|^2+|\mathbf{H}(\mathbf{x},t)|^2)d\mathbf{x}=\frac{1}{2}\int(|\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)|^2+|\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)|^2)d\mathbf{k}=\\
&=\frac{1}{2}\int(|\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)|^2+\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}|\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)|^2)d\mathbf{k}=\\
&=\frac{1}{4}\int 2\pi d\mathbf{k}\,|\mathbf{k}|[(\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)+\ \boldsymbol{\psi}^*(-\mathbf{k},t))\cdot(\ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},t)+\ \boldsymbol{\psi}(-\mathbf{k},t))+\qquad(7.48)\\
&+(\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)=\ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}(-\mathbf{k},t))\cdot(\ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},t)-\ \boldsymbol{\psi}(-\mathbf{k},t))]=\\
&=\int d\mathbf{k}\,|\mathbf{k}|\ \ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},t)\cdot\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)=\int d\mathbf{k}\ \ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},t)\cdot\hat{h}\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t).
\end{aligned}$$

У першій рівності використано тотожність Планшереля, а у другій – той факт, що згідно з рівнянь (7.39) усі три вектори $-i\dot{\mathbf{E}}$, $\mathbf{k}$ і $\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)$ є взаємноперпендикулярні, а, отже, з третього рівняння (7.39) маємо

$$|\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)|^2=|\mathbf{k}|^2|\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k},t)|^2.$$

Аналогічно можна обрахувати, що

$$P^j=\int k^j\ \ \overset{*}{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},t)\cdot\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)d\mathbf{k}.\qquad(7.49)$$

Вирази (7.48) і (7.49) мають вигляд звичайних квантово-механічних середніх для енергії і імпульсу фотона. Тому природно вважати функцію $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)$ *хвильовою функцією фотона*, якщо накласти умову нормування:

$$\int|\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)|^2d\mathbf{k}=1.$$

Зауважимо також, що у координатному просторі обернене перетворення Фур'є функції $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{k},t)$ не можна розглядати як хвильову функцію фотона, оскільки залежність полів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ від цієї функції є нелокальною (типу згортки, через те, що у $\mathbf{k}$-просторі це добуток (див.(7.42) $|\mathbf{k}|$ і $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},t)$).

Більш детальний аналіз квантово-механічних властивостей фотона наведений у монографії [3].

7.7. $\widehat{C}, \widehat{P}, \widehat{T}$-перетворення

Закон перетворення поля $A_\mu(x)$ відносно операції зарядової спряженості можна визначити з умови інваріантності рівняння Дірака у зовнішньому полі $A_\mu(x)$ (5.91) відносно цього перетворення. Тобто

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^c(x) = -e\gamma^\mu A^c_\mu\psi^c(x),$$

де

$$A^c_\mu(x) = \widehat{C}A_\mu(x).$$

Порівнюючи це рівняння з (5.93), маємо

$$A_\mu(x) \to A^c_\mu(x) = \widehat{C}A_\mu(x) = -A_\mu(x). \tag{7.50}$$

Зауваження 7.3. *Фізичний сенс інваріантності рівняння (5.91) відносно операції зарядового спряження полягає у тому, що рух електрона у полі $A_\mu(x)$ повинен бути таким самим, як і рух позитрона у полі $A^c_\mu(x) = -A_\mu(x)$.*

Закони перетворення для поля $A_\mu(x)$ при $\widehat{P}$ і $\widehat{T}$-перетвореннях можна встановити з рівняння Максвелла за наявних зарядів і вектора струму:

$$\Box A_\mu(x) = j_\mu(x).$$

Для того, щоб це рівняння було інваріантним відносно перетворень $\widehat{P}$ і $\widehat{T}$, необхідно, щоб $A_\mu(x)$ перетворювалось так само, як звичайний 4-вектор $j_\mu(x)$. Тобто $\mathbf{A}(x)$ перетворювалось як звичайний вектор, а $A_0(x)$ – як звичайний скаляр:

$$A_\mu(x) \to A^{\widehat{P}}_\mu(x) = \widehat{P}A_\mu(x) = g^{\mu\nu}A_\nu(x^0, -\mathbf{x}), \tag{7.51}$$

$$A_\mu(x) \to A^{\widehat{T}}_\mu(x) = \widehat{T}A_\mu(x) = g^{\mu\nu}A_\nu(-x^0, \mathbf{x}). \tag{7.52}$$

7.8. Про сумісність лоренцових і калібрувальних перетворень. Різні види калібровок

Інваріантність теорії відносно перетворень (7.7) приводить до того, що, фіксуючи калібровку, можна вибрати, наприклад, компоненту $A_0(x) \equiv 0$, оскільки канонічно-спряжена величина $\pi^0(x) \equiv 0$ при довільному калібрувальному перетворенні внаслідок антисиметричності тензора $F_{\mu\nu}$:

$$\pi^0(x) = -F_{00}(x) \equiv 0,$$

(див. (7.21)).

Зрозуміло, що при цьому губиться явна лоренцова інваріантність теорії. Щоб зберегти лоренцову коваріантність градієнтно-інваріантних рівнянь Максвелла, треба змінити закон перетворення 4-векторного потенціалу $A_\mu(x)$. Точніше,

потенціал повинен перетворюватись при перетвореннях Лоренца (1.20) не як 4-вектор (див. (1.40)), а з деяким додатком:

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu(A^\nu(x) - \partial^\mu f(x,\Lambda)).$$

Особливі проблеми виникають при квантуванні електромагнітного поля. Це питання розглядатимемо у розділі IV, а на завершення цього пункту наведемо основні види калібровок, які зустрічаються при застосуванні теорії у різних практичних задачах.

1. **Калібровка Лоренца–Ландау**:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \tag{7.53}$$

Через свою явну коваріантність вона є найбільш поширеною умовою.

2. **Кулонівська калібровка (Coulomb gauge)**:

$$\partial_i A^i = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{7.54}$$

Така калібровка є найбільш поширеною у практичних застосуваннях, тому її інколи називають фізичною калібровкою. З умови (7.54), останнього рівняння Максвелла (7.2) і виразу (5.139) можна отримати рівняння для скалярного потенціалу:

$$-\Delta A_0(x) = \rho(x), \tag{7.55}$$

де $\Delta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$—оператор Лапласа.

Рівняння (7.55) легко розв'язати за допомогою функції Гріна оператора Лапласа (див. [21]):

$$A_0(x) = \int d\mathbf{y}\frac{\rho(\mathbf{y},x_0)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \varphi(\mathbf{x}), \tag{7.56}$$

де $\varphi(\mathbf{x})$ – довільна гармонічна функція, тобто така, що $\Delta\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

У випадку вільного електромагнітного поля $\rho(\mathbf{y},x^0) \equiv 0$ і кулонівську калібровку можна доповнити умовою

$$A_0(x) \equiv 0. \tag{7.57}$$

Таку калібровку, коли виконуються і умова (7.54), і умова (7.57), інколи називають *калібровкою випромінювання* (radiation gauge) (див., наприклад, [15, п.8.3]).

Кулонівська калібровка зручна ще й тим, що теорія зберігає інваріантність відносно просторових обертань і трансляцій. Що стосується лоренцових перетворень, то неінваріантні члени повинні компенсуватись.

3°. **Часова калібровка (temporal gauge)**:

$$A_0(x) = 0. \tag{7.58}$$

4°. **Аксіальна калібровка (axial gauge)**:

$$A_3(x) = 0. \tag{7.59}$$

Останні види калібровок інколи використовують у квантовій теорії калібрувальних полів, до чого ще повернемось у розділі VII.

§ 8. Рівняння полів з вищими значеннями спіну

Згідно з загальними положеннями теорії представлень групи Лоренца (див. п. 1.5), польові функції частинок із вищими спінами перетворюються як спінори вищих рангів і можуть розглядатися як лінійні комбінації тензорних добутків спінорів нижчих рангів. Завдяки цьому вони повинні задовольняти не одне, а декілька рівнянь. Крім того, добуток двох незвідних представлень є звідним і розкладається на суму незвідних, що описують також частинки з нижчими спінами. Щоб виключити компоненти, що відповідають нижчим незвідним представленням, треба накласти відповідні лоренц-інваріантні умови. Коротко розглянемо поля, що відповідають частинам зі спінами 3/2 і 2.

8.1. Поля спіну 3/2

Поле спіну 3/2 можна отримати декількома способами. Одна з таких можливостей – польова функція, що перетворюється за допомогою добутку трьох представлень $D^{(\frac{1}{2},0)}$. Тоді згідно з (1.34) маємо

$$D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \times D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \times D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} = D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \oplus D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \oplus D^{\left(\frac{3}{2},0\right)}.$$

Але таке представлення дуже незручне, оскільки для його опису треба використовувати дуже багато індексів. Більш зручним є представлення, у якому польові функції спіну 3/2 перетворюються за добутком векторного і спінорного полів, тобто

$$D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \times D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} = D^{\left(1,\frac{1}{2}\right)} \oplus D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}.$$

Тоді відповідні польові функції будуть мати чотири векторні і чотири спінорні індекси, тобто $\psi = \{\psi_{\mu;\alpha} |\ \mu = 0,1,2,3,\ \alpha = 1,2,3,4\}$. Тоді як векторне поле при кожному значенні α функції $\psi_{\mu;\alpha}$ будуть задовольняти рівняння (6.1), яке в імпульсному просторі має вигляд

$$(k^2 - m^2)\tilde{\psi}_{\mu;\alpha}(\mathbf{k}) = 0 \tag{8.1}$$

при додатковій умові

$$k^\mu \tilde{\psi}_{\mu;\alpha}(\mathbf{k}) = 0. \tag{8.2}$$

Тут $\tilde{\psi}_\mu$ означає фур'є-перетворення спінора ψ_μ.

Далі, враховуючи тільки спінорний характер хвильової функції ψ, при кожному фіксованому значенні μ і, діючи, як і у випадку з виведенням рівняння Дірака (§ 5), отримаємо ще одне рівняння

$$(\hat{k} + m)\tilde{\psi}_\mu(\mathbf{k}) = 0 \tag{8.3}$$

або ж систему для компонент $\tilde{\psi}_{\mu;\alpha}$:

$$(\hat{k} + m)_{\alpha\alpha'}\tilde{\psi}_{\mu;\alpha'}(\mathbf{k}) = 0. \tag{8.4}$$

Внаслідок умови (8.2), польова функція ψ має 12 незалежних компонент (три векторні $\times$ чотири спінорні). Але для опису частинки зі спіном $3/2$ (згідно з (8.2)) потрібно $4 \times 2 = 8$ компонент. Щоб виключити зайві компоненти, треба накласти якусь додаткову лоренц-інваріантну умову, яка б не суперечила рівнянням (8.1) – (8.4). Такою умовою є, наприклад, умова

$$\gamma^\mu \tilde{\psi}_\mu(\mathbf{k}) = 0. \tag{8.5}$$

Щоб переконатися, що ця умова є лоренц-коваріантною, запишемо її у координатному просторі і скористаємося тим, що $\psi_\mu(x)$ перетворюється як вектор за формулою (6.12) і як спінор – за формулою (5.20). Тоді записуємо

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \psi'_\mu(x') &= \gamma^\mu g_{\mu\mu'} \Lambda^{\mu'}_\nu g^{\nu\nu'} S(\Lambda, a)\psi_{\nu'}(x) = \\
&= S(\Lambda, a)\gamma^\alpha \Lambda^\mu_\alpha S^{-1}(\Lambda, a) g_{\mu\mu'} \Lambda^{\mu'}_\nu g^{\nu\nu'} S(\Lambda, a)\psi_{\nu'}(x) = \\
&= S(\Lambda, a)\gamma^\alpha \psi_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \gamma^\alpha \psi_\alpha(x) = 0.
\end{aligned}$$

Тут було вкористано властивості матриць γ^μ (5.22) і матриць Λ (1.12).

Умова (8.5) еквівалентна чотирьом лінійним рівнянням для компонент $\tilde{\psi}_{\mu,\alpha}$, і тому число лінійно-незалежних компонент зменшується до восьми. Легко побачити, що додаткова умова (8.2) є тепер наслідком рівняння (8.3) та умови (8.5). Дійсно, з рівняння (8.3) маємо

$$m\tilde{\psi}_\mu(\mathbf{k}) = -k_\nu \gamma^\nu \tilde{\psi}_\mu(\mathbf{k}),$$

а із співвідношення (5.4)

$$m\gamma^\mu \tilde{\psi}_\mu(\mathbf{k}) = -k_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \tilde{\psi}_\mu(k) = k_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \hat{\psi}_\mu(k) + 2k^\mu \tilde{\psi}_\mu(k).$$

Функція $\tilde{\psi}_\mu$ називається польовою функцією Раріта–Швінгера для частинки спіну $3/2$.

Детальніше про структуру полів спіну $3/2$ та рівняння для них див. ([58], п.5.5) та ([53], п.7.3).

8.2. Частинки спіну 2

Знову ж таки є декілька можливостей опису поля зі спіном 2. Це функції, що перетворюються за представленнями $D^{(2,0)}$, $D^{(0,2)}$ або ж $D^{(1,1)}$. Виберемо представлення $D^{(1,1)}$, яке може бути отримане згідно з загальною теорією спінорних представлень (п.1.4) з добутку, і запишемо

$$\begin{aligned}
D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \otimes D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} &= D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \otimes D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)} \otimes D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \otimes D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)} = \\
&= \left(D^{(0,0)} \oplus D^{(1,0)}\right) \otimes \left(D^{(0,0)} \oplus D^{(0,1)}\right) = \\
&= D^{(0,0)} \oplus D^{(1,1)} \oplus D^{(1,0)} \oplus D^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

Польовою функцією, що перетворюється за добутком двох векторних представлень $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \otimes D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ є тензор 2-го рангу $h_{\mu\nu}(x)$ (або $\hat{h}_{\mu\nu}(\mathbf{k})$ в імпульсному представленні). Внаслідок симетрії вона має десять незалежних компонент. Але якщо виключити молодші спіни 0 і 1, то треба накласти умови, щоб будь-які коваріантні вектори і скаляри, побудовані з $\hat{h}_{\mu\nu}(\mathbf{k})$ перетворювалися тотожно в нуль. Тому можна накласти умови:

$$k^\mu \hat{h}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = 0 \tag{8.6}$$

і

$$g^{\mu\nu}\hat{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{8.7}$$

Рівняння руху для кожної незалежної компоненти збігається з рівнянням для вільної частинки, тобто

$$(k^2 - m^2)\hat{h}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = 0.$$

Число незалежних компонент зменшиться до п'яти, оскільки умови (8.6) та (8.7)– це п'ять співвідношень для компонент $\hat{h}_{\mu\nu}(\mathbf{k})$. Рівняння (8.6) і (8.7) є найбільш загальними характеристиками польової функції частинок спіну 2. Більш детальний аналіз цих полів можна знайти, наприклад, у працях [58] § 5.5 та [53], § 7.3.

Задачі до розділу II

Задача 3.1. Довести, що система рівнянь Гамільтона (3.9) є наслідком рівнянь Лагранжа (3.6), якщо H, L і p_i пов'язані співвідношеннями (3.7) і (3.8). Довести обернене твердження.

Задача 3.2. Довести тотожність Якобі для дужки Пуассона.

Задача 3.3. Довести, що дужки Дірака задовольняють рівняння (3.14) та (3.15).

Задача 4.1. Довести формулу (4.19).

Задача 4.2. Довести, що коли функція $f(x)$, $x \in \mathbb{M}$ є від'ємно-частотним розв'язком рівняння (4.6), то

$$i \int\limits_{x^0=\text{const}} d\mathbf{x}\ \overline{f(x)}\ \overleftrightarrow{\partial_0}\ f(x) \geq 0.$$

Задача 4.3. Отримати формулу (4.61), використовуючи підрахунки формули (4.59).

Задача 5.1. Довести, що лінійно-незалежні, нормовані розв'язки рівняння Дірака $v^{\mu,+}(\mathbf{k})$ задовольняють співвідношення

$$\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})v^{\mu,+}(\mathbf{k}) = -\frac{m}{k_0}\delta^{\mu\nu}.$$

Задача 5.2. Знайти закон перетворення зарядово-спряженого спінора $\psi^c(x)$ при інверсії часу.

Задача 5.3. Обрахувати вираз для вектора енергії-імпульсу P^μ через амплітуди $a^\pm_\nu(\bar{k})$ розв'язків рівняння Дірака.

Задача 5.4. Обрахувати вираз для заряду Q через амплітуди $a^\pm_\nu(\bar{k})$ розв'язків рівняння Дірака (ф-ла (5.128)).

Задача 5.5. Довести, що $\partial_\mu(\bar{\psi}^+_1(x)\gamma^\mu\psi^-_2(x)) = 0$, якщо спінори $\bar{\psi}^+_1(x)$ і $\psi^-_2(x)$ є додатно- і від'ємно-частотними розв'язками рівнянь (5.16) і (5.7).

Задача 5.6. Довести унітарність оператора $U_{\Lambda,a}$, заданого формулою (5.135) у просторі одночастинкових станів $\mathscr{H}_1$.

Задача 5.7. Довести, що для спінорів Майорани справедлива рівність $(\psi^M)^c = \psi^M$.

Задача 6.1. Обрахувати вираз для вектора енергії-імпульсу P^μ через амплітуди $V^\pm_\mu(\bar{k})$ розв'язків вільного рівняння векторного поля.

Задача 6.2. Довести формулу (6.17).

Задача 6.3. Обрахувати вираз для заряду Q векторного комплексного поля через амплітуди $V^\pm_\mu(\bar{k})$ розв'язків вільного векторного поля.

Задача 7.1. Виразити лагранжіан електромагнітного поля (7.18) через значення електричного і магнітного полів.

Задача 7.2. Обрахувати вектор імпульсу електромагнітного поля через вектори електричного і магнітного полів.

Задача 7.3. Виразити вектор енергії-імпульсу електромагнітного поля через поперечні амплітуди поляризацій.

Задача 7.4. Виразити вектор спіну електромагнітного поля через поперечні амплітуди поляризацій.

Розділ III. Класична теорія взаємодіючих полів

Фактично у підпунктах 4.5.1 та 5.3.4 ми коротко познайомилися з процедурою введення взаємодії між комплексним скалярним (у підпункті 4.5.1), дираковським (у підпункті 5.3.4) та заданим електромагнітним полем, що описується 4-векторним потенціалом A_μ. Тут докладніше зупинимось на цьому питанні з точки зору так званого *калібрувального принципу*, покладеного в основу побудови сучасної теорії взаємодіючих полів.

§ 9. Калібрувальна теорія електромагнітної взаємодії електронно-позитронного поля

9.1. Принцип калібрувальної інваріантності в теорії Максвелла

У п. 7.2 рівняння Максвелла були зведені до вигляду (7.6), які з урахуванням наявності *струму зсуву* $\mathbf{j}(x)$ і зарядів густиною $\rho(x)$ можна записати так:

$$\begin{aligned} &\Box A_\nu(x) + \partial_\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = -j_\nu(x), \\ &j = \{j_\nu\}_{\nu=0}^{\nu=4} = \{\rho, -\mathbf{j}\}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

У основі калібрувальної інваріантності класичного електромагнетизму лежить факт, що потенціал $A_\nu(x)$ не є однозначним для заданих значень полів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$.

Перетворення, при яких $A_\nu(x)$ можна змінювати таким чином щоб $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ були незмінними, називають *градієнтними* (або *калібрувальними*) перетвореннями *другого роду*. Вони пов'язані з інваріантністю рівнянь Максвелла відносно перетворень (7.7).

Рівняння (9.1) можна також переписати через тензор електромагнітного поля $F^{\mu\nu}$ (див. 7.4):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{9.2}$$

звідки (в наслідок антисиметричності $F^{\mu\nu}$) випливає рівняння неперервності

4-струму:

$$\partial_\nu j^\nu(x) = 0.$$

У перетвореннях (7.7) можна вибрати $f(x)$ таким чином, щоб виконувалась умова Лоренца (7.8). Тоді кажуть, що $A^\mu(x)$ задовольняє *лоренцеву калібровку.*

Очевидно, що інваріантність $F^{\mu\nu}$ (і рівнянь (9.2)) відносно градієнтних перетворень пов'язана зі збереженням заряду, а значить, і з глобальними фазовими перетвореннями (2.2), інваріантність відносно яких безпосередньо приводить за теоремою Нетер до збереження заряду. Однак зв'язок цей не є простим.

Ю. Вігнер [202] ще у 1949 році навів простий аргумент, щоб показати, що принцип, згідно з яким фізичні величини не залежать від абсолютного значення потенціалу $A^\mu(x)$, разом із законом збереження енергії приводить до закону збереження заряду. Цей аргумент встановлює зв'язок збереження заряду з інваріантністю відносно перетворення електростатичного потенціалу на константу, що випливає з елементарних законів електростатики. Але, звичайно, цей аргумент зовсім не відповідає на питання, чому інваріантність відносно локальних перетворень загального типу (7.7) може привести до закону збереження заряду. Щоб глибше зрозуміти такі непрості зв'язки, звернемося знову до квантово-механічного підходу до електромагнітних взаємодій.

9.2. Рівняння Шредінгера і градієнтна (калібрувальна) інваріантність

Розглянемо рівняння Шредінгера для зарядженої частинки, що рухається в електромагнітному полі. У підпункті 4.5.1 детально обґрунтувано перехід, який треба зробити згідно з квантово-механічними постулатами, щоб отримати таке рівняння: звичайну заміну імпульсу $\mathbf{p}$ вільної частинки оператором $\widehat{\mathbf{p}} = -i\,\boldsymbol{\nabla}$ треба замінити оператором

$$\widehat{\mathbf{p}} = -i\mathbf{D} := -i\,\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A},$$

а енергію E оператором $\widehat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}$ треба замінити на

$$\widehat{E} = iD^0 := i\frac{\partial}{\partial t} - qA_0.$$

Зауважимо, що $q = -e$ для електрона. Тоді рівняння Шредінгера набуде вигляду

$$i\frac{\partial\Psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(-i\,\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{x},t))^2 + qA_0(\mathbf{x},t)\right]\Psi(\mathbf{x},t). \tag{9.3}$$

Унаслідок інваріантності рівнянь Максвелла відносно калібрувальних перетворень (7.7) потенціал $(A_\nu(\mathbf{x},t))_{\nu=0}^3$ можна замінити на $A'_\nu(\mathbf{x},t)$. Тоді для того, щоб узгодити рівняння (9.3) з рівняннями Максвелла треба, щоб перетворенням (7.7) відповідало деяке перетворення

$$\Psi(\mathbf{x},t) \to \Psi'(\mathbf{x},t) = \ ?,$$

таке, щоб $\Psi'(\mathbf{x},t)$ задовольняло рівняння

$$i\frac{\partial\Psi'(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\left[\frac{1}{2m}(-i\ \boldsymbol{\nabla}-q\mathbf{A}'(\mathbf{x},t))^2+qA'_0(\mathbf{x},t)\right]\Psi'(\mathbf{x},t). \tag{9.4}$$

Легко переконатися, що таким перетворенням є локальне фазове перетворення вигляду

$$\Psi'(\mathbf{x},t)=e^{iqf(\mathbf{x},t)}\Psi(\mathbf{x},t) \tag{9.5}$$

з такою самою $f(\mathbf{x},t)$, як і в (7.7). Дійсно, врахувавши (7.7) і (9.5), легко порахувати, що

$$\frac{1}{2m}(-i\ \boldsymbol{\nabla}-q\mathbf{A}'(\mathbf{x},t))^2\Psi'(\mathbf{x},t)=e^{iqf(\mathbf{x},t)}\frac{1}{2m}(-i\boldsymbol{\nabla}-q\mathbf{A}(\mathbf{x},t))^2\Psi(\mathbf{x},t)$$

і

$$\frac{i\partial\Psi'(\mathbf{x},t)}{\partial t}-qA'_0(\mathbf{x},t)\Psi'(\mathbf{x},t)=e^{iqf(\mathbf{x},t)}\left[\frac{i\partial\Psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}-qA_0(\mathbf{x},t)\Psi(\mathbf{x},t)\right],$$

що й забезпечує перехід від (9.4) до (9.3), тобто інваріантність рівняння Шредінгера (9.3) разом із рівняннями Максвелла (7.6). Отже, щоб зберегти коваріантну картину Шредінгера–Максвелла, треба розглянути спільні калібрувальні перетворення (першого і другого родів):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\to\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\ \boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{x},t),\\
&A_0(\mathbf{x},t)\to A'_0(\mathbf{x},t)=A_0(\mathbf{x},t)-\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t},\\
&\Psi(\mathbf{x},t)\to\Psi'(\mathbf{x},t)=e^{iqf(\mathbf{x},t)}\Psi(\mathbf{x},t).
\end{aligned}$$

При цьому зберігається імовірнісна інтерпретація квантово-механічного підходу. Для чистих станів це очевидно, оскільки $|\Psi'|^2=|\Psi|^2$, а якщо деякий стан є суперпозицією станів:

$$\Psi=\Psi_1+\Psi_2,$$

то відповідне $|\Psi|^2$ залежатиме не від абсолютних значень фаз $\delta_1(\Psi_1=|\Psi_1|e^{i\delta_1})$ та $\delta_2(\Psi_2=|\Psi_2|e^{i\delta_2})$, а від їх різниці $\delta=\delta_1-\delta_2$, тому що

$$|\Psi|^2=|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+2|\Psi_1|\,|\Psi_2|\cos\delta.$$

Зміна кожної з фаз δ_1 і δ_2 на $\delta'_1=\delta_1+f(\mathbf{x},t)$ і $\delta'_2=\delta_2+f(\mathbf{x},t)$ залишить цю різницю незмінною:

$$\delta'_1-\delta'_2=\delta_1-\delta_2=\delta.$$

Залишається тільки обґрунтувати інваріантність саме відносно локальної зміни фази. Адже якщо $f(\mathbf{x},t)=f_0=\text{const}$, то картина буде такою самою. Звичайно ж природніше, щоб зміни фази були незалежні у різних точках простору. Це тим більше природно у релятивістському випадку, де глобальні зміни

релятивістського поля $u_i(x)$ будуть суперечити постулату не миттєвої швидкості розповсюдження взаємодії. Отже, у квантовій механіці локальні фазові перетворення

$$\Psi \to \Psi' = e^{iqf(\mathbf{x},t)}\Psi(\mathbf{x},t)$$

можна покласти в основу фазової інваріантності. Але тоді виникає проблема з інваріантністю вільного рівняння Шредінгера, щоб її усунути треба ввести деяке силове поле, в якому рухається квантова частинка. Мовою фізики це означає, що інваріантність можна розглядати як неможливість розрізнити (експериментально) ефект локальної зміни фази і впливу деякого нового поля, у якому рухається частинка. Тобто взаємодія є наслідком інваріантності рівнянь руху відносно калібрувальних перетворень (9.7). І це можна назвати *калібрувальним принципом.*

Звичайно, природно було б чекати, що цей принцип пов'язаний із законом збереження так само, як у теорії поля інваріантність лагранжіану відносно глобальних перетворень (2.2) прямо (Теорема Нетер) пов'язана зі збереженням електричного заряду.

9.3. Калібрувальний принцип — динамічний принцип взаємодії електромагнітного і електронно-позитронного полів

Розглянемо знову електронно-позитронне поле, що описується лагранжіаном (5.114):

$$\mathscr{L}_\psi(x) = \frac{i}{2}(\bar\psi(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)) - m\bar\psi(x)\psi(x). \tag{9.6}$$

Він є інваріантним відносно глобальних перетворень (2.2) і перестає бути інваріантним відносно локальних фазових перетворень

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = e^{-ie\chi(x)}\psi(x),\\ \bar\psi(x) &\to \bar\psi'(x) = e^{+ie\chi(x)}\bar\psi(x).\end{aligned} \tag{9.7}$$

Якщо тепер за аналогією з квантово-механічною картиною (див. п. 9.2) прийняти калібрувальний принцип як постулат, то прийдемо до необхідності введення взаємодії полів ψ і $\bar\psi$ з деяким новим безмасовим полем $B_\mu(x)$ (взагалі кажучи, не обов'язково це поле повинно бути електромагнітним полем $A_\mu(x)$), яке, в свою чергу, є калібрувальним, тобто інваріантним відносно градієнтних перетворень (калібрувальних перетворень другого роду):

$$B_\mu(x) \to B'_\mu(x) = B_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x). \tag{9.8}$$

Тоді інваріантною відносно перетворень (9.7)–(9.8) буде вже взаємодіюча теорія полів, що описується повним лагранжіаном

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) &= \frac{i}{2}(\bar\psi(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - \partial_\mu\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)) - m\bar\psi(x)\psi(x) -\\ &- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + e\bar\psi(x)\widehat{B}(x)\psi(x),\end{aligned} \tag{9.9}$$

де $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x)$; $\widehat{B}(x) = \gamma^\mu B_\mu(x)$.

Лагранжіан (9.9) можна отримати з лагранжіану (9.6), якщо звичайну похідну замінити коваріантними похідними

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_\mu\psi &\to D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieB_\mu)\psi,\\ \partial_\mu\bar\psi &\to D^*_\mu\bar\psi = (\partial_\mu + ieB_\mu)\bar\psi\end{aligned}} \tag{9.10}$$

і дописати вільний лагранжіан поля $B_\mu = B_\mu(x)$.

Отже, вимога калібрувальної локальної симетрії (калібрувальний принцип) перетворюється в автоматичну процедуру:

у лагранжіані вільного спінорного поля треба зробити заміни (9.10) і включити кінетичний член $-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ нового поля $B_\mu(x)$.

Таким чином, вимога локальної калібрувальної інваріантності (9.7)–(9.8) приводить до необхідності розглядати взаємодію полів $\bar\psi$, ψ і B_μ. Лагранжиану (9.9) буде відповідати система рівнянь для взаємодіючих полів:

$$\begin{aligned}&(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma^\mu B_\mu(x)\psi(x),\\ &i\partial_\mu\bar\psi(x)\gamma^\mu + m\bar\psi(x) = e\bar\psi(x)\gamma^\mu B_\mu(x),\\ &\Box B_\mu(x) + \partial_\mu(\partial_\nu B^\nu(x)) = e g_{\mu\nu}\bar\psi(x)\gamma^\nu\psi(x).\end{aligned} \tag{9.11}$$

Природно виникає ідея узагальнити цей калібрувальний принцип, що призвів до виникнення електромагнітної взаємодії, і отримати взаємодію не електромагнітного типу. Вперше цю ідею реалізували Ц. Янг і Р. Міллс [105], що привело до введення відповідних полів (полів Янга–Міллса). Пізніше цю роботу узагальнив Р. Утіяма [92], який розробив загальний формалізм введення калібрувальних полів.

Перш ніж перейти до теорії полів Янга–Міллса, узагальнимо процедуру на довільні $U(1)$-перетворення, які необов'язково пов'язані з перенесенням електричного заряду.

Нехай $\widehat{Q}$ – генератор таких перетворень, тобто

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = e^{ig_1\chi(x)\widehat{Q}}\psi(x),\\ \bar\psi(x) &\to \bar\psi'(x) = e^{-ig_1\chi(x)\widehat{Q}}\bar\psi(x),\end{aligned}$$

де g_1 – деяка безрозмірна константа (параметр) (див. зауваження 2.1).

Тоді правило (9.10) буде таким:

$$\partial_\mu \to \widehat{D}_\mu = \partial_\mu + ig_1 B_\mu\widehat{Q}. \tag{9.12}$$

Легко перевірити, що тензор напруженості $F_{\mu\nu}$ виникає унаслідок комутації двох коваріантних похідних:

$$[\widehat{D}_\mu, \widehat{D}_\nu]_- = ig_1 F_{\mu\nu}\widehat{Q}. \tag{9.13}$$

§ 10. Класична теорія полів Янга–Міллса

10.1. Калібрувальний принцип і лагранжіан полів Янга–Міллса

Теорія полів Янга–Міллса виникла як природне узагальнення калібрувальної електромагнітної взаємодії, яку можна ввести, використовуючи принцип калібрувальної інваріантності як динамічний принцип (див. п. 9.3).

Розглянемо спершу узагальнення перетворень (9.7)–(9.8) на групу $SU(2)$. Представлення цієї групи діє у просторі полів матерії $\psi(x)$ за формулою

$$\psi'(x) = e^{i\omega_a(x)T_a}\psi(x),$$

де $T_a = T^a$, $a = 1, 2, 3$ (для індексів, що належать до групи внутрішніх симетрій, різниці між верхніми і нижніми індексами немає)–*генератори* групи $SU(2)$. Відомо, що в представленні, розмірність якого дорівнює розмірності групи (*фундаментальне представлення*), генератори T_a визначаються матрицями Паулі (див. (2.8), (2.9)):

$$T_a = \frac{1}{2}\sigma_a.$$

Відповідні локальні параметри позначимо через $\omega_a(x) = g\alpha_a(x)$. У цьому випадку поле матерії $\psi(x)$ має вигляд 2-компонентного спінора вигляду (2.6), кожна компонента $\psi^{(s)}$, $s = 1, 2$ якого є, в свою чергу, 4-компонентним (або 2-компонентним) діраківським спінором (див. § 5), а генератори-матриці T_a діють за верхніми індексами s.

Вільний лагранжіан такої системи полів буде тотожний (9.6) з урахуванням того, що

$$\bar\psi(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = \sum_{s=1}^{2}\bar\psi^{(s)}\gamma^\mu\partial_\mu\psi^{(s)}(x),$$
$$\bar\psi(x)\psi(x) = \sum_{s=1}^{2}\bar\psi^{(s)}(x)\psi^{(s)}(x).$$

Відповідно до загального динамічного принципу типу (9.10) взаємодія між полями $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$ "включається"за допомогою заміни

$$\partial_\mu \to \widehat{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}igW^a_\mu\sigma^a = \partial_\mu + \frac{1}{2}ig\,\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{10.1}$$

де $W^a_\mu(x)$ – калібрувальні поля, що відповідають обмінним бозонам. Зауважимо, що заміна (10.1) для члена з $\partial_\mu\psi(x)$ цілком зрозуміла. У випадку члена $\partial_\mu\bar\psi(x)$ цю заміну треба розуміти як

$$\partial_\mu\bar\psi = \partial_\mu\overset{*}{\psi}\gamma^0 = (\partial_\mu\psi)^*\gamma^0 \to (\widehat{D}_\mu\psi)^*\gamma^0.$$

Поля W^a_μ називаються полями Янга–Міллса, g—безрозмірна стала, яка виконує роль константи взаємодії полів Янга–Міллса, σ^a — матриці Паулі ($1/2\sigma^a$ — генератори групи $SU(2)$), які діють на спінор ψ по інших змінних, ніж матриці γ^μ (див. зауваження 2.2 і далі зауваження 10.1).

Запишемо фазове перетворення (2.30) полів ψ у вигляді ($\omega_a(x) = g\alpha_a(x)$):

$$\psi(x) \to \psi^\omega(x) = S_\omega(x)\psi(x) = e^{\frac{1}{2}ig\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}}\psi(x). \tag{10.2}$$

Згідно з концепцією введення калібрувальних полів W^a_μ, вони повинні перетворюватися таким чином, щоб дія коваріантної похідної на спінор $\psi(x)$, тобто $\widehat{D}_\mu\psi(x)$, теж перетворювалася так само, як і спінор $\psi(x)$, тобто за законом (10.2):

$$\widehat{D}_\mu\psi(x) \to \widehat{D}^\omega_\mu\psi^\omega(x) = e^{\frac{1}{2}ig\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}}\widehat{D}_\mu\psi(x) \tag{10.3}$$

або

$$\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}ig\mathbf{W}^\omega_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)S_\omega\psi = S_\omega\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}ig\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi. \tag{10.4}$$

Підставляючи $S^+_\omega S_\omega = 1$ у праву частину (10.4) і враховуючи, що

$$S_\omega(\partial_\mu S^+_\omega) + (\partial_\mu S_\omega)S^+_\omega = 0,$$

отримуємо закон перетворення для W^a_μ (див. (2.31) при $\lambda = 1/g$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ig\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} \;&\to\; \frac{1}{2}ig\mathbf{W}^\omega_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} = S_\omega(\partial_\mu S^+_\omega) + \frac{1}{2}igS_\omega\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}S^+_\omega = \\ &= \frac{1}{2}ig[-\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma} + S_\omega\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}S^+_\omega].\end{aligned} \tag{10.5}$$

З (10.2) і (10.3) безпосередньо випливає також закон перетворення коваріантної похідної $\widehat{D}_\mu$:

$$\widehat{D}_\mu \to \widehat{D}^\omega_\mu = S_\omega\widehat{D}_\mu S^+_\omega. \tag{10.6}$$

Більш конкретну формулу (безпосередньо на W^a_μ) можна отримати, розглядаючи інфінітезимальні перетворення, що відповідають (10.2):

$$\psi^\omega(x) = \left(1 + \frac{1}{2}ig(\delta\boldsymbol{\alpha})(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi(x).$$

Відповідне перетворення $\mathbf{W}_\mu$ буде таким

$$\mathbf{W}_\mu \to \mathbf{W}^\omega_\mu = \mathbf{W}_\mu + (\delta\mathbf{W})_\mu.$$

Тоді з умови (10.4) маємо

$$\begin{aligned}\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}ig\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} \;+\; \frac{1}{2}ig(\delta\mathbf{W}_\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)&\left(1 + \frac{1}{2}ig(\delta\boldsymbol{\alpha})(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}ig(\delta\boldsymbol{\alpha})(x)\cdot\;\boldsymbol{\sigma}\right)\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}ig\mathbf{W}_\mu(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi.\end{aligned}$$

Звідси, нехтуючи доданком, пропорційним $(\delta\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma})(\delta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma})$, отримуємо

$$\frac{1}{2}ig(\delta\mathbf{W}_\mu\cdot\ \boldsymbol{\sigma})=$$

$$-\frac{1}{2}ig\partial_\mu\delta\ \boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\ \boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{4}(ig)^2[(\mathbf{W}_\mu\cdot\ \boldsymbol{\sigma})(\delta\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\ \boldsymbol{\sigma})-(\delta\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\ \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{W}_\mu\cdot\ \boldsymbol{\sigma})].$$

Скориставшись відомим співвідношенням для матриць Паулі (задача 10.1):

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(b\cdot\boldsymbol{\sigma})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+i\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]. \tag{10.7}$$

одержимо

$$\delta W^a_\mu(x)=-\partial_\mu\delta\alpha^a(x)-g[\delta\boldsymbol{\alpha}(x)\times\mathbf{W}_\mu(x)]^a \tag{10.8}$$

або, використавши замість означення векторного добутку повністю антисиметричний тензор ε^{abc} (див. (2.9)), отримаємо

$$\boxed{W^a_\mu(x)\to W^{\omega;a}_\mu(x)=W^a_\mu(x)-\partial_\mu(\delta\alpha)^a(x)-g\varepsilon^{abc}(\delta\alpha)^b(x)W^c_\mu(x).} \tag{10.9}$$

Довільні(не інфінітезимальні) перетворення задаються формулою (2.32) з $B^a_\mu\equiv W^a_\mu$. Узагальненням співвідношень (9.13) є

$$\frac{1}{2}igF^a_{\mu\nu}\sigma^a:=[\widehat{D}_\mu,\widehat{D}_\nu]_-=\frac{1}{2}ig(\partial_\mu\mathbf{W}_\nu-\partial_\nu\mathbf{W}_\mu)\cdot\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{2}ig^2\varepsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu\sigma^a, \tag{10.10}$$

де знову використали формулу (10.7) і записали векторний добуток за допомогою повністю антисиметричного тензора. З формули (10.10) знаходимо повністю антисиметричний тензор $F^a_{\mu\nu}$:

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu W^a_\nu-\partial_\nu W^a_\mu-g\varepsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu. \tag{10.11}$$

Відповідний лагранжіан вільного поля Янга–Міллса матиме наступний вигляд:

$$\mathscr{L}_{\text{ям}}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a. \tag{10.12}$$

Безпосередньо з (10.6) і (10.10) випливає, що

$$\frac{1}{2}ig\mathbf{F}^\omega_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}=[\widehat{D}^\omega_\mu,\widehat{D}^\omega_\nu]_-=S_\omega[\widehat{D}_\mu,\widehat{D}_\nu]_-S^+_\omega=\frac{1}{2}igS_\omega(\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma})S^+_\omega. \tag{10.13}$$

Враховуючи далі (10.7), (10.13) і те, що

$$[F_{\mu\nu}\times F^{\mu\nu}]=0,$$

оскільки для кожного μ, ν вектори $F_{\mu\nu}$ і $F^{\mu\nu}$ колінеарні, легко отримати коваріантність вільного лагранжіану Янга–Міллса

$$\mathscr{L}^\omega_{\text{ям}}=-\frac{1}{4}F^{\omega;a}_{\mu\nu}F^{\omega;\mu\nu}_a=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a=\mathscr{L}_{\text{ям}} \tag{10.14}$$

відносно перетворень (10.2) (задача 10.2).

Зауважимо, що $F^a_{\mu\nu}$ є квадратичним по полю $\mathbf{W}_\mu$ (див. (10.11)), а отже, лагранжіан $\mathscr{L}$ насправді не є вільним, а містить у собі самодію четвертого степеня.

10.2. Рівняння руху вільних полів Янга–Міллса

Скористаємося рівнянням Лагранжа–Ейлера (3.47). У випадку теорії Янга–Міллса записуємо

$$u_i(x) \equiv W^a_\nu(x) \qquad \text{і} \qquad \partial_\mu u_i(x) \equiv \partial_\mu W^a_\nu(x). \tag{10.15}$$

З вигляду лагранжіану (10.12) легко визначити, що

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{ям}}}{\partial(\partial_\mu W^a_\nu)} = \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{ям}}}{\partial(F^b_{\alpha\beta})}\frac{\partial F^b_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu W^a_\nu)} = -\frac{1}{2}F^b_{\alpha'\beta'}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\delta_{ab} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\delta_{ab})g^{\alpha'\alpha}g^{\beta'\beta} = -F^{\mu\nu}_a, \tag{10.16}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{\text{ям}}}{\partial W^a_\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{ям}}}{\partial(F^c_{\alpha\beta})}\frac{\partial F^c_{\alpha\beta}}{\partial(W^a_\nu)} = \frac{1}{2}F^c_{\alpha'\beta'}g\varepsilon^{cdf}(\delta_{\nu\alpha}\delta_{ad}W^f_\beta + \delta_{\nu\beta}\delta_{af}W^d_\alpha)g^{\alpha'\alpha}g^{\beta'\beta} = -g\varepsilon^{abc}W^b_\mu F^{\mu\nu}_c. \tag{10.17}$$

Тоді рівняння для вільної теорії Янга–Міллса мають вигляд

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}_a - g\varepsilon^{abc}W^b_\mu F^{\mu\nu}_c = 0.} \tag{10.18}$$

На відміну від рівнянь електромагнітного поля вони нелінійні. Тому для них не є справедливим принцип суперпозиції.

Інколи рівняння (10.18) записують за допомогою коваріантної похідної D_μ. Для цього треба встановити дію D_μ, яка визначена на полях $\psi(x)$, на компонентах тензора $F^a_{\mu\nu}$. Зручно записати дію генераторів групи T^a, що задаються комутаційними співвідношеннями:

$$[T^a, T^b]_- = i\varepsilon^{abc}T^c, \tag{10.19}$$

у так званому *приєднаному представленні*(див. (2.25)–(2.26). У ньому генератори T^a, $a = 1, 2, 3$ діють на вектори-стовпчики $\Phi = (\Phi^a)^3_{a=1}$ за правилом

$$(T^a\Phi)^b = -(T^b\Phi)^a = -i\varepsilon^{abc}\Phi^c. \tag{10.20}$$

Легко перевірити, що саме така дія генераторів задає представлення комутаційних співвідношень (10.19) на векторах-стовпчиках Φ. Щоб у цьому переконатися треба подіяти правою і лівою частинами співвідношення (10.19) на Φ, скористатись (10.20) і співвідношеннями для структурних констант (див. задачу 2.1):

$$\varepsilon^{adc}\varepsilon^{bce} - \varepsilon^{bdc}\varepsilon^{ace} = -\varepsilon^{abc}\varepsilon^{cde}.$$

Тоді рівняння (10.18) можна записати у вигляді (покладаючи $\Phi^a \equiv F^a_{\mu\nu}$)

$$\widehat{D}_\mu F^{\mu\nu}_a = 0.$$

Отримаємо ще одне корисне співвідношення для тензорів $F^a_{\mu\nu}$. Запишемо для цього тотожність Якобі для коваріантних похідних D_μ:

$$[\widehat{D}_\mu, [\widehat{D}_\nu, \widehat{D}_\lambda]_-]_- + [\widehat{D}_\lambda, [\widehat{D}_\mu, \widehat{D}_\nu]_-]_- + [\widehat{D}_\nu, [\widehat{D}_\lambda, \widehat{D}_\mu]_-]_- = 0. \tag{10.21}$$

Це співвідношення випливає з визначення (10.1) і факту, що тотожність Якобі справедлива для генераторів T^a групи $SU(N)$, або в нашому випадку для $T^a = 1/2\sigma^a$ (задача 10.3).

Тоді знову ж таки з (10.11), (10.1) і визначення (10.20) випливає, що

$$\widehat{D}_\mu F^a_{\nu\lambda} + \widehat{D}_\lambda F^a_{\mu\nu} + \widehat{D}_\nu F^a_{\lambda\mu} = 0, \tag{10.22}$$

що у випадку $g = 0$ збігається з відомою в електродинаміці тотожністю

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Якщо ввести абсолютно антисиметричний тензор $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}$, то (10.22) можна записати у вигляді

$$\widehat{D}_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^a_{\lambda\sigma} \right) = 0.$$

Ці рівняння називають тотожностями Біанки, і вони часто зустрічаються у диференціальній геометрії.

10.3. Поля Янга–Міллса у випадку довільних представлень групи $SU(N)$

У попередніх пунктах 10.1 та 10.2 була побудована теорія полів Янга–Міллса для найпростішого випадку, коли поля матерії перетворювались за фундаментальним представленням групи $SU(2)$. У загальному випадку перетворень групи $SU(N)$ замість трьох генераторів $1/2\sigma^a$ треба розглянути (N^2-1)-генераторів T^a, $a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$, що є матрицями $K \times K$ $(K \geq N)$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[T^a, T^b]_- = i f^{abc} T^c,$$

де f^{abc}—структурні константи групи $SU(N)$, а перетворення $S_\omega(x)$, що відповідає загальному представленню групи $SU(N)$, має вигляд

$$S_\omega(x) = e^{i\omega^a(x) T^a}.$$

Відповідно коваріаційна похідна (10.1) запишеться так

$$\widehat{D}_\mu = \partial_\mu + igW^a_\mu(N) T^a. \tag{10.23}$$

Отже, побудова лагранжіану і рівнянь руху буде тією самою з урахуванням заміни

$$\frac{1}{2}\sigma^a \to T^a.$$

Зауважимо також, що заміна типу (10.23) приводить до побудови лагранжіану, що належить до якоїсь однієї конкретної взаємодії, яка є інваріантною

відносно даної $SU(N)$-симетрії. Якщо ж треба розглянути теорію, яка об'єднує всі взаємодії, слід у виразі для вільних лагранжіанів усіх полів матерії ψ^f (лептонів, адронів і т.д.):

$$\mathscr{L} = \sum_f \mathscr{L}(\bar{\psi}^f, \psi^f) \tag{10.24}$$

зробити заміну

$$\partial_\mu \to \widehat{D}_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{N\geq 1} \oplus W_\mu^a(N) T^a(N) \tag{10.25}$$

і приєднати до лагранжіану (10.24) відповідні лагранжіани полів Янга–Міллса:

$$\mathscr{L}_{\text{ям}} = -\frac{1}{4} \sum_{N\geq 1} F_{\mu\nu}^a(N) F_a^{\mu\nu}(N), \tag{10.26}$$

де $F_{\mu\nu}^a(N)$ виражаються формулою (10.11) з відповідними структурними константами f^{abc} групи $SU(N)$ замість ε^{abc}.

Звичайно на сьогодні більш-менш розробленою є теорія, яка об'єднує $SU(1) \equiv U(1)$, $SU(2)$ і $SU(3)$-симетрії, в рамках яких будується теорія *"Великого об'єднання"* слабких, електромагнітних і сильних взаємодій. Коротко ці питання будуть розглядатися нижче.

Зауваження 10.1. *Для того, щоб користуватись правилами* (10.25), *слід зробити важливе технічне зауваження. У формулі* (10.25) *матриці* $T^a(N)$ *є* $N \times N$*-матрицями і зрозуміло, що при різних* N *вони мають різну розмірність. Тому суму* (10.25) *треба розглядати як пряму суму, тобто кожний доданок діє в своєму просторі спінорів* ψ^f.

Наприклад, для $N = 1$ $\psi^f \equiv \psi$ *є звичайним 4-компонентним спінором, що описує поле спіну* $1/2$,*що обмінюються одним калібрувальним бозоном (SU(1)≡U(1)-симетрія). У випадку електромагнітної взаємодії цим бозоном є фотон.*

У випадку SU(2)-симетрії спінор ψ^f *відповідає дублету частинок спіну 1/2, тобто фактично є два 4-компонент спінори* $\psi^{(s)}$, $s = 1, 2$, *а матриці* $T^a = 1/2\sigma^a$ *є* 2×2 *матриці Паулі, що діють по індексу* s. *Тому запис* $\bar{\psi}\gamma^\mu\sigma\psi$ *треба розуміти так:*

$$\bar{\psi}\gamma^\mu \otimes \sigma^a\psi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sum_{ss'=1}^{2} \psi_\alpha^s \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sigma_{ss'}^a \psi_\beta^{s'}.$$

При цьому кількість матриць σ^a $a = 1, 2, 3$ *відповідає кількості обмінних бозонів.*

У випадку SU(3) буде вже октет частинок, що об'єднуються у рамках SU(3)-симетрії в одну взаємодію, що обмінюються вісьма бозонами. Причому, як вже зазначали, експериментально встановлено: якщо у випадках SU(1) і SU(3) взаємодії ці бозони є безмасовими, то у випадку SU(2)-симетрії W-бозони є масивними частинками.

§ 11. Маси частинок і спонтанне порушення симетрії

Вимога локальної калібрувальної інваріантності, що приводить до взаємодії полів матерії з калібрувальними полями, виявилась дуже простим і ефективним інструментом уведення взаємодії між полями. Але разом із тим неважко помітити, що всі калібрувальні поля є безмасовими, і будь-яка спроба ввести в повний лагранжіан теорії загальноприйнятий масовий доданок

$$\frac{1}{2}m_W^2 W_\mu^a W_a^\mu \tag{11.1}$$

призведе до порушення локальної $SU(N)$-симетрії

Разом з тим, якщо ми хочемо будувати теорію сильних і слабких взаємодій, спираючись на розроблену концепцію калібрувальної інваріантності як на динамічний принцип, то треба враховувати, що обмінні бозони (фотони в електромагнітній взаємодії, піони в сильних взаємодіях і W-бозони в слабких взаємодіях) можуть мати масу, відмінну від нуля. Експериментально це встановлено для $SU(2)$-інваріантних взаємодій.

У цьому параграфі будемо розглядати деякий "механізм", що був розроблений для побудови калібрувально-інваріантної теорії, в якій калібрувальні частинки можуть мати не нульову масу. Основна ідея полягає у припущенні, що Всесвіт заповнений деяким полем (яке носить назву *хіґсівське поле*) спіну 0. Звичайно залишається відкритим питання про природу цього поля. Калібрувальні бозони будуть взаємодіяти ним, і внаслідок такої взаємодії вони здобуватимуть свої маси. Такий самий механізм можна покласти в основу генерації маси і у частинок полів матерії, виходячи з відповідних безмасових лагранжіанів.

У загальноприйнятій термінології квантової теорії поля *безмасовий стан* системи можна розглядати як *вакуумний стан*, а елементарні частинки—як деякі *збудження* цього вакуумного стану. Якщо вакуумний стан відповідає відсутності поля $u_i(x) \equiv 0$, то збуджений стан $u_i(x) \neq 0$ буде відповідати деякому лагранжіану, в якому маса частинки визначається коефіцієнтом у доданку $m^2 \overset{*}{u}_i(x)u_i(x)$. Але якщо вакуумний стан (або мінімум потенціалу) відповідає деякому ненульовому значенню поля u_0, то маса частинок, тобто збуджень $u_0 + \phi(x)$, буде відповідно визначатись коефіцієнтом біля ϕ^2.

Зауважимо також, що для повного розуміння цього механізму, а також наслідків, що випливають із нього при розрахунку конкретних фізичних процесів, треба описувати системи за допомогою квантової теорії взаємодіючих полів, до якої перейдемо нижче. Але сам механізм, вірніше математичний апарат, пов'язаний із цим механізмом, можна пояснити і на класичному рівні. На жаль, питання про фізичну природу цього механізму і джерела, які породжують хіґсівські поля, не може бути розв'язане на даному етапі розвитку теорії.

11.1. Спонтанне порушення симетрії

Розглянемо деяке комплексне скалярне поле, що взаємодіє саме з собою. Нехай його повний лагранжіан має вигляд

$$\mathscr{L}_{\text{хіґ}}(x) = \partial_\mu \overset{*}{\phi}\, \partial^\mu \phi - (\mu^2 \overset{*}{\phi}\, \phi + \lambda(\overset{*}{\phi}\, \phi)^2) = T - U, \tag{11.2}$$

де μ^2 і λ спершу вважаються просто деякими параметрами. Причому виберемо відразу параметр λ строго позитивним, для того, щоб у квантовій теорії спектр Гамільтоніану $H = T + U$ був обмежений знизу, а параметр μ^2 може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Зауважимо, що лагранжіан (11.2) є інваріантним відносно глобальної $U(1)$-симетрії:

$$\begin{aligned} &\phi \to \phi' = e^{i\chi}\phi, \\ &\overset{*}{\phi} \to \overset{*}{\phi}{}' = e^{-i\chi}\phi, \quad \chi = \text{const}\,. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Запишемо поле ϕ через його дійсну і уявну частини:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2).$$

Лагранжіан (11.2) набуде вигляду

$$\mathscr{L}_{\text{хіґ}} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2] - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \tag{11.4}$$

Тут і далі $\partial_\mu b \partial^\mu b := (\partial_\mu b)^2$.

Розглянемо спершу випадок $\mu^2 > 0$, тобто μ — дійсне. Зрозуміло, що мінімум потенціалу U буде при $\phi \equiv 0$ (тобто $\phi_1 = \phi_2 = 0$). Тоді величину μ можна інтерпретувати як масу, а вакууму буде відповідати стан без частинок. Але з таким же успіхом можна розглядати і ситуацію, коли $\mu^2 < 0$. Тоді мінімум ϕ_m потенціалу U можна шукати з рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial|\phi|^2} = 0,$$

що перетворюється у рівняння

$$-\mu^2 - 2\lambda|\phi|^2 = 0,$$

звідки

$$|\phi_m|^2 = \frac{1}{2}(\phi_{m;1}^2 + \phi_{m;2}^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda},$$

або

$$\phi_{m;1}^2 + \phi_{m;2}^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \tag{11.5}$$

Отже, отримали ціле сімейство вакуумних станів (вироджений вакуум), що відповідають полям $\phi = 1/\sqrt{2}(\phi_1 + i\phi_2)$ зі сталим значенням $\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\mu^2/\lambda > 0$.

Якщо вибрати вакуумний стан із якимось конкретним значенням ϕ_1, ϕ_2, що задовольняють (11.5), то перетворення калібрувальної симетрії (11.3) не порушить симетрію лагранжіану (11.4), але порушить симетрію вакууму (тобто переведе систему в інший вакуумний стан). Таку ситуацію, коли симетрія лагранжіану не порушується, а порушується симетрія вакууму, називають *спонтанним порушенням симетрії*. Щоб знайти енергії збудження системи (тобто маси частинок), треба збурити вакуумні стани в околі кожного з мінімумів.

Виберемо деяку довільну точку на колі:

$$\phi_{m;1}^2 + \phi_{m;2}^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \tag{11.6}$$

Нехай $\phi_{m;1} = u_0$, $\phi_{m;2} = v_0$ і розглянемо збурення цього мінімуму, тобто поле

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_0 + \varphi(x) + i(v_0 + G(x))]. \tag{11.7}$$

Тоді враховуючи (11.5), отримуємо з (11.4) лагранжіан у термінах збурень:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{хіг}}(x) &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2 + (\partial_\mu G)^2] - \lambda(u_0\varphi + v_0 G)^2 - \\ &- \frac{\lambda}{4}(\varphi^4 + G^4) - \frac{\lambda}{2}\varphi^2 G^2 - \lambda u_0\varphi^3 - \lambda v_0 G^3 - \\ &- \lambda u_0\varphi G^2 - \lambda v_0\varphi^2 G + \frac{\mu^4}{4\lambda}. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Лагранжіан (11.8) описує весь спектр збуджених станів. Але загальноприйнятою є вітка, що відповідає $v_0 \equiv 0$, тобто вибирають мінімум, що відповідає точці $(u_0, 0)$ на колі (11.6) площини (ϕ_1, ϕ_2).

Цей вибір вакуумного стану зумовлений наступними міркуваннями. Якщо записати поле $\phi(x)$ у вигляді

$$\phi(x) = \rho(x)e^{i\omega(x)}, \quad \rho(x) = \sqrt{\frac{\phi_1(x)^2 + \phi_2(x)^2}{2}},$$

то легко пересвідчитися, що потенціал $U(\phi)$ залежить тільки від $\rho(x)$ (див. (11.2), (11.4)), а кінетична частина енергії (див. (11.2)):

$$T = \partial_\mu \overset{*}{\phi}\, \partial^\mu\phi = (\partial_\mu\rho)^2 + \rho^2(x)(\partial_\mu\omega(x))^2$$

залежить і від фази $\omega(x)$, а, отже, значення T буде мінімальним, якщо

$$\omega(x) = \omega_0 = \text{const}\,.$$

Проте вона може бути вибрана нульовою, оскільки лагранжіан є інваріантним відносно глобальних фазових перетворень (11.3).

Зауваження 11.1. *Наведені вище міркування взагалі треба проводити на рівні квантової теорії. І тоді u_0 і ω_0 фактично будуть середніми значеннями відповідних полів $u_0 = \langle\phi_1(x)\rangle_0$ $u_1 = \langle\omega(x)\rangle_0$ по вакуумному стану. Але, як вже зазначалося вище, загальну картину механізму, що ми розглядається, можна пояснити і на класичному рівні.*

Отже, вибираючи $v_0 \equiv 0$ і нехтуючи константою, отримуємо лагранжіан

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{xir}}(x) &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2 + (\partial_\mu G)^2] - \lambda u_0^2\varphi^2(x) - \\ &- \frac{\lambda}{4}(\varphi(x)^4 + G(x)^4) - \frac{\lambda}{2}\varphi^2(x)G^2(x) - \\ &- \lambda u_0\varphi(x)^3 - \lambda u_0\varphi(x)G^2(x).\end{aligned}$$

Легко бачити, що тепер коефіцієнт біля одного з полів ($\varphi^2(x)$) має потрібний знак, щоб величину $2\lambda u_0^2 = m_H^2$ інтерпретувати як квадрат маси бозонів, що описуються полями $\varphi(x)$. І навпаки, для поля $G(x)$ такий член відсутній, що можна інтерпретувати як наявність безмасового бозона—*ґолдстоунівського бозона.*

11.2. Механізм Хіґса у випадку локальної $U(1)$-симетрії

У попередньому пункті було розглянуто модель, лагранжіан якої є калібрувально інваріантним відносно глобальних перетворень (11.3). Повернемося знову до локальної симетрії і знайдемо вигляд лагранжіану, який був би симетричним відносно перетворень

$$\begin{aligned}&\phi(x) \to \phi'(x) = e^{ig\chi(x)}\phi(x), \\ &\overset{*}{\phi}(x) \to \overset{*}{\phi}{}'(x) = e^{-ig\chi(x)}\overset{*}{\phi}(x).\end{aligned} \tag{11.9}$$

У п. 9.3 показано, що це потребує введення деякого безмасового поля $B_\mu(x)$. При цьому у лагранжіані (11.2) треба замінити звичайні похідні на коваріантні, тобто

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\phi \to D_\mu\phi = (\partial_\mu + igB_\mu)\phi, \\ &\partial_\mu\overset{*}{\phi} \to \overset{*}{D}_\mu\overset{*}{\phi} = (\partial_\mu - igB_\mu)\overset{*}{\phi}\end{aligned} \tag{11.10}$$

і разом з перетворенням (11.9) розглядати перетворення поля B_μ:

$$B_\mu \to B'_\mu(x) = B_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x). \tag{11.11}$$

Крім того, треба дописати ще кінетичний член, що відповідає полю $B_\mu(x)$. Тоді лагранжіан набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) &= (D^*_\mu \overset{*}{\phi}(x))(D^\mu\phi(x)) - \mu^2 \overset{*}{\phi}(x)\phi(x) - \\ &- \lambda(\overset{*}{\phi}(x)\phi(x))^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \tag{11.12}$$

Як і раніше будемо розглядати випадок, коли $\mu^2 < 0$. Використаємо ідеологію попереднього параграфу і виберемо вакуумний стан поля $\phi(x)$ так само, як і у моделі з лагранжіаном (11.4), а відповідне збурення цього поля—у вигляді

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{G(x)}{u_0}}(u_0 + H(x)), \quad u_0^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} > 0. \tag{11.13}$$

Вираз (11.13) збігається з (11.7) з точністю до другого порядку малості по збуренню. Скористаємося тим, що лагранжиан (11.12) є інваріантним відносно локальних перетворень (11.9), (11.11) і виберемо конкретний вигляд функції $\chi(x)$:

$$\chi(x) = -\frac{1}{gu_0}G(x). \tag{11.14}$$

Тоді, записуючи лагранжіан (11.12) у термінах полів

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_0 + H(x)) \tag{11.15}$$

і

$$B'_\mu(x) := W_\mu(x) = B_\mu(x) - \frac{1}{gu_0}\partial_\mu G(x), \tag{11.16}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(\phi, B) = \mathscr{L}(\phi', B') = \\ &= \mathscr{L}(H, W) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H(x))^2 - \lambda u_0^2 H(x)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}g^2u_0^2W_\mu W^\mu - \\ &-\frac{1}{4}\lambda H(x)^4 + \frac{1}{2}W_\mu W^\mu H(x)^2 - \lambda u_0 H(x)^3 + g^2u_0W_\mu W^\mu H(x) + \frac{1}{4}\lambda u_0^4. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Тепер легко побачити, що у лагранжіані (11.17) з'явився член

$$\frac{1}{2}g^2u_0^2g^{\mu\mu}W_\mu W_\mu, \tag{11.18}$$

тобто з'явилась маса у калібрувального бозона W:

$$m_W = gu_0 \tag{11.19}$$

(порівняти з (6.3)).

Оскільки з самого початку виходили з калібрувально-інваріантної теорії і виконували в ній тільки алгебраїчні перетворення, то і нова форма теорії буде калібрувально-інваріантною. Проте відмінна від нуля маса калібрувального бозона з'явиться тільки у випадку, коли виникне спонтанне порушення симетрії хіґсівським полем $H(x)$, яке є збуренням не нульового вакуумного середнього u_0. Тобто спектр збуджень містить у собі тепер вітку, що відповідає дійсному хіґсівському полю $H(x)$ з масою $2\sqrt{\lambda}u_0$, калібрувальному полю $W_\mu(x)$ із масою $m_W = gu_0$, а також різні самодії та взаємодії цих полів. Цікаво тепер, що голдстоунівське поле $G(x)$ тепер просто ввійшло у визначення калібрувального поля $W_\mu(x)$, тобто калібрувальний бозон наче "поглинув" ґолдстоунівський бозон. Такий механізм генерації маси носить назву механізму Хіґса [146].

На закінчення зробимо ще одне зауваження, пов'язане з тим, що розглядали $U(1)$-симетрію і тому калібрувальне поле, взагалі кажучи, можна інтерпретувати як поле фотонів, які взагалі вважаються безмасовими. Але, по-перше, можливо $U(1)$-локальна симетрія – приводить до більш загальних калібрувальних полів, ніж електромагнітне поле, і, по-друге, ще Андерсон у 1963 р. вказав, що у фізиці твердого тіла є декілька явищ, пояснення яких вимагає введення деякої *ефективної маси* електромагнітного поля. Тому описаний вище механізм більш актуальний для слабких і сильних взаємодій, які мають більш високі $SU(2)$ та $SU(3)$-симетрії.

11.3. Механізм Хіґса у випадку локальної $SU(2)$-симетрії

Тут коротко зупинимося на механізмі Хіґса виникнення маси у калібрувальних W-бозонів, описаних у § 10.

На відміну від розглянутого у попередньому параграфі лагранжіану (11.2) тут потрібно розглянути аналогічний лагранжіан, що є $SU(2)$-симетричним. Тобто лагранжіан, який відповідає полю Хіґса, матиме такий вигляд:

$$\mathscr{L}_{\text{хіґ}}(\phi) = g^{\mu\mu}(\partial_\mu\phi)^+(\partial_\mu\phi) - \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2, \tag{11.20}$$

де ϕ—$SU(2)$-дублет

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \phi^+ = (\overset{*}{u}, \overset{*}{v});$$

$u(x)$ і $v(x)$—комплексні скалярні компоненти:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1(x) + iu_2(x)), \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1(x) + iv_2(x)).$$

Тоді так само, як і у попередньому випадку, потенціал

$$U(\phi) = \mu^2\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2 = \frac{1}{2}\mu^2(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + u_2^2)^2$$

при $\mu^2 < 0$ буде мати мінімум, якщо

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda}. \tag{11.21}$$

Знову треба зробити вибір вакуумного стану, але вже в $SU(2)$ просторі, а точніше в декартовому добутку комплексних площин $\times$.

Для того щоб зробити цей вибір, будемо знову вимагати, щоб лагранжіан був інваріантним відносно локальних $SU(2)$-перетворень (10.2)

$$\begin{aligned}\phi(x) &\to \phi'(x) = e^{\frac{1}{2}ig\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}}\phi(x),\\ \phi^+(x) &\to \phi'^+(x) = \phi^+(x)e^{-\frac{1}{2}ig\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}},\end{aligned} \tag{11.22}$$

де σ_a $(a = 1, 2, 3)$—матриці Паулі; $\alpha_a(x)$—функції, що характеризують це перетворення.

Тоді згідно з ідеологією § 10 у лагранжіані (11.20) потрібно зробити зміни (10.1) і дописати кінетичний член, що відповідає полям W^a_μ:

$$\mathscr{L}(\phi, W) = g^{\mu\mu}(\widehat{D}_\mu\phi)^+(\widehat{D}_\mu\phi) - \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2 - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a, \tag{11.23}$$

де $\widehat{D}_\mu$ і $F^a_{\mu\nu}$ визначаються формулами (10.1) і (10.7). А для інваріантності лагранжіану (11.23) відносно перетворень (11.22) треба щоб виконувався наступний закон перетворення полів W^a_μ (10.5):

$$\frac{1}{2}ig\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} \to \frac{1}{2}ig\mathbf{W}'_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}ig[-(\partial_\mu\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + S_\omega\mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}S^+_\omega], \tag{11.24}$$

$$S_\omega = e^{\frac{1}{2}ig\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}}.$$

Виберемо тепер вакуумний вектор (тобто вектор, компоненти якого задовольняють (11.21)) у вигляді

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ u_0\end{pmatrix}, \quad u_0^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} > 0. \tag{11.25}$$

Тобто фактично

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v_1 = u_0, \quad v_2 = 0, \tag{11.26}$$

а відповідне збурення

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{G^a(x)\sigma^a}{u_0}}\begin{pmatrix}0\\ u_0 + H(x)\end{pmatrix}. \tag{11.27}$$

Знову скористаємося тим, що лагранжіан (11.23) є інваріантним відносно локальних $SU(2)$-перетворень (11.22), і виберемо конкретний вигляд функцій $\alpha^a(x)$:

$$\alpha^a(x) = -\frac{2}{u_0 g}G^a(x). \tag{11.28}$$

Тоді поле, що відповідає збуренню вакууму (11.25), матиме такий вигляд:

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ u_0 + H(x)\end{pmatrix}, \tag{11.29}$$

а відповідні калібрувальні поля W'^a будуть визначатись рівнянням (11.24) з $\alpha^a(x) = -\dfrac{\lambda}{g}G^a(x)$.

Як і у попередньому випадку, всі поля $G^a(x)$, що відповідають ґолдстоунівським бозонам, поглинулися калібрувальними полями $W'^a(x)$. Тепер, щоб отримати спектр збуджень лагранжіану (11.23), потрібно виконати алгебраїчні перетворення з лагранжіаном

$$\mathscr{L}(\phi', W') = g^{\mu\mu}(\widehat{D}'_\mu\phi')^+(\widehat{D}'_\mu\phi') - \mu^2\phi'^+\phi' - \lambda(\phi'^+\phi')^2 - \frac{1}{4}F'^a_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}_\mu, \qquad (11.30)$$

де

$$\widehat{D}'_\mu = \mathbf{1}\cdot\partial_\mu - \frac{1}{2}igW'^a_\mu\sigma^a$$

і $\phi'(x)$, що визначаються формулою (11.29).

Надамо можливість читачеві самостійно опрацювати досить громіздкі викладки (задача 11.1), щоб переконатися, що лагранжіан (11.30) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\phi', W') &= \mathscr{L}(\phi, W) = \frac{1}{2}\partial_\mu H(x)\partial^\mu H(x) - \\ &- \frac{1}{2}\mu^2(u_0 + H(x))^2 - \lambda(u_0 + H(x))^4 - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(a)F^{\mu\nu}_a(x) + \\ &+ \frac{1}{8}g^2\widetilde{W}^a_\mu(x)\widetilde{W}^\mu_a(x)(u_0 + H(x))^2, \qquad (11.31)\end{aligned}$$

де

$$\widetilde{W}^a_\mu(x) = W^a_\mu(x) + \frac{2}{gu_0}\partial_\mu G^a(x). \qquad (11.32)$$

Отже, всі ґолдстоунівські бозони G^a поглинуто калібрувальними бозонами, які набули вигляду (11.32), і вони з безмасових перетворилися в частинки з масою:

$$m_{\widetilde{W}} = \frac{1}{2}gu_0, \qquad (11.33)$$

яка в два рази менша за відповідну масу у випадку $U(1)$-симетрії (див. (11.18)).

Зауважимо, що у випадку $SU(N)$-симетрії ($N \geq 3$), коли число калібрувальних бозонів $W^{(a)}_\mu$ буде N^2-1, тобто $a = 1, 2, \ldots, N^2-1$. Причому $(2N-2)$-бозонів W_μ, $i = 1, 2, \ldots, 2N-2$ матимуть масу $m^2_{W^i_\mu} = \dfrac{1}{4}g^2u_0$, одне поле $W^{(N^2-1)}_\mu$ – масу $m^2_W = \dfrac{1}{2}g^2u_0^2\,\dfrac{N-1}{N}$, а інші $(N^2-1)-(2N-1)$-бозонів будуть безмасовими (див. детальніше [23], Гл. 11).

11.4. Генерація мас ферміонів

Як зазначено у п. 10.3, для отримання повного лагранжіану взаємодіючих полів матерії треба у виразі для всіх вільних полів матерії (10.24) виконати заміну (10.25) і приєднати до лагранжіану кінетичний член (10.26), що відповідає

полям Янга–Міллса. Тоді в новому лагранжіані виникнуть нові калібрувальні безмасові поля $W^a_\mu(N)$ і їх взаємодії. Якщо початковий (затравочний) лагранжіан полів матерії (10.24) теж буде відповідати безмасовим частинкам, тобто не буде містити членів типу

$$m_f \bar{\psi}^f \psi^f, \tag{11.34}$$

то після заміни (10.25) такі члени не з'являться, тобто всі частинки залишаться безмасовими. Вище було розглянуто механізм Хіґса, що приводить до виникнення мас у калібрувальних бозонів за рахунок їх взаємодії з деяким гіпотетичним хіґсівським полем. Це поле можна інтерпретувати як якесь "вакуумне безмасове поле" з лагранжіаном (11.2). Збудження цього поля і взаємодія з полями Янга–Міллса призводить до генерації мас калібрувальних бозонів. Такий механізм буде діяти і для генерації мас полів матерії, які теж повинні взаємодіяти з хіґсівським полем $\phi(x) = \{\phi^{(a)}(x)\}$.

З аналізу взаємодії спінорних полів ψ^f з калібрувальними полями можна зробити висновок, що взаємодія цих полів з хіґсівськими полями матиме подібний характер. У випадку $SU(1)$-симетрії це просто лагранжіан Юкави:

$$\mathscr{L}_{\text{вз}} = \mathscr{L}_{\text{юк}} = g_1 \bar{\psi}\psi(\phi + \overset{*}{\phi}) = g_1 \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \mathrm{Re}\,\phi. \tag{11.35}$$

У випадку $SU(2)$-симетрії взаємодії

$$\mathscr{L}_{\text{вз}} = g_2 \bar{\psi}^s_\alpha (\phi^{(s)} + \overset{*}{\phi}{}^s)\psi^{(s)}_\alpha \tag{11.36}$$

і т.д.

Тоді повний $SU(2)$-симетричний лагранжіан матиме вигляд

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2}\left[\left(\overset{\wedge}{\overset{*}{D}}_\mu \bar{\psi}^f\right)\gamma^\mu \psi^f + \bar{\psi}^f \gamma^\mu \widehat{D}_\mu \psi^f\right] + g^{\mu\nu}(\widehat{D}_\mu \phi)^+ (\widehat{D}_\mu \phi) - \\ &- \mu^2 \phi^+ \phi - \lambda(\phi^+\phi)^2 - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + g_2 \bar{\psi}^f (\phi + \overset{*}{\phi})\psi^f. \end{aligned} \tag{11.37}$$

Після збурення вакуумного стану (11.25)–(11.27) в лагранжіані (11.37) з'являться доданки типу

$$\frac{g_2 u_0}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^{(2)} \psi^{(2)}.$$

Величину $m_f = \dfrac{g_2 u_0}{\sqrt{2}}$ можна інтерпретувати як масу ферміонного поля. Тобто маси ферміонів з'являються лише унаслідок порушення симетрії. Наприклад, в теорії слабких взаємодій спінор $\psi^{(1)}$ відповідає нейтрино, а спінор $\psi^{(2)}$ – електрону (див., наприклад, [41, Гл. 8]). Тоді m_f можна трактувати як масу електрона. Звичайно, визначити її не можна, оскільки константа взаємодії g_2 невідома. Крім того, не з'являється член, пропорційний $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}$. Звичайно це не є наслідком якогось глибокого фізичного принципу, а лише наслідком вибору вакуумного стану (11.25)–(11.26) і його збурення (11.27).

На завершення зазначимо, що механізм спонтанного порушення симетрії має дуже широке застосування у теоретичній фізиці для опису багатьох фізичних явищ. Детальніше див., наприклад, [17], [168].

§ 12. Про побудову загального лагранжіану взаємодіючих полів

У попередніх параграфах було розглянуто різні види полів, які розрізнялись досить малим числом характеристик. Такими характеристиками були маса частинки (m), яка описується даним полем, спін (S) та заряд (Q). Але в природі існує багато (може, десятки) частинок, що мають однакові значення m, S, Q, а кількість усіх відомих із експерименту частинок (включаючи так звані резонанси) вже, мабуть, перевищує дві сотні. Тому структура полів $u_i(x)$, що відповідають одному і тому самому значенню m, S, Q, буде однакова, але довільність в їх визначенні дає можливість шукати додаткові квантові характеристики, які б конкретніше визначали функції $u_i(x)$.

Вивчення теорії та експерименту взаємодіючих елементарних частинок у рамках різних груп симетрій привело до появи нових квантових характеристик – таких, як "*дивність*", "*гіперзаряд*", "*ізоспін*" і т.д.

Але найбільш плідною виявилася гіпотеза *кваркової моделі*, згідно з якою всі *адрони* (баріони і мезони—частинки, що беруть участь у сильних взаємодіях) побудовані з деякого скінченного числа (поки що *шести*) "елементарних" (мабуть, у повному розумінні цього слова) частинок *кварків*.

На першому етапі $SU(2)$-симетрія вимагала тільки двох кварків u (від англійського слова *up*) і d (*down*). В рамках $SU(3)$-симетрії, яку почали використовувати для класифікації адронів, з'явився кварковий триплет u, d, s (*strange*), вид яких прийнято називати "*аромати* " (*flavors*).

Кожному кварку приписують спін $1/2$ і баріонний заряд $B = 1/3$. Електричний заряд кварків теж повинен бути дробовим, а саме $Q_u = 2/3e$, $Q_d = -1/3e$, $Q_s = -1/3e$ ($e = |q_{\text{ел}}|$). Баріони побудовані з трьох кварків (qqq), а мезони – із пар кварк-антик ($q\bar{q}$), причому всі виявлені експериментом мезони можна розмістити у мультиплетах ($q\bar{q}$). Проте подальший розвиток експериментальної техніки дав можливість збільшити рівень енергій, і у 1974 р. було відкрито ще два резонанси ψ і ψ'. Вони вимагали введення зв'язного стану нового кварка, який був названий "*чарівним*" або c-кварком (*charm*) з зарядом $Q = 2/3e$. Пізніше з різних теоретичних міркувань були введені b-кварк (*bottom*) і t-кварк (*top*), а також поняття "*кольору*" для кожного сорту кварка, який може знаходитись у трьох "кольорових" зарядових станах: b–(*blue–синій*), g–(*green–зелений*), r–(*red – червоний*). Векторні частинки, що відповідають калібрувальним полям і які відіграють роль обмінних бозонів у сильних взаємодіях, називають *глюонами*. Глюони належать до "кольорового" октету групи $SU(3)$, тобто згідно з п. 10.3 їх число збігається з кількістю генераторів T^a, $a = 1, \ldots, 8$. Відповідні польові функції позначимо таким чином:

$$W^a_\mu(3) := G^a_\mu. \tag{12.1}$$

Глюони взаємодіють з кварками подібно до того, як фотони з електронами і позитронами у квантовій електродинаміці, але, на відміну від $U(1)$-симетрії,

генератори T^a не є діагональними матрицями. Тому вони переставляють кольорові заряди кварків, тобто кожний глюон має свою комбінацію кольорів. Досі кварки не були виявлені у вільному стані, але численні непрямі експерименти з частинками, що утворюють дублетні чи триплетні кваркові стани, чудово узгоджуються з теоретичними міркуваннями і розрахунками. Вважається, що на початковому розвитку нашого Всесвіту (в перші мікросекунди – точніше $10^{-40}---10^{-30}$ с після "*Великого вибуху*"), коли енергії були дуже великі, матерія існувала у вигляді кварк-глюонної і лептонної плазми, а подальше зниження температури привело до утворення дуже сильних зв'язних станів–адронів.

Теорія, що описує процеси, пов'язані з великими енергіями, має назву *квантової хромодинаміки* (КХД). Про побудову і проблеми такої теорії мова буде йти нижче. Багато частинок, що беруть участь у процесах сильного зв'язку, мають не нульовий електричний заряд і додатково зазнають електромагнітної взаємодії. Проте у більшості випадків такою взаємодією нехтують, оскільки вона приблизно в тисячу разів слабша за сильну. Ще слабшою (більше, ніж у мільярд разів ($\approx 10^{-10}$)) ніж електромагнітна є слабка взаємодія. Хоч її відкриття і пов'язують з явищем β-розпаду нейтрона:

$$n \to p + e + \bar{\nu}_e, \tag{12.2}$$

яке було відкрите ще в кінці XIX ст., але чітке усвідомлення того, що за ним стоїть принципово інший тип взаємодії, стало очевидним значно пізніше,– після того, як були виявлені інші слабкі процеси. Перш за все це, мабуть, зумовлено тим, що спершу явище β-розпаду спостерігали при розпаді ядер. Але процес (12.2) існує у природі і для вільних нейтронів. Власне цей факт можна вважати вирішальним у підтвердженні існування взаємодії, що відрізняється від електромагнітної, оскільки нейтрон—це незаряджена частинка. Якщо розраховувати процес (12.2) з точки зору електромагнітної взаємодії, то нейтрон має залишатися стабільною частинкою, проте в дійсності час його життя $\tau_n \approx 15$ хв.

Але і слабкі, і електромагнітні взаємодії досить "близькі", тому в деяких процесах їх треба враховувати разом. Таке об'єднання було запропоновано ще С. Глешоу [131] та завершене в працях С. Вайнберга [195] і А. Салама [182].

Ця теорія прояснила деякі проблеми фізики слабких взаємодій, але цілий ряд проблем залишився відкритим. Така ж ситуація була і в теорії сильних взаємодій, особливо щодо пояснення широкого спектра мас кварків. Відповідь на деякі питання дає схема *Великого об'єднання* теорій електрослабкого і сильних взаємодій, що була запропонована у 1974 р. М. Джорджі і С. Глешоу [129] (див. також [176]).

У цьому параграфі коротко опишемо схему побудови лагранжіанів, що виникають при описі всіх трьох взаємодій та їх об'єднанні. Детальніше див., наприклад, [98], [41], [23].

12.1. Лагранжіан КХД

Отже, з короткого аналізу вступу до § 12 і результатів попередніх розділів, зрозуміло, що фізику сильних взаємодій можна описати в рамках теорії з порушеною калібрувальною інваріантністю відносно групи $SU(3)$. Цю групу у такому контексті називають групою кольорів, а теорію – квантовою хромодинамікою. КХД вивчає взаємодію адронів (баріонів і мезонів), які є зв'язними станами кварків, взаємодія яких відбувається через поле векторних бозонів, які називаються глюонами.

Отже, вихідний лагранжsан теорії повинен бути записаний через поля кварків і глюонів (калібрувальні поля).

Позначимо 4-спінор, що відповідає кварку виду $f = (u, d, \ldots)$ і кольору $i = (b, g, r)$, через q_f^i. Тоді, згідно з основним принципом калібрувальної теорії

$$\mathscr{L}_{\text{ккд}} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu \widehat{D}_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu}. \tag{12.3}$$

Тут відповідно до (10.23), (12.1) і (10.11)

$$\widehat{D}_\mu = \partial_\mu + i g_3 G^a_\mu T^a,$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_3 f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu,$$

де f^{abc} – структурні константи групи $SU(3)$ (див. (2.22)), константа g_3 визначає інтенсивність сильної взаємодії.

Нагадаємо, що матриці γ^μ діють на q_f по спінорних індексах $\alpha = 1, 2, 3, 4$, а генератори T^a, які у фундаментальному представленні групи $SU(3)$ визначаються 3×3 матрицями Гелл–Манна λ^a(див. п.2.3.2) ($T^a = 1/2\lambda^a$), діють по індексах кольору i:

$$\bar{q}_f \gamma^\mu T^a q_f \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sum_{i,j \in \{b,g,r\}} (\bar{q}_f)^i_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} T^a_{ij} (q_f)^j_\beta.$$

Зауважимо що у (12.3), по-перше, можна покласти всі маси кварків $m_f \equiv 0$, оскільки в лагранжіані відсутні всі масові члени, які відповідають векторним бозонам G^a_μ, і для пояснення виникнення мас треба розглядати спонтанне порушення калібрувальної інваріантності хіґсівським полем (див. § 11), і, по-друге, (12.3) відповідає класичній теорії. У квантовій теорії будуть виникати додаткові члени (див. нижче). Поле самих адронів повинно залежати від полів кварків як складових.

З урахуванням того, що адрони "не мають кольору", тобто є синглетами за групою $SU(3)$, зрозуміло, що вони від індексів кольору i не будуть залежати (тобто по цих індексах треба просумувати), а від сорту кварків будуть. Тоді для полів адронів можна записати такі співвідношення:

для полів мезонів:

$$\varphi_{f_1 f_2}(x) \sim \bar{q}^i_{f_1}(x) q^i_{f_2}(x), \tag{12.4}$$

для полів баріонів:

$$\psi_{f_1 f_2 f_3}(x) \sim \varepsilon_{ijk} q^i_{f_1}(x) q^j_{f_2}(x) g^k_{f_3}(x). \tag{12.5}$$

Звичайно ці формули не можна вважати точними—вони відтворюють тільки якісну картину побудови поля адронів через їх кваркові складові.

12.2. Лагранжіан слабких взаємодій

Різного роду експерименти з розпаду частинок при невеликих енергіях (у тому числі β-розпад ядер, розпад μ-мезонів, гіперонів і т.д.) привели вчених до чіткого усвідомлення, що всі ці процеси зумовлені одним типом взаємодії, яка відрізняється від електромагнітної і була названа *слабкою*.

Такі процеси обумовлені взаємодією чотирьох ферміонних полів,і тому ймовірний феноменологічний вигляд гамільтоніану взаємодії повинен бути пропорційний скалярному добутку (у сенсі простору Мінковського) двох струмів:

$$\mathscr{L}^{(\text{фен})}_w(x) \sim \overset{*}{J}_\mu(x) J^\mu(x). \tag{12.6}$$

Вигляд струму для якогось одного типу полів можна визначити за теоремою Нетер, наприклад–формула (5.115) для електронно-позитронного поля. Для того щоб урахувати усі можливі процеси, розіб'ємо їх умовно на три типи: чисто лептонні, змішані лептонно-адронні і чисто адронні, що пов'язані слабкою взаємодією:

$$\mathscr{L}^{(\text{фен})}_{w;\text{вз}}(x) = \mathscr{L}^{(ll)}_{w;\text{вз}}(x) + \mathscr{L}^{(hl)}_{w;\text{вз}}(x) + \mathscr{L}^{(hh)}_{w;\text{вз}}(x).$$

До чисто лептонних процесів належать, наприклад, розпади лептонів $\mu^\mp$:

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

До змішаних, скажімо, β-розпад (5.151), а до чисто адронних—розпад Λ^0 гіперона:

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-.$$

З урахованням також кваркової структури адронів, запишемо лагранжіан (12.6) у вигляді лептон-лептонної, лептон-кваркової і кварк-кваркової частин. При цьому врахуємо також давно помічену унікальну властивість кварків і лептонів паруватися в усіх виявлених на сьогодні процесах. Висловлюючись мовою ізоспінової групи $SU(2)$, будемо вважати, що кварки групуються в дублети:

$$q_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \tag{12.7}$$

причому електричні заряди $q_u = q_c = q_t = \dfrac{2}{3}e$, $q_d = q_s = q_b = -\dfrac{1}{3}e$, $e = |q_{\text{ел}}|$. Баріонні заряди усіх кварків $B_q = 1/3$, а антикварків – $B_{\bar{q}} = -1/3$. П'ять кварків добре вивчені на різного роду непрямих експериментах, виміряні і розраховані їх маси (див., наприклад, [41, Гл.1]), шостий t-кварк повинен існувати, виходячи з теоретичних міркувань.

Дублети (12.7) називають *"сім'ями"* або *"поколіннями"*. Аналогічні сім'ї утворюють і лептони:

$$l_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \tag{12.8}$$

Так само, як і в ситуації з кварками, нейтрино ν_τ ще не спостерігалось в експериментах, але з теоретичних міркувань воно повинно існувати.

Виходячи з досить непростих теоретичних міркувань, які тут не наведено, у статті С. Глешоу Дж. Іліопулоса Л. Майані[132] запропоновано феноменологічний лагранжіан у вигляді $SU(2)$-інваріантного добутку двох струмів:

$$\mathscr{L}^{(\text{фен})}_{w;\text{вз}} = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu_a(x) J^a_\mu(x), \tag{12.9}$$

де G – константа взаємодії;

$$\begin{aligned} J^\mu_a(x) = g^{\mu\nu} J^a_\nu(x) &= \sum_{f=1}^{3} \left[\bar{l}_{f;L} \gamma^\mu \sigma^a l_{f;L} + \bar{q}^0_{f;L} \gamma^\mu \sigma^a q^0_{f;L} \right] = \\ &= \sum_{f=1}^{3} \sum_{s,s'=1}^{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \Big[\left(\bar{l}_{f;L}\right)^{(s)}_{\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} \sigma^a_{ss'} \left(l_{f;L}\right)^{(s')}_{\beta} + \\ &+ \left(\bar{q}^0_{f;L}\right)^{(s)}_{\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} \sigma^a_{ss'} \left(q^0_{f;L}\right)^{(s')}_{\beta} \Big]. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Тут, відповідно до (12.7) і правила, що у взаємодії беруть участь тільки лівокіральні поля (див. (5.143), (5.146), (5.146′)), введено такі позначення для 4-компонентних спінорів:

$$\begin{aligned} &\left(l_{f;L}\right)^1 = \nu_{f;L}, \quad f_1 = e, \quad f_2 = \mu, \quad f_3 = \tau, \\ &\left(\bar{l}_{1;L}\right)^2 = e^-_L, \quad \left(l_{2;L}\right)^2 = \mu^-_L, \quad \left(l_{3;L}\right)^2 = \tau_L, \\ &\left(q_{1;L}\right)^1 = u_L, \quad \left(q_{1;L}\right)^2 = d_L, \quad \left(q_{2;L}\right)^1 = c_L, \\ &\left(q_{2;L}\right)^2 = s_L, \quad \left(q_{3;L}\right)^1 = t_L, \quad \left(q_{3;L}\right)^2 = b_L, \end{aligned}$$

а $q^0_{f;L}$—спінори вигляду (12.7), в яких нижні компоненти d_L, s_L, b_L замінені на їх лінійні комбінації, що визначаються деякою унітарною *матрицею Кобаяші–Маскава* [159], тобто

$$q^0_{1;L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d^0_L \end{pmatrix}, \quad q^0_{2;L} = \begin{pmatrix} c_L \\ s^0_L \end{pmatrix}, \quad q^0_{3;L} = \begin{pmatrix} t_L \\ b^0_L \end{pmatrix},$$

а

$$\begin{pmatrix} d_L^0 \\ s_L^0 \\ b_L^0 \end{pmatrix} = \widehat{K} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad \widehat{K} - 3 \times 3 \quad \text{матриця.}$$

Феноменологічна схема Глешоу-Іліопулоса-Майамі дуже точно описує всі експериментальні дані процесів при слабкій взаємодії, але вона не вкладається в описану у попередніх параграфах теорію калібрувальних полів, згідно з якою взаємодія є наслідком калібрувальної інваріантності. Крім того, лагранжіан (12.9), (12.10) при квантуванні приводить до значних математичних проблем, пов'язаних із виникненням ультрафіолетових та інфрачервоних розбіжностей, які не можна усунути через неперенормовність теорії(цей факт буде розглянуто нижче).

З міркувань, які потребують квантового підходу до цієї проблеми, можна показати, що феноменологічний лагранжіан (12.9) можна відтворити (принаймні в нижчих порядках теорії збурень), якщо розглянути лагранжіан слабкої взаємодії у вигляді

$$\mathscr{L}_{w;\text{вз}} = \frac{g}{2} J_a^\mu(x) W_\mu^a(x), \tag{12.11}$$

де $J_a^\mu(x)$ визначається формулою (12.10), а W_μ^a – це поле масивного (масою M_W) калібрувального векторного бозона, причому таке відтворення відбудеться при

$$g^2/8M_W^2 = G/\sqrt{2}. \tag{12.12}$$

(Детальніше див. [23, Гл.10]).

Вигляд лагранжіану взаємодії (12.11) дає можливість застосовувати ідеологію п. 10.1, виходячи з вільного лагранжіану полів матерії (тобто лептонів і кварків):

$$\mathscr{L}_0(l,q|\{\partial_\mu\}) = \frac{i}{2} \sum_{f=1}^{3} \Big[\bar{l}_{f;L}(x)\gamma^\mu \partial_\mu l_{f;L}(x) - \partial_\mu \bar{l}_{f;L}(x)\gamma^\mu l_{f;L} +$$

$$+ \bar{q}^0_{f;L}(x)\gamma^\mu \partial_\mu q^0_{j;L}(x) - \partial_\mu \bar{q}^0_{f;L}(x)\gamma^0_{f;L}(x) \Big], \tag{12.13}$$

виконуючи заміну

$$i\partial_\mu \to i\widehat{D}_\mu = i \cdot \mathbb{1}\partial_\mu - \frac{g}{2}\sigma^a W_\mu^a, \tag{12.14}$$

і додаючи до нього відповідний лагранжіан полів Янга–Міллса (10.11), (10.12). Треба також дописати відповідні масові члени для лентонних, кваркових і калібрувальних полів W_μ^a.

Отже, калібрувальна інваріантність повного лагранжіану буде порушена, оскільки, як уже зазначалося, калібрувальні бозони для слабкої взаємодії мають ненульові маси. Для збереження калібрувальної інваріантності треба покласти маси усіх частинок рівними нулю і включити додаткове поле, що відповідає хіґсівським бозонам ϕ, мова про які йшла вище, а також взаємодією цього поля з

ферміонами у вигляді взаємодії Юкави (11.35), (11.36). При цьому треба враховувати, що хіґсівське поле буде взаємодіяти як із лівокіральними дублетами $l_{f;L}$ (див. (12.8)), так і з правокіральними синглетами:

$$e_{f;R} = \{e_R^-, \mu_R^-, \tau_R\},$$

тобто

$$\mathscr{L}_{\text{юк}} = g_2 \sum_{f=1}^{3} \left(\bar{l}_{f;L} \phi e_{f;R} + \bar{e}_{f;R} \phi^* l_{f;L} \right). \tag{12.15}$$

Отже,

$$\mathscr{L}_w = \mathscr{L}_0(l, q | \{\widehat{D}_\mu\}) + \mathscr{L}_{\text{ям}} + \mathscr{L}_{\text{хіґ}}(\phi, W) + \mathscr{L}_{\text{юк}}, \tag{12.16}$$

де перший доданок має вигляд (12.13) після заміни (12.14), другий—(10.12) з $F^a_{\mu\nu}$ у вигляді (10.11), третій—(11.20) із $\widehat{D}_\mu$ замість ∂_μ, четвертий–(12.15).

12.3. Про електрослабкі взаємодії

У вступі до § 12 коротко обґрунтувано необхідність об'єднання електромагнітних і слабких взаємодій у єдину теорію. Зазвичай, це об'єднання не є простим і на цьому етапі розвитку теорії і експерименту елементарних частинок воно не може бути виконано бездоганно з точки зору побудови єдиної теорії. Проте перший крок до такої теорії зроблено в уже згадуваних працях С. Глешоу та С. Вайнберга і А. Салама. Звичайно, тут детально викласти таку побудову не можна, але спробуємо, хоча б приблизно, навести основні міркування, які приводять до вигляду лагранжіану такої об'єднуючої теорії.

Очевидно (з міркувань того ж принципу калібрувальної інваріантності), що коли виберемо вільний лагранжиан матерії $\mathscr{L}_0$ правильно, то в ньому замість заміни (12.14) треба зробити аналогічну заміну, яка б містила у собі ще одне векторне нейтральне (і, мабуть, безмасове) поле $B_\mu(x)$, за рахунок якого могла б виникнути електромагнітна взаємодія. Тобто треба зробити заміну

$$i\partial_\mu \to iD_\mu = i\partial_\mu - g' \frac{\widehat{Y}}{2} B_\mu - \frac{1}{2} g \sigma^a W^a_\mu, \tag{12.17}$$

де g' — константа зв'язку поля B_μ з полями матерії, а замість оператора електричного заряду $\widehat{Q}$ у формулі (9.11) генератором групи $U(1)$ виступає гіперзаряд. Він пов'язаний із оператором заряду співвідношенням

$$\widehat{Q} = \widehat{J}_3 + \frac{1}{2}\widehat{Y},$$

де $\widehat{J}_3$—проекція ізоспіну (див. підпункт 2.3.1). Отже, в такому підході враховуються взаємодія як звичайна електромагнітна для електронно-позитронного поля, так і деяка додаткова, в якій беруть участь і електрони, і нейтрино.

Побудова вільного лагранжіану полів матерії теж повинна бути трохи змінена. Треба врахувати, що слабкі взаємодії містять тільки *"лівi"* поля (див. означення (5.146′)), а в електромагнітну взаємодію входять повні поля, тобто $u_i(x) = u_{i;L}(x)+u_{i;R}(x)$. Тому лагранжіан об'єднаної теорії треба будувати таким чином, щоб *"лівi"* і*"правi"* поля входили по-різному, а саме: *"лівi"* поля входили у вигляді $SU(2)$-дублетів (12.8), а *"правi"*—у вигляді синглетів. Крім того, так само як і у випадку побудови лагранжіану для слабких взаємодій, для збереження калібрувальної інваріантності треба виходити з лагранжіану, що відповідає повністю безмасовим полям і врахувати механізм Хіґса.

Отже,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{ел.-сл.}} &= \mathscr{L}_0(l,q|\{\widehat{D}_\mu\}) + \sum_{f=1}^{3}[\bar{e}_{f;R}\gamma^\mu(i\partial_\mu - g'B_\mu)e_{f;R} + \bar{\nu}_{f;R}i\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{f;R}] + \\ &+ \mathscr{L}^0_{\text{ел.}}(B) + \mathscr{L}^0_{\text{ям}}(W) + \mathscr{L}_{\text{хіґ}}(\phi|\{\widehat{D}_\mu\}) + \mathscr{L}_{\text{юк}}, \qquad (12.18)\end{aligned}$$

де $\mathscr{L}_0(l,q|\{\widehat{D}_\mu\})$ визначає (12.13) з $\widehat{D}_\mu$ із формули (12.17), $\mathscr{L}^0_{\text{ел.}}(B)$ – вільний лагранжіан електромагнітного поля, $\mathscr{L}^0_{\text{ям}}(W)$ – вільний лагранжіан поля Янга–Міллса бозонів W^a_μ, $\mathscr{L}_{\text{хіґ}}(\phi|\{\widehat{D}_\mu\})$–лагранжіан хіґсівського поля (11.20) з $\widehat{D}_\mu$ із (12.17), а $\mathscr{L}_{\text{юк}}$ збігається з (12.15).

На завершення цього пункту зауважимо, що об'єднання взаємодій було виконано досить формально, виходячи тільки з основних принципів. Для того щоб застосувати лагранжіан (12.18) до обрахунків конкретних фізичних процесів, треба врахувати ще досить велику кількість різних чинників. Крім того, квантова теорія внесе ще свої корективи, про які мова буде йти далі.

Залишається відкритим питання про зв'язок констант взаємодії g і g'. Теоретично вони є незалежними, оскільки g' є параметром при $U(1)$-перетвореннях, а g—при $SU(2)$-перетвореннях. Про їх зв'язок можна було б щось говорити, якщо розглядати єдину теорію електрослабкого зв'язку в межах якоїсь більш ширшої симетрії, тобто групи G, яка б містила в собі групу $U(1)\times SU(2)$. Тоді перетворення групи G пов'язували б між собою окремі перетворення в $U(1)$ і в $SU(2)$, а константи g і g' були б пов'язані якимись співвідношеннями, що випливали з правил запису коефіцієнтів Клебша–Гордона групи G через підгрупи $U(1)$ та $SU(2)$.

12.4. Про лагранжіан великого об'єднання

Об'єднання електромагнітних та слабких взаємодій привело до значних успіхів теорії. Разом з тим, як уже зазначалось, таке об'єднання не дає відповіді на багато питань, що виникають навіть у межах слабких та електромагнітних взаємодій. Надію на вирішення всіх проблем вчені покладають на об'єднання всіх взаємодій в рамках єдиної теорії. Але поки що не будемо включати в це об'єднання гравітаційної взаємодії і поговоримо про загальний підхід до електрослабких та сильних взаємодій. Щоб таке об'єднання найбільш гармонійно

відтворювало реальну картину світу, треба знайти групу, яка б містила в собі добуток $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Х. Джорджі і С. Глешоу [129] показали, що такою мінімальною групою є група $SU(5)$. Ідея полягає у тому, що при дуже великих енергіях повинна існувати *єдина взаємодія*, що об'єднує три види взаємодій (сильну, електромагнітну і слабку) з однією константою зв'язку g_0, яка є параметром калібрувальної групи $SU(5)$. З теоретичних міркувань такі області енергій відповідають співвідношенню

$$p^2 > M_0^2, \quad \text{де} \quad M_0 \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ ГеВ}$$

між енергією та імпульсом (див. [98]), а M_0 має назву *маси великого об'єднання*. Для порівняння зауважимо, що максимальні енергії частинок у космічних променях не перевищують 10^{12} ГеВ.

У точці $p^2 = M_0^2$ виникає спонтанне порушення симетрії або, як іще кажуть, наступає фазовий перехід. У області $p^2 < M_0^2$ калібрувальна симетрія $SU(5)$ порушується до симетрії $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Частина кварків і глюонів взаємодіють з константою $g_3(p^2)$ (параметр $SU(3)$ групи), а інші з константами $g(p^2)$ та $g'(p^2)$. Зрозуміло, що всі калібрувальні поля повинні бути об'єднані в єдине поле $B_\mu^a := W_\mu^a(5)$, $a = 1, 2, \ldots, 24$.

Далі для того щоб побудувати $SU(5)$-симетричний лагранжіан, який відповідає об'єднаній теорії, треба вибрати таке представлення групи $SU(5)$, щоб усі частинки (кварки і лентони) були розподілені по мультиплетам цього представлення. У попередньому підпункті було більш-менш детально обговорено різні аспекти, які треба врахувати при побудові лагранжіану полів, що описував би об'єднання електромагнітних та слабких взаємодій. Основна ідея полягала в тому, що *"лівi"* і *"правi"* ферміони фігурували у різних представленнях групи $SU(2)$, ліві у вигляді дублетів, а праві – у вигляді синглетів, що й приводить до незбереження парності у слабких взаємодіях. Ця ідея повністю переноситься і на випадок $SU(5)$-симетрії. Детальний аналіз вибору необхідних представлень групи $SU(5)$, формування відповідних полів і побудови лагранжіану можна знайти у працях [98], [41], [23].

§ 13. Про розв'язки рівнянь для класичних полів: відокремлені хвилі, солітони, інстантони

Щоб завершити розгляд теорії класичних полів, мабуть треба, все-таки, з'ясувати, які задачі і проблеми можна вирішити в рамках класичної теорії та яка їх роль у побудові квантової теорії. Мабуть, основні практичні досягнення класичної теорії пов'язані з класичною електродинамікою, яка сформувалась як теоретична наука, що була тісно пов'язана з експериментом ще в XIX ст. Фактично роль класичної електродинаміки була вирішальною і у виникненні квантової теорії, оскільки саме спроба застосувати її до опису атомних явищ (точніше, до обґрунтування моделі атома) і привела до виникнення квантової

механіки, а згодом і до релятивістської квантової механіки – тобто квантової теорії поля.

Проте навіть із появою процедури квантування полів роль класичних розв'язків не була виявлена, оскільки метод теорії збурень, який на той час був фактично єдиним досягненням математичних досліджень теорії, вимагав малої взаємодії, а для вільного (невзаємодіючого) поля рівність нулю класичної компоненти квантового поля є енергетично вигідною.

Першим натяком на те, що розв'язки класичних рівнянь пов'язані зі станами реальних квантових частинок, було виявлення локалізованих розв'язків класичних хвильових рівнянь. Для вільних рівнянь таку властивість мають тільки рівняння, що відповідають безмасовим частинкам. Дійсно, наприклад, розв'язок рівнянь (7.9) вільного електромагнітного поля завжди можна записати у вигляді

$$A_\mu(x) = f_\mu(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e} - x^0) = f_\mu(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e} - ct), \tag{13.1}$$

де f_μ—довільна двічі диференційовна функція на $\mathbb{R}^1$, а $\mathbf{e}$ – довільний одиничний вектор в $\mathbb{R}^3$.

Вибираючи локальний носій функції f_μ, завжди можна будувати локалізований хвильовий пакет, який буде рухатись у напрямку, що визначається вектором $\mathbf{e}$, зі швидкістю світла c і буде зберігати свою форму. Дійсно з (13.1) легко побачити, що швидкість розповсюдження такого пакету задовольняє рівність

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e} = c, \quad v = |\mathbf{v}| = \frac{c}{\cos(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{e}})}.$$

З умови, що швидкість v не повинна перевищувати швидкість світла, виходить, що $\cos(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{e}}) = 1$, тобто пакет рухається у напрямку вектора $\mathbf{e}$. Це пов'язано з тим, що плоскі хвилі:

$$\varphi_p^{\pm}(x) = Ne^{\frac{i}{\hbar}(\pm p^0x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}, \quad p^0 = |\mathbf{p}|$$

утворюють повну систему розв'язків рівняння (7.9) (μ-фіксовано). Загальний розв'язок може бути записаний у вигляді (7.15), який збігається з (13.1) при $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. Отже, кожна складова пакета (плоска хвиля) рухається в одному напрямку з однаковою швидкістю c, що забезпечує збереження форми пакета.

Вільне рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6) не має такої властивості, оскільки кожна плоска хвиля (4.14) має свою швидкість (оскільки $p^0 \neq |\mathbf{p}|$), яка до того ж перевищує швидкість світла.

Але виявляється, що більш складні нелінійні рівняння, що відповідають теорії із взаємодією, можуть або ж самі мати розв'язки типу (13.1), або ж мати розв'язки, для яких локальною є просторова густина енергії. Це означає: якщо $\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, x^0)$ є розв'язком такого рівняння, то відповідна енергія (побудована за формулами (3.60) – (3.61)) дорівнює

$$E(\phi) = P^0(\phi) = \int d\mathbf{x}\,\varepsilon(\mathbf{x}, x^0),$$

де

$$\varepsilon(\mathbf{x}, x^0) = f(\mathbf{x} - \mathbf{v}t).$$

Тобто густина енергії повинна рухатися зі сталою швидкістю і зберігати свою форму. Такі розв'язки отримали назву *відокремлених хвиль*.

Прикладом такого рівняння може бути нелінійне рівняння, що відповідає самовзаємодіючому скалярному полю з лагранжіаном

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi(x)^4 - \frac{1}{4}\frac{m^4}{\lambda^2}, \tag{13.2}$$

де m^2 і λ – деякі додатні параметри. Згідно з (3.47) відповідне рівняння має такий вигляд:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \lambda\phi(x)^3.$$

У випадку $1+1$ вимірного простору часу ($x \to (x,t), x \in \mathbb{R}$) воно набуває вигляду

$$\phi_{tt}(x,t) - \phi_{xx}(x,t) = m^2\phi(x,t) - \lambda\phi(x,t)^3. \tag{13.3}$$

Це рівняння досліджувалось у працях [112], [137], [71]. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що його частинними розв'язками є, наприклад, сім'я функцій $\phi_u(x,t)$, $(-1 < u < 1)$ вигляду

$$\phi_u(x,t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x-x_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right].$$

Цей розв'язок отримав назву *кінка* і є прикладом відокремленої хвилі. Знову ж таки, використовуючи (3.60), можна знайти, що

$$\varepsilon(x,t) = T^{00}(x,t) = \frac{m^4}{2\lambda(1-u^2)}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right)^{-4}.$$

Легко переконатися, що $\varepsilon(x,t)$ є локалізованою функцією.

Зауваження 13.1. *Необхідно звернути увагу на те, що лагранжіан* (13.2) *не відповідає лагранжіану теорії поля частинок маси* m*, що самовзаємодіють з константою взаємодії* λ*, оскільки перед* m^2 *стоїть знак* $''+''$*, а отже, не відповідає масовому доданку в лагранжіані (див.* (4.54)*). Три останні доданки в* (13.2) *можна розглядати як збурення безмасового вільного лагранжіану, а константи* λ *та* m^2 *виступають як константи відповідного зв'язку. Поява масових членів може бути результатом спонтанного порушення симетрії (див.* § 11*).*

Важливим підкласом відокремлених хвиль є так звані *солітонні* розв'язки. Треба, однак, зауважити, що у фізичній літературі солітонами часто називають усі розв'язки типу відокремленої хвилі. Тут будемо притримуватись визначення з книги індійського вченого Р. Раджарамана [73].

Перш ніж дати точне визначення, зауважимо, що до солітонних розв'язків будемо відносити відокремлені хвилі, які утворюють пакет, що асимптотично (при $t \to \pm\infty$) зберігає форму, і швидкості густин енергій своїх компонент.

Визначення солітона. *Нехай для деякого нелінійного рівняння (або системи рівнянь) існує розв'язок типу відокремленої хвилі з густиною енергії* $\varepsilon_0(\mathbf{x}-\mathbf{u}t)$. *Розглянемо будь-який інший розв'язок цієї системи, що складається в далекому минулому* $(t\to-\infty)$ *з* N *таких розв'язків з різними швидкостями і положеннями, тобто густина якого має наступний асимптотичний вигляд:*

$$\varepsilon(\mathbf{x},t)\to\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_0(\mathbf{x}-\mathbf{a}_i-\mathbf{u}_it)\quad \textit{при } t\to-\infty.$$

Якщо його еволюція, що задається даним нелінійним рівнянням, така, що в далекому майбутньому він набуває асимптотичного вигляду

$$\varepsilon(\mathbf{x},t)\to\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_0(\mathbf{x}-\mathbf{a}_i-\mathbf{u}_it+\boldsymbol{\delta}_i)\quad \textit{при } t\to+\infty,$$

де $\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\delta}_i$ *деякі сталі вектори, то таку відокремлену хвилю називають солітоном.*

Для знаходження розв'язків нелінійних рівнянь існують досить потужні методи: метод оберненої задачі, перетворення Беклунда і т.д. Але вони, на жаль, поширюються на досить вузький клас рівнянь, а їх область застосування обмежується рівняннями в $1+1$ вимірному просторі-часі. Для більшості реальних систем у $3+1$ вимірах не існує методу, що дозволив би отримати розв'язки в аналітичній формі. Такі системи інтенсивно досліджуються, існує досить значна інформація про їх поведінку. Добре відомо, наприклад, що вільні рівняння Максвелла в $(3+1)$ вимірному просторі не мають розв'язків типу відокремленої хвилі. Те ж саме відомо про вільні поля Янга–Міллса в $(3+1)$ вимірах (див., наприклад, [111]).

Солітонні розв'язки виникають при взаємодії полів. Цікаву модель взаємодії полів Янга–Мілса з триплетом скалярних полів було запропоновано М. Джорджі і С. Глешоу [128]. В піонерських працях Г. т'Хофта [192] і А. Полякова [71] було показано, що така модель має несингулярні локалізовані розв'язки. Такі розв'язки були названі *монополями*, оскільки з ними можна пов'язати "*магнітний монопольний заряд*". Дещо пізніше Б. Джуліа та А. Зі [154] показали, що ця модель містить у собі також так звані *діонні* розв'язки, тобто такі, що можна пов'язати з електричними та магнітними зарядами (детальніше див. [73]).

На завершення цього короткого огляду про розв'язки класичних нелінійних рівнянь поговоримо трохи про так звані *інстантони*.

Таку назву отримали локалізовані розв'язки нелінійних класичних рівнянь в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ $d=2,3,4$, тобто коли замість метричного тензора $g^{\mu\nu}$ (див. (1.2)) в означенні метрики (1.1) стоїть звичайний символ Кронекера $\delta_{\mu\nu}$. Формально від реального фізичного до евклідового опису можна перейти, змінюючи $x_0=ct$ на $x_0=ix_4$. Але евклідів підхід до квантової теорії поля (про який буде йти мова нижче) має глибокий зміст і пов'язаний з аналітичним (голоморфним) продовженням важливих характеристик реальної фізичної теорії

(функцій Гріна, коефіцієнтних функцій S-матриці тощо) в евклідову область по часовій змінній x_0. І при такому аналітичному продовженні ці характеристики не втрачають свого фізичного змісту.

Щодо нелінійних класичних рівнянь перехід в евклідову метрику змінює характер (або точніше клас) рівнянь. Наприклад, рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6), яке визначається гіперболічним оператором Даламбера $\Box$ у просторі $\mathbb{M}$, набуває еліптичного вигляду і визначається оператором Лапласа Δ на функціях, визначених в $\mathbb{R}^4$. Інстантони є локалізованими розв'язками таких евклідових польових рівнянь. У більшості випадків інстантони в s-вимірному евклідовому просторі є статичними розв'язками в $d = s+1$-вимірному просторі Мінковського. Виявляється, що не тільки солітони, але й інстантони відіграють помітну роль при квантовому описі теорії полів та елементарних частинок, хоч, як будемо бачити далі, їх ролі суттєво розрізняються.

Точніше знаходження класичних розв'язків польових рівнянь дає додаткову інформацію про структуру квантових операторних полів. Детальніше поговоримо про це у наступних розділах, але, щоб читач переконався в цьому, розглянемо елементарний приклад квантування гармонійного осцилятора.

Розглянемо рух нерелятивістської частинки маси m у просторі $\mathbb{R}^1$ (тобто на прямій) під дією сили, що задається потенціалом

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2}m^2\omega^2(x - x_0)^2.$$

Запишемо енергію такої частинки

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{13.4}$$

Її рух описується звичайним рівнянням Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV(x)}{dx}. \tag{13.5}$$

Стаціонарним розв'язком рівняння (13.5) є

$$x(t) = x_0.$$

Він відповідає мінімуму потенціала $V(x)$. Користуючись *квантовими* термінами, будемо називати цей розв'язок класичним основним станом або вакуумом. Енергія цього вакуумного стану

$$E_0 = V(x_0) = V_0.$$

Розглянемо тепер квантову задачу, тобто стаціонарне рівняння Шредінгера з оператором $\widehat{H}$, що відповідає класичному виразу (13.4), тобто

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m^2\omega^2(x - x_0)^2\right]\Psi(x) = E\Psi(x).$$

Добре відомо (див., наприклад, [97]), що повний набір нормованих станів осцилятора має вигляд

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} (\sqrt{\pi}\cdot 2^n \cdot n!)^{-1/2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}(x-x_0)\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}(x-x_0)^2\right\},$$

де $H_n(q)$ – поліном Ерміта n-го порядку.

Відповідний спектр енергії

$$E_n = V_0 + \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для вакуумного стану ($n = 0$) маємо

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{n\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}(x-x_0)^2\right\},$$

а енергія вакуумного стану

$$E_0 = V(x_0) + \frac{1}{2}\hbar\omega. \tag{13.6}$$

Квантова частинка у стаціонарному стані вже не буде перебувати у точці $x = x_0$ (принцип невизначеності!). Положення частинки є тепер оператор $\widehat{x}$, тому знаючи хвильову функцію основного стану, можна визначити середнє значення оператора координати у цьому стані:

$$< \hat{x} >= \int\limits_{\mathbb{R}^1} x|\Psi_0(x)|^2 = x_0. \tag{13.7}$$

З цього тривіального прикладу видно, що квантовий стан частинки пов'язаний із класичним.

Наведемо тепер аналогію між цим тривіальним прикладом і квантуванням класичних полів. У випадку полів узагальненою координатою є саме поле, яке є розв'язком відповідного класичного рівняння. Тоді очевидно, що квантове поле повинно містити у собі класичний розв'язок як складову, а його середнє типу (13.7) за фізичним вакуумом повинно збігатись з відповідним класичним розв'язком. Так само енергія основного стану у класичній границі ($\hbar \to 0$) повинна, мабуть, збігатися з мінімумом потенціальної енергії, який досягається на стаціонарних розв'язках класичних польових рівнянь.

Про схему канонічного квантування більш складних нелінійних моделей самовзаємодіючих полів, яка з самого початку враховує існування відповідної класичної системи солітонів, радимо читачу звернутись, наприклад, до праці [70].

Задачі до розділу III

Задача 9.1. Калібрувальне перетворення (9.8) (або калібровка) називається кулонівським, якщо воно приводить до потенціалу $B_\mu(x)$ з $B_0(x) = 0$ і $\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\mathbf{B}}(x) = -\partial_k B_k = 0$. Підберіть $\chi(x)$ так, щоб $A_0'(x) = 0$, а потім $\chi'(x)$ – так, щоб $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}''(x) = 0$.

Задача 10.1. Довести справедливість формули (10.7).

Задача 10.2. Показати, що лагранжіан (10.12) інваріантний відносно перетворень (10.5), тобто рівність (10.14).

Задача 10.3. Довести тотожність Якобі для коваріантних похідних $\widehat{D}_\mu$.

Задача 11.1. Показати, що перетворення (11.29) і (11.24) приводять лагранжіан (11.30) до вигляду (11.31).

Розділ IV. Вторинне квантування полів

§ 14. Постулати та загальні принципи квантування

Кожна теорія завжди спирається на деякі основні принципи (постулати), які є результатами спостережень, узагальнень або інтуїтивних міркувань. Звичайно ж, ці принципи залежать від рівня розуміння природних явищ на даному етапі розвитку і можуть виявитися з часом неповними або навіть неправильними. Тоді вони замінюються новими, а стара теорія буде справедливою тільки у рамках деяких припущень або обмежень. Так сталося, наприклад, із класичною механікою, у межах якої не можна було пояснити явищ мікросвіту або ж поведінку фізичних об'єктів, що рухаються з великими швидкостями. Як наслідок з'явилися на світ *квантова механіка* і *спеціальна теорія відносності*, що спираються на принципово відмінні (від класичних уявлень) принципи і постулати, введення яких дало змогу усунути багато незрозумілих питань.

У цьому розділі спробуємо сформулювати ряд принципів, які лежать в основі побудови квантової теорії поля, і дати фізичне (можливо дещо наївне) їх обґрунтування.

14.1. Для чого потрібне вторинне квантування? Операторна природа функцій поля

Формалізм квантової механіки дає змогу описувати системи, в яких кількість частинок є інтегралом руху і не враховує процесів їх взаємного перетворення, що відбуваються в релятивістських взаємодіях. Ця обставина змусила шукати новий математичний апарат, що давав би можливість узагальнити існуючу теорію. Шляхи такого узагальнення підказувала ідея корпускулярно-хвильового дуалізму, згідно з якою шредінгерівський опис повинен бути еквівалентний хвильовому (польовому) опису. У розділі I були сформульовані (на класичному рівні) основні моменти такого формалізму. Згідно з теоремою Нетер основні фізичні величини (енергія, імпульс, спін і т.д.) визначаються через функції полів, а згідно з квантовими уявленнями вони повинні бути операторами, що діють

у просторі станів. Тобто функції поля повинні бути "*операторами*"[4]. Оскільки саме рівняння Шредінгера було отримано за допомогою *первинного квантування*, тобто заміною імпульсів і координат $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ та енергії E операторами $\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\,\boldsymbol{\nabla}$, $\widehat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$, $\widehat{E} = i\hbar\partial_t$, то нова заміна польової функції частинки оператором називається *вторинним квантуванням*.

Еквівалентність операторного опису (методу вторинного квантування) системи N частинок і шредінгерівської теорії була встановлена Йорданом і Клейном [148] для частинок із цілим спіном та Йорданом і Вігнером [150] для частинок із напівцілим спіном, але найбільш елегантного вигляду цей формалізм набув у роботі Фока [125].

Отже, формалізм *вторинного квантування* виник незалежно від проблем квантової теорії поля, і його можна розглядати лише як один з можливих варіантів такої побудови. Тут не ставиться за мету дати детальний аналіз цього формалізму. У контексті побудови квантової теорії поля цей формалізм виникає природним чином із основних постулатів, які вносять в основу такої побудови. Але перш ніж перейти до основних постулатів, нагадаємо про три відомі у квантовій механіці способи опису фізичних явищ або про три представлення основних фізичних об'єктів, станів та операторів фізичних величин, за допомогою картин Шредінгера, Гейзенберга і взаємодії.

14.2. Представлення Шредінгера, Гейзенберга і взаємодії

У квантовій теорії поля, так само як і у квантовій механіці, стан фізичної системи повністю характеризується амплітудою стану Φ, що є власним вектором операторів фізичних величин, які мають конкретне (тобто таке, що може бути виміряне у стані Φ) значення. Амплітуда Φ є вектором деякого гільбертового простору станів $\mathscr{H}$. Якщо Φ відповідає деякому чистому фізичному стану, то норма цього вектора буде одиничною:

$$\|\Phi\|^2_{\mathscr{H}} = (\Phi, \Phi)_{\mathscr{H}} = 1. \tag{14.1}$$

Для фізичної величини B, оператор якої $\widehat{B}$ у стані Φ не має точного значення (тобто Φ не є власним станом оператора $\widehat{B}$), можна обчислити середнє значення за формулою

$$\overline{B} = (\Phi, \widehat{B}\Phi). \tag{14.2}$$

Фізична система може еволюціонувати з часом. Таку еволюцію можна задавати за допомогою трьох еквівалентних представлень амплітуд Φ і операторів динамічних величин $\widehat{B}$.

Найбільш поширеною у квантовій механіці є *картина Шредінгера*. У представленні Шредінгера еволюція системи описується через еволюцію амплітуди

[4]Тут використано лапки , оскільки, як буде з'ясовано пізніше, це будуть не оператори, а так звані операторно-значні узагальнені функції.

стану $\Phi = \Phi(t)$ за допомогою рівняння Шредінгера

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} &= H\Phi(t), \\ \Phi(0) &= \Phi_0, \end{aligned} \tag{14.3}$$

де H—оператор повної енергії (гамільтоніан) системи. Поки що формально вважається, що H є самоспряженим ($H^* = H$) оператором у просторі станів. Він не залежить від часу, якщо система замкнута. Оператори динамічних фізичних величин також не залежать від часу, а їх середні (14.2) залежать від часу через амплітуди $\Phi(t)$.

Формально [1] можемо проінтегрувати рівняння (14.3) і отримати розв'язок у вигляді

$$\Phi(t) = e^{-iHt}\Phi_0 = U(t)\Phi_0. \tag{14.4}$$

Якщо запас початкових векторів Φ_0, для яких формула (14.4) має сенс, є досить великим, то можемо замість еволюції станів (14.4) розглядати еволюцію операторів динамічних величин $\widehat{B}$. Підставляючи (14.4) у формулу (14.2) для середнього значення, маємо

$$\overline{B} = \overline{B}_t = \left(\Phi_0, \overset{*}{U}(t)\widehat{B}U(t)\Phi_0\right) = \left(\Phi_0, \widehat{B}_H(t)\Phi_0\right),$$

$$\widehat{B}_H(t) = e^{iHt}\widehat{B}e^{-iHt}. \tag{14.5}$$

Таким чином приходимо до *картини Гейзенберга*, у якій оператори динамічних величин залежать від часу, а амплітуди стану є стаціонарними величинами. З (14.5) випливає рівняння руху у гейзенберговому представленні:

$$i\frac{\partial\widehat{B}_H(t)}{\partial t} = [\widehat{B}_H(t), H]_-. \tag{14.6}$$

Але, як правило, для реальних фізичних систем отримати розв'язок, скажімо, рівняння Шредінгера (14.3), є досить важкою математичною проблемою. У квантовій механіці це вдається зробити тільки для досить простих випадків або ж у випадку досить екзотичних точно розв'язуваних моделей. У квантовій теорії поля ця проблема є ще складнішою. Найбільш поширеним методом у теоретичній фізиці є метод теорії збурень. У цьому випадку повний гамільтоніан системи взаємодіючих частинок представляють у вигляді

$$H = H_0 + H_I,$$

де H_0 — це вільний гамільтоніан, який не враховує взаємодії, а H_I – гамільтоніан взаємодії, що повинен бути у деякому сенсі малим порівняно з H_0.

[1] З математичної точки зору це далеко нетривіальна задача, що залежить від властивостей оператора H.

Тому інколи зручно трохи спростити рівняння еволюції Шредінгера (14.3), виділивши у ньому *вільну еволюцію*. Будемо шукати розв'язок рівняння (14.3) у вигляді

$$\Phi(t) = e^{-iH_0 t}\Psi(t).$$

Тоді з рівняння (14.3) отримаємо рівняння на вектор $\Psi(t)$:

$$i\frac{d\Psi(t)}{dt} = H_I(t)\Psi(t), \tag{14.7}$$

де

$$H_I(t) = e^{iH_0 t}H_I e^{-iH_0 t}. \tag{14.8}$$

Відповідне рівняння для середніх (14.2) набуде вигляду

$$\overline{B}_t = \left(\Psi(t), e^{iH_0 t}\widehat{B}e^{-iH_0 t}\Psi(t)\right) = \left(\Psi(t)\widehat{B}_t\Psi(t)\right). \tag{14.9}$$

У представленні (14.7) – (14.9) і амплітуди, і оператори динамічних величин будуть змінюватись у часі. Таке представлення має назву *представлення взаємодії*, також можна зустріти назву *картина Дірака*(див., наприклад, [102, Гл.11,§3].

14.3. Постулати квантування

ПК1. Існування гільбертового простору станів $\mathscr{H}$

Фізичний стан системи описується загальною для всіх полів функцією Φ, яку називають амплітудою (або вектором) стану, і яка належить деякому гільбертовому простору $\mathscr{H}$. Релятивістський закон перетворення станів визначається неперервним унітарним представленням неоднорідної групи Лоренца, що діє в $\mathscr{H}$.

Не всі вектори гільбертового простору $\mathscr{H}$ відповідають фізичним станам, але якщо Φ описує фізичний стан, то він є нормованим вектором у просторі $\mathscr{H}$, тобто задовольняє рівняння (14.1). І навпаки, інколи вектор Φ, що є власним вектором оператора деякої фізичної величини, може не належати $\mathscr{H}$.

Обґрунтування. Цей постулат є наслідком квантово-механічного підходу до побудови квантової теорії поля. Величину $|\Phi|^2$ можна інтерпретувати як густину імовірності знаходження систем у стані з відповідними фізичними характеристиками (імпульсом, спіном, і т.д.), які є змінними функції Φ.

Зауваження 14.7. *Якщо розглядаємо явища, які пов'язані з певною групою частинок (скажімо, тільки бозони або тільки ферміони), то можемо розглядати не весь простір $\mathscr{H}$, а тільки деякий підпростір, наприклад, $\mathscr{H}_B$ або $\mathscr{H}_F$.*

ПК2. Основний постулат квантування

Оператори 4-імпульсу, тензор моменту кількості руху, заряд, тощо є інфінітезимальними операторами відповідних перетворень (тобто представлень у просторі $\mathscr{H}$) неоднорідної групи Лоренца і виражаються через функції полів тими самими співвідношеннями, що і в класичній теорії.

Обґрунтування. Згідно з **ПК1** у просторі станів $\mathscr{H}$ будуть діяти представлення групи Лоренца, тобто оператори $U_{\Lambda,a} = U_L$, що відповідають перетворенням (1.20). У загальній теорії груп Лі для безмежно малих лоренцових перетворень оператор U_L можна записати у вигляді

$$U_{\Lambda,a} = \mathbb{1} + iP^\mu a_\mu + \frac{1}{2} iM^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}, \tag{14.10}$$

де P^μ, $M^{\mu\nu}$ називаються інфінітезимальними операторами (генераторами) і мають фізичний зміст вектора енергії-імпульсу та тензора моменту кількості руху.

Аналогічні співвідношення можна записати і для груп внутрішніх симетрій, виражаючи відповідні оператори представлень через генератори (заряд тощо).

З іншого боку, у класичній теорії згідно з теоремою Нетер P^μ, $M^{\mu\nu}$, заряд Q тощо є інтегралами руху і виражаються через функції поля $u_i(x)$ співвідношеннями (3.61), (3.67), (3.73). Отже, **ПК2** є наслідком принципу відповідності.

ПК3. Операторний характер поля

Поле $u_i(x)$ є операторно-значною узагальненою функцією, тобто для деякого класу основних функцій $\mathscr{E}(\mathbb{M})$ на просторі Мінковського функціонал $u_i(f) = \langle u_i, f\rangle$ є оператором в $\mathscr{H}$ із всюдищільною областю визначення. Якщо $u_i(x)$ є дійсне поле, то $u_i(f)$ є самоспряженим оператором в $\mathscr{H}$.

Обґрунтування. Те, що $u_i(x)$—не звичайна функція, а має операторний характер, є фактично наслідком основного постулату квантування (**ПК2**), теореми Нетер і квантово-механічного підходу. Те, що вони є не просто операторами, а операторно-значними узагальненими функціями, стане зрозумілим, коли встановити їх комутаційні співвідношення, які будуть містити у собі δ-функції або інші узагальнені функції. Позначення $u_i(f) = \langle u_i, f\rangle$ часто використовують у вигляді

$$\langle u_i, f\rangle = \int u_i(x) f(x)\, dx,$$

де інтеграл треба розуміти у сенсі *сполучення* узагальненої функції $u_i(x)$ з основною функцією $f(x) \in \mathscr{E}$.

ПК4. Закон перетворення операторів поля

Для загальних неоднорідних перетворень із групи Лоренца:

$$x \to x' = Lx = \Lambda x + a \tag{14.11}$$

повинна виконуватись умова сумісності трансформаційних властивостей операторних польових функцій, що в класичній теорії перетворюються за законом (див. (1.24)):

$$u'(x) = S(\Lambda, a)u(\Lambda^{-1}(x-a)), \tag{14.12}$$

і трансформаційних властивостей амплітуд станів, що перетворюються за допомогою операторів U_L. Ця умова виражається операторним співвідношенням

$$\overset{*}{U}_L u(x) U_L = S(\Lambda, a)u(\Lambda^{-1})(x-a), \tag{14.13}$$

або більш строго у сенсі операторів у просторі $\mathscr{H}$ так:

$$\overset{*}{U}_L u(f_{\Lambda,a}) U_L = S(\Lambda, a)u(f), \tag{14.14}$$

де $f_{\Lambda,a}(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$.

Обґрунтування. У просторі станів $\mathscr{H}$ представлення групи Лоренца буде реалізовуватись операторами U_L (див. **ПК2**):

$$\Phi \to \Phi' = U_L \Phi, \tag{14.15}$$

де U_L—унітарний оператор у просторі $\mathscr{H}$, тобто

$$U_L^{-1} = \overset{*}{U} \quad \text{або} \quad \overset{*}{U}_L U_L = 1,$$

що є наслідком умови інваріантності норми вектора Φ ($\|\Phi'\|_{\mathscr{H}} = \|\Phi\|_{\mathscr{H}}$).

Для того, щоб зрозуміти закон перетворення (14.13)–(14.14), розглянемо матричний елемент оператора $u(x)$ між двома станами Φ_1 і Φ_2:

$$(\Phi_1, u(x)\Phi_2) = \tilde{u}(x). \tag{14.16}$$

Для спостерігача, що перебуває в системі координат $\{x'\}$, яка пов'язана з системою $\{x\}$ лоренцовим перетворенням (14.11), матричний елемент (14.16) треба обчислити за перетвореними амплітудами (14.15) і взяти його в новій точці x':

$$(\Phi_1', u(x')\Phi_2') = \tilde{u}'(x'). \tag{14.16$'$}$$

Очевидно, що $\tilde{u}(x)$ і $\tilde{u}'(x')$ є квантово-механічним узагальненням класичних полів $u(x)$ та $u'(x')$, які пов'язані співвідношенням (1.24) або ж (14.12). Отже,

$$\tilde{u}'(x') = S(\Lambda, a)\tilde{u}(x). \tag{14.17}$$

Тоді з (14.17), з урахуванням (14.15)–(14.16′), випливає закон перетворення (14.13).

ПК5. Постулат спектральності

Оператор енергії-імпульсу P^μ є самоспряженим оператором у просторі $\mathscr{H}$, і його спектр лежить у верхньому світловому конусі змінної $p = (p^0, \mathbf{p})$: $p^{0^2} - \mathbf{p}^2 \geq 0$, $p^0 > 0$ і як власне значення містить точку $(0,0,0,0)$, що відповідає вектору $\Phi_0 \neq 0$ ($P^\mu \Phi_0 = 0$, $\Phi_0 \in \mathscr{H}$).
Вектор Φ_0 називається вакуумним вектором або *основним станом*.
Вектор Φ_0 є інваріантним вектором відносно перетворень U_L:

$$U_L \Phi_0 = \Phi_0. \tag{14.18}$$

Постулати вибору комутаційних співвідношень
ПК6. Постулат локальної комутативності або принцип причинності

$$\boxed{\left[u_i(x), \overset{*}{u}_j(y)\right]_{\pm} = 0, \quad \text{якщо} \quad (x-y)^2 < 0.} \tag{14.19}$$

Обґрунтування. Цей постулат є наслідком фізичної вимоги, яку для локальних теорій називають принципом причинності. Цей принцип полягає у тому, що коли ми розглянемо деяку фізичну величину $B(x)$ у двох точках простору Мінковського x, $y \in \mathbb{M}$, розділених просторово-подібним інтервалом, тобто

$$(x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 < 0,$$

(це означає, що просторова відстань між цими точками буде більша ніж відстань, яку подолає сигнал, випущений із точки $\mathbf{x}$ у момент часу x^0 у напрямі точки $\mathbf{y}$ за час $|y^0 - x^0|$), то згідно з квантово-механічними уявленнями вимірювання фізичної величини $B(x)$ у точках $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ у моменти часу x^0 і y^0 ніяк не можуть вплинути одне на одне, а отже, оператори вимірюваної фізичної величини B у точках $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ у моменти часу x^0 і y^0 повинні комутувати.

Таким чином, коли поля $u_i(x)$ безпосередньо мають фізичний зміст, або ж лінійним чином пов'язані з фізичними полями (як у випадку електромагнітного поля (див. (7.4) і (7.5)), їх *комутатор* повинен перетворюватись у нуль для просторово-подібного інтервалу. Але коли самі поля не мають фізичного змісту, а фізичні величини, пов'язані з цими полями, залежатимуть від білінійних комбінацій $\overset{*}{u}_i(x) u_i(x)$ (наприклад, у випадку електронно-позитронного поля (див. (5.115) або (5.119))) комутатор $B(x)$ і $B(y)$ може перетворюватись у нуль і у випадку, коли самі поля $u_i(x)$, $\overset{*}{u}_i(x)$ та $u_i(y)$, $\overset{*}{u}_i(y)$ антикомутують при $(x-y)^2 < 0$. Звичайно, це не означає, що така ситуація повинна стосуватися всіх комплексних полів. Але, виходячи з цього простого, чисто математичного спостереження, можна розбити всі поля $u_i(x)$ на поля двох типів: ті, для яких у співвідношенні (14.19) треба розглядати комутатор (такі поля будемо називати

б о з о н н и м и) і ті, для яких у співвідношенні (14.19) треба розглядати *а н т и к о м у т а т о р* (такі поля будемо називати *ф е р м і о н н и м и*). Як побачимо з наступних постулатів, така статистика пов'язана або з частинками, що мають цілі спіни (поля *Бозе–Ейнштейна*), або ж з частинками, що мають півцілі спіни (поля *Фермі–Дірака*).

ПК7. Постулат одночасових переставних співвідношень

$$\boxed{\begin{array}{l}[u_i(x), u_j(y)]_{\pm, x^0=y^0} = [\pi_i(x), \pi_j(y)]_{\pm} = 0, \\ [u_j(x), \pi_k(y)]_{\pm, x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{jk},\end{array}} \tag{14.20}$$

де $\pi_k(x)$ є канонічно спряжена величина до полів $u_k(x)$.

Обґрунтування. Фактично цей постулат є узагальненням квантово-механічних постулатів Бора:

$$[\widehat{p}_k, \widehat{q}_j]_- = -i\hbar\delta_{kj}; \quad [\widehat{p}_k, \widehat{p}_j]_- = [\widehat{q}_k, \widehat{q}_j]_- = 0.$$

Роль узагальненої координати в квантовій теорії поля виконує саме поле, а канонічно спряжена величина — імпульс обчислюється згідно з п.3.9 (див. ф-ли (3.75)).

Для узгодженності з **ПК6** треба вибрати комутатор для бозе-полів і антикомутатор для фермі-полів.

ПК8. Теорема Паулі про зв'язок спіну і статистики [62][1]

Поля, що відповідають частинці з цілим спіном, квантуються за Бозе–Ейнштейном, а поля, що відповідають частинкам з півцілим спіном, квантуються за Фермі–Діраком.

Розглянемо послідовне обгрунтування ("доведення") цієї теореми у пункті 18.1.5, а зараз наведемо лише деякі вагомі аргументи, що підтверджують її справедливість.

Математично ця теорема може бути сформульована таким чином.

Якщо оператори $u_i(x)$—це бозе-поля, тобто поля, що описують частинки з цілим спіном, то *к о м у т а т о р*

$$\left[u_i(x), \overset{*}{u}_j(y)\right]_- = \Delta^B_{ij}(x-y)\mathbb{1}; \tag{14.21}$$

якщо оператори $u_i(x)$ — це Фермі-поля, тобто поля, що описують частинки з півцілим спіном, то а н т и к о м у т а т о р

$$\left[u_i(x), \overset{*}{u}_j(y)\right]_+ = \Delta^F_{ij}(x-y)\mathbb{1}, \tag{14.22}$$

[1]Слова "теорема" ("доведення") тут мають скоріше формальний характер, ніж той, що у нього вкладають математики.

де Δ^B_{ij} та Δ^F_{ij}—це c-функції, тобто у правій частині (14.21) і (14.22) стоять оператори, кратні одиничному оператору $\mathbb{1}$. Властивості і вигляд функцій Δ^B_{ij} та Δ^F_{ij} залежать від конкретної реалізації полів $u_i(x)$. Але деякі основні властивості цих полів можна розглянути вже зараз. Наприклад, із постулатів **ПК6** і **ПК7** випливає, що

$$\Delta^B_{ij}(x-y) = \Delta^F_{ij}(x-y) = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta^B_{ij}(x-y)\bigg|_{x^0=y^0} = \frac{\partial}{\partial x^0}\Delta^F_{ij}(x-y)\bigg|_{x^0=y^0} = -i\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Обґрунтування. Знову звернемося до класичної теорії і принципу відповідності. У класичній механіці важливу роль у дослідженні еволюції системи відіграють дужки Пуассона. Ще Дірак довів, що аналог дужок Пуассона для квантових систем є комутатор (див. п. 3.2 або працю [31]). Класичні дужки Пуассона функцій поля

$$\{u_i(x), u_j(y)\} = \Delta_{ij}(x-y)$$

явно не залежать від полів u_i і є функцією різниці аргументів. Враховуючи, наприклад, вирази (4.20) і (4.21) або (5.47) і (5.48) для фур'є-перетворень вільних полів, легко зрозуміти: для того, щоб комутатор полів $u_i(x)$ та $\overset{*}{u}_i(y)$ залежав від різниці аргументів $x-y$, треба, щоб комутатор або антикомутатор їх фур'є-перетворень $u_i(\mathbf{k})$ та $\overset{*}{u}_j(\mathbf{p})$ був пропорційний δ-функції Дірака, тобто

$$\Big[u_i(\mathbf{k}), \overset{*}{u}_j(\mathbf{p})\Big]_{\pm} \sim \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{14.23}$$

Щоб обґрунтувати вибір статистики (тобто комутаційних чи антикомутаційних співвідношень), розглянемо вирази для енергії вільних класичних частинок.

Для частинок із цілим спіном (скалярних, векторних) у § 4, 6, 7 обчислено (див. ф-ли (4.60), (6.29), (7.37)), що

$$P^0 = \int d\mathbf{k}\, k^0 \left[\overset{*}{u}{}^+_i(\mathbf{k}) u^-_i(\mathbf{k}) + \overset{*}{u}{}^-_i(\mathbf{k}) u^+_i(\mathbf{k})\right], \tag{14.24}$$

а для частинок із півцілим спіном (електронно-позитронного поля) (§ 5 ф-ла (5.120))

$$P^0 = \sum_{s=1}^{2} \int d\mathbf{k}\, k^0 \left(\overset{*}{a}{}^+_s(\mathbf{k}) a^-_s(\mathbf{k}) - \overset{*}{a}{}^-_s(\bar{\mathbf{k}})\, \overset{*}{a}{}^+_s(\bar{\mathbf{k}})\right), \tag{14.25}$$

де $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ — вільна енергія частинки з масою m і імпульсом $\bar{\mathbf{k}}$ і $k^0 = |\mathbf{k}|$ для безмасових частинок. Крім того, у виразі (14.25) незалежні амплітуди $a^\pm_s$ пов'язані з $u^\pm_i$ (або точніше $\psi^\pm_\alpha(\bar{\mathbf{k}})$) співвідношенням (5.76).

У квантовій теорії амплітуди $u^\pm_i(a^\pm_\nu)$ будуть операторами. Тому їх записано у виразах (14.24) і (14.25) у порядку, у якому відповідні функції $\overset{*}{u}_i$ та u_i стояли у класичних виразах для P^0.

Щоб обґрунтувати введення антикомутаторів для спінорних полів, розглянемо вираз для енергії поля Дірака у скінченному об'ємі Λ. Тоді, використовуючи дискретне представлення для полів (див.,наприклад, [13,§3 ,п.3.3.]) , вираз (14.25) можна записати у вигляді

$$P^0 = \sum_{\mathbf{k},s} k^0 \left(\overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} a^-_{s,\mathbf{k}} - \overset{*}{a}{}^-_{s,\mathbf{k}} a^+_{s,\mathbf{k}} \right), \qquad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \tag{14.26}$$

Якщо не звертати увагу на другий член, то зрозуміло, що оператор $N_s = \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} a^-_{s,\mathbf{k}}$ є просто оператором числа частинок з імпульсом $\mathbf{k}$ і спіном s.

Згідно з принципом Паулі, який дозволяє узгодити теоретичні дослідження з експериментальними, в одному і тому ж стані не можуть перебувати два або більше електронів. Це означає, що оператор N_s повинен мати власні значення $n_s = 0, 1$. Покажемо, що це буде у випадку, коли оператори $a^\pm_{s,\mathbf{k}}$ і $\overset{*}{a}{}^\pm_{s,\mathbf{k}}$ задовольняють антикомутаційні співвідношення такого вигляду:

$$\left[a^\pm_{s,\mathbf{k}}, a^\pm_{s',\mathbf{k}'}\right]_+ = \left[\overset{*}{a}{}^\pm_{s,\mathbf{k}}, \overset{*}{a}{}^\pm_{s',\mathbf{k}}\right]_+ = 0, \tag{14.27}$$

$$\left[a^\pm_{s,\mathbf{k}}, a^\mp_{s',\mathbf{k}}\right]_+ = \left[\overset{*}{a}{}^\pm_{s,\mathbf{k}}, \overset{*}{a}{}^\mp_{s',\mathbf{k}}\right]_+ = 0, \tag{14.28}$$

$$\left[\overset{*}{a}{}^\pm_{s,\mathbf{k}}, a^\mp_{s',\mathbf{k}}\right] = \delta_{ss'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{14.29}$$

Дійсно, з (14.27) при $s = s'$ і $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, маємо

$$2(a^\pm_{s,\mathbf{k}})^2 = 0.$$

Тоді

$$N_s^2 = \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} a^-_{s,\mathbf{k}} \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} a^-_{s,\mathbf{k}} = \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} a^-_{s,\mathbf{k}} - \left(\overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} \right)^2 (a^-_{s,\mathbf{k}})^2 = \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} a^-_{s,\mathbf{k}}.$$

Тобто

$$N_s^2 = N_s.$$

Звідки

$$n_s = 0, 1.$$

Ще одним важливим аргументом на користь вибору комутаційних співвідношень для бозе-полів і антикомутаційних – для фермі-полів є вимога позитивності операторів енергії для вільних полів (вирази (14.24)–(14.26)). З виразу енергії для Фермі-полів (14.25)–(14.26) видно, що другий доданок від'ємний. Щоб зробити його додатно-визначеним, треба переставити оператори $\overset{*}{a}{}^-_{s,\mathbf{k}}$ і $\overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}}$, враховуючи, що ці оператори антикомутують (згідно з нашими припущеннями) на δ-функцію, тобто

$$\left[\overset{*}{a}{}^\pm_s(\mathbf{k}), a^\mp_{s'}(\mathbf{k})\right]_+ = \delta_{ss'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Тоді отримаємо для оператора (14.25)вираз

$$P^0 = \sum_s \int d\mathbf{k}\, k^0 \left(\overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}}\, \overset{*}{a}{}^-_{s,\mathbf{k}} + \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}}\, \overset{*}{a}{}^+_{s,\mathbf{k}} \right) - \sum_s \int d\mathbf{k} k^0 \delta(0).$$

У пункті 14.5 встановимо, що оператори $a^{\pm}_{s,\mathbf{k}}$ $\left(\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s',\mathbf{k}}\right)$ можна інтерпретувати як оператори народження і знищення частинок (античастинок) з імпульсом $\mathbf{k}$ і спіном s. Від'ємний доданок у новому виразі для оператора P^0 є безмежною константою. Її треба відкинути, аргументуючи це таким чином.

Якщо визначити у просторі станів $\mathscr{H}$ вектор *вакуумного* стану, тобто стану Ω_0, у якому відсутні частинки, то

$$N_s \Omega_0 = 0. \tag{14.30}$$

Тоді, внаслідок того, що розглядаємо вільну теорію, енергія такого стану теж буде нульовою, тобто

$$P^0 \Omega_0 = 0. \tag{14.31}$$

Це фактично означає, що з самого початку треба встановити порядок, у якому стоять оператори полів у виразі для енергії, та й взагалі, у виразах для операторів інших динамічних величин. Звідси випливає постулат так званої нормальної форми для операторів динамічних величин.

ПК9. Постулат нормальної форми операторів динамічних величин або "віківська регуляризація".

При квантуванні полів, тобто при представленні динамічних величин через оператори полів, треба виразити оператори вільних полів через оператори народження і знищення та записати їх у нормальній формі (у вигляді нормального добутку), тобто оператори народження поставити зліва, а оператори знищення – справа.

Примітка. У координатному просторі краще ввести позначення нормального добутку за допомогою двох крапок зліва і двох крапок справа. Наприклад,

$$:u_i(x)u_j(y): = u_i^+(x)u_j^+(y) + u_i^+(x)u_j^-(y) + \varepsilon u_j^+(y)u_i^-(x) + u_i^-(x)u_j^-(y), \tag{14.32}$$

де $\varepsilon = +1$ для бозе-полів і $\varepsilon = -1$ для фермі-полів.

Вперше такий добуток був введений Віком [20], і тому його частіше називають *віківським добутком*.

Зауваження 14.1. *Отже, сформульовано постулат* **ПК9** *для динамічних величин, які можна представити через оператори вільних полів. У випадку взаємодіючих полів немає розбиття на оператори народження і знищення. Тому треба розуміти сформульовану вище процедуру у сенсі регуляризації*

звичайного добутку гейзенбергових полів. Щоб сформулювати цю процедуру, запишемо добуток (14.32) у вигляді

$$: u_i(x)u_j(y) := u_i(x)u_j(y) - (\Omega_0, u_i(x)u_j(y)\Omega_0). \tag{14.33}$$

При довільній кількості полів це є не що інше, як відома теорема Віка, яку розглянемо у п.20.4.

Якщо поле $u_i(x)$—взаємодіюче гейзенбергове поле, то (14.33) треба замінити на аналогічне співвідношення

$$: u_i(x)u_j(y) := u_i(x)u_j(y) - (\Phi_0, u_i(x)u_j(y)\Phi_0), \tag{14.34}$$

де Φ_0—фізичний вакуум, тобто основний стан повного гамільтоніану $P^0 \equiv H = H_0 + H_I$. У випадку $x = y$ та $i = j$ формулу (14.34) треба розуміти як процедуру регуляризації добутку полів:

$$: u_i(x)^2 := \lim_{y\to x} : u_i(x)u_i(y) : . \tag{14.35}$$

Комбінаторна структура нормального добутку декількох полів визначається теоремою Віка (див. п.20.4).

14.4. Релятивістське рівняння Гейзенберга для квантованих полів

У п. 14.3 було отримано рівняння Гейзенберга (14.6) для довільного квантовомеханічного оператора $\widehat{B}_H(t)$ як наслідок перетворення (14.5), тобто його еволюції. У релятивістському випадку чинимо аналогічно, виходячи із загального закону перетворення (14.13) для довільного оператора $B(x)$ для загальних неоднорідних перетворень Лоренца (14.11).

Нехай оператор $B(x)$ при перетвореннях координат (14.11) змінюється у просторі $\mathscr{H}$, де діє відповідне представлення $U_L = U_{\Lambda,a}$ за правилом

$$\overset{*}{U}_L B(x) U_L = S_L B(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{14.36}$$

Тут оператор $B(x)$ не обов'язково є полем. Це може бути оператор узагальненого імпульсу або ж інший оператор, що залежить від координатних змінних і є у сенсі (14.13) релятивістсько-інваріантним.

Виберемо частинний випадок лоренцових перетворень, а саме лоренцові трансляції ($\Lambda = \mathbb{1}$). Тоді згідно з основним постулатом квантування **ПК2**(див. (1.45))маємо

$$U(\mathbb{1}, a) := U_{I,a} = e^{iP^\mu a_\mu}. \tag{14.37}$$

Перепишемо рівняння (14.31) у цьому окремому випадку у такому вигляді

$$B(x+a) = U_{I,a} B(x) \overset{*}{U}_{I,a}. \tag{14.38}$$

Будемо вважати, що $a^\mu = \delta x^\mu$, тобто візьмемо безмежно малі лоренцові трансляції. Тоді, розкладаючи в ряд у лівій частині (14.38) оператор-функцію $B(x+\delta x)$, а у правій частині експоненту (14.37) і відкидаючи члени другого, третього і т.д. ступенів за δx^μ, маємо

$$B(x) + \frac{\partial B(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = (1 + ig^{\mu\mu}P^\mu\delta x^\mu)B(x)(1 - ig^{\mu\mu}P^\mu\delta x^\mu).$$

Звідси отримаємо рівняння Гейзенберга у релятивістсько-інваріантному вигляді:

$$ig^{\mu\nu}\frac{\partial B(x)}{\partial x^\nu} = [B(x), P^\mu]_-. \tag{14.39}$$

Рівняння (14.39) є досить загальним рівнянням і для кожного конкретного поля буде приймати відповідний вигляд залежно від виразу для оператора енергії-імпульсу P^μ. Встановимо вигляд цих рівнянь для вільного дійсного скалярного поля $\varphi(x)$ (як приклад бозе-поля) і для вільного електронно-позитроного поля $\psi(x)$ (як приклад фермі-поля). Початковою умовою для цих рівнянь є одночасові комутаційні (анитикомутаційні) співвідношення (14.20).

14.4.1. Рівняння Гейзенберга для вільного скалярного поля

Класичне вільне скалярне поле задовольняє рівняння Клейна–Гордона–Фока (див. § 4). Зрозуміло, що і квантове поле повинно задовольняти цьому рівнянню. Тому рівняння (14.39), записане для вільного скалярного поля $\varphi(x)$, повинно бути узгодженим із рівнянням (4.6).

Розглянемо спочатку рівняння (14.39) при $\mu = 0$ і $B(x) = \varphi(x)$:

$$i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0} = [\varphi(x), P^0]. \tag{14.40}$$

Оператор енергії P^0, обчислений у п. 4.6, має такий вигляд у "x"-представленні (координатному представленні):

$$P^0 = \frac{1}{2}\int d\mathbf{y}(: \partial_\mu\varphi(y)\partial_\mu\varphi(y) : + m^2 : \varphi(y)^2 :). \tag{14.41}$$

Щоб обчислити комутатор у виразі (14.40), скористаємося елементарним співвідношенням комутації для операторів a і b^2:

$$[a, b^2]_- = [a, b]_- b + b[a, b]_-.$$

Тоді, врахувавши закон збереження енергії, у виразі (14.41) для P_0 можна покласти $y^0 = x^0$ і внаслідок одночасових комутаційних співвідношень (14.20)

(взявши до уваги (4.63) для дійсного поля) будемо мати:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0} &= \int d\mathbf{y} : \frac{\partial\varphi(x^0,\mathbf{y})}{\partial x^0}\left[\varphi(x), \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^0}\right]_{-,x^0=y^0} : + \\ &+ \int d\mathbf{y} : \frac{\partial\varphi(x^0,\mathbf{y})}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^k}[\varphi(x),\varphi(y)]_{-,x^0=y^0} : + \\ &+ m^2\int d\mathbf{y} : \varphi(x^0,\mathbf{y})[\varphi(x),\varphi(y)]_{-,x^0=y^0} := \\ &= \int d\mathbf{y}\partial_0\varphi(x^0,\mathbf{y})i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0}. \end{aligned}$$

Отже, рівняння (14.39) для $\varphi(x)$ є тотожність. Легко перевірити, що для $\mu = k = 1,2,3$ отримаємо аналогічний результат.

Розглянемо тепер рівняння (14.39) для узагальненого імпульсу скалярного поля $\pi(x) = \partial_0\varphi(x)$.

Тоді, так само як, і у попередньому випадку, отримуємо

$$\begin{aligned} i\frac{\partial^2\varphi(x)}{(\partial x^0)^2} &= \int d\mathbf{y} : \frac{\partial\varphi(x^0,\mathbf{y})}{\partial x^0}\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0}, \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^0}\right]_{-,x^0=y^0} : + \\ &+ \int d\mathbf{y} : \frac{\partial\varphi(x^0,\mathbf{y})}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^k}\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0}, \varphi(y)\right]_{-,x^0=y^0} : + \\ &+ m^2\int d\mathbf{y} : \varphi(x^0,\mathbf{y})\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0}, \varphi(y)\right]_{-,x^0=y^0} := \\ &= i\int d\mathbf{y}\frac{\partial^2\varphi(x^0,\mathbf{y})}{\partial y^k\partial y^k}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - m^2 i\int d\mathbf{y}\varphi(x^0,\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{14.42}$$

Звідси, враховуючи означення (4.5), маємо

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0.$$

У другому доданку (14.42) було використано формулу інтегрування частинами, припускаючи, що на безмежності поле зникає.

Отже, рівняння Гейзенберга для $\partial_0\varphi(x)$ збігається з рівнянням Клейна–Гордона–Фока для $\varphi(x)$.

14.4.2. Рівняння Гейзенберга для вільного електронно-позитронного поля

Розглянемо тепер рівняння (14.39) при $\mu = 0$ і $B(x) = \psi_\alpha(x)$:

$$i\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0} = [\psi_\alpha(x), P^0]_-, \tag{14.43}$$

де $\psi_\alpha(x)$—оператор фермі-поля, що задовольняє одночасові антикомутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}\left[\psi_\alpha(x), \overset{*}{\psi}_\beta(y)\right]_{+,x^0=y^0} &= \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ [\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)]_{+,x^0=y^0} &= \left[\overset{*}{\psi}_\alpha(x), \overset{*}{\psi}_\beta(y)\right]_{+,x^0=y^0} = 0,\end{aligned} \tag{14.44}$$

які є наслідком постулату **ПК7** (ф-ли (14.20)) і виразів (5.129) для канонічних узагальнених імпульсів ферміонних полів.

Вираз для P^0 (5.118) запишемо у вигляді

$$P^0 = \frac{i}{2}\int d\mathbf{y}\left(\overset{*}{\psi}(y)\partial_0\psi(y) - \partial_0\overset{*}{\psi}(y)\psi(y)\right). \tag{14.45}$$

Покладемо в (14.45) $y^0 = x^0$ (оскільки за законом збереження енергії P^0 не залежить від часу). Легко перевірити, підставляючи (14.45) у (14.43) і обчислюючи комутатор (враховуючи антикомутаційні співвідношення (14.44)), що рівняння (14.43) перетворюється в тотожність. Рівняння Гейзенберга для імпульсу $\pi(x) = i\overset{*}{\psi}(x)$ так само приведе до аналогічної тотожності для поля $\overset{*}{\psi}(y)$.

Для того, щоб отримати рівняння для поля $\psi(x)$, припустимо, що не тільки класичні поля $\psi(x)$ і $\bar{\psi}(x)$ задовольняють рівняння Дірака (5.7) і (5.16), а й для квантових полів ці співвідношення зберігаються. Тоді з (5.7) і (5.14) маємо

$$\begin{aligned}i\partial_0\psi(x) &= -i\gamma^0\gamma^k\partial_k\psi(x) + m\gamma^0\psi(x),\\ i\partial^0\overset{*}{\psi}(x) &= -i\partial_k\overset{*}{\psi}(x)\gamma^0\gamma^k - m\overset{*}{\psi}(x)\gamma^0.\end{aligned} \tag{14.46}$$

Отже, вираз (14.45) для P^0 набуде вигляду

$$\begin{aligned}P^0 &= \frac{1}{2}\int d\mathbf{y}\left[\overset{*}{\psi}(y)\gamma^0\left(-i\gamma^k\partial_k\psi(y) + m\psi(y)\right) -\right.\\ &\left. - \left(i\partial_k\overset{*}{\psi}(x)\gamma^k - m\overset{*}{\psi}(y)\right)\gamma^0\psi(y)\right].\end{aligned} \tag{14.47}$$

Підставимо (14.47) в (14.43) і скористаємося співвідношеннями (14.44). Тоді матимемо

$$\begin{aligned}i\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0} &= \frac{1}{2}\int d\mathbf{y}\left\{\left[\psi_\alpha(x), \overset{*}{\psi}_\beta(y)\gamma^0_{\beta\mu}\left(-i\gamma^k_{\mu\nu}\partial_k\psi_\nu(y) + m\delta_{\mu\nu}\psi_\nu(y)\right)\right]_{-,x^0=y^0} -\right.\\ &\left. - \left[\psi_\alpha(x), \left(i\partial_k\overset{*}{\psi}_\beta(y)\gamma^k_{\beta\mu} - m\delta_{\beta\mu}\overset{*}{\psi}_\beta(y)\right)\gamma^0_{\mu\nu}\psi_\nu(y)\right]_{-,x^0=y^0}\right\}.\end{aligned}$$

Або, розкриваючи комутатори і групуючи доданки так, щоб утворити антикомутатори, перепишемо останню формулу у матричній формі:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial x^0} &= \frac{1}{2}\int d\mathbf{y}\left\{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\gamma^0(-i\gamma^k\partial_k\psi(y)+m\psi(y))-\right. \\ &\left.-(i\partial_k\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\gamma^{\mathbf{k}}-m\gamma^0\psi(y))\right\}_{x^0=y^0} = \gamma^0(-i\gamma^k\partial_k+m)\psi(x), \end{aligned} \tag{14.48}$$

де у першому доданку других дужок знову використали формулу інтегрування частинами і комутаційні співвідношення γ-матриць (5.4). Помноживши (14.48) на γ^0, отримаємо для $\psi(x)$ рівняння

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0,$$

яке збігається з рівнянням Дірака (5.7).

Зауваження 14.2. *На перший погляд викладки, що випливають із формул* (14.45)–(14.48)*, є тавтологічними. Але вони якраз і означають: виходячи з припущення, що оператори* $\psi(x)$ *і* $\bar\psi(x)$ *задовольняють рівняння Дірака* (5.7) *і* (5.17)*, приходимо до висновку, що це припущення сумісне з твердженням про відповідність рівняння Гейзенберга* (14.43) *з рівнянням Дірака за умови, що поле* $\psi(x)$ *і* $\overset{*}{\psi}(y)$ *задовольняють одночасові антикомутаційні співвідношення.*

14.5. Фізичний зміст додатно- і від'ємно-частотних розв'язків операторів вільного поля

З попередніх розділів (п. 4.3 та п. 5.3.1) видно, що вільні поля як розв'язки відповідних рівнянь мають структуру

$$u_i(x) = u_i^+(x) + u_i^-(x),$$

де

$$u_i^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{\pm ikx}\delta(k^2-m^2)\tilde u_i^\pm(k)dk.$$

У квантовій теорії $u_i^\pm(x)$ є релятивістсько-інваріантними (у сенсі (14.13)) операторами і задовольняють рівняння Гейзенберга (14.39). Запишемо це рівняння для фур'є-перетворень $\tilde u_i^\pm(k)$:

$$[\tilde u_i^+(k), P^\mu]_- = -k^\mu\tilde u_i^+(k), \tag{14.49}$$

$$[\tilde u_i^-(k), P^\mu]_- = k^\mu\tilde u_i^-(k). \tag{14.50}$$

Нехай тепер Φ_p—амплітуда стану з визначеним значенням 4-вектора енергії-імпульсу. Тобто

$$P^\mu\Phi_p = p^\mu\Phi_p. \tag{14.51}$$

Розглянемо нові стани $\tilde{u}_i^+(k)\Phi_p$ і $\tilde{u}_i^-(k)\Phi_p$. Подіємо на ці стани оператором P^μ і скористаємося співвідношеннями (14.49), (14.50) та умовою (14.51):

$$P^\mu\tilde{u}_i^+(k)\Phi_p = \tilde{u}_i^+(k)P^\mu\Phi_p + k^\mu\tilde{u}_i^+(k)\Phi_p = (p^\mu + k^\mu)\tilde{u}_i^+(k)\Phi_p,$$

$$P^\mu\tilde{u}_i^-(k)\Phi_p = \tilde{u}_i^-(k)P^\mu\Phi_p - k^\mu\tilde{u}_i^-(k)\Phi_p = (p^\mu - k^\mu)\tilde{u}_i^-(k)\Phi_p.$$

Отже, вектори $\tilde{u}_i^\pm(k)\Phi_p$ знову є власними станами оператора P^μ із власними значеннями $p^\mu \pm k^\mu$ і $k^2 = m^2$.

Це можна інтерпретувати так, начебто оператор $\tilde{u}_i^+(k)$ "народив" вільну частинку з імпульсом k, подіявши на амплітуду стану Φ_p, а оператор $\tilde{u}_i^-(k)$ знищив вільну частинку з імпульсом k. Така термінологія є загальноприйнятою, а оператори $u_i^\pm(k)$ називаються операторами *народження* і *знищення* частинки з імпульсом $\mathbf{k}$ і енергією $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Зауваження 14.3. *Обчислення, які було проведено у цьому параграфі, треба розуміти на чисто формальному рівні. Строге математичне обґрунтування квантованих полів та величин, що з ними пов'язані математичними виразами, буде розглянуто нижче.*

§ 15. Квантування вільного скалярного поля

Встановимо, якими мають бути квантові поля для конкретних значень спіну і маси частинок. Почнемо розглядати це питання з найпростішого поля — дійсного скалярного поля, що відповідає частинкам спіну 0, маси m і заряду 0.

15.1. Комутаційні(переставні) співвідношення. Переставні функції

В обґрунтуванні постулату **ПК8** зроблено висновок: комутатор (чи антикомутатор) фур'є-перетворень операторів поля повинен бути пропорційний δ-функції Дірака (див. ф-лу 14.23), щоб забезпечити інваріантність переставної функції полів $u_i(x)$ відносно групи трансляцій. Тепер точно обчислимо цей комутатор для дійсного скалярного поля $\varphi(x)$, використовуючи постулат **ПК7** одночасових комутаційних співвідношень (14.20), який з урахуванням (4.62) (для дійсного поля) має такий вигляд:

$$[\varphi(x), \partial_0\varphi(y)]_{-,x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{15.1}$$

Запишемо для цього вираз для поля $\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$ у вигляді інтегралу Фур'є (4.20) – (4.22):

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}}\varphi^+(\mathbf{k})d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}}\varphi^-(\mathbf{k})d\mathbf{k}. \tag{15.2}$$

Звідси виходить

$$\partial_0\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}}(ik^0)\varphi^+(\mathbf{k})d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}}(-ik^0)\varphi^-(\mathbf{k})d\mathbf{k}. \quad (15.3)$$

Помножимо (15.2) один раз на $p^0e^{-ip\cdot x}$, другий раз на $p^0e^{ip\cdot x}$, а (15.3)– відповідно на $-ie^{-ip\cdot x}$ і на $ie^{ip\cdot x}$ та проінтегруємо за лебеговою мірою $d\mathbf{x}$. Тоді, враховуючи формулу (4.58) і додавши отримані рівняння, матимемо

$$\varphi^+(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{x}\,\frac{e^{-ip\cdot x}}{\sqrt{2p^0}}\,[p^0\varphi(x) - i\partial_0\varphi(x)],$$

$$\varphi^-(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{x}\,\frac{e^{ip\cdot x}}{\sqrt{2p^0}}\,[p^0\varphi(x) + i\partial_0\varphi(x)].$$

Звідки, враховуючи (15.1) і (4.58), отримуємо

$$\begin{aligned}[\varphi^-(\mathbf{p}),\varphi^+(\mathbf{k})] &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\frac{e^{ip\cdot x - ik\cdot y}}{2\sqrt{p^0k^0}}i(p^0+k^0)[\partial_0\varphi(y),\varphi(x)]_{-,x^0=y^0} = \\ &= \frac{e^{ip^0x^0-ik^0y^0}}{2\sqrt{p^0k^0}}\Big|_{x^0=y^0}(p^0+k^0)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}),\end{aligned}$$

Отже, взявши до уваги, що $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}+m^2}$, $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ і $\mathbf{p}=\mathbf{k}$, маємо

$$[\varphi^-(\mathbf{p}),\varphi^+(\mathbf{k})] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}).$$

Аналогічно для комутаторів $[\varphi^\pm(\mathbf{p}),\varphi^\pm(\mathbf{k})]$:

$$[\varphi^\pm(\mathbf{p}),\varphi^\pm(\mathbf{k})]_- = \pm\frac{e^{-ip^0x^0-ix^0y^0}}{2\sqrt{p^0k^0}}(p^0-k^0)\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k}) = 0.$$

Отже, фур'є-образи полів $\varphi^\pm(x)$ задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}[\varphi^\pm(\mathbf{p}),\varphi^\pm(\mathbf{k})]_- &= 0,\\ [\varphi^-(\mathbf{p}),\varphi^+(\mathbf{k})]_- &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}).\end{aligned} \quad (15.4)$$

Співвідношення (15.4) дають змогу обчислити комутатор полів $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$:

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = [\varphi^+(x),\varphi^-(y)] + [\varphi^-(x),\varphi^+(y)]_-,$$

$$[\varphi^+(x),\varphi^-(y)]_- = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{p}}{2p^0}e^{ip\cdot(x-y)} = \frac{1}{i}D^+(x-y), \quad (15.5)$$

$$[\varphi^-(x),\varphi^+(y)]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{p}}{2p^0}e^{-ip\cdot(x-y)} = \frac{1}{i}D^-(x-y). \quad (15.6)$$

Функції $D^{\pm}(x-y)$, що визначаються інтегралами (15.5) і (15.6), можна переписати у коваріантному вигляді, враховуючи формулу (4.19):

$$\begin{aligned} D^{+}(x-y) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int dp\,\theta(-p^0)e^{-ip\cdot(x-y)}\delta(p^2-m^2),\\ D^{-}(x-y) &= \frac{i}{(2\pi)^3}\int dp\,\theta(p^0)e^{-ip\cdot(x-y)}\delta(p^2-m^2). \end{aligned} \tag{15.7}$$

І, нарешті, повна переставна функція Паулі – Йордана має вигляд

$$D(x-y) = D^{+}(x-y) + D^{-}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ip\cdot(x-y)}\delta(p^2-m^2)\varepsilon(p^0)dp, \tag{15.8}$$

де

$$\varepsilon(p^0) = \theta(p^0) - \theta(-p^0) = \frac{p^0}{|p^0|}, \tag{15.9}$$

а повний комутатор полів $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$ виглядає так:

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_{-} = \frac{1}{i}D(x-y).$$

Зауваження 15.1. *У зарубіжній літературі зустрічається (див., наприклад,* [102], [15]*) трохи відмінне розбиття функції Паулі–Йордана* $\Delta(x-y)$ $(\Delta(x-y) = -D(x-y))$ *на додатньо- і від'ємно-частотні частини:*

$$\Delta^{\pm}(x-y) = -\Delta^{\mp}(x-y).$$

Але комутатор полів $\varphi(x)$ *і* $\varphi(y)$ *залишається тим самим –*

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_{-} = \frac{1}{i}D(x-y) = i\Delta(x-y).$$

Функція Паулі–Йордана може бути обчислена явно, тобто обчислені інтеграли (15.5), (15.6). Таке обчислення приведене в монографії [13] (§ 15). Результатом є функція

$$D(x) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda) - \frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda}), \quad \lambda = x^2, \tag{15.10}$$

де $J_1(z)$ — функція Бесселя 1-го порядку.

З явного вигляду функції $D(x)$ видно, що вона є інваріантною відносно групи ортохронних перетворень Лоренца і перетворюється в нуль при $\lambda < 0$. Отже, комутатор

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = \frac{1}{i}D(x-y) \equiv 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0,$$

що узгоджується з постулатом **ПК6** локальної комутативності.

15.2. Комплексне скалярне поле

На відміну від дійсного скалярного поля комплексне скалярне поле відповідає зарядженим скалярним бозонам з обома знаками заряду $\pm e$ і характеризується двома незалежними компонентами $\mathrm{Re}\,\varphi(x)$ і $\mathrm{Im}\,\varphi(x)$ або ж (еквівалентними) $\varphi(x)$ і $\overset{*}{\varphi}(x)$. Тоді згідно з постулатом **ПК7** (див. (14.20)) і виразами (4.62), (4.63) відповідні одночасові комутаційні співвідношення мають вигляд

$$\left[\varphi(x), \partial_0 \overset{*}{\varphi}(y)\right]_{-,x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{15.11}$$

$$\left[\overset{*}{\varphi}(x), \partial_0 \varphi(y)\right]_{-,x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{15.12}$$

Легко побачити, що (15.12) є просто комплексно спряженим виразом до (15.11). Повторюючи процедуру п. 15.1, замість комутаційних співвідношень (15.4) маємо

$$\left[\varphi^-(\mathbf{p}), \overset{*}{\varphi}{}^+(\mathbf{k})\right]_- = \left[\overset{*}{\varphi}{}^-(p), \varphi^+(\mathbf{k})\right]_- = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{15.13}$$

Усі інші комутатори перетворюються в нуль.

Відповідно у координатному представленні маємо

$$\left[\varphi^-(x), \overset{*}{\varphi}{}^+(y)\right]_- = \frac{1}{i} D^-(x-y); \tag{15.14}$$

$$\left[\varphi^+(x), \overset{*}{\varphi}{}^-(y)\right]_- = \frac{1}{i} D^+(x-y);$$

$$\left[\varphi(x), \overset{*}{\varphi}(y)\right]_- = \frac{1}{i} D(x-y). \tag{15.15}$$

15.3. Операторні вирази для динамічних інваріантів

У пункті 4.7 були отримані вирази для динамічних інваріантів класичної теорії скалярного поля, для енергії та імпульсу (4.60) та заряду (4.61). Внаслідок постулатів квантування **ПК8, ПК9** та аргументів, що обґрунтовують ці постулати, потрібно у цих виразах переставити оператор народження $\varphi^+(\mathbf{k})$ з оператором знищення $\overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k})$ у виразах (4.60) і (4.61) або поставити знак нормального добутку (див. ф-лу 14.32) у виразах для P^μ, j^μ і Q в координатному просторі (формули (4.60), (4.61)). Остаточно ці вирази мають вигляд

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}\, k^\mu \left[\overset{*}{\varphi}{}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^+(\mathbf{k})\, \overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k})\right], \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{15.16}$$

та

$$Q = q \int d\mathbf{k} \left[\overset{*}{\varphi}{}^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) - \varphi^+(\mathbf{k})\, \overset{*}{\varphi}{}^-(\mathbf{k})\right]. \tag{15.17}$$

§ 16. Квантування вільного спінорного поля

16.1. Переставні функції фермі-полів

Як і у попередньому параграфі будемо виходити з одночасових антикомутаційних співвідношень (14.20), які з урахуванням (5.129) мають вигляд ($\mu, \nu = \overline{1,4}$):

$$\begin{aligned} &\left[\psi_\mu(x), \overset{*}{\psi}_\nu(y)\right]_{+,x^0=y^0} = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ &[\psi_\mu(x), \psi_\nu(y)]_{+,x^0=y^0} = \left[\overset{*}{\psi}_\mu(x), \overset{*}{\psi}_\nu(y)\right]_{+,x^0=y^0} = 0. \end{aligned} \tag{16.1}$$

Запишемо вирази для операторів $\psi_\mu(x)$ і $\overset{*}{\psi}_\nu(y)$ (див. (5.47) – (5.49) і (5.79), (5.80)):

$$\begin{aligned} \psi_\mu(x) \;&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}\, e^{ik\cdot x} \sum_{s'=1}^{2} v_\mu^{s',+}(\mathbf{k}) a_{s'}^{+}(\mathbf{k}) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}\, e^{-ik\cdot x} \sum_{s'=1}^{2} v_\mu^{s',-}(\mathbf{k}) a_{s'}^{-}(\mathbf{k}), \end{aligned} \tag{16.2}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{\psi}_\nu(y) \;&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p}\, e^{ip\cdot y} \sum_{s=1}^{2} \overset{*}{v}{}_\nu^{s,+}(\mathbf{p})\, \overset{*}{a}{}_s^{+}(\mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p}\, e^{-ip\cdot y} \sum_{s=1}^{2} \overset{*}{v}{}_\nu^{s,-}(\mathbf{p})\, \overset{*}{a}{}_s^{-}(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Домноживши (16.2) на $\overset{*}{v}{}_\mu^{s,\mp}(\mathbf{p}) e^{\mp ip\cdot x}$ зліва, а (16.3) на $v_\nu^{s',\mp}(\mathbf{k}) e^{\mp ik\cdot y}$ – справа, інтегруючи і сумуючи за $\mathbf{x}$, μ (відповідно за $\mathbf{y}$, ν) і враховуючи (4.58), (5.81), (5.83), отримаємо вирази операторів $a^{\pm}$ та $\overset{*}{a}{}^{\pm}$ через оператори полів ψ, $\overset{*}{\psi}$:

$$a_s^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x}\, e^{\mp ip\cdot x}\, \overset{*}{v}{}^{s,\mp}(p)\psi(x),$$

$$\overset{*}{a}{}_{s'}^{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{y}\, e^{\mp ik\cdot y}\, \overset{*}{\psi}(y) v^{s',\mp}(\mathbf{k}).$$

Тоді зі співвідношень (16.1), (5.81), (5.83) отримаємо

$$\begin{aligned} &[\overset{*}{a}{}_s^{-}(\mathbf{k}), a_{s'}^{+}(\mathbf{p})]_+ = \delta_{ss'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}), \\ &[a_s^{-}(\mathbf{k}), \overset{*}{a}{}_{s'}^{+}(\mathbf{p})]_+ = \delta_{ss'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{16.4}$$

Всі інші співвідношення антикомутації між $a_s^{+}(\mathbf{k})$, $a_t^{-}(\mathbf{p})$, $\overset{*}{a}{}_{s'}^{+}(\mathbf{k}')$, $\overset{*}{a}{}_{t'}^{-}(\mathbf{p}')$ $(s,t,s',t'=1,2)$ перетворюються в нуль. Тепер легко обчислити антикомутатор

полів $\psi(x)$ і $\bar\psi(y)$ ($\bar\psi(y) = \overset{*}{\psi}(y)\gamma^0$), який визначає переставну функцію ферміполів:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}S_{\alpha\beta}(x-y) &= [\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(y)]_+ = [\psi^+_\alpha(x),\bar\psi^-_\beta(y)]_+ + [\psi^-_\alpha(x),\bar\psi^+_\beta(y)]_+ = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, e^{ik\cdot(x-y)}\sum_{\mu=1}^{2} v^{\mu,+}_\alpha(\mathbf{k})\bar v^{\mu,-}_\beta(\mathbf{k}) + \\ &+\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, e^{-ik\cdot(x-y)}\sum_{\mu=1}^{2} v^{\mu,-}_\alpha(\mathbf{k})\bar v^{\mu,+}_\beta(\mathbf{k}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik\cdot(x-y)}\frac{(\hat k - m)_{\alpha\beta}}{2\kappa^0}d\mathbf{k} + \\ &+\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{(\hat k + m)_{\alpha\beta}}{2k^0}\,d\mathbf{k},\end{aligned} \tag{16.5}$$

де використовуємо формули (5.84), (5.85). Застосовуючи формулу (4.19) та (15.9), переставну функцію $S(x-y)$ легко переписати у коваріантному вигляді:

$$S(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ik\cdot(x-y)}\delta(k^2-m^2)\varepsilon(k^0)(\hat k - m)\,dk. \tag{16.6}$$

Порівнюючи з виразом (15.8), бачимо, що

$$S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)D(x), \tag{16.7}$$

Зі співвідношення (16.7) випливає, що ця функція задовольняє рівняння Дірака

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma\partial_\mu + m)D(x) = (\Box - m^2)D(x) = 0.$$

Через те, що функція $D(x-y)$ при $(x-y)^2 < 0$, антикомутатор полів $\psi(x)$ і $\bar\psi(y)$ перетворюється в нуль усередині світового конусу (тобто в точках, розділених просторово-подібним інтервалом), що узгоджується з постулатом **ПК6**.

Так само, як і у випадку переставної функції скалярного поля (див. (15.8)), функція $S(x)$ розбивається на додатно- і від'ємно-частотні частини:

$$\begin{aligned}&S(x) = S^+(x) + S^-(x),\\ &S^\pm(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)D^\pm(x)\end{aligned} \tag{16.8}$$

або

$$\begin{aligned}&S^\pm(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ik\cdot x}\frac{(\hat k \mp m)}{2k^0}d\mathbf{k},\\ &k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.\end{aligned} \tag{16.9}$$

На завершення підпункту наведемо також комутаційні співвідношення для зарядово-спряжених полів, що відповідають античастинкам. Користуючись співвідношеннями (16.5) і визначенням зарядово-спряжених полів (5.100), маємо

$$\psi^{c,\pm}(x) = C\bar{\psi}^{\pm}(x)^{\top}, \qquad \bar{\psi}^{c,\pm}(x) = \overset{*}{\psi}{}^{c,\pm}(x)\gamma^0, \tag{16.10}$$

а з урахуванням властивостей (5.95), отримуємо

$$\begin{aligned} \left[\psi^{c,-}_{\alpha}(x), \bar{\psi}^{c,+}_{\beta}(y)\right]_{+} &= \frac{1}{i} S^{-}_{\alpha\beta}(x-y), \\ \left[\psi^{c,+}_{\alpha}(x), \bar{\psi}^{c,-}_{\beta}(y)\right]_{+} &= \frac{1}{i} S^{+}_{\alpha\beta}(x-y). \end{aligned} \tag{16.11}$$

16.2. Динамічні інваріанти вільного спінорного поля

У пункті 5.4 було встановлено вигляд основних динамічних інваріантів – 4-вектор енергії-імпульсу та заряду для класичних спінорних полів (див. ф-ми (5.120), (5.128)). Але, згідно з постулатами квантування **ПК8, ПК9** операторні вирази, що відповідають цим величинам, треба переписати у нормальному вигляді, тобто переставити оператори народження $a^{+}_{\nu}(\mathbf{k})$ і знищення $\overset{*}{a}{}^{-}_{\nu}(\mathbf{k})$, і врахувати, що вони задовольняють антикомутаційні співвідношення. Тоді відповідні вирази набудуть вигляду

$$P^{\mu} = \int d\mathbf{k}\, k^{\mu} \sum_{s=1}^{2} \left(\overset{*}{a}{}^{+}_{s}(\mathbf{k}) a^{-}_{s}(\mathbf{k}) + a^{+}_{s}(\mathbf{k})\, \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(\mathbf{k}) \right), \tag{16.12}$$

$$Q = -e \int d\mathbf{k} \sum_{s=1}^{2} \left(\overset{*}{a}{}^{+}_{s}(\mathbf{k}) a^{-}_{s}(\mathbf{k}) - a^{+}_{s}(\mathbf{k})\, \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(\mathbf{k}) \right). \tag{16.13}$$

Для відповідних виразів у "x" просторі можна зберегти формули (5.119), (5.127), поставивши з обох боків знак нормального добутку.

§ 17. Квантування векторного та електромагнітного полів. Особливості квантування калібрувальних полів

17.1. Квантування векторного комплексного поля

Особливість квантування векторного поля порівняно з квантуванням скалярного поля полягає у тому, що, крім встановлення переставних співвідношень на компоненти векторного поля $V^{\mu}(x)$, треба узгодити цю процедуру з додатковою умовою Лоренца (6.2), яка забезпечує додатність оператора енергії P^0.

Оператор P^0 у класичному випадку виражається через три лінійно незалежні амплітуди відповідних лінійних поляризацій $a_j^{\pm}(\mathbf{k})$ і $\overset{*}{a}{}_j^{\pm}(\mathbf{k})$ (див. (6.23)):

$$P^0 = \int d\mathbf{k}\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\sum_{j=1}^{3}\left(\overset{*}{a}{}_j^{+}(\mathbf{k})a_j^{-}(\mathbf{k})+\overset{*}{a}{}_j^{-}(\mathbf{k})a_j^{+}(\mathbf{k})\right). \tag{17.1}$$

З вигляду P^0 видно, що для того, щоб виконувались умови постулатів **ПК5** і **ПК9** треба проквантувати за Бозе–Ейнштейном три незалежні амплітуди $a_j(\mathbf{k})$, тобто вони повинні задовольняти такі комутаційні співвідношення:

$$[a_j^{-}(\mathbf{k}),\overset{*}{a}{}_k^{+}(\mathbf{k}')]_{-} = \delta_{jk}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{17.2}$$

і таке саме, як і у класичній теорії, правило спряженості

$$(a_j^{\pm}(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{a}{}_j^{\mp}(\mathbf{k}), \tag{17.3}$$

тільки у сенсі операторного спряження в гільбертовому просторі станів $\mathscr{H}$.

Зауваження 17.1. *Постулюючи комутаційні співвідношення* (17.2) *тільки для просторових компонент $a_j(\mathbf{k})$, $j=1,2,3$, які в класичній теорії є коефіцієнтами розкладів потенціалів V_μ, $\mu=0,1,2,3$ за поздовжньою і поперечною поляризацією (див. п. 6.3), фактично вибираємо у якості канонічних змінних величини $V_j(x)$ і $\pi^j(x)=\dfrac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_0 V_j(x))}$, $j=1,2,3$.*

У кінці цього пункту буде показано, що такий вибір узгоджується з теорією квантування систем при наявності додаткових зв'язків, яка коротко була описана в розділі II (§ 3.2).

Отже, квантування векторного поля приводить до таких виразів для вектора енергії-імпульсу, заряду і проекції спіну на напрям руху, які згідно з п.6.4 запишемо через амплітуди кругових поляризацій:

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}\,k^\mu\sum_{j=1}^{3}\left(\overset{*}{b}{}_j^{+}(\mathbf{k})b_j^{-}(\mathbf{k})+b_j^{+}(k)\,\overset{*}{b}{}_j^{-}(\mathbf{k})\right), \tag{17.4}$$

$$Q = q\int d\mathbf{k}\sum_{j=1}^{3}\left(\overset{*}{b}{}_j^{+}(\mathbf{k})b_j^{-}(\mathbf{k})-b_j^{+}(k)\,\overset{*}{b}{}_j^{-}(\mathbf{k})\right), \tag{17.5}$$

$$S_3 = \int d\mathbf{k}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\left(\overset{*}{b}{}_j^{+}(\mathbf{k})b_j^{-}(\mathbf{k})-b_j^{+}(k)\,\overset{*}{b}{}_j^{-}(\mathbf{k})\right). \tag{17.6}$$

Нагадаємо, що вираз операторів P^μ і Q через амплітуди лінійної поляризації $a_j^{\pm}(k)$, $\overset{*}{a}{}_j^{\pm}(\mathbf{k})$ буде такий самий внаслідок канонічності перетворень (6.28).

Обчислимо комутаційні співвідношення для полів $V_\mu(x)$. Перш за все зауважимо, що всі співвідношення для класичних полів і амплітуд поляризації (6.19) – (6.23) зберігаються і для операторів квантованих полів.

Враховуючи вираз (17.2), розклади операторних амплітуд $\mathbf{V}^{\pm}(\mathbf{k})$ за амплітудами поляризації $a^{\pm}(\mathbf{k})$ (6.23) і властивості векторів поляризації (6.22) маємо

$$\left[V_j^-(\mathbf{k}), \overset{*}{V}{}_k^+(\mathbf{k}')\right]_- = \left[\overset{*}{V}{}_j^-(\mathbf{k}), V_k^+(\mathbf{k}')\right]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left(\delta_{jk} + \frac{k_j k_k}{m^2}\right). \tag{17.7}$$

Аналогічно обчислюються комутаційні співвідношення між часовими компонентами $V_0(\mathbf{k})$, $\overset{*}{V}{}_0(\mathbf{k}')$ та між часовою компонентою $V_0(\mathbf{k})$ і просторовими компонентами $\overset{*}{V}{}_j(\mathbf{k}')$ $(j=1,2,3)$ з урахуванням їх зв'язку (6.20):

$$\begin{aligned}\left[\overset{*}{V}{}_0^-(\mathbf{k}), V_0^+(\mathbf{k}')\right]_- &= \left[V_0^-(\mathbf{k}), \overset{*}{V}{}_0^+(\mathbf{k}')\right]_- = \frac{\mathbf{k}^2}{m^2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}) = \\ &= \left(-1 + \frac{k_0 k_0}{m^2}\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\ \left[\overset{*}{V}{}_0^-(\mathbf{k}), V_j^+(\mathbf{k}')\right]_- &= \left[V_0^-(\mathbf{k}), \overset{*}{V}{}_j^+(\mathbf{k}')\right]_- = \frac{k_0 k_j}{m^2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned} \tag{17.8}$$

Формули (17.7) і (17.8) можна записати однією формулою

$$\left[\overset{*}{V}{}_\mu^-\mathbf{k}), V_\nu^+(\mathbf{k}')\right]_- = \left[V_\mu^-(\mathbf{k}), \overset{*}{V}{}_\nu^+(\mathbf{k}')\right]_- = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{17.9}$$

І нарешті, користуючись формулами перетворення Фур'є (6.15) і виразами (15.7), (15.8) для переставних функцій $D^-(x-y)$ і $D(x-y)$, маємо

$$\left[V_\mu^-(x), \overset{*}{V}{}_\nu^+(y)\right]_- = \left[\overset{*}{V}{}_\mu^-(x), V_\nu^+(y)\right]_- = i\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)D^-(x-y), \tag{17.10}$$

$$\left[\overset{*}{V}{}_\mu(x), V_\nu(y)\right]_- := iD_{\mu\nu}(x-y), \tag{17.11}$$

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)D(x-y). \tag{17.12}$$

Легко перевірити, що співвідношення (17.10)–(17.12) є сумісними як із рівняннями руху (6.1), так і з умовою Лоренца (6.2).

Обидва твердження справедливі внаслідок рівняння

$$(\Box_x - m^2)D(x-y) = 0.$$

Щоб перевірити перше твердження, треба подіяти оператором $\Box_x - m^2$ на обидві частини рівняння (17.11), а друге – оператором $\sum\limits_\mu \partial/\partial x_\mu$:

$$\left[\partial^\mu \overset{*}{V}{}_\mu(x), V_\nu(y)\right] = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)D(x-y) =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(1 - \frac{\Box}{m^2}\right) D(x-y) = 0.$$

Зауваження 17.2. *Формулами* (17.7)–(17.12) *ми встановили комутаційні співвідношення для векторного поля* V_μ, *виходячи зі співвідношень* (17.2) *і розкладів* (6.20) *і* (6.23), *які фактично припускають наявність додаткової умови зв'язку* (6.2) *(або* (6.19)*). Це дало змогу зберегти класичну картину і отримати для оператора енергії-імпульсу вираз* (17.4), *який забезпечує додатність енергії. При цьому умови* (6.2), (6.19) *не порушились і при переході до операторно-значних виразів для* $V_\mu(x)$ *(виходили з лагранжіану* (6.3)*).*

Разом із тим, легко помітити, що канонічні комутаційні співвідношення

$$[\pi^k(x), V_j(y)]_{-,x^0=y^0} \neq -i\delta_{jk}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad j,k = 1,2,3, \tag{17.13}$$

як цього вимагає постулат **ПК7**, *якщо узагальнений імпульс обчислюється за лагранжіаном* (6.3), *тобто за формулою* (6.11).

Так само легко встановити (задача 17.1*), користуючись формулами* (17.11), (17.12), (15.5),(15.6) *і* (4.58), *що рівність у співвідношенні* (17.13) *можна забезпечити, якщо визначити узагальнений імпульс* $\pi^\mu(x)$ *до узагальненої координати* $V_\mu(x)$ *формулою*

$$\pi^\mu(x) = -g^{\mu\nu}\overset{*}{F}_{0\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x). \tag{17.14}$$

Для того, щоб отримати вираз (17.14) *для узагальненого імпульсу* $\pi^\mu(x)$, *треба розглянути вільний лагранжіан векторного поля у вигляді*

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(x)\overset{*}{F}_{\mu\nu}(x) + m^2\overset{*}{V}_\mu(x)V^\mu(x). \tag{17.15}$$

У випадку дійсного векторного поля праву частину (17.15) *треба домножити на* $1/2$. *Треба також зауважити, що лагранжіани* (6.3) *і* (17.15) *є еквівалентними за умови, що виконується умова* (6.2).

Виходячи з лагранжіану (17.15), *можна застосувати метод канонічного квантування при наявності у системі додаткових зв'язків. Покладаючи в* (17.14) $\mu = 0$, *отримуємо первинний зв'язок*

$$\varphi_1(x) := \pi^0(x) = 0 \tag{17.16}$$

внаслідок антисиметричності тензора $F_{\mu\nu}$.

Розглянемо для простоти дійсне векторне поле, лагранжіан якого можна отримати з (17.15), *домножуючи на* $1/2$. *Тоді рівняння Лагранжа–Ейлера* (3.47) *буде мати вигляд*

$$\partial_\nu\overset{*}{F}_{\mu\nu}(x) + m^2\overset{*}{V}_\mu(x) = 0. \tag{17.17}$$

Умова несуперечності зв'язку (17.16) *і рівнянь* (17.17) *отримується з* (17.17) *при* $\mu = 0$*:*

$$\varphi_2(x) := \partial_k\pi_k(x) - m^2\overset{*}{V}_0(x) = 0.$$

Це рівняння є вторинним зв'язком. Воно узгоджене з рівняннями руху (17.17), *тому інших зв'язків не буде.*

Зв'язки $\varphi_1(x)$ *і* $\varphi_2(y)$, *визначені в один і той самий момент часу* $x^0 = y^0$, *належать до зв'язків другого роду (див. п.*3.1.4*), оскільки їх дужки Пуассона*

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(y)\}_{x^0=y^0} = m^2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \neq 0.$$

Відповідна матриця зв'язків

$$C_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \{\varphi_i(x), \varphi_j(y)\}_{x^0=y^0}, \quad i,j = 1,2,$$

має вигляд

$$C_{11} = C_{22} = 0, \quad C_{12} = -C_{21} = m^2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

а їй обернена—вигляд

$$(C^{-1})_{11} = (C^{-1})_{22} = 0, \quad (C^{-1})_{12} = -(C^{-1})_{21} = -\frac{1}{m^2}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

*Звичайно , тут треба зауважити, що формалізм, приведений у п.*3.1.4, *був розроблений для скінченного числа канонічних змінних.*

У випадку, коли поле залежить від неперервної змінної, C *є оператор-матрицею, тобто матричні елементи* C *є інтегральними операторами, ядра яких—матричні елементи* $C_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, *а формулу* $CC^{-1} = C^{-1}C = \mathbb{1}$ *треба розуміти як рівність*

$$\int d\mathbf{z}\, C(\mathbf{x},\mathbf{z})C^{-1}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbb{1}, \tag{17.18}$$

де $\mathbb{1}$ *– це одинична* 2×2 *матриця.*

Далі, згідно з пропозицією Дірака (3.42) *і формул* (3.27)-(3.28), *комутатор операторів* $\widehat{F}(\mathbf{x})$ *і* $\widehat{G}(\mathbf{y})$, *що відповідають класичним величинам* $F(\mathbf{x})$ *і* $G(\mathbf{y})$, *треба визначити за формулою*

$$[\widehat{F}(\mathbf{x}), \widehat{G}(\mathbf{y})]_- = i\hbar\{\widehat{F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})}\}_P - \tag{17.19}$$

$$-i\hbar\sum_{s,s'=1}^{2}\int d\mathbf{x}'d\mathbf{y}'\{\widehat{F(\mathbf{x}), \varphi_s(\mathbf{x}')}\}_P(C^{-1})_{ss'}(\mathbf{x}',\mathbf{y}')\{\widehat{\varphi_{s'}(\mathbf{y}'), G(\mathbf{y})}\}_P.$$

Нагадаємо, що значок $\widehat{\ }$ *над дужками Пуассона означає, що спершу треба обчислити класичні дужки Пуассона, а потім "оголосити" кінцевий вираз оператором.*

Тепер, щоб отримати комутаційні співвідношення для канонічних змінних $V^j(\mathbf{x})$ *і* $\pi_k(\mathbf{x})$, *треба врахувати, що за означенням дужок Пуассона*

$$\begin{aligned}&\{V^j(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{y})\}_P = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{jk},\\ &\{V^j(\mathbf{x}), V^k(\mathbf{y})\}_P = \{\pi_j(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{y})\}_P = 0.\end{aligned} \tag{17.20}$$

Підставляючи у вираз (17.19) *замість* F *і* G *змінні* V^μ, π_ν, *а замість* φ_1, φ_2 *– ліві частини* (17.16), (17.17), *отримаємо такі комутаційні співвідношення (задача* 17.2*):*

$$\begin{aligned}[V_i(\mathbf{x}), V_0(\mathbf{y})]_- &= \frac{i\hbar}{m^2}\partial_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ [V^i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})]_- &= i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{17.21}$$

Всі інші комутаційні співвідношення дорівнюють нулю. Зауважимо, що у формулах (7.20), (7.21) $V^\mu(\mathbf{x}) := V^\mu(0,\mathbf{x})$, $\pi_\mu(\mathbf{x}) := \pi_\mu(0,\mathbf{x})$, *а одночасові комутаційні співвідношення між* $V^\mu(x)$ *і* $\pi_\mu(y)$ *при* $x^0 = y^0$ *будуть мати такий самий вигляд.*

17.2. Квантування електромагнітного поля

17.2.1. Особливості та труднощі квантування електромагнітного поля

Крім умови Лоренца (7.8), класичне електромагнітне поле задовольняє ще й умову поперечності, що пов'язана з рівністю нулю маси спокою фотона (див. п. 7.3). Це призводить до того, що порівняно з векторним полем, компоненти потенціалу електромагнітного поля є ще більш залежні і мають тільки дві лінійно незалежні компоненти. З фізичної точки зору це означає, що реальні фотони, як носії квантів електромагнітного поля, можуть перебувати тільки у двох станах (поперечні складові). Тому особливість квантування електромагнітного поля перш за все полягає у наступному: необхідно, щоб оператори електромагнітного потенціалу задовольняли умови (7.8), (7.14), а вся схема квантування була релятивістсько-інваріантною. Крім того, внаслідок рівності нулю маси фотонів не можна застосовувати схему квантування, яка застосовувалась до векторних масивних полів. Тож поки що не будемо звертати увагу на умови (7.8), (7.14), які у класичній теорії приводили до забезпечення додатності виразу для енергії. Так само, як і у скалярному випадку (див. п. 15.1), скористаємося постулатом **ПК7** про вигляд канонічних (одночасових) переставних співвідношень, які у випадку електромагнітного поля мають вигляд

$$[\pi^\mu(x), A_\nu(y)]_{-,x^0=y^0} = -i\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{17.22}$$

$$[\pi_\mu(x), \pi_\nu(y)]_{-,x^0=y^0} = [A_\mu(x), A_\nu(y)]_{-,x^0=y^0} = 0,$$

де

$$\pi_\mu(x) = g_{\mu\nu}\pi^\nu = -\partial_0 A_\mu(x). \tag{17.23}$$

Як і для скалярного і спінорного полів (див. п. 14.4.1 і п. 14.4.2), комутаційні співвідношення (17.22) є сумісними з рівнянням Гейзенберга (14.39) при $B(x) = A_\mu(x)$, а при $B(x) = \pi_\mu(x)$ (14.39) збігається з хвильовим рівнянням (7.9) (задача 17.3).

Враховуючи тепер формулу (7.15) і зробивши виклади, аналогічні до п.15.1, отримуємо

$$\begin{aligned}[A_\mu^\pm(\mathbf{k}), A_\nu^\pm(\mathbf{p})]_- &= 0,\\ [A_\mu^-(\mathbf{k}), A_\nu^+(\mathbf{p})]_- &= -g^{\mu\nu}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}),\end{aligned} \tag{17.24}$$

а для операторно-значних потенціалів – відповідно вирази

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]_- = ig^{\mu\nu}D_0(x-y), \tag{17.25}$$

$$D_0(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ik\cdot(x-y)}\delta(k^2)\varepsilon(k^0)d^4k.$$

Функція $D_0(x)$ може бути обчислена у явному вигляді [149]:

$$\begin{aligned}D_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\sin k^0x^0\delta(k^2)\varepsilon(k^0)d^4k =\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\sin(|\mathbf{k}|x^0) = \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|}\int\limits_0^\infty dk\ \sin k|\mathbf{x}|\sin kx^0 =\\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}[\delta(x^0-|\mathbf{x}|)-\delta(x^0+|\mathbf{x}|)] = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(x^2),\end{aligned}$$

що узгоджується з виразом (15.10) при $m=0$.

Нагадаємо, що внаслідок рівняння руху (7.9) чотири лінійно незалежні розв'язки $A_\mu(x)$ мають вигляд суперпозиції плоских хвиль (7.13) або ж (7.15), і так само, як і у п. 7.5, $A_\mu^\pm(\mathbf{k})$ може бути представлене у вигляді розкладу за лінійними поляризаціями e_μ^ν виразами (7.32).

Враховуючи співвідношення (7.31), отримаємо комутаційні співвідношення для амплітуд поляризації:

$$[a_\mu^-(\mathbf{k}), a_\nu^+(\mathbf{p})]_- = -g_{\mu\nu}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{17.26}$$

Ці оператори мають назву операторів народження (a_μ^+) і знищення (a_μ^-) часових ($\mu=0$), поздовжніх ($\mu=3$) і поперечних ($\mu=1,2$) фотонів.

Враховуючи ці співвідношення, постулат **ПК9** і те, що електромагнітне поле квантується за Бозе–Ейнштейном перепишемо вираз для P^μ (перша рівність (7.37)) як оператора у просторі станів у вигляді (див. п. 7.5 ф-ла (7.33))

$$P^\mu = \int d\mathbf{k}\,k^\mu(-g^{\nu\nu}A_\nu^+(\mathbf{k})A_\nu^-(\mathbf{k})) = \int d\mathbf{k}\,k^\mu(-g^{\nu\nu}a_\nu^+(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k})). \tag{17.27}$$

З формули (17.27) легко побачити, що оператор P^0 не є додатно-визначений оператор. У класичному випадку було використано умови Лоренца і поперечності та представлено вираз для енергії у вигляді (7.37) (друга рівність), який забезпечує додатність енергії. Виявляється, що у квантовому випадку комутаційні співвідношення (17.25) не є сумісними з умовою Лоренца.

Дійсно, з виразу (17.25) виходить, що

$$[\partial_\mu A_\mu(x), A_\nu(y)]_- = ig^{\mu\nu}\partial_\mu D_0(x-y) \neq 0,$$

а отже, умова (7.8) не виконується, і цей факт не дає змогу привести оператор P^μ (17.27) до вигляду (7.37).

Крім того, комутаційні співвідношення (17.26) несумісні з фізичною інтерпретацією, згідно з якою оператори $a^+_\mu(\mathbf{k})$, $a^-_\mu(\mathbf{k})$ є операторами народження (знищення) фотонів відповідної поляризації. Дійсно, для $\mu = k = 1, 2, 3$ маємо звичайні комутаційні співвідношення

$$[a^-_k(\mathbf{k}), a^+_l(\mathbf{p})]_- = \delta_{kl}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})$$

і згадана вище інтерпретація можлива. Але компонента $a_0(\mathbf{k})$ задовольняє співвідношення:

$$[a^-_0(\mathbf{k}), a^+_0(\mathbf{p})]_- = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}). \tag{17.28}$$

Проте це співвідношення несумісне з вимогою дійсності електромагнітного поля (див. (7.16)). Дійсно, домножимо (17.28) на $\overset{*}{f}(\mathbf{k})f(\mathbf{p})$, проінтегруємо (у сенсі узагальнених функцій) за $d\mathbf{k}$ і $d\mathbf{p}$ і візьмемо середнє за вакуумним станом вільних фотонів. Тоді ліва частина матиме вигляд

$$(\Omega_0, a^-_0(\overset{*}{f})a^+_0(f)\Omega_0) = (a^+_0(f)\Omega_0, a^+_0(f)\Omega_0) = \|a^+_0(f)\Omega_0\|^2 > 0 \tag{17.29}$$

і є додатною, а права частина дорівнює

$$-\int |f(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} < 0,$$

а отже, приводить до суперечності.

У формулі (17.29) використано позначення

$$a^\pm_0(f) = \int a^\pm_0(\mathbf{k})f(\mathbf{k})d\mathbf{k},$$

і умову, що оператор $a^-_0(f)$ є оператором знищення, спряженим до оператора $a^+_0(f)$:

$$a^-_0(f)\Omega_0 = 0.$$

На перший погляд цю неузгодженість можна ліквідувати, припустивши: для часових фотонів оператор $a^-_0(\mathbf{k})$ вважаємо оператором народження, а $a^+_0(\mathbf{k})$ – оператором знищення. Така інтерпретація усуває цю суперечність, але приводить до інших труднощів, пов'язаних з тим, що оператор енергії P^0 не буде обмежений знизу. Дійсно, наприклад, стан, що містить один часовий фотон, є власним станом оператора енергії з від'ємним значенням енергії:

$$P^0 a^-_0(\mathbf{k})\Omega_0 = [P^0, a^-_0(\mathbf{k})]\Omega_0 = -k^0 a^-_0(\mathbf{k})\Omega_0, \quad k^0 = |\mathbf{k}|.$$

Щоб ліквідувати вказані труднощі, С. Гупта [141] та К. Блейлер [108] незалежно запропонували метод, що дає можливість у деякому сенсі уникнути суперечностей і побудувати релятивістсько-інваріантну теорію. Цей підхід коротко описаний у наступному підпункті.

17.2.2. Формалізм Гупти—Блейлера

Гупта і Блейлер виходили з того, що в дійсності у природі не існує "*часових фотонів*". Вони виникають лише при релятивістському описі електромагнітного поля, коли перейти від спостережувальних величин електричного $\mathbf{E}$ і магнітного $\mathbf{H}$ полів до неспостережувального 4-компонентного потенціалу A_μ. Це взагалі дає змогу відмовитись від умови самоспряженості [1)] компоненти $A_0(x)$ (або $a_0(\mathbf{k})$) і вважати їх антисамоспряженими. Тобто

$$(a_0^{\pm}(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{a}{}_0^{\mp}(\mathbf{k}) = -a_0^{\mp}(\mathbf{k})$$

і згідно з(7.31), (7.32) маємо

$$(A_0^{\pm}(x))^* = \overset{*}{A}{}_0^{\mp}(x) = -A_0^{\mp}(x).$$

Тоді умови спряженості для $a_\mu^{\pm}(\mathbf{k})$ можна переписати таким чином:

$$(a_\mu^{\pm}(\mathbf{k}))^* = \overset{*}{a}{}_\mu^{\mp}(\mathbf{k}) = -g_{\mu\nu}a_\nu^{\mp}(\mathbf{k}), \tag{17.30}$$

а комутаційні співвідношення набудуть вигляду

$$[\overset{*}{a}{}_\mu^{-}(\mathbf{k}), a_\nu^{+}(\mathbf{k})]_- = -g_{\mu\alpha}[a_\alpha^{-}(\mathbf{k}), a_\nu^{+}(\mathbf{k})] = g_{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}) = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}).$$

Для операторів $A_\mu(x)$ отримаємо

$$[\overset{*}{A}{}_\mu(x), A_\nu(y)]_- = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{i}D_0(x-y).$$

Зауважимо, що самоспряженість оператора енергії-імпульсу від такої заміни не порушилась, оскільки у вираз для P^μ входить білінійна комбінація $a_\nu^{+}(\mathbf{k})a_\nu^{-}(\mathbf{k})$. Але виявляється, що у деякому сенсі можна зберегти і самоспряженість операторів $a_\mu(\mathbf{k})$. Для цього треба ввести так звану індефінітну метрику у просторі станів. Це означає: якщо у гільбертовому просторі станів $\mathscr{H}$ зі скалярним добутком $(\Phi,\Psi)_{\mathscr{H}}$, $\Phi,\ \Psi \in \mathscr{H}$ визначити деякий самоспряжений оператор η—такий, що

$$\eta^2 = \mathbb{I}, \quad \eta a_\mu(\mathbf{k}) = -g_{\mu\nu}a_\nu(\mathbf{k})\eta \ \text{ і } \ \eta\Omega_0 = \Omega_0, \tag{17.31}$$

то у просторі $\mathscr{H}$ можна ввести новий "скалярний добуток"

$$\langle\Phi,\Psi\rangle := (\Phi,\eta\Psi)_{\mathscr{H}}. \tag{17.32}$$

Відносно цього нового скалярного добутку оператори $a_\mu(\mathbf{k})$ є самоспряженими. Дійсно,

$$\begin{aligned}\langle\Phi, a_\mu(\mathbf{k})\Psi\rangle &= (\Phi,\eta a_\mu(\mathbf{k})\Psi)_{\mathscr{H}} = -g_{\mu\nu}(\Phi, a_\nu(\mathbf{k})\eta\Psi)_{\mathscr{H}} = \\ &= -g_{\mu\nu}(\overset{*}{a}{}_\nu(\mathbf{k})\Phi,\eta\Psi)_{\mathscr{H}} = g_{\mu\nu}g_{\nu\alpha}(a_\alpha(\mathbf{k})\Phi,\eta\Psi) = \langle a_\mu(\mathbf{k})\Phi,\Psi\rangle.\end{aligned}$$

[1)] Тут і далі, звичайно, треба розуміти: мова йде про самоспряженість операторів $A_0(f)$ (або $a_0(f)$) для f, що належать деякому класу основних функцій.

У наступному підпункті покажемо, яким чином можна побудувати оператор η і відповідну форму (17.32) при реалізації представлень комутаційних співвідношень у просторі Фока. Білінійна форма (17.32) відповідає всім вимогам для скалярного добутку за винятком додатності, тобто

$$\langle \Phi, \Phi \rangle \neq \|\Phi\|^2_{\mathscr{H}}.$$

Величина $\langle \Phi, \Phi \rangle$ може бути від'ємною або ж перетворюватися у нуль. Але основна ідея Гупти–Блейлера полягала в тому, щоб змінити умову Лоренца $\partial^\mu A_\mu(x)\Phi = 0$, $\Phi \in \mathscr{H}$, яка приводить до суперечностей (про які говорилося у попередньому підпункті), на деяку слабшу умову, яка була б сумісна з фізичними уявленнями і приводила до позитивної визначеності оператора енергії P^0.

Г і п о т е з а Г у п т а—Б л е й л е р а: Для кожного фізичного стану електромагнітного поля повинна виконуватись така умова:

$$\partial^\mu A^-_\mu(x)\Psi = 0. \tag{17.33}$$

Покажемо, що (17.33) є умовою Лоренца у слабкій формі, тобто у сенсі середніх.

Дійсно, з виразу (17.33) випливає: якщо Ψ_1, Ψ_2 є фізичні стани, в яких виконується рівність (17.33), то

$$\begin{aligned} \langle \partial^\mu A_\mu(x)\Psi_1, \Psi_2 \rangle &= \langle \partial^\mu A^+_\mu(x)\Psi_1, \Psi_2 \rangle = \\ &= -(\Psi_1, \partial_\mu A^-_\mu(x)\eta\Psi_2)_{\mathscr{H}} = (\Psi_1, \eta\partial^\mu A^-_\mu(x)\Psi_2)_{\mathscr{H}} = 0, \end{aligned} \tag{17.34}$$

де використані співвідношення (17.30), (17.31) і (17.33). Позначимо множину таких фізичних станів буквою $\mathscr{P} \subset \mathscr{H}$. Отже, (17.33) виконується на кожному $\Psi \in \mathscr{P}$.

Покажемо тепер, що умова (17.33) забезпечує додатність енергії усіх фізично допустимих станів. Перепишемо умову (17.33) в імпульсному представленні (тобто переходячи до фур'є-представлення):

$$L^-(\mathbf{k})\Psi := k^\mu A^-_\mu(\mathbf{k})\Psi = 0, \quad k^0 = |\mathbf{k}|. \tag{17.35}$$

Умову (17.35) можна трохи спростити, враховуючи поперечність електромагнітних хвиль (див. п. 7.5). Тоді, так само, як і у класичному випадку для поляризованих амплітуд $a^\pm(\mathbf{k})$, коли з умови Лоренца (7.34) були отримані співвідношення (7.35), (7.36), отримаємо аналогічне співвідношення для квантованих амплітуд $a^-_\mu(\mathbf{k})$, що реалізуються на всіх векторах із множини $\mathscr{P}$. Множину $\mathscr{P}$ можна визначити формулою

$$\mathscr{P} := \left\{ \Phi \in \mathscr{H} | (L^-(\mathbf{k})\Phi = 0 \right\}. \tag{17.36}$$

Тоді, враховуючи (7.31),(7.32), умову $L^-(\mathbf{k})\Phi = 0$ перепишемо так:

$$|\mathbf{k}|(a_0^-(\mathbf{k}) - a_3^-(\mathbf{k}))\Phi = 0$$

або

$$a_0^-(\mathbf{k})\Phi = a_3^-(\mathbf{k})\Phi. \tag{17.37}$$

Для $\Phi \in \mathscr{P}$, використовуючи співвідношення (17.31), (17.30) та (17.37), знаходимо, що

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi, [a_0^+(\mathbf{k})a_0^-(\mathbf{k}) - a_3^+(\mathbf{k})a_3^-(\mathbf{k})]\Phi\rangle = \\
&= (\Phi, \eta[a_0^+(\mathbf{k})a_0^-(\mathbf{k}) - a_3^+(\mathbf{k})a_3^-(\mathbf{k})]\Phi)_{\mathscr{H}} = \\
&= (\Phi, \eta[a_0^+(\mathbf{k}) - a_3^+(\mathbf{k})]a_0^-(\mathbf{k})\Phi)_{\mathscr{H}} = \\
&= ([a_0^-(\mathbf{k}) - a_3^-(\mathbf{k})]\Phi, \eta a_0^-(\mathbf{k})\Phi)_{\mathscr{H}} = 0.
\end{aligned} \tag{17.38}$$

Використовуючи (17.27) і (17.38), маємо

$$\langle \Phi, P^\mu \Phi\rangle = \int d\mathbf{k}\, k^\mu \langle \Phi, [a_1^+(\mathbf{k})a_1^-(\mathbf{k}) + a_2^+(\mathbf{k})a_2^-(\mathbf{k})]\Phi\rangle. \tag{17.39}$$

Цей факт є наслідком того, що в будь-якому фізично допустимому стані $\Phi \in \mathscr{P}$ вклади "*часових*" і "*поздовжніх*" фотонів у вираз енергії-імпульсу мають однакове значення і протилежні знаки, а отже, компенсують один одного. У пункті 19.4 буде побудований гільбертів простір станів, у якому діють оператори a_μ, P^μ, а також побудуємо множину $\mathscr{P}$ і покажемо, що для будь-якого $\Phi \in \mathscr{P}$ будуть виконуватись умови:

$$\eta\Phi = \Phi \quad \text{і} \quad \langle \Phi, \Phi\rangle = (\Phi, \eta\Phi)_{\mathcal{F}} = (\Phi, \Phi)_{\mathcal{F}} \geq 0. \tag{17.40}$$

Тоді з виразу (17.39) при $\mu = 0$ виходить, що

$$\langle \Phi, P^0\Phi\rangle = (\Phi, P^0\Phi)_{\mathscr{H}} \geq 0.$$

Цей факт дає можливість фізичної інтерпретації теорії квантування Гупти–Блейлера.

Зауваження 17.1. *Важливим наслідком приведеної вище побудови є довільність у виборі векторів станів із множини $\mathscr{P}$. Детальніше буде описано це питання у § 19 (див. також* [102], Гл. 9, § 2*), а зараз продемонструємо цей факт на прикладі вибору вакуумного стану. Внаслідок комутаційних співвідношень* (17.24) *легко перевірити, що оператори $L^-(\mathbf{k})$ комутують з операторами $L^+(\mathbf{p}) = p^\mu A_\mu^+(\mathbf{p})$, оскільки $p^0 = |\mathbf{p}|$, тобто*

$$p^2 = 0.$$

Це означає, що будь-який вектор $\widetilde{\Omega}_0$ виду

$$\widetilde{\Omega}_0 = \sum_{N=0}^{\infty} \int d\mathbf{p}_j \ldots d\mathbf{p}_N \omega_N^0(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) \prod_{j=1}^{N} \frac{L^+(\mathbf{p}_j)}{\sqrt{2}} \Omega_0,$$

де Ω_0 – стан у відсутності частинок будь-якого виду, визначений формулами (14.30),(14.31), а послідовність функцій ω_N^0 задовольняє умову

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N \prod_{j=1}^{N} |\mathbf{p}_j|^2 |\omega_N^0(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)|^2 = 1,$$

належить множині $\mathscr{P}$ і може претендувати на роль вакуумного стану, оскільки

$$L^-(\mathbf{k})\widetilde{\Omega}_0 = 0, \quad a_i^-(\mathbf{k})\widetilde{\Omega}_0 = 0, \quad i = 1, 2,$$

а середнє значення енергії-імпульсу

$$(\widetilde{\Omega}_0, P^\mu \widetilde{\Omega}_0) = 0.$$

*Така довільність у виборі вакуумного стану зумовлена природнім фактом незалежності фізичних величин від калібрувальних перетворень (детальніше див. п.*19.4.*).*

17.2.3. Канонічний метод квантування

Метод Гупти–Блейлера, який детально описано у попередньому підпункті, по-перше хоч і забезпечує коваріантне формулювання процедури квантування, але все ж залишає відчуття якогось "*обману*" або, точніше, "*насильства*" над простором станів, внаслідок чого втрачається якість фізичної інтерпретації. А по-друге, введення взаємодії, яке в сучасній теорії ґрунтується на калібрувально-інваріантному принципі (див. розділ III), буде вимагати більш прозорих підходів, які б узгоджувались з цим принципом.

У цьому підпункті дуже коротко буде проаналізовано канонічний метод квантування, виходячи з калібрувально-інваріантного лагранжіану (7.18). У дійсності саме канонічним методом Фермі [96] проквантував електромагнітне поле. Але внаслідок явної нековаріантності така процедура не набула популярності. На жаль, навіть виходячи з (7.18), не можна застосувати метод Дірака для систем із зв'язками, який було застосовано до векторного поля, оскільки первинний

$$\pi^0(x) = 0 \tag{17.41}$$

і вторинний

$$\partial_i \pi^i(x) = 0 \tag{17.42}$$

зв'язки не включають у себе канонічно спряженої змінної $A_0(x)$. Тому ці зв'язки належать до першого роду. Це означає, що, крім змінної $A_0(x)$, із системи незалежних змінних треба вилучати ще одну змінну. Залишається, мабуть, єдиний спосіб: вилучити одну зі змінних, користуючись калібрувальною інваріантністю (тобто фіксувати калібровку (див. п.7.8)). Звичайно, при цьому втрачається явний вигляд лоренц-коваріантності. Але це стосується тільки змінних $A_\mu(x)$, а не теорії взагалі.

Найбільш поширеним калібруванням є *кулонівське*, в якому після вилучення змінної $A_0(x)$ у випадку вільного поля можна просто покласти $A_0(x) \equiv 0$ (див. ф-лу (7.56) з $\rho = \varphi = 0$). Три останні змінні задовольняють умові поперечності (див. (7.12) – (7.14)):

$$\varphi_1(\mathbf{x}) \equiv \partial_i A_i(\mathbf{x}). \tag{17.43}$$

Так само, як і при квантуванні векторного поля, у рамках канонічного формалізму покладено $x^0 = 0$ і тут, і далі користуємося позначенням $u_i(\mathbf{x}) = u_i(0, \mathbf{x})$. Вторинна умова збігається з (17.42)

$$\varphi_2(\mathbf{x}) \equiv \partial_i \pi^i(\mathbf{x}) = 0. \tag{17.44}$$

На відміну від зв'язків (17.41), (17.42) зв'язки (17.43), (17.44) належать до зв'язків другого роду (див. п.3.1.4), а матриця-оператор зв'язків має вигляд (задача 17.4)

$$\begin{aligned} &C_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ &C_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Delta\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \end{aligned} \tag{17.45}$$

матричними елементи оберненої матриці є:

$$\begin{aligned} &(C^{-1})_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (C^{-1})_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ &(C^{-1})_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(C^{-1})_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \end{aligned} \tag{17.46}$$

Оберненість матриці-оператора C треба розуміти у сенсі (17.18) (див. зауваження 17.2),використовуючи вже відому формулу

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Легко також обчислити ненульові дужки Пуассона канонічних змінних $A^i(\mathbf{x})$, $\pi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ зі зв'язками $\varphi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} &\{A^i(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{y})\}_P = -\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ &\{\pi_i(\mathbf{x}), \varphi_1(\mathbf{y})\}_P = -\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{17.47}$$

Тоді, згідно з виразом (3.42) або, точніше, з (17.19), отримаємо такі одночасові комутаційні співвідношення ($x^0 = y^0 = 0$):

$$\begin{aligned} &[A^j(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{y})]_- = i\delta_{jk}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + i\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right), \\ &[A^j(\mathbf{x}), A^k(\mathbf{y})]_- = [\pi_j(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \tag{17.48}$$

Зауважимо, що запропонована схема квантування інваріантна відносно просторових обертань і трансляцій (див. детальніше [15]). На завершення треба також підкреслити: у випадку вільного поля $A_0(x) \equiv 0$ внаслідок (7.56) (оскільки

у відсутності зарядів $\rho(x) \equiv 0$) вигляд канонічної імпульсної змінної π_k збігається з (17.23) при $\mu = k$, а комутаційні співвідношення (17.48) будуть забезпечені для полів $A_j(x)$, що виражаються формулами (7.15), коли

$$[A_j^-(\mathbf{k}), A_k^+(\mathbf{p})]_- = \left(\delta_{jk} - \frac{k^j k^k}{\mathbf{k}^2}\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}).$$

17.3. Про квантування калібрувальних полів

У попередньому підпункті було описано труднощі при квантуванні вільного електромагнітного поля, яке є калібрувально-інваріантним. Калібрувальна інваріантність означає, що в теорії присутні нефізичні змінні, від яких не повинні залежати спостережувальні величини. Це допомагає фіксувати калібровку (тобто цю нефізичну змінну) таким чином, щоб при розв'язанні конкретної задачі провести необхідні обчислення у зручнішому вигляді. Більш того, у випадку вільного (невзаємодіючого) поля калібрувальна інваріантність навіть допомагає явно розглянути калібрувально-неінваріантний лагранжіан (7.17) і застосувати схему коваріантного квантування, яка у формалізмі Гупти–Блейлера усуває усі труднощі. Ситуацію, що виникає у квантовій теорії взаємодіючих полів, розглянемо нижче, а зараз спробуємо застосувати формалізм канонічного квантування до теорії Янга–Міллса. Канонічна змінна, що відповідає узагальненому імпульсу, канонічно спряженому до поля W_μ^a, є

$$\pi_\mu^a = \frac{\partial \mathscr{L}_{YM}}{\partial(\partial_0 W_a^\mu)} = -F_{0\mu}^a. \tag{17.49}$$

(нагадаємо, що $W_a^\mu = W^{a,\mu}$).

Тоді, згідно з постулатами канонічного квантування маємо

$$[W_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)]_{-,x^0=y^0} = i\delta_{ab} g_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{17.50}$$

Покладаючи у формулі (17.50) $\mu = \nu = 0$ і, наприклад, $a = b = 1$, отримуємо

$$[W_0^1(x), \pi_0^1(y)]_{-,x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Але з вигляду (17.49) і вигляду $F_{0\mu}^a$ (див. (10.11)) зрозуміло, що

$$\pi_0^a(y) \equiv 0.$$

Отже, калібрувально інваріантне і канонічне квантування виявляються несумісними. Так само, як і у випадку електромагнітного поля, цю трудність можна усунути, розглянувши явно не калібрувально-інваріантний лагранжіан

$$\widetilde{\mathscr{L}_{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu W_\mu^a)^2,$$

де параметр α фіксує вид калібровки, а $F_{\mu\nu}^a$ має вигляд (10.11).

Тоді отримаємо

$$\pi^a_\mu = -F^a_{0\mu} - \frac{1}{\alpha} g_{0\mu}(\partial^\nu W^a_\nu).$$

У випадку електромагнітного поля калібрувальна інваріантність зберігалась у фізично допустимих станах, оскільки в них унаслідок гіпотези Гупти–Блейлера (17.33) виконувалась умова Лоренца (див. (17.34)) в сенсі середнього значення. Така схема можлива лише завдяки тому, що поля $A_\mu(x)$ є вільними, а їх лагранжіан є квадратичною функцією полів $A_\mu(x)$. Це дає змогу явно побудувати фізично допустимі стани і вакуумний стан (див. зауваження 17.3).

На відміну від вільного електромагнітного поля вільне поле Янга–Міллса не є вільне у тому сенсі, який було вкладено в це поняття раніше. Лагранжіан (10.12) містить у собі окрім квадратичних членів по полю, також кубічні члени і члени четвертого степеня, тобто деяку самодію поля з собою. Вакуумний стан (або ж $\widetilde{\Omega}_0$) вже не буде основним станом "вільного" гамільтоніану $H_{0,\text{ям}}$. Тому квантування (побудову квантового поля) полів Янга–Міллса треба розглядати у контексті побудови взаємодіючих квантових полів. До цього питання ми повернемось у розділі VII.

§ 18. CPT. Спін і статистика

Властивість інваріантності теорії відносно власних перетворень Лоренца має універсальний характер, тобто повинна виконуватися для всіх без винятку взаємодій. Така властивість може не виконуватись для окремих дискретних взаємодій. Нагадаємо, що, наприклад, у реакціях, які відповідають слабким розпадам елементарних частинок (β-розпад), порушується просторова парність. Це експериментальний факт, і його треба враховувати, щоб правильно записати лагранжіан системи (див. (12.9),(12.10)). У цьому параграфі буде наведено загальні правила трансформації квантованих полів при перетвореннях зарядового спряження, просторової та часової інверсії, а також коротко буде описано властивості інваріантності теорії відносно цих перетворень.

Нехай $\widehat{X}$ – одне з дискретних перетворень $\widehat{C}$, $\widehat{P}$ або $\widehat{T}$, уведених у (1.17),(1.18) і (2.3). Дія оператора $\widehat{C}$ у дійсному просторі Мінковського визначається одиничним оператором

$$\widehat{C}x \;=\; x \;=\; (x^0, \mathbf{x}).$$

Перетворення класичних полів були визначені у розділі II (§ 4 – § 7):

$$u(x) \to u^{\widehat{X}}(x) = (\widehat{X}u(x)),$$

де оператори матриці $\widehat{X}$ визначалися залежно від типу полів $u(x)$ формулами (4.36)—(4.38), (5.100), (5.105), (5.108), (7.50)—(7.52).

У випадку квантової теорії представлення групи Лоренца буде реалізовуватись у просторі станів $\mathscr{H}$. Позначимо оператори, що відповідають цим перетво-

ренням, через $U_{\widehat{X}}$. Згідно з **ПК1** оператори $U_{\widehat{X}}$ є унітарними і при перетвореннях $\widehat{X}$ амплітуди станів повинні перетворюватися за законом

$$\Phi \to \Phi^{\widehat{X}} = U_{\widehat{X}}\Phi. \tag{18.1}$$

Тоді польові оператори повинні перетворюватися за операторним законом і згідно з постулатом узгодженості **ПК4** отримаємо

$$\overset{*}{U}_{\widehat{X}}\, u(x) U_{\widehat{X}} = \widehat{X} u(x), \tag{18.2}$$

де $\widehat{X}$ є тим самим оператором, що і в класичній теорії. Він діє на оператор-стовпчик $u(x)$, кількість компонент якого визначається відповідним полем.

18.1. Перетворення зарядового спряження

У випадку комплексного скалярного поля закон перетворення зарядового спряження має такий вигляд:

$$\varphi(x) \to \varphi^{\widehat{C}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{C}}\, \varphi(x) U_{\widehat{C}} = \eta_{\varphi}^{\widehat{C}}\, \overset{*}{\varphi}\,(x). \tag{18.3}$$

Внаслідок тотожності двократного перетворення (18.3) маємо

$$|\eta_{\varphi}^{\widehat{C}}|^2 = 1 \quad \text{і} \quad U_{\widehat{C}}^2 = \overset{*}{U}{}_{\widehat{C}}^2 = \mathbb{1},$$

тобто унітарний оператор U_C є одночасно і самоспряженим. Якщо поле $\varphi(x)$ дійсне, то і $\eta_{\varphi}^{\widehat{C}}$ дійсне і тоді

$$\eta_{\varphi}^{\widehat{C}} = \pm 1. \tag{18.4}$$

У цьому випадку числа $\eta_{\varphi}^{\widehat{C}}$ є одночасно власними значеннями оператора $U_{\widehat{C}}$ з власним вектором, що відповідає одночастинковому стану вільної частинки. Дійсно, якщо Ω_0—це вільний вакуум, то амплітуда одночастинкового стану частинки буде

$$\Phi_1^p(x) = \varphi^+(x)\Omega_0 = \varphi(x)\Omega_0.$$

Тоді, використовуючи (18.3), маємо

$$U_{\widehat{C}}\Phi_1^p(x) = U_{\widehat{C}}\varphi(x)\, \overset{*}{U}_{\widehat{C}} U_{\widehat{C}}\Omega_0 = \eta_{\varphi}^{\widehat{C}}\varphi(x)\Omega_0 = \eta_{\varphi}^{\widehat{C}}\Phi_1^p,$$

де використано інваріантність *голого* вакууму і умову (18.4). Квантове число $\eta_u^{\widehat{C}}$ називають зарядовою парністю нейтральних частинок, що описуються полем $u(x)$. У випадку комплексного поля отримаємо

$$U_{\widehat{C}}\Phi_1^p(x) = \frac{1}{\overset{*}{\eta}{}_{\varphi}^{\widehat{C}}}\, \overset{*}{\varphi}\,(x)\Omega_0 = \eta_{\varphi}^{\widehat{C}}\Phi_1^a(x),$$

$$U_C\Phi_1^a(x) = \overset{*}{\eta}{}_\varphi^{\widehat{C}}\Phi_1^p(x),$$

де $\Phi_1^a(x)$ – амплітуда одночастинкового стану античастинки. Отже, вектор стану може бути власним вектором оператора U_C тільки тоді, коли заряд системи дорівнює нулю.

Аналогічні співвідношення виконуються для спінорного, векторного та електромагнітного полів.

Відповідно, використовуючи (5.100), (6.34) і (7.50), маємо

$$\psi(x) \to \psi^{\widehat{C}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{C}}\psi(x)U_{\widehat{C}} = \eta_\psi^{\widehat{C}}C\bar{\psi}^T(x), \tag{18.5}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}^C(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{C}}\bar{\psi}(x)U_{\widehat{C}} = -\overset{*}{\eta}{}_\psi^{\widehat{C}}\psi^T(x)C^{-1} \tag{18.6}$$

(тут T означає операцію трансформування спінора $\bar{\psi}$),

$$V_\mu(x) \to V_\mu^{\widehat{C}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{C}}V_\mu(x)U_{\widehat{C}} = \eta_V^{\widehat{C}}\overset{*}{V}_\mu(x), \tag{18.7}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu^{\widehat{C}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{C}}A_\mu(x)U_{\widehat{C}} = -A_\mu(x). \tag{18.8}$$

Співвідношення (18.3), (18.5) – (18.8) разом з умовою інваріантності вакуумного стану

$$U_{\widehat{C}}\Phi_0 = \Phi_0 \tag{18.9}$$

можна розглядати як рівняння для оператора $U_{\widehat{C}}$ (див., наприклад, [15], гл. 15). Вони також дозволяють визначити, чи є теорія інваріантною відносно операції зарядового спряження. У разі такої інваріантності виконується рівність

$$\overset{*}{U}_{\widehat{C}}\mathscr{L}(x)U_{\widehat{C}} = \mathscr{L}(x), \tag{18.10}$$

де $\mathscr{L}(x)$ — повний лагранжіан системи взаємодіючих полів. Зауважимо також, що оператор повного заряду системи антикомутує з U_C:

$$\overset{*}{U}_{\widehat{C}}QU_{\widehat{C}} = -Q.$$

18.2. Перетворення просторової інверсії

При перетворенні амплітуд (18.1), що відповідає просторовому відзеркаленню, діємо так само, як і у випадку операції зарядового спряження. Зіставляючи (18.2) з виглядом відповідних перетворень для класичного поля (формули (4.37), (5.105), (6.33), (7.51)), отримаємо такі правила трасформації полів (скалярного, спінорного, векторного та електромагнітного):

$$\varphi(x) \to \varphi^{\widehat{P}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{P}}\varphi(x)U_{\widehat{P}} = \eta_\varphi^{\widehat{P}}\varphi(\Lambda_{i_s}x), \tag{18.11}$$

$$\psi(x) \to \psi^{\widehat{P}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{P}}\psi(x)U_{\widehat{P}} = \eta_\psi^{\widehat{P}}\gamma^0\psi(\Lambda_{i_s}x), \tag{18.12}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}^{\widehat{P}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{P}} \bar{\psi}(x) U_{\widehat{P}} = \overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} \bar{\psi}(\Lambda_{i_s} x)\gamma^0, \tag{18.13}$$

$$V_\mu(x) \to V_\mu^{\widehat{P}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{P}} V_\mu(x) U_{\widehat{P}} = \eta_V^{\widehat{P}} g^{\mu\nu} V_\nu(\Lambda_{i_s} x), \tag{18.14}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu^{\widehat{P}}(x) = \overset{*}{U}_{\widehat{P}} A_\mu(x) U_{\widehat{P}} = g^{\mu\nu} A_\nu(\Lambda_{i_s} x). \tag{18.15}$$

Дія Λ_{i_s} визначена у виразі (1.17).

На відміну від операції зарядового спряження, з тотожності двократного перетворення для скалярних частинок випливає, що

$$(\eta_\varphi^{\widehat{P}})^2 = 1, \quad \eta_\varphi^{\widehat{P}} = \pm 1.$$

Отже, фазовий множник $\eta_\varphi^{\widehat{P}}$ завжди дійсний. Він має назву внутрішньої просторової парності (або просто парності) частинки. Таку саму властивість має і фазовий множник векторних полів. Для спінорних полів треба врахувати їх двозначність при поворотах на кут 2π. Дійсно, інколи двократне просторове віддзеркалення можна записати як повний поворот. Тому $(\eta_\psi^{\widehat{P}})^2$ може набувати обох значень: $+1$ або -1, тобто $\eta_\psi^P \in \{-1, +1, -i, +i\}$. Легко перевірити (задача 18.1), що для зарядово-спряженого спінора $\psi^{\widehat{C}} \equiv \psi^c$

$$\overset{*}{U}_{\widehat{P}} \psi^{\widehat{C}} U_{\widehat{P}} = - \overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} \gamma^0 \psi^{\widehat{C}}(\Lambda_{i_s} x). \tag{18.16}$$

З формули (18.16) випливає: якщо вибрати $\overset{*}{\eta}{}^{\widehat{P}}_{\psi} = \eta_\psi^{\widehat{P}}$, то закон перетворення стану частинки і античастинки будуть протилежними за знаком.

Зауважимо, що вибір фазових множників $\eta_u^{\widehat{C}}$ і $\eta_u^{\widehat{P}}$ залежить від частинки, яка описується полем $u(x)$. Це означає, що навіть для одного й того ж виду полів, скажімо, спінорного ψ, фазовий множник $\eta_\psi^{\widehat{C}}$ (або ж $\eta_\psi^{\widehat{P}}$) може бути різним для різних ферміоннних частинок.

18.3. Перетворення часової інверсії

У випадку квантової теорії перетворення, які пов'язані з часовим віддзеркаленням, суттєво відрізняються від аналогічних перетворень, що відповідають зарядовому спряженню і просторовому віддзеркаленню. Перш за все зауважимо, що у класичній теорії поле $u(x)$ хоч і не відповідало квантово-механічній хвильовій функції частинки, але було пов'язане з нею певними співвідношеннями: це $\varphi^-(x)$ або $\overset{*}{\varphi}{}^-(x)$ у випадку скалярних бозонів, або ж (5.90), (5.101) для електронно-позитронного поля. Тому для узгодженості з правилами зворотності часу у квантовій механіці закон перетворення полів задавався відповідно формулами (4.38), (5.108), (6.35), (7.52).

У квантовій теорії одночастинкові хвильові функції, що відповідають конкретним значенням квантових чисел (імпульсу, спіну і т.д.), визначаються як

проекції вектора $u(x)\Omega_0$ на одночастинковий стан з тими ж квантовими числами (див., наприклад, [15], § 100), тобто

$$\Psi_{(\mathbf{p},\ldots)}(x) = N_\Psi(u(x)\Omega_0,\ \Phi_1(\mathbf{p},\ldots))_{\mathscr{H}}, \tag{18.17}$$

де

$$\Phi_1(\mathbf{p},\ldots) = u^+(\mathbf{p})\Omega_0,$$

оператор $u^+(\mathbf{p})$—оператор народження частинки з квантовими числами $(\mathbf{p}, s, \ldots)$, а N_ψ — нормувальний множник.

Отже, у квантовому випадку перетворення (18.2), що відповідає часовій інверсії, повинно задовольняти дві основні умови. Першою є умова інваріантності комутаційних співвідношень для перетворених полів $u^{\widehat{T}}(x)$, а другою – збереження квантово-механічної картини, тобто перетворення хвильової функції (18.17) за законом

$$\Psi_{(\mathbf{p},\ldots)}(x) \to \Psi^{\widehat{T}}_{(\mathbf{p},\ldots)}(x) = \eta^{\widehat{T}}_{\Psi}\ \overset{*}{\Psi}_{(\mathbf{p},\ldots)}\ (\Lambda_{i_t}x). \tag{18.18}$$

Виявляється, що обидві ці умови не можна задовольнити, якщо розглядати оператор $U_{\widehat{T}}$ як лінійний унітарний оператор у просторі $\mathscr{H}$. Продемонструємо це на прикладі вільного комплексного скалярного поля.

Нехай правила (18.2) мають вигляд

$$\overset{*}{U}_{\widehat{T}}\varphi(x)U_{\widehat{T}} = \eta^{\widehat{T}}_{\varphi}\varphi^{\#}(\Lambda_{i_t}x),$$

$$\overset{*}{U}_{\widehat{T}}\ \overset{*}{\varphi}\ (x)U_{\widehat{T}} = \overset{*}{\eta}{}^{\widehat{T}}_{\varphi}(\varphi^{\#}(\Lambda_{i_t}x))^*,$$

де $\varphi^{\#}$ збігається або з самим полем φ, або з комплексно спряженим полем $\overset{*}{\varphi}$.

Подіємо операторами $\overset{*}{U}_{\widehat{T}}$ і $U_{\widehat{T}}$ на комутаційні співвідношення (15.15) відповідно зліва і справа. Якщо $U_{\widehat{T}}$ – лінійний унітарний оператор, тоді отримаємо таке співвідношення (це співвідношення треба розуміти у сенсі дії на вектори з простору $\mathscr{H}$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}D(x-y) &= [\overset{*}{U}_{\widehat{T}}\ \varphi(x)U_{\widehat{T}}, \overset{*}{U}_{\widehat{T}}\ \overset{*}{\varphi}\ (y)U_{\widehat{T}}]_- = \\
&= |\eta^{\widehat{T}}_{\varphi}|^2[\varphi^{\#}(\Lambda_{i_t}x), (\varphi^{\#}(\Lambda_{i_t}y))^*]_- = \\
&= |\eta^{\widehat{T}}_{\varphi}|^2 \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{i}D(\Lambda_{i_t}(x-y)), & \text{коли } \varphi^{\#} = \varphi \\ -\dfrac{1}{i}D(\Lambda_{i_t}(y-x)), & \text{коли } \varphi^{\#} = \overset{*}{\varphi} \end{array} \right\} = \\
&= -|\eta^{\widehat{T}}_{\varphi}|^2\frac{1}{i}D(x-y),
\end{aligned} \tag{18.19}$$

де враховано властивість переставної функції (див. (15.8) або (15.10)) відносно заміни $x^0 \to -x^0$. Отже, приходимо до суперечності, оскільки (18.19) може

виконуватися тільки при $D(x-y)\equiv 0$. Щоб усунути цю суперечність, треба трактувати оператор $U_{\widehat{T}}$ як *"антиунітарний"* оператор, який визначається у просторі $\mathscr{H}$ таким співвідношенням:

$$(U_{\widehat{T}}\Phi_1, U_{\widehat{T}}\Phi_2) = \overline{(\Phi_1,\Phi_2)} = (\Phi_2,\Phi_1), \quad \Phi_1,\Phi_2\in\mathscr{H}. \tag{18.20}$$

Звідси легко отримати правило дії оператора $U_{\widehat{T}}$ на лінійну комбінацію векторів Φ_1, Φ_2 (задача 18.2):

$$U_{\widehat{T}}(\alpha_1\Phi_1+\alpha_2\Phi_2) = \bar{\alpha}_1 U_{\widehat{T}}\Phi_1 + \bar{\alpha}_2 U_{\widehat{T}}\Phi_2, \tag{18.21}$$

тобто оператор, визначений рівністю (18.20), є *антилінійним*. Це дає змогу усунути суперечність, визначивши закон перетворення (18.2) формулою

$$U^{-1}_{\widehat{T}}\varphi(x)U_{\widehat{T}} = \eta^{\widehat{T}}_{\varphi}\varphi(\Lambda_{i_t}x) = \eta^{\widehat{T}}_{\varphi}\varphi(-x^0,\mathbf{x}). \tag{18.22}$$

Тоді, для отримання інваріантності комутаційних співвідношень (15.15) відносно перетворень (18.22) треба врахувати (18.21), що у даному випадку забезпечує рівність

$$U^{-1}_{\widehat{T}}\frac{1}{i}D(x-y)U_{\widehat{T}} = -\frac{1}{i}D(x-y)$$

та інваріантність комутаційних співвідношень (15.15). З визначення оператора $U_{\widehat{T}}$ рівністю (18.20) випливає, що

$$\|U_{\widehat{T}}\Phi\|_{\mathscr{H}} = \|\Phi\|_{\mathscr{H}}, \quad \Phi\in\mathscr{H},$$

тобто оператор $U_{\widehat{T}}$ зберігає норму векторів гільбертового простору і тому (разом з його антилінійністю (18.21)) його називають антиунітарним. Але цей термін не є загальноприйнятним у математичній літературі. Крім того, уникаємо ототожнення оператора $U^{-1}_{\widehat{T}}$ з оператором $U^{*}_{\widehat{T}}$, оскільки поняття спряженого оператора для нелінійних операторів не є однозначним (див., наприклад, виноску[1] в [40], гл. I, п.2.2).

Легко також перевірити умову (18.18). Дійсно, з означення (18.17) при $u=\varphi$, представлення польового оператора у вигляді (15.2), а також комутаційних співвідношень (15.13) легко обчислити, що

$$\Psi_{(\mathbf{p},\dots)}(x) = N_\Psi\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{-ip^0x^0+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2p^0}}, \quad p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}.$$

Далі, користуючись виразами (18.22), (18.20), умовою інваріантності

$$U_{\widehat{T}}\Omega_0 = \Omega_0$$

вакууму, а також виходячи з умови $(\eta^{\widehat{T}}_{\varphi})^2=1$, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned}
\Psi^{\widehat{T}}_{(\mathbf{p},\dots)}(x) &= N_\Psi(\varphi^T(x)\Omega_0,\Phi_1(\mathbf{p},\dots))_{\mathscr{H}} = N_1(\Omega_0,\overset{*}{\varphi}{}^-(x)U_{\widehat{T}}\varphi^+(\mathbf{p})U^{-1}_{\widehat{T}}\Omega_0 = \\
&= \frac{N_\Psi}{\eta^{\widehat{T}}_{\varphi}}(\Omega_0,\overset{*}{\varphi}{}^-(x)\varphi^+(x)\varphi^+(-\mathbf{p})\Omega_0) = \eta^{\widehat{T}}_{\varphi}N_\Phi\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ip^0x^0-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \\
&= \eta^{\widehat{T}}_{\varphi}\ \overset{*}{\Psi}{}_{(\mathbf{p},\dots)}(\Lambda_{i_t}x)\,,
\end{aligned}$$

що збігається з (18.18).

Зауважимо: вибір у правій частині формули (18.22) замість поля φ поля $\overset{*}{\varphi}$ призводить до того, що вектор стану частинки $\Psi_1(\mathbf{p},\ldots) = \Phi_1^p(\mathbf{p},\ldots) = \varphi^+(\mathbf{p})\Omega_0$ перетворенням $\widehat{T}$ переходив би у стан античастинки:

$$\begin{aligned} U_{\widehat{T}}\Phi_1^p(\mathbf{p},\ldots) \;&+\; U_{\widehat{T}}\varphi^+(\mathbf{p})U_{\widehat{T}}^{-1}\Omega_0 - = \\ &= \;\overset{*}{\varphi}{}^+(-\mathbf{p})\Omega_0 = \Phi_1^a(-\mathbf{p},\ldots)\,. \end{aligned}$$

На завершення даного пункту наведемо вигляд трансформаційних співвідношень для основних операторних полів (скалярного, спінорного, векторного та електромагнітного):

$$\varphi(x) \to \varphi^{\widehat{T}}(x) = U_{\widehat{T}}^{-1}\varphi(x)U_{\widehat{T}} = \eta_\varphi^{\widehat{T}}\varphi(\Lambda_{i_t}x), \tag{18.23}$$

$$\psi(x) \to \psi^{\widehat{T}}(x) = U_{\widehat{T}}^{-1}\psi(x)U_{\widehat{T}} = \eta_\psi^{\widehat{T}}\gamma^1\gamma^3\psi(\Lambda_{i_t}x), \tag{18.24}$$

$$\bar\psi(x) \to \psi^{\widehat{T}}(x) = U_{\widehat{T}}^{-1}\bar\psi(x)U_{\widehat{T}} = \overset{*}{\eta}{}_\psi^{\widehat{T}}\bar\psi(\Lambda_{i_t}x)\gamma^3\gamma^1, \tag{18.25}$$

$$V_\mu(x) \to V_\mu^T(x) = U_{\widehat{T}}^{-1}V_\mu(x)U_{\widehat{T}} = \eta_V^T g^{\mu\nu}V_\nu(\Lambda_{i_t}x), \tag{18.26}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu^T(x) = U_{\widehat{T}}^{-1}A_\mu(x)U_{\widehat{T}} = g^{\mu\nu}A_\nu(\Lambda_{i_t}x). \tag{18.27}$$

18.4. *CPT*-теорема і зв'язок спіну та статистики

Можна легко пересвідчитись, що майже всі лагранжіани вільних полів є інваріантними відносно кожної з операцій $\widehat{C}$, $\widehat{P}$ і $\widehat{T}$ окремо. Виняток—лагранжіан вільного нейтринного поля (5.153). Справа у тому, що поле $\nu^{\widehat{C}}(x)$ вже не буде задовольняти ні додаткову умову (5.148), ні (5.150). Для того, щоб задовольнити ці умови (при умові, що $\nu(x)$ задовольняє умову (5.148)), треба виконати ще $\widehat{P}$-перетворення, тобто поле

$$\nu^{\widehat{P}\widehat{C}}(x) = \overset{*}{U}{}_{\widehat{P}\widehat{C}}\nu(x)U_{\widehat{P}\widehat{C}} = \overset{*}{U}{}_{\widehat{P}}\,\overset{*}{U}{}_{\widehat{C}}\nu(x)U_{\widehat{C}}U_{\widehat{P}}$$

буде задовольняти умову (5.148) (задача 18.3)). Так само можна пересвідчитись, що лагранжіан (5.153) не є інваріантним окремо відносно перетворень $\widehat{P}$ і $\widehat{C}$, але є інваріантним відносно $\widehat{P}\widehat{C}$ (задача 18.4). Але виявляється, що будь-яка теорія (в рамках тих міркувань і тієї концепції побудови, яку було розглянуто вище) є інваріантною відносно добутку усіх трьох перетворень, тобто відносно перетворень:

$$\widehat{\Theta} = \widehat{P}\widehat{C}\widehat{T} = \widehat{P}\widehat{T}\widehat{C} = \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T} = \widehat{C}\widehat{T}\widehat{P} = \widehat{T}\widehat{P}\widehat{C} = \widehat{T}\widehat{C}\widehat{P}. \tag{18.28}$$

Цей результат можна сформулювати у вигляді теореми

***CPT*-теорема**. *Якщо теорія взаємодіючих полів описується лагранжіаном $\mathscr{L}(x)$, що задовольняє умовам*

1) *$\mathscr{L}(x)$ є локальним (див. п. 3.2):*

$$\mathscr{L}(x) = F(u_i(x), \partial_k u_i(x));$$

2) *$\mathscr{L}(x)$ є інваріантним відносно власних неоднорідних перетворень Лоренца:*

$$\overset{*}{U}_{(\Lambda,a)} \mathscr{L}(x) U_{(\Lambda,a)} = \mathscr{L}(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad \Lambda \in L_+^{\uparrow};$$

3) *оператор $\mathscr{L}(x)$ є симетричним (ермітовим)* [1] *оператором у просторі $\mathscr{H}$;*

4) *оператор $\mathscr{L}(x)$ виражається нормальним (віковським) добутком (див.* **ПК9***) полів, що входять у його визначення;*

5) *оператори квантованих полів (що входять у визначення лагранжіану) з цілим спіном задовольняють комутаційні співвідношення (тобто під знаком нормального добутку комутують), а оператори полів з півцілим спіном задовольняють антикомутаційні співвідношенням (тобто під знаком нормального добутку антикомутують),*

то теорія є $\widehat{\Theta}$-інваріантною ($\widehat{\Theta} = \widehat{P}\widehat{C}\widehat{T}$), тобто

$$U_{\widehat{\Theta}}^{-1} \mathscr{L}(x) U_{\widehat{\Theta}} = \mathscr{L}(-x).$$

Ця теорема вперше була запропонована Людерсом і Зуміно [165], [ЛЗ166] в такому варіанті: *якщо релятивістськи- інваріантна теорія (тобто відносно перетворень з $L_+^{\uparrow}$) інваріантна відносно просторового віддзеркалення $\widehat{P}$, то вона повинна бути інваріантною і відносно добутку перетворень $\widehat{C}\widehat{T}$.* Але ще раніше В. Паулі [62] при доведенні теореми про зв'язок спіну і статистики для вільних квантованих полів (звернемось до цього доведення у даному пункті трохи нижче) фактично довів інваріантність вільної теорії відносно $\widehat{P}\widehat{C}\widehat{T}$ перетворення при умові її інваріантності відносно обмеженої групи Лоренца. Більш детальний варіант доведення можна знайти в огляді В. Паулі [64]. У рамках аксіоматичного підходу до побудови квантової теорії поля (див. розділ VII) доведення ***CPT***-теореми було дано Йостом [151] (див. також монографії [39,10,11]).

На закінчення даного пунктуу покажемо, що **CPT**-теорема справедлива для двох типів взаємодій: взаємодії спінорного поля з дійсним скалярним полем ($\mathscr{L}_{\text{юк}} =: \bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x) :$ і чотири ферміонної взаємодії, якою описують β-розпад $n \to p + e^- + \bar{\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_\beta(x) &= g : \bar{\psi}_p(x)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_n(x)\bar{\psi}_e(x)\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_\nu(x) + \\ &+ g : \bar{\psi}_n(x)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\psi_p(x)\bar{\psi}_\nu(1+\gamma^5)\gamma_\mu\psi_e(x) := \\ &= \mathscr{L}_{pne\nu}(x) + \mathscr{L}_{pr\nu e}(x). \end{aligned} \tag{18.29}$$

[1] Ермітовість $\mathscr{L}(x)$ треба розуміти у сенсі визначення $\mathscr{L}(x)$ як операторно-значної узагальненої функції.

Випишемо для цього перетворення полів ψ, $\bar\psi$ і φ, що відповідає перетворенню $\widehat\Theta$. З формул (18.5)–(18.8), (18.11)–(18.14), (18.23)–(18.27) можна обчислити (задача 18.5), що

$$\begin{aligned} U^{-1}_{\widehat\Theta}\varphi(x)U_{\widehat\Theta} &= U^{-1}_{\widehat T}U^{-1}_{\widehat P}U^{-1}_{\widehat C}\varphi(x)U_{\widehat C}U_{\widehat P}U_{\widehat T} = \\ &= \eta^{\widehat C}_\varphi\eta^{\widehat P}_\varphi\eta^{\widehat T}_\varphi\varphi(\Lambda_{i_\theta}x) = \varphi(-x), \end{aligned} \tag{18.30}$$

$$U^{-1}_{\widehat\Theta}\psi(x)U_{\widehat\Theta} = -\overset{*}{\eta}{}^{\widehat C}_\psi\eta^{\widehat P}_\psi\,\overset{*}{\eta}{}^{\widehat T}_\psi\gamma^1\gamma^2\gamma^3\bar\psi^T(-x), \tag{18.31}$$

$$U^{-1}_{\widehat\Theta}\bar\psi(x)U_{\widehat\Theta} = -\eta^{\widehat C}_\psi\,\overset{*}{\eta}{}^{\widehat P}_\psi\eta^{\widehat T}_\psi\psi^T(-x)\gamma^3\gamma^2\gamma^1. \tag{18.32}$$

Легко переконатися, що, враховуючи (18.30)–(18.32), отримуємо

$$\begin{aligned} U^{-1}_{\widehat\Theta} : \bar\psi(x)\psi(x)\varphi(x) : U_\Theta &= -|\eta^{\widehat C}_\psi|^2|\eta^{\widehat P}_\psi|^2|\eta^{\widehat T}_\psi|^2 : \psi^T(-x)\bar\psi^T(-x)\varphi(-x) := \\ &= : \bar\psi(-x)\psi(-x)\varphi(-x) : \ . \end{aligned}$$

Звертаємо увагу, що в останній рівності використано умову 5) ***CPT***-теореми, тобто враховано зв'язок спіну і статистики.

Перевіримо тепер інваріантність лагранжиану (18.29). Користуючись (18.30)–(18.32), маємо для першого множника у першому доданку (18.29):

$$U^{-1}_{\widehat\Theta}g : \bar\psi_p(x)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_n(x) : U_{\widehat\Theta} =$$

$$-(-1)^{\delta_{\mu 2}}g^{\mu\mu} : \bar\psi_n(-x)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\psi_p(-x) : \ .$$

Зауважимо, що множник $(-1)^{\delta_{\mu 2}}$ з'являється внаслідок дії антилінійного оператора $U_{\widehat T}$ на матричні елементи γ^μ $\left(\overline{\gamma^\mu_{\alpha\beta}} = (-1)^{\delta_{\mu 2}}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)$.

Аналогічний результат буде для другого множника у першому доданку. Перемноживши, отримаємо

$$U^{-1}_\Theta\mathscr{L}_{p\mathrm{n}e\nu}(x)U_\Theta = (\mathscr{L}_{n\mathrm{p}e\nu}(-x))^* = \mathscr{L}_{n\mathrm{p}\nu e}(-x),$$

звідки випливає інваріантність повного лагранжіану взаємодії.

18.5. Доведення теореми Паулі

У § 14 (постулат **ПК8**) була сформульована теорема Паулі, яка визначила правило квантування полів залежно від їх спіну. У цьому підпункті ми коротко обґрунтуємо цю теорему на прикладі вільних полів.

Перш за все зауважимо, що і бозонні, і ферміонні поля повинні задовольняти рівняння Гейзенберга (14.6):

$$i\frac{\partial u_i(x)}{\partial x^0} = [u_i(x), P^0]_-.$$

Виходячи з представлень цих полів у вигляді їх фур'є-перетворень (див. (15.2), (16.2), (16.3)), перепишемо це рівняння для операторних амплітуд $\tilde{u}_i^{\pm}(\mathbf{k})$:

$$[\tilde{u}_i^{\pm}(\mathbf{k}), P^0]_- = \mp k^0 \tilde{u}_i^{\pm}(\mathbf{k}), \tag{18.33}$$

де $\tilde{u}_i^{\pm}$ приймає одне із значень $\varphi^{\pm}(\mathbf{k})$, для скалярного поля, $a_s^{\pm}(\mathbf{k})$, $s = 1, 2$ для спінорного поля, $b_\mu^{\pm}(\mathbf{k})$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, для векторного поля. Відповідні вирази для оператора P^0 задані формулами (14.24), (14.25), де поки що не враховані правила комутації операторів. Легко перевірити, що рівняння (18.33) можна задовольнити лише коли або комутатори, або антикомутатори цих полів задовольняють співвідношення

$$[\tilde{u}_i^{\pm}(\mathbf{p}), \tilde{u}_j^{\pm}(\mathbf{k})]_{\pm} = [\overset{*}{\tilde{u}}{}_i^{\pm}(\mathbf{p}), \overset{*}{\tilde{u}}{}_j^{\pm}(\mathbf{k})]_{\pm} = [\overset{*}{\tilde{u}}{}_i^{\pm}(\mathbf{p}), \tilde{u}_j^{\pm}(\mathbf{k})]_{\pm} = 0,$$

$$[\tilde{u}_i^{-}(\mathbf{p}), \overset{*}{\tilde{u}}{}_j^{+}(\mathbf{k})]_{\pm} = [\overset{*}{\tilde{u}}{}_i^{-}(\mathbf{p}), \tilde{u}_j^{+}(\mathbf{k})]_{\pm} = \delta_{i_j}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}).$$

Ці співвідношення еквівалентні, тому що комутатори або антикомутатори полів $u_i(x)$ та $\overset{*}{u}_i\,(y)$ є c-функцією, тобто кратні одиничному оператору, а точніше

$$[u_i(x), \overset{*}{u}_i\,(y)]_{\pm} = \Delta_{ii}^{\pm}(x - y). \tag{18.34}$$

Покажемо тепер, що для полів із цілим спіном таке співвідношення має сенс тільки у випадку комутатора.

Нехай $u_i(x) = \varphi(x)$ — комплексне скалярне поле, а співвідношення (18.58) виконуються тоді, коли в (18.34) беруться антикомутатори. Тоді легко обчислити (так само, як і у випадку з комутаторами), що

$$[\varphi(x), \overset{*}{\varphi}\,(y)]_{+} = \frac{1}{i} D(x - y).$$

Функція $D(x - y)$ є антисиметричною за часовою змінною і симетричною за просторовими змінними. Використовуючи цей факт, видно, що

$$[\varphi(x), \overset{*}{\varphi}\,(y)]_{+} + [\varphi(y), \overset{*}{\varphi}\,(x)]_{+} = 0.$$

Але у цьому випадку при $x \to y$, кожний із чотирьох доданків є суттєво додатній, і тому приходимо до суперечності. Аналогічний результат справедливий і для векторних полів, оскільки відповідна функція $\Delta_{ii}^{+}(x - y)$ виражається дією оператора, що містить парне число похідних (див. (17.12)) на функцію $\dfrac{1}{i} D(x-y)$ і таким чином зберігає такі самі властивості непарності за часовою змінною і парності за просторовою.

Отже, з наведених аргументів випливає: поля, що відповідають частинкам із цілим спіном, повинні задовольняти комутаційні співвідношення.

Для полів із півцілим спіном не можна застосувати подібні аргументи. Але аргументи, що пов'язані з додатньо-визначеністю оператора енергії P^0 для полів із півцілим спіном і наведені в обґрунтуванні постулату **ПК8**, завершують доведення теореми.

§ 19. Представлення комутаційних та антикомутаційних співвідношень

У попередніх підрозділах було розглянуто вільні квантовані поля як операторно-значні узагальнені функції, що задовольняють певні переставні співвідношення. Такі переставні співвідношення можна розглядати як деяку абстрактну алгебру, знаходження представлень якої є важливим самостійним завданням. Крім того, через ці абстрактні польові оператори виражаються основні динамічні величини: енергія-імпульс, струм, заряд тощо. Тому побудова представлень для алгебраїчних співвідношень (15.4), (16.4), (17.2) означає також побудову простору фізичних станів, а також амплітуд, за допомогою яких можна було б обчислити основні фізичні величини теорії.

На відміну від квантової механіки, де число частинок є інтегралом руху, квантова теорія поля описує фізичні процеси, в яких число частинок може змінюватись, приймаючи будь які великі значення. Тому вектори фізичних станів повинні бути функціями від будь якого великого числа аргументів. Вперше гільбертів простір станів, що відповідає цій вимозі, був побудований Фоком [125] (про історію цього питання див., наприклад, [102, гл. 6]) і тому має назву *простору Фока*.

Простір Фока є простим наочним узагальненням простору станів квантової механіки. Тому метод вторинного квантування у просторі Фока став найпопулярнішим, хоча представлення комутаційних співвідношень в інших просторах також вивчаються у науковій літературі.

У цьому параграфі детально зупинимося на описі представлень у просторі Фока.

19.1. Загальна структура простору Фока

Спершу визначимо простір станів у найбільш загальній ситуації, не враховуючи вид і структуру частинок, а також їх динамічний стан (тобто чи є вони вільні, чи взаємодіють між собою). Нехай $\mathscr{H}_1^{(j)}$—гільбертів (комплексний) простір станів однієї релятивістської частинки j-го виду. Наприклад, для вільних частинок приклади таких просторів було розглянуто у розділі II.

Побудуємо простори

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_0 &= \mathbb{C}, \\ \mathscr{F}_N &= \mathscr{H}_1^{(j_1)} \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_1^{(j_N)}, \end{aligned} \tag{19.1}$$

де значок $\otimes$ означає тензорний добуток (див., наприклад, [77], § II.4).

Насправді формула (19.1) не враховує того випадку, що серед усіх N-частинок можуть бути однакові (тотожні) частинки. Крім того, ці частинки можуть бути або бозонами, або ж ферміонами. Згідно із загальним принципом

нерозрізнення однакових частинок у квантовій теорії (див., наприклад, [46, гл. IX]) відповідні функції повинні бути симетричними за "бозонними змінними" і антисиметричними за "ферміонними змінними".

Нехай система із N частинок складається із K-видів бозонів і L-видів ферміонів, а число частинок кожного виду m_k, $k = \overline{1,K}$, і m_l, $l = K+1, \ldots, K+L$. Тоді конструкція простору $\mathscr{F}_N$, що відповідає цій ситуації, має вигляд

$$\mathscr{F}_N = \\ = \left(\mathscr{H}_1^{(1)}\right)^{\otimes_s m_1} \otimes \cdots \otimes \left(\mathscr{H}_1^{(K)}\right)^{\otimes_s m_K} \otimes \left(\mathscr{H}_1^{(K+1)}\right)^{\otimes_a m_{K+1}} \otimes \cdots \otimes \left(\mathscr{H}_1^{K+L}\right)^{\otimes_a m_{K+L}}, \tag{19.2}$$

де $\otimes_s m_k$ означає симетричну тензорну степінь простору $\mathscr{H}_1^{(1)}$ самого на себе m_k разів, а $\otimes_a m_l$– відповідно антисиметричну тензорну степінь n_l разів. N можна розглядати як вектор $N = (m_1, \ldots, m_K,\ m_{K+1}, \ldots,\ m_{K+L})$ з $|N| = m_1 + \cdots + m_K + m_{K+1} + \cdots + m_{K+L}$.

Тепер простір Фока є поповненою прямою сумою

$$\mathscr{F} = \bigotimes_{N=0}^{\infty} \mathscr{F}_N. \tag{19.3}$$

Елементами простору $\mathscr{F}$ є послідовності (стовпчики)

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{19.4}$$

Причому $F \in \mathscr{F}$, якщо

$$\|F\| = \left(\sum_{N=0}^{\infty} \|F_N\|^2_{\mathscr{F}_N}\right)^{1/2} < \infty, \tag{19.5}$$

де норма і скалярний добуток у просторі $\mathscr{F}_N$ повністю визначаються відповідними величинами в одночастинкових гільбертових просторах $\mathscr{H}_1^{(j)}$ і правилами побудови цих величин у тензорному добутку гільбертових просторів (див., наприклад, [77], § II.4). У наступних пунктах буде наведено конкретні приклади таких просторів.

19.2. Представлення комутаційних співвідношень вільного дійсного скалярного поля

19.2.1. Простір Фока вільних скалярних бозонів

Одночастинковий гільбертів простір, що відповідає скалярній частинці (скалярному бозону), можна вибрати таким самим способом, як і у класичній теорії

(див. п.4.4). В імпульсному представленні $\mathscr{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$, тобто $\mathscr{H}_1$—це простір квадратично інтегровних функцій $f(\mathbf{p})$. Відповідним N-частковим простором станів $\mathscr{F}_N$ є простір симетричних функцій $F_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$, для яких

$$\|F_N\|^2_{\mathscr{F}_N} := \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} (d\mathbf{p})^N \, |F_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)|^2 < \infty, \tag{19.6}$$

а простір Фока $\mathscr{F} = \mathscr{F}_B$ будується за формулами (19.3)–(19.5).

19.2.2. Оператори народження і знищення у просторі Фока. Імпульсне представлення

Побудуємо спершу представлення комутаційних співвідношень для дійсного скалярного поля:

$$\begin{aligned} &[\varphi^-(\mathbf{k}), \varphi^+(\mathbf{p})]_- = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbb{I}, \\ &[\varphi^\pm(\mathbf{k}), \varphi^\pm(\mathbf{p})]_- = 0. \end{aligned} \tag{19.7}$$

З першого співвідношення (19.7) видно, що результат дії комутатора на будь-яку функцію $F_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$ повинен бути функцією, яка має вигляд

$$\Phi_N = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) F_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N), \tag{19.8}$$

що, зрозуміло, не належить простору Фока. Φ_N є узагальненою функцією. Це наслідок того, що поле $\varphi(\mathbf{k})$ є операторно-значною узагальненою функцією. Якщо вибрати дві функції $f(\mathbf{k})$ і $g(\mathbf{p})$ з простору основних функцій (наприклад, $\mathscr{D}$ [22]), то величини

$$\varphi^-(f) = \langle \varphi^-, f \rangle = \int \varphi^-(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \tag{19.9}$$

і

$$\varphi^+(g) = \langle \varphi^+, g \rangle = \int \varphi^+(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \tag{19.10}$$

(тут інтеграли треба розуміти у сенсі операції спарювання) будуть операторами у просторі Фока. Згідно з (19.7) вони повинні задовольняти комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} &[\varphi^-(f), \varphi^+(g)]_- = (f, g)_{\mathscr{H}_1} \cdot \mathbb{I}, \\ &[\varphi^\pm(f), \varphi^\pm(g)]_- = 0, \end{aligned} \tag{19.11}$$

де $\mathbb{I}$—одиничний оператор у просторі $\mathscr{F}$.

Задамо формально спершу дію "операторів" $\varphi^+(\mathbf{k})$ і $\varphi^-(\mathbf{p})$ на фоківський стовпчик $F = \{F_N\}_{N=0}^\infty$ таким чином. Будемо вважати, що при дії "операторів" $\varphi^+(\mathbf{k})$ і $\varphi^-(\mathbf{p})$ на F утворяться нові фоківські стовпчики, компоненти яких обчислюються за формулами

$$(\varphi^+(\mathbf{p})F)_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j) F_{N-1}(\mathbf{p}_i, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_N), \tag{19.12}$$

$$(\varphi^-(\mathbf{k})F)_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) = \sqrt{N+1}\, F_{N+1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N). \tag{19.12'}$$

Тоді легко обчислити, що

$$\begin{aligned}(\varphi^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{p})F)_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) &= \sqrt{N+1}(\varphi^+(\mathbf{p})F)_{N+1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) = \\ &= \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N+1}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) F_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) + \\ &+ \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{N+1}} \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j) F_N(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_N),\end{aligned} \tag{19.13}$$

а

$$\begin{aligned}&(\varphi^+(\mathbf{p})\varphi^-(\mathbf{k})F)_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j)(\varphi^-(\mathbf{k})F)_{N-1}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_N) = \\ &= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j) F_N(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_N).\end{aligned} \tag{19.14}$$

Віднімаючи, виходить вираз (19.8).

Інтегруючи співвідношення (19.12)–(19.14) з функціями $f, g \in \mathscr{D}$, отримуємо перше співвідношення (19.11) на векторі $F \in \mathscr{F}_B$. Але для того, щоб вважати представлення комутаційних співвідношень побудованими в $\mathscr{F}_B$, треба довести, що оператори $\varphi^{\pm}(f)$ для $f \in \mathscr{D}$ можна задати в $\mathscr{F}_B$ на деякій *всюдищільній* множині векторів. Такою всюдищільною множиною в $\mathscr{F}_B$ є множина $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{F}_B$ фінітних стовпчиків. Вектор $F \in \mathscr{D}_0$, якщо існує номер N_0– такий, що для $N > N_0$ $F_N \equiv 0$. Для кожного вектора $F \in \mathscr{D}_0$ номер N_0 свій, тобто $N_0 = N_0(F)$.

Всюдищільність множини $\mathscr{D}_0$ випливає з означення всюдищільності (див., наприклад, [76], § I.2) і абсолютної збіжності ряду (19.5) для будь-якого $F \in \mathscr{F}_B$. Дійсно, для будь-якого $F \in \mathscr{F}_B$ і такого, що $F \notin \mathscr{D}_0$ (тобто знайдеться якенебудь велике N– таке, що $F_N \neq 0$), побудуємо послідовність векторів $F^{(n)} \in \mathscr{D}_0$ таким чином:

$$F_N^{(n)} = F_N \quad \text{для } N \leq n \quad \text{і } F_N^{(n)} \equiv 0 \quad \text{для } N > n.$$

Тоді

$$\|F^{(n)} - F\|^2 = \sum_{N=n}^{\infty} \|F_N\|^2_{\mathscr{F}_N}. \tag{19.15}$$

Зі збіжності ряду (19.5) випливає, що права частина (19.15) прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, послідовністю $F^{(n)} \in \mathscr{D}_0$ можна наблизити будь-який вектор

з $\mathscr{F}_B$, що й означає щільність множини $\mathscr{D}_0$ в $\mathscr{F}_B$. Покажемо тепер, що для якого-небудь вектора $F \in \mathscr{D}_0$ вектори $\varphi^{\pm}(f)F \in \mathscr{D}_0$. Фінітність векторів $\varphi^{\pm}(f)F$ випливає з формул їхньої дії.

Дійсно, безпосередньо з (19.12)і (19.9)–(19.10) маємо

$$(\varphi^{+}(f)F)_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} f(\mathbf{p}_j)F_{N-1}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\ldots,\mathbf{p}_N),$$

$$(\varphi^{-}(f)F)_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N) = \sqrt{N+1}\int d\mathbf{p}\, f(\mathbf{p})F_{N+1}(\mathbf{p},\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N). \qquad (19.16)$$

Отже, оператор $\varphi^{+}(f)$ збільшує число компонент вектора F на одиницю, перетворюючи вектор

$$F = (F_0, F_1(\mathbf{p}_1),\ldots,\ F_{N_0}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{N_0}),0,\ldots) \qquad (19.17)$$

у вектор

$$\varphi^{+}(f)F =$$

$$= \left(0, f(\mathbf{p}_1)F_0,\ldots,\frac{1}{\sqrt{N_0+1}}\sum_{j=1}^{N_0+1} f(p_j)F_{N_0}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\ldots,\mathbf{p}_{N_0+1}),0,\ldots\right), \qquad (19.18)$$

а оператор $\varphi^{-}(f)$ зменшує число компонент на одиницю:

$$\varphi^{-}(f)F = \left(\int d\mathbf{p}\, f(\mathbf{p})F_1(\mathbf{p}), \sqrt{2}\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p})F_2(\mathbf{p},\mathbf{p}_1),\ldots,\right.$$
$$\left.\sqrt{N_0}\int d\mathbf{p} f(p)F_{N_0}(\mathbf{p},\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{N_0-1}),0,\ldots\right). \qquad (19.19)$$

Отже, залишається довести, що $(\varphi^{\pm}(f)F)_N(\bar{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N) \in \mathscr{F}_N$. Згідно з означенням (19.6) норми в $\mathscr{F}_N$ маємо

$$\|(\varphi^{+}(f)F)_N\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} (d\mathbf{p})^N \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} f(\mathbf{p}_j)F_{N-1}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\ldots,\mathbf{p}_N)\right|^2 \leq$$
$$\leq N\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}\,|f(\mathbf{p}_j)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} (d\mathbf{p})^{N-1}|F_{N-1}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{N-1}|^2 =$$
$$= N\|f\|^2_{\mathscr{H}_1}\|F_{N-1}\|^2_{\mathscr{F}_{N-1}}. \qquad (19.20)$$

При обчисленні використано нерівність Коші–Бунаковского–Шварца:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|^2\right)^{1/2}.$$

Враховуючи означення норми (19.5), фінітність вектора F (19.17) і оцінку (19.20) отримуємо нерівність

$$\|\varphi^+(f)F\|_{\mathscr{F}} \le \sqrt{N_0+1}\,\|f\|_{\mathscr{H}_1}\|F\|_{\mathscr{F}}. \tag{19.21}$$

Зовсім аналогічно для оператора $\varphi^-(f)$:

$$\|\varphi^-(f)F\|_{\mathscr{F}} \le \sqrt{N_0}\,\|f\|_{\mathscr{H}_1}\|F\|_{\mathscr{F}}. \tag{19.22}$$

Завдяки тому, що для $f \in \mathscr{D}$, $F \in \mathscr{D}_0$, $\|f\|_{\mathscr{H}_1} < \infty$ і $\|F\|_{\mathscr{F}} < \infty$ вектори $\varphi^\pm(f)F \in \mathscr{D}_0$. Але з рівностей (19.21),(19.22) видно, що оператори $\varphi^\pm(f)$ є необмеженими операторами в $\mathscr{F}_B$.

У цьому легко переконатися, якщо записати аналогічно (19.18), (19.19) вектор-стовпчики $\varphi^+(f)F$ і $\varphi^-(f)F$ для F, який не є фінітним. Тоді завжди можна вибрати вектор $F \in \mathscr{F}_B$ таким чином, що хоч і $\|F\|_{\mathscr{F}_B} < \infty$, але $\|\varphi^\pm(f)F\|_{\mathscr{F}_B} = +\infty$ внаслідок множників $\sqrt{N}$, що з'являться в N-й компоненті векторів $\varphi^\pm(f)F$. Отже, оператори, що задовольняють переставні співвідношення (19.11) є необмеженими операторами з *областю визначення*

$$\mathscr{D}(\varphi^+(f)) \;=\; \mathscr{D}(\varphi^-(f)) \;=\; \mathscr{D}_0.$$

Поле φ є дійсне поле, а отже, для дійсного $f \in \mathscr{D}$ оператор $\varphi(f) = \varphi^+(f) + \varphi^-(f)$ повинен бути самоспряженим оператором у просторі $\mathscr{F}_B$. Покажемо спершу, що він є симетричним (означення див., наприклад, [76], § VIII.2) оператором у $\mathscr{F}_B$. Для цього досить показати, що для будь-яких G, $F \in \mathscr{D}_0$ виконується рівність

$$(F, \varphi^+(f)G) = (\varphi^-(f)F, G). \tag{19.23}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}
(F, \varphi^+(f)G) \;&= \sum_{N=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} (d\mathbf{p})^N\, \overline{F_N(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_N)}\, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} f(\mathbf{p}_j) \times \\
&\quad \times G_{N-1}(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\mathbf{p}_N) = \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} (d\mathbf{p})^N\, \overline{\sqrt{N} f(\mathbf{p}_N) F_N(\mathbf{p}_N,\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{N-1})} \times \\
&\quad \times G_{N-1}(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{N-1}) = \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} (d\mathbf{p})^N\, \overline{\sqrt{N+1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) F_{N+1}(\mathbf{p},\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_N)} \times \\
&\quad \times G_N(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_N) = (\varphi^-(f)F, G).
\end{aligned}$$

У першому рядку сума починається з $N = 1$, оскільки $(\varphi^+(f)G)_0 = 0$ (див. (19.18)).

При доведенні використано симетричність функцій $F_N(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_N)$ і $G_N(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_N)$.

19.2.3. Вільний вакуум. Циклічність вакууму. Множина експоненціальних векторів

Вакуумом для системи вільних невзаємодіючих частинок є, очевидно, стан без частинок. Вектор такого стану повинен бути власним вектором оператора енергії і оператора числа частинок із власним значенням нуль. Оператор енергії виражається через оператори народження і знищення формулою

$$P^0 = \int d\mathbf{k}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\,\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}). \tag{19.24}$$

Користуючись формулами (19.12),(19.12') легко обчислити компоненти вектора P^0F для $F \in \mathscr{F}_B$:

$$(P^0F)_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N) = \left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m^2}\right) F_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N). \tag{19.25}$$

З формул (19.24),(19.25) можна зрозуміти, що оператор числа частинок має вигляд

$$\widehat{N} = \int d\mathbf{k}\,\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k})$$

і діє на вектор $F \in \mathscr{F}_B$ таким чином:

$$(\widehat{N}F)_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N) = NF_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N). \tag{19.26}$$

Легко переконатися з виразу (19.26), що оператор $\widehat{N}$, так само, як і оператори $\varphi^{\pm}(f)$, визначений на всюдищільній множині фінітних векторів $\mathscr{D}_0$ і залишає цю множину інваріантною, тобто $\widehat{N}\mathscr{D}_0 = \mathscr{D}_0$. Оператор енергії P^0, визначений не на всіх векторах з $\mathscr{D}_0$, а тільки на таких, для яких права частина (19.25) належить до простору $\mathscr{F}_N$, тобто є інтегровною за модулем у квадраті. Це буде виконуватись, якщо для $F_N \in \mathscr{F}_N$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} (dp)^N(\mathbf{p}_j^2 + m^2)\,|F_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N)|^2 < \infty \quad \text{для } j = 1,\ldots,N.$$

Звідси видно, що P^0 можна визначити на всіх векторах з $\mathscr{D}_0$, які мають компоненти $F_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N)$ із обмеженим носієм у просторі $\mathbb{R}^3$ за кожною змінною $\mathbf{p}_j$, тобто на множині

$$\mathscr{D}_0^{\mathrm{loc}} := \{F \in \mathscr{D}_0 \,|\, F_N(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N) = 0, \ \text{ якщо } |\mathbf{p}_j| \geq B_j,\ j = \overline{1,N},\ N = \overline{1,N_0}\}. \tag{19.27}$$

Для кожного вектора F є свої константи B_j і N_0.

Множина $\mathscr{D}_0^{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{D}_0$ теж є всюдищільною в $\mathscr{F}_B$.

Користуючись формулами (19.12), легко перевірити (задача 19.1), що для F, G є $\mathscr{D}_0^{loc}$

$$(P^0F, G) = (F, P^0G), \tag{19.28}$$

і

$$(P^0F, F) \geq 0. \tag{19.29}$$

Тобто P^0 є симетричним щільно заданим невід'ємним оператором у просторі $\mathscr{F}$. З виразів (19.28),(19.29) тривіально випливає суттєво-самоспряженість оператора P^0 (див., наприклад, [76], § VIII.2).

З формул (19.25), (19.26) легко побачити, що вектори вигляду

$$F^n = \{F_N^{(n)}\}_{N=0}^{\infty}, \quad F_N^{(n)} = \delta_{Nn} F_n(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N),$$

де δ_{Nn} — символ Кронекера, є власними векторами операторів P^0 і $\widehat{N}$:

$$P^0 F^{(n)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m^2} \right) F^{(n)},$$

$$\widehat{N} F^{(n)} = n F^{(n)}.$$

Зрозуміло, що $n = 0$ відповідає вектор $F^{(0)}$. Нормуючи цей вектор на одиницю, отримуємо так званий *вакуумний* вакуум

$$\Omega_0 = \frac{F^{(0)}}{\|F^{(0)}\|_{\mathscr{F}_B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{19.30}$$

Покажемо, що вектор Ω_0 є *циклічним вектором* сім'ї операторів поля $\{\varphi(f), f \in \mathscr{D} \subset \mathscr{F}_1\}$. За означенням (див., наприклад, [76], § VII.2) це означає, що лінійна оболонка векторів

$$\{\varphi(f_1) \cdots \varphi(f_N)\Omega_0\}, \quad f_j \in \mathscr{D}, \quad j = \overline{1, N} \tag{19.31}$$

є всюдищільною в $\mathscr{F}$.

Дійсно, користуючись формулою (19.12), легко переконатись, що довільний вектор $F = \{F_N\}_{N=0}^{N=N_0} \in \mathscr{D}_0$ записується так:

$$F = \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} (d\mathbf{p})^n F_n(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \varphi^+(\mathbf{p}_1) \cdots \varphi^+(\mathbf{p}_n) \Omega_0. \tag{19.32}$$

З іншого боку, врахувавши, що

$$\varphi(f_j) = \varphi^+(f_j) + \varphi^-(f_j) \quad \text{і} \quad \varphi^-(f_j)\Omega_0 = 0, \tag{19.33}$$

кожний вектор множини (19.31) можна переписати у вигляді (19.32) з

$$F_n(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \sim f_1(\mathbf{p}_1) \cdots f_n(\mathbf{p}_n),$$

і навпаки.

Це означає, що лінійними комбінаціями таких векторів можна наблизити довільний вектор $F \in \mathscr{D}_0$.

На закінчення цього підпункту наведемо ще одну множину векторів, яка має назву множини *експоненціальних векторів* і яка входить до множини так званих аналітичних векторів ([76], п.VIII.5]).

Множина експоненціальних векторів визначається формулою

$$\mathscr{D}_e := \left\{ F \in \mathscr{F}_B \,\middle|\, F = e^f = e^{\varphi^+(f)}\Omega_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^+(f)^n\Omega_0,\ f \in \mathscr{H}_1 \right\}. \qquad (19.34)$$

Легко перевірити безпосередньо з оцінки (19.21), що ряд у правій частині (19.34) збіжний за нормою у просторі Фока. Більше того, дуже легко обчислити норму або скалярний добуток двох векторів типу (19.34):

$$(e^f, e^g) = \left(e^{\varphi^+(f)}\Omega_0, e^{\varphi^+(g)}\Omega_0\right) = \left(\Omega_0, e^{\varphi^-(f)}e^{\varphi^+(g)}\Omega_0\right) = e^{(f,g)} \qquad (19.35)$$

де використано формулу Бейкера–Хаусдорфа (див., наприклад, [51], § 5.10)

$$e^a e^b = e^{a+b+\frac{1}{2}[a,b]_- + \frac{1}{4}[a,[a,b]_-]_- + \cdots}, \qquad (19.36)$$

з якої внаслідок комутаційних співвідношень (19.11) і умови (19.33) легко отримати (19.35).

Так само, як і множина фінітних векторів $\mathscr{D}_0$, множина експоненціальних векторів $\mathscr{D}_e$, а точніше, її лінійна оболонка, є всюди щільною множиною в $\mathscr{F}_B$ (див. [147]).

Цей факт випливає з того, що для вектора e^g з $g = \sum\limits_{j=1}^{n} s_i f_j$ його сильна (у сенсі норми) похідна за $s_1, \ldots, s_n$ при $s_1 = \cdots = s_n = 0$ збігається з вектором $\varphi^+(f_1)\cdots\varphi^+(f_n)\Omega_0$, лінійна оболонка яких є всюдищільною в $\mathscr{F}_B$. А з інших міркувань кожна сильна похідна є границею лінійної комбінації також експоненціальних векторів.

19.2.4. Побудова представлень комутаційних співвідношень для комплексного скалярного поля

Комплексне скалярне поле описує заряджені мезони, а отже, частинки і античастинки мають різні квантові характеристики. Це означає, що в системі будуть два види частинок, і відповідні вектори станів залежатимуть від двох груп змінних. Важливо також зауважити, що система вільних заряджених частинок є, звичайно, деякою математичною ідеалізацією, оскільки нехтуємо далекодійною кулонівською взаємодією, вважаючи, що частинки перебувають на значних відстанях одна від одної.

Отже, вектор простору Фока (19.4) у даному випадку має вигляд

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_{10}(\mathbf{k}_1) \\ F_{01}(\mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ F_{mn}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{19.37}$$

Функції $F_{mn}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ є симетричними за змінними $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m$ і окремо за змінними $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Скалярний добуток двох елементів F і G задається формулою

$$\begin{aligned} (F, G) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \int (d\mathbf{k})^m \int (d\mathbf{p})^n \, \overline{F_{mn}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)} \times \\ &\times \; G_{mn}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n), \end{aligned}$$

а норма –

$$\|F\| = (F, F)^{1/2}.$$

Вектор $F \in \mathscr{F}$, якщо $\|F\| < \infty$.

Оператори народження і знищення частинок та античастинок задовольняють співвідношення (15.13). Запишемо ці співвідношення для операторів $\varphi^{\pm}(f)$, $\overset{*}{\varphi}{}^{\pm}(g)$, де f і g– дійсні функції з простору основних функцій $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$[\varphi^-(f), \overset{*}{\varphi}{}^+(g)]_- = (f, g)_{\mathscr{H}_1} \cdot \mathbb{I}, \tag{19.38}$$

$$[\overset{*}{\varphi}{}^-(f), \varphi^+(g)]_- = (f, g)_{\mathscr{H}_1} \cdot \mathbb{I}. \tag{19.39}$$

Співвідношення (19.38),19.39) будуть виконуватись на множині фінітних векторів $\mathscr{D}_0$, якщо оператори $\overset{*}{\varphi}{}^+(g)$ і $\varphi^-(f)$ будуть діяти на стовпчик (19.37) за правилами (19.16) відносно першої групи змінних $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m$, а оператори $\varphi^+(f)$, $\overset{*}{\varphi}{}^-(g)$ за тими самими правилами (19.16) відносно другої групи змінних $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Власними векторами операторів енергії P^0 і заряду $\widehat{Q}$ будуть вектори виду

$$F^{(M,N)} = \left(F^{(M,N)}_{mn}\right)_{m,n=0}^{\infty}, \quad F^{(M,N)}_{mn} = \delta_{Mm}\delta_{Nn} F_{mn}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_m; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),$$

де δ_{Mm}, δ_{Nn} — символи Кронекера і

$$P^0 F^{M,N} = \left(\sum_{j=1}^{M} k_j^0 + \sum_{k=1}^{N} p_k^0\right) F^{M,N}, \; k_j^0 = \sqrt{\mathbf{k}_j^2 + m^2}, \; p_k^0 = \sqrt{\mathbf{p}_k^2 + m^2},$$

$$\widehat{Q} F^{(M,N)} = (qM - qN) F^{(M,N)}.$$

Це означає, що в системі є M частинок із зарядом $(+q)$ і N частинок із зарядом $(-q)$.

19.2.5. Побудова представлень комутаційних співвідношень у конфігураційному просторі. Релятивістська інваріантність вільного поля

Для простоти обмежимося розглядом дійсного скалярного поля. Комутатор операторно-значних узагальнених функцій $\varphi^+(x)$ і $\varphi^-(y)$ було обчислено у § 15 (п. 15.1):

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(y)]_- = \frac{1}{i} D^-(x-y).$$

У § 4 (п. 4.6) були побудовані одночастинкові та N-частинковий гільбертові простори, що відповідали класичним розв'язкам рівняння Клейна–Гордона–Фока. У координатному представленні вони будувались за допомогою унітарного фур'є-перетворення (4.47), якщо скалярний добуток задавався формулою (4.48). У випадку квантового поля побудова $\mathscr{H}_1$ і $\mathscr{H}_N \equiv \mathscr{F}_N$ зберігається, а простір Фока $\mathscr{F}_B$ будується згідно з конструкцією, описаною у п. 19.1. Користуючись формулами (19.12) і виразами $\varphi^\pm(x)$ через $\varphi^\pm(\mathbf{k})$ (15.2), а також формулами перетворення Фур'є (4.47) для функцій $F_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$, маємо

$$(\varphi^+(x)F)_N(x_1, \ldots, x_N) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{i} D^-(x_j - x) F_{N-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N), \tag{19.40а}$$

$$(\varphi^-(x)F)_N(x_1, \ldots, x_N) = \sqrt{N+1} F_{N+1}(x, x_1, \ldots, x_N). \tag{19.40б}$$

Формули (19.40) дають можливість перевірити постулат **ПК4** релятивістської інваріантності вільного скалярного поля. Зробимо це у випадку неоднорідних ортохронних перетворень Лоренца:

$$x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda_0^0 > 0, \quad \det \Lambda = +1. \tag{19.41}$$

У даному випадку постулат **ПК4** (рівн. (14.13)) можна переписати у вигляді

$$U_{\Lambda,a} \varphi(x) \overset{*}{U}_{\Lambda,a} = \varphi(\Lambda x + a). \tag{19.42}$$

Дію операторів $U_{\Lambda,a}$ і $\overset{*}{U}_{\Lambda,a}$ визначимо формулами

$$(U_{\Lambda,a}F)_N(x_1, \ldots, x_N) = F_N\left(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_N - a)\right)$$

і

$$\left(\overset{*}{U}_{\Lambda,a}\, F\right)_N (x_1, \ldots, x_N) = F_N(\Lambda x_1 + a, \ldots, \Lambda x_N + a).$$

Тоді

$$\left(U_{\Lambda,a}\varphi^+(x)\, \overset{*}{U}_{\Lambda,a}\, F\right)_N (x_1, \ldots, x_N) = (\varphi^+(x)\, \overset{*}{U}_{\Lambda,a} F)_N (\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_N - a)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{i} D^-(\Lambda^{-1}(x_j - a) - x) \times$$

$$\times \left(\overset{*}{U}_{\Lambda,a} F \right)_{N-1} \left(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_{j-1} - a), \Lambda^{-1}(x_{j+1} - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_N - a) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{i} D^-(x_j - (\Lambda x + a)) F_{N-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N) =$$

$$= (\varphi^+(\Lambda x + a) F)_N(x_1, \ldots, x_N),$$

де використано лоренц-інваріантність функції $D^-(x)$ (див. (15.10)).

Аналогічно перевіряється співвідношення (19.42) для оператора $\varphi^-(x)$.

Щоб отримати закон трансформації полів для довільних перетворень Лоренца, треба доповнити (19.41) формулами перетворень полів за допомогою просторового і часового віддзеркалення $U_{\widehat{P}}$ і $U_{\widehat{T}}$ (див. (18.11) і (18.22)).

Формулу (18.11) легко перевірити так само, як і у формулу (19.42), якщо задати $U_{\widehat{P}}$ формулою

$$(U_{\widehat{P}} F)_N(x_1, \ldots, x_N) = (\eta_\varphi^{\widehat{P}})^N F_N(\Lambda_{i_s} x_1, \ldots, \Lambda_{i_s} x_N). \tag{19.43}$$

Оскільки одночастинкова амплітуда (вектор стану) у конфігураційному просторі має вигляд (див. (4.47))

$$F_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-ik^0 \cdot x^0 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2k^0}} F_1(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \tag{19.44}$$

то легко переконатись, що перетворення $U_{\widehat{P}}$ змінює стан з імпульсом $\mathbf{k}$ і енергією $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ на стан з імпульсом $-\mathbf{k}$ і тією самою енергією k^0. Крім того, завдяки тому, що $U_{\widehat{P}}^2 = \mathbb{1}$, оператор $U_{\widehat{P}} = U_{\widehat{P}}^{-1} = \overset{*}{U}_{\widehat{P}}$, тобто є і унітарним, і самоспряженим.

Якщо ж оператор $U_{\widehat{T}}$ задавати так само, як і вираз (19.43) з Λ_{i_t} замість Λ_{i_s}, то можна побачити з (19.44), що вектор стану з додатною енергією $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ перейде у вектор стану з від'ємною енергією $(-k^0)$.

Щоб запобігти цьому, треба визначити оператор представлення часового віддзеркалення антиунітарним перетворенням:

$$(U_{\widehat{T}} F)_N(x_1, \ldots, x_N) = (\eta_\varphi^{\widehat{T}})^N \, \overline{F_N(\Lambda_{i_t} x_1, \ldots, \Lambda_{i_t} x_N)}.$$

Це перетворення вперше ввів Вігнер [201]. Детальніше про ці перетворення можна прочитати в монографії ([102, гл. 7, § 3]).

19.3. Представлення антикомутаційних співвідношень спінорного поля

19.3.1. Представлення антикомутаційних співвідношень операторів народження і знищення ферміона і антиферміона

Так само, як і у випадку комплексного скалярного поля, будемо мати два види частинок або ж, точніше, частинки і античастинки. Але у спінорному полі, що описує частинки і античастинки зі спіном $1/2$, кожна частинка (античастинка) може мати два значення проекції спіну на напрям руху $\mathbf{k}$ (див. п. 5.3.2). Тому відповідні оператори народження і знищення мають додатковий індекс $s = 1, 2$, що відповідають значенням спіну $-1/2$ і $+1/2$, а їх антикомутаційні співвідношення задаються формулами (16.4). Відповідний вектор простору Фока F матиме структуру (19.37), але з

$$F_{m,n} = F_{m,n}(\nu_1, \mathbf{k}_1; \ldots; \nu_m, \mathbf{k}_m \,|\, \mu_1, \mathbf{p}_1; \ldots; \mu_n, \mathbf{p}_n),$$

а функції F_{mn} будуть антисиметричними відносно перестановки групи змінних ν_i, $\mathbf{k}_i$ з ν_j, $\mathbf{k}_j$, $i \neq j$ і ν_l, $\mathbf{p}_l$ з ν_k, $\mathbf{p}_k$, $l \neq k$.

Скалярний добуток двох векторів F і G виглядатиме

$$(F, G) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{(\nu)_m,(\mu)_n=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{3m}} (d\mathbf{k})^m \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} (d\mathbf{p})^n \times$$

$$\times \overline{F_{m,n}\Big((\nu, \mathbf{k})_m | (\mu, \mathbf{p})_n\Big)} G_{m,n}\Big((\nu, \mathbf{k})_m | (\mu, \mathbf{p})_n\Big).$$

Щоб задовольнити співвідношення (16.4), треба визначити дію операторнозначних узагальнених функцій $\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(\mathbf{k})$ і $a^{\pm}_{s'}(\mathbf{p})$ таким чином:

$$(\overset{*}{a}{}^{+}_{s}(\mathbf{k}) F)_{m,n}\Big((s, \mathbf{k})_m \,|\, (s', \mathbf{p})_n\Big) = \tag{19.45}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \delta_{ss_j} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j) F_{m-1,n}\Big((s, \mathbf{k})_m \setminus \{(s_j, \mathbf{k}_j)\} \,|\, (s', \mathbf{p})_n\Big),$$

$$(a^{-}_{s'}(\mathbf{p}) F)_{m,n}\Big((s, \mathbf{k})_m \,|\, (s', \mathbf{p})_n\Big) = \tag{19.46}$$

$$= \sqrt{m+1}\, F_{m+1,n}\Big((s', \mathbf{p}); (s, \mathbf{k})_m \,|\, (s', \mathbf{p})_n\Big),$$

$$(a^{+}_{s'}(\mathbf{p}) F)_{m,n}\Big((s, \mathbf{k})_m \,|\, (s', \mathbf{p})_n\Big) = \tag{19.47}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{m+j-1} \delta_{s's'_j} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j) F_{m,n-1}\Big((s, \mathbf{k})_m \,|\, (s', \mathbf{p})_n \setminus \{(s'_j, \mathbf{p}_j)\}\Big),$$

$$(\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(\mathbf{k})F)_{m,n}\Big((s,\mathbf{k})_m \,|\, (s',\mathbf{p})_n\Big) = \tag{19.48}$$

$$= \sqrt{n+1}(-1)^m F_{m,n+1}\Big((s,\mathbf{k})_m \,|\, (s,\mathbf{k});(s',\mathbf{p})_n\Big).$$

Додатковий множник $(-1)^m$ у формулах (19.47),(19.48) забезпечує виконання співвідношень антикомутації

$$[\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(\mathbf{p}), \overset{*}{a}{}^{\mp}_{s'}(\mathbf{p}')]_+ = [a^{\pm}_s(p), a^{\mp}_{s'}(\mathbf{p}')]_+ = 0,$$

тобто операторів, що діють на різні групи змінних.

Із співвідношень (19.45) – (19.48) легко отримати дію справжніх операторів $a^{\pm}_s(f)$ і $\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s'}(g)$ для $f,g \in \mathscr{D}_0$ і переконатися в тому, що вони задовольняють співвідношення

$$[a^{-}_s(f), \overset{*}{a}{}^{+}_{s'}(g)]_+ = [\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f), a^{+}_{s'}(g)]_+ = \delta_{ss'}(f,g), \tag{19.49}$$

$$[\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(f), \overset{*}{a}{}^{\mp}_{s'}(g)]_+ = [a^{\pm}_s(f), a^{\mp}_{s'}(g)]_+ = 0. \tag{19.50}$$

Так само, як і у випадку скалярного поля, ці оператори визначаються на множині всюдищільних векторів $\mathscr{D}_0$ і при кожному $s = 1, 2$, норми векторів $\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(f)F$ та $a^{\pm}_s(f)F$ для $F \in \mathscr{D}_0$ задовольняють нерівності (19.21),(19.22). Але ці оцінки є досить грубими. Виявляється, що оператори ферміонних полів унаслідок антикомутаційних співвідношень (19.49),(19.50) є обмеженими операторами. Цей результат можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 19.1. [6] *Оператори $\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(f)$ і $a^{\pm}_s(f)$ є обмеженими операторами в $\mathscr{F}_F$, і їх норми задовольняють співвідношення*

$$\|\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(f)\|_{\mathscr{F}_F} = \|a^{\pm}_s(f)\|_{\mathscr{F}_F} = \|f\|_{\mathscr{H}_1}. \tag{19.51}$$

Доведення. Доведемо теорему для операторів $\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)$ і $a^{+}_s(f)$. Покладемо в (19.49),(19.50) $s = s'$, $f = g$ і запишемо антикомутаційні співвідношення між цими операторами:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)a^{+}_s(f) + a^{+}_s(f)\,\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f) = \|f\|^2,\\
&\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)\,\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f) + \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)\,\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f) = 0,\\
&a^{+}_s(f)a^{+}_s(f) + a^{+}_s(f)a^{+}_s(f) = 0.
\end{aligned} \tag{19.52}$$

Два останні співвідношення означають:

$$\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)^2 = a^{+}_s(f)^2 = 0,$$

що, фактично, виражає принцип Паулі в операторній формі.

Розглянемо оператори

$$\widehat{P}_s = \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)a^{+}_{s}(f) \quad \text{і} \quad \widehat{Q}_s = a^{+}_{s}(f)\,\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f).$$

Оператори $\widehat{P}_s$ і $\widehat{Q}_s$ визначені і симетричні на $\mathscr{D}_0$. Використовуючи вираз (19.52), маємо

$$\widehat{P}_s^2 = \overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)a^{+}_{s}(f)\,\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)a^{+}_{s}(f) = -\,\overset{*}{a}{}^{-}_{s}(f)^2 a^{+}_{s}(f)^2 + \|f\|^2\widehat{P}_s,$$

тобто

$$\widehat{P}_s^2 = \|f\|^2\widehat{P}_s, \tag{19.53}$$

і так само отримуємо

$$\widehat{Q}_s^2 = \|f\|^2\widehat{Q}_s,$$

а також

$$\widehat{P}_s + \widehat{Q}_s = \|f\|^2_{\mathscr{H}_1}\cdot\mathbb{1}, \quad \widehat{P}_s\widehat{Q}_s = \widehat{Q}_s\widehat{P}_s = 0,$$

де $\mathbb{1}$ – одиничний оператор.

Із цих співвідношень і симетричності операторів $\widehat{P}_s$ і $\widehat{Q}_s$ для довільного $F \in \mathscr{D}_0$ випливає, що

$$\|\widehat{P}F\|^2_{\mathscr{F}_F} + \|\widehat{Q}_sF\|^2_{\mathscr{F}_F} = \|f\|^4_{\mathscr{H}_1}\|F\|^2_{\mathscr{F}_F}.$$

Звідси маємо, що

$$\|\widehat{P}_sF\|_{\mathscr{F}_F} \le \|f\|^2_{\mathscr{H}_1}\|F\|_{\mathscr{F}_F} \tag{19.54}$$

і

$$\|\widehat{Q}_sF\|_{\mathscr{F}_F} \le \|f\|^2_{\mathscr{H}_1}\|F\|^2_{\mathscr{F}_F}. \tag{19.55}$$

Внаслідок того, що $\mathscr{D}_0$ є всюдищільною в $\mathscr{F}_F$, то

$$\|\widehat{P}_s\|_{\mathscr{F}_F} = \|f\|^2_{\mathscr{H}_1} \quad \text{і} \quad \|\widehat{Q}_s\|_{\mathscr{F}_F} = \|f\|^2_{\mathscr{H}_1}. \tag{19.56}$$

Рівність у (19.54) досягається на векторі $F = \Omega_0$, а в (19.55)– на $F = a^{+}_{s}(f)\Omega_0$.

Із симетричності $\widehat{P}_s$ і $\widehat{Q}_s$ і їх обмеженості випливає самоспряженість операторів $\widehat{P}$ і $\widehat{Q}$.

Із самоспряженості та рівностей (19.56) і (19.53) маємо

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\mathscr{H}_1} &= \|\widehat{P}_s\|_{\mathscr{F}_F} = \sup_{\|F\|_{\mathscr{F}_F}=1}(\widehat{P}_sF,\widehat{P}_sF)^{1/2}_{\mathscr{F}_F} = \|f\|_{\mathscr{H}_1}\sup_{\|F\|_{\mathscr{F}_F}=1}(\widehat{P}_sF,F)^{1/2} = \\ &= \|f\|_{\mathscr{H}_1}\sup_{\|F\|_{\mathscr{F}_F}}(a^{+}_{s}(f)F,a^{+}_{s}(f)F) = \|f\|_{\mathscr{H}_1}\|a^{+}_{s}(f)\|^2_{\mathscr{F}_F},\end{aligned}$$

Звідси випливають рівності (19.51) для оператора $a^{+}_{s}(f)$ і для операторів $a^{-}_{s}(f)$, $\overset{*}{a}{}^{\pm}_{s}(f)$.

Теорема доведена. □

Зауваження 19.1. *Факт обмеженості фермі-операторів має дуже глибокий зміст. У розділі VI буде показано, що обмеженість згладжених операторів фермі-поля дає можливість довести збіжність рядів теорії збурень для регуляризованої матриці розсіяння для моделей типу моделі Юкави або в квантовій електродинаміці.*

19.3.2. Представлення антикомутаційних співвідношень у конфігураційному просторі

У конфігураційному просторі 4-компонентні оператори спінори $\psi(x)$ і $\overset{*}{\psi}(x)$ (або $\bar{\psi}(x) = \overset{*}{\psi}(x)\gamma^0$) виражаються через оператори $a_s^{\pm}(\mathbf{k})$ і $\overset{*}{a}{}_s^{\pm}(\mathbf{k})$ співвідношеннями (16.2) і (16.3), а антикомутаційні співвідношення їх додатньо- і від'ємно-частотних частин мають вигляд (див. також (16.5)):

$$[\psi_\alpha^{\mp}(x), \bar{\psi}_\beta^{\pm}(y)] = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}^{\mp}(x-y). \tag{19.57}$$

У підпункті 5.5.1 було побудовано гільбертів простір станів класичних частинок і античастинок. Цей простір будувався на від'ємно-частотних (розв'язки з додатньою енергією) розв'язках рівнянь Дірака спіноров $\psi(x)$ і $\psi^c(x)$, тобто за повною системою розв'язків $\{\psi_i^-(x)\}$ і $\{\psi_j^{c,-}\}$ (тут i, j – це не індекси спіноров, а їх номери безмежного числа розв'язків, тобто i, $j \in \mathbb{N}$). Їх зв'язок із відповідними фур'є-перетвореннями задається формулами (5.79) і (5.103). Тому, так само, як і у скалярному випадку, вектори станів фоківського простору $\mathscr{F}_F$ у координатному представленні виражаються через відповідні вектори в імпульсному просторі таким чином:

$$F_{m,n}\Big((\alpha,x)_m \,|\, (\beta,y)_n\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2(m+n)}} \int (d\mathbf{k})^m \int (d\mathbf{p})^n e^{-i\sum_{i=1}^m k_i\cdot x_i - i\sum_{j=1}^n p_j\cdot y_j} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^m \sum_{s_i=1}^2 v_{\alpha_i}^{s_i,-}(\mathbf{k}_i) \prod_{j=1}^n \sum_{s'_j=1}^2 v_{\beta_j}^{c,s'_j,-}(\mathbf{p}_s) F_{m,n}\Big((s,\mathbf{k})_m \,|\, (s',\mathbf{p})_n\Big). \tag{19.58}$$

Домножимо формули (19.45)–(19.48) на відповідні спінори $\bar{v}$, v і v^c. Тоді згідно з означеннями (5.79), (5.80), (19.58), формулами (5.84),(5.85), (5.103),(5.104) та означеннями функцій $S^{\pm}(x)$ (див. (16.6), (16.8),(16.9)), отримуємо правила дії символів $\psi^{\pm}(x)$, $\bar{\psi}^{\pm}(y)$:

$$(\bar{\psi}_\alpha^+(x)F)_{m,n}\Big((\alpha,x)_m \,|\, (\beta,y)_n\Big) = \tag{19.59}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{1}{i} S_{\alpha_j\alpha}^{(-)}(x_j - x) F_{m-1,n}\Big((\alpha,x)_m \setminus \{(\alpha_j,x_j)\} \,|\, (\beta,y)_n\Big),$$

$$(\psi_{\alpha'}^-(x')F)_{m,n}\Big((\alpha,x)_m \,|\, (\beta,y)_n\Big) = \tag{19.60}$$

$$= \sqrt{m+1} F_{m+1,n}\Big((\alpha',x';\alpha_1);(\alpha,x)_m \setminus \{(\alpha_j,x_j)\} \,|\, (\beta,y)_n\Big),$$

$$(\psi_\beta^+(x)F)_{m,n}\Big((\alpha,x)_m \,|\, (\beta,y)_n\Big) = \tag{19.61}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{m+k-1} \frac{1}{i} S_{\beta\alpha'}^+(x - y_k) C_{\alpha'\beta_k} F_{m,n-1}\Big((\alpha,x)_m \,|\, (\beta,y)_n \setminus \{(\beta_k,y_k)\}\Big),$$

$$(\bar{\psi}^{-}_{\beta'}(x')F)_{m,n}\Big((\alpha,x)_m\,|\,(\beta,y)_n\Big) = \tag{19.62}$$

$$= (-1)^m\sqrt{n+1}\;C_{\beta'\beta''}F_{m,n+1}\Big((\alpha,x)_m\,|\,(\beta'',x');(\beta,y)_n\Big).$$

Нагадаємо: як і раніше, за індексами, що повторюються, відбувається сумування (тобто в (19.61)—за α' і в (19.62)–за β'').

З (19.59),(19.60) безпосередньо випливає вираз(19.57) (верхній значок), а з (19.61),(19.62)—відповідно (19.57) (нижній значок), з урахуванням формул ($C=-C^T$) і ($C^2=1$). Множник $(-1)^m$ забезпечує рівність нулю всіх останніх антикомутаторів.

На завершення перевіримо достовірність постулату **ПК4**, тобто перевіримо закон перетворення (14.13). З міркувань узгодженості дія операторів U_L і $\overset{*}{U}_L$ у просторі Фока залишається такою ж, як і у класичному випадку, тобто задається формулою (4.49).

Умову інваріантності (14.13) для спінора $\psi(x)$ перепишемо у вигляді

$$\overset{*}{U}_L\,\psi_\alpha(x)U_L = S(\Lambda)_{\alpha\alpha'}\psi_{\alpha'}(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{19.63}$$

Перевіримо (19.63) окремо для $\psi^+_\alpha(x)$ і $\psi^-_\alpha(x)$ для ортохронних перетворень Лоренца.

Користуючись формулами (4.49) і (19.61), легко побачити: (19.63) справджується для оператора $\psi^+_\alpha(x)$, якщо виконується рівність

$$S(\Lambda)S^+(\Lambda^{-1}(x-a)-y_k)C = S^+(x-a-\Lambda y_k)C\,S^{-1}(\Lambda)^T,$$

або ж, враховуючи властивість (5.90), маємо

$$S(\Lambda)S^+(\Lambda^{-1}(x-a)-y_k) = S^+(x-a-\Lambda y_k)\,S(\Lambda). \tag{19.64}$$

Використовуючи перетворення Фур'є (16.9), бачимо: (19.64) є наслідком тотожності

$$S(\Lambda)\widehat{k} = \widehat{\Lambda k}\,S(\Lambda),$$

що є справедливим внаслідок (5.22) і (1.12).

Для $\psi^-_\alpha(x)$ рівність (19.63) майже тривіальна. Закон перетворення (14.13) для полів $\bar{\psi}(x)$ та $\psi^c(x)$ перевіряється аналогічно, якщо врахувати рівність

$$C^{-1}S^+(x)C = -S^-(-x)^T,$$

що є наслідком (5.95) і (5.36).

19.4. Простір станів вільного електромагнітного поля

Якщо не звертати увагу на труднощі, пов'язані із додатньою визначеністю оператора енергії P^0, то побудова простору Фока для системи, що складається з

довільного числа часових, поздовжніх та поперечних фотонів, буде такою самою, як і в пункті 19.1. Вектор N-частинкового гільбертового простору $\mathscr{F}_N$ виглядатиме

$$F_N = F_N(\mu_1, \mathbf{k}_1; \ldots, \mu_N, \mathbf{k}_N), \quad N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3,$$

де N_0 — кількість часових фотонів (з $\mu_j = 0$), N_3 — кількість поздовжніх фотонів $\mu_j = 3$, а N_1 і N_2 — кількість фотонів із поперечною поляризацією (правою та лівою).

Скалярний добуток у просторі $\mathscr{F} := \mathscr{F}_E$ матиме вигляд

$$\begin{aligned}(F, G) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_N} \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} d\mathbf{k} \cdots d\mathbf{k}_N \times \\ &\times \overline{F_N(\mu_1, \mathbf{k}_1; \ldots; \mu_N, \mathbf{k}_N)}\, G_N(\mu_1, \mathbf{k}_1; \ldots; \mu_N, \mathbf{k}_N).\end{aligned}$$

Легко перевірити безпосереднім обчисленням: дію операторів $a^{\pm}_{\mu}(\mathbf{k})$, що задовольняють комутаційні співвідношення (17.26), можна визначити формулами

$$(a^{-}_{\mu}(\mathbf{k})F)_N(\mu, \mathbf{k}_i, \ldots, \mu_N, \mathbf{k}_N) = \sqrt{N+1} F_{N+1}(\mu, \mathbf{k}, \mu_1 \mathbf{k}_1; \ldots; \mu_N, \mathbf{k}_N), \qquad (19.65)$$

$$\begin{aligned}(a^{+}_{\mu}(\mathbf{k})F)_N(\mu, \mathbf{k}_i; \ldots; \mu_N, \mathbf{k}_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (-g^{\mu\mu_j}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j) \times \\ \times F_{N-1}(\mu_1, \mathbf{k}_1; \ldots; \mu_{j-1}, \mathbf{k}_{j-1}; \mu_{j+1}, \mathbf{k}_{j+1}; \ldots; \mu_N, \mathbf{k}_N). \qquad (19.66)\end{aligned}$$

Наступним кроком згідно з формалізмом Гупти–Блейлера (див. п. 17.2.2) є побудова у просторі $\mathscr{F}_E$ множини фізично допустимих векторів $\mathscr{P}$. Визначимо оператор η (див. (17.31)) за формулою

$$(\eta F)_N(\mu_1, \mathbf{k}_1; \ldots; \mu_N, \mathbf{k}_N) = \prod_{j=1}^{N} (-g^{\mu_j \mu'_j}) F_N(\mu'_1, \mathbf{k}_1; \ldots; \mu'_N, \mathbf{k}_N). \qquad (19.67)$$

Можна перевірити, що η задовольняє умови (17.31), а простір $\mathscr{F}_E$ відносно білінійної форми (17.32) перетворюється у гільбертів простір з індефінітною метрикою.

Побудуємо тепер множину фізично допустимих векторів $\mathscr{P}$, яку було визначено формулою (17.36). З означення операторів знищення випливає, що

$$a^{-}_{\mu}(\mathbf{k})\Omega_0 = 0.$$

Отже, $\Omega_0 \in \mathscr{P}$. Тепер зрозуміло, що множину $\mathscr{P}$ можна побудувати як лінійну оболонку векторів вигляду

$$b^{+}_1(f_1) \ \ldots \ b^{+}_n(f_n)\Omega_0,$$

де $b_j^+(f_j) = \int f_i(\mathbf{k}) b_j^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, $f_j(\mathbf{k}) \in \mathscr{H}_1$, а оператори $b_j^+(\mathbf{k})$ — це довільні оператори народження, що комутують з операторами $L^-(\mathbf{k})$ (див. (17.35)). З комутаційних співвідношень (17.26) випливає, що такими операторами є $a_1^+(\mathbf{k})$ і $a_2^+(\mathbf{k})$. Але з тих же співвідношень (17.26) легко обчислити, що оператори $L^-(\mathbf{k}) = k^\mu A_\mu^-(\mathbf{k})$ також комутують із операторами $L^+(\mathbf{p}) = p^\mu A_\mu^+(\mathbf{p})$. Дійсно, враховуючи вираз (17.24) і те, що $p^2 = p^{0^2} - \mathbf{p}^2 = 0$, маємо

$$[L^-(\mathbf{k}), L^+(\mathbf{p})]_- = k^\mu p^\nu [A_\mu^-(\mathbf{k}), A_\nu^+(\mathbf{p})] = p^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = 0.$$

Це дає змогу побудувати вектор $F \in \mathscr{P}$ у вигляді (див. (19.32))

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n_0,n_1,n_2=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_0! n_1! n_2!}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3(n_0+n_1+n_2)}} (d\mathbf{k})^{n_0} (d\mathbf{p})^{n_1} (d\mathbf{q})^{n_2} \times \\ &\times F_{n_0,n_1,n_2}(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_{n_0}, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n_1}, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{n_2}) \times \\ &\times \prod_{i=1}^{n_0} \big(L^+(\mathbf{k}_i)\big) \prod_{j=1}^{n_1} a_1^+(\mathbf{p}_j) \prod_{k=1}^{n_2} a_2^+(\mathbf{q}_k) \Omega_0. \end{aligned} \tag{19.68}$$

Користуючись співвідношеннями (17.26),(17.30) та (17.31), видно, що для векторів (19.68), для яких $F_{0,n_1,n_2} \equiv 0$, а $F_{n_0,n_1,n_2} \not\equiv 0$ при $n_0 \neq 0$

$$\langle F, F \rangle = (F, \eta F) = 0,$$

а для векторів (19.68), для яких $F_{n_0,n_1,n_2} = 0$ для всіх $n_0 \geq 1$,

$$\langle F, F \rangle = (F, \eta F) = (F, F) > 0.$$

Тобто для векторів фізично допустимих станів, що відповідають лише фотонам із поперечною поляризацією, білінійна форма (17.32) тотожна скалярному добутку у просторі $\mathscr{F}_E$, а значить

$$\langle F, F \rangle = \|F\|^2 > 0. \tag{19.69}$$

Тоді для довільного вектора $\mathscr{F} \in \mathscr{P}$ маємо

$$\langle F, F \rangle = (F, \eta F) =$$

$$= \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} (d\mathbf{p})^{n_1} (d\mathbf{q})^{n_2} \, |F_{0,n_1,n_2}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n_1}, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{n_2})|^2 > 0.$$

Отже, для векторів із $\mathscr{P}$ зберігається імовірнісна інтерпретація, а також виконується рівність (17.40).

Зауваження 19.2. *Позначимо через $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}$ підмножину векторів-станів, для яких справедлива рівність (19.69), тобто станів, що відповідають тільки фотонам із поперечною поляризацією. З кожним вектором $F \in$*

$\mathscr{P}$ виду (19.68) можна зіставити вектор $F^0 \in \mathscr{P}_0$, покладаючи в (19.68) $F_{n_0,n_1,n_2} = 0$ для всіх $n_0 \geq 1$.

Вектори F і F_0 будемо називати еквівалентними станами тоді,коли вони приводять до одинакових фізичних наслідків. Математично це означає, що середні значення довільного оператора A, що відповідає деякій фізичній величині у станах F і F_0, будуть однакові, тобто

$$\langle F, AF\rangle = \langle F_0, AF_0\rangle, \tag{19.70}$$

щоб довести вираз (19.70), обчислимо спочатку середні від польового оператора $A_\mu(x)$.

Виберемо в (19.68) F_{n_0,n_1,n_2} у вигляді

$$F_{n_0,n_1,n_2}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_{n_0};\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{n_1};\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_{n_2}) =$$

$$= f_{n_0}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_{n_0})F^0_{n_1,n_2}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_{n_1};\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_{n_2}).$$

Тоді, враховуючи означення векторів $F \in \mathscr{P}$ і $F^0 \in \mathscr{P}_0$, легко обчислити, що (задача 19.3)

$$\begin{aligned}\langle F, A^+_\mu(\mathbf{k})F\rangle &= \langle F_0, (A^+_\mu(\mathbf{k}) - k_\mu\,\overline{f_1(\mathbf{k})})F_0\rangle,\\ \langle F, A^-_\mu(\mathbf{k})F\rangle &= \langle F_0, (A^-_\mu(\mathbf{k}) - k_\mu\, f_1(\mathbf{k}))F_0\rangle.\end{aligned} \tag{19.71}$$

З означень (7.15) випливає, що

$$\langle F, A_\mu(x)F\rangle = \langle F_0, (A_\mu(x) - \partial_\mu f_0(x))F_0\rangle, \tag{19.72}$$

де

$$f_0(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\,\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}}(-\overline{f_1(\mathbf{k})}) + \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\frac{e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{2k^0}}f_1(\mathbf{k}) \tag{19.73}$$

звідки виходить, що

$$\Box f_0(x) = 0.$$

З формули (19.72) безпосередньо маємо

$$\langle F, F_{\mu\nu}(x)F\rangle = \langle F_0, F_{\mu\nu}(x)F_0\rangle, \tag{19.74}$$

тобто середнє значення спостережувальної $F_{\mu\nu}$ у станах F і F_0 є однаковим. Більш загальне твердження (19.70) буде випливати з того, що спостережувані величини є калібрувально інваріантними. Звичайно, безпосередня перевірка рівності (19.70) може виявитись досить громіздкою.

З рівностей (19.71)–(19.74) випливає рівність (19.70), якщо врахувати, що фізично спостережувальні величини залежать від тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$.

На завершення зауважимо, що побудова представлень комутаційних співвідношень (17.25) у координатному просторі Фока виконується аналогічно до скалярного випадку (див. п. 19.2.5).

19.5. Простір чисел заповнення

Інколи буває зручно працювати у так званому базисі чисел заповнення. Це означає, що у просторі станів $\mathscr{H}$ фіксується якийсь базис, пов'язаний із чистими фізичними станами системи. Тоді кожний вектор простору станів можна розкласти за цим базисом, і коефіцієнти розкладу будуть амплітудами імовірності знаходження, наприклад, n_1-частинок у чистому стані Φ_1, n_2-частинок у чистому стані Φ_2 і т.д. Дію операторів у цьому випадку можна задати на коефіцієнтах розкладу.

Щоб продемонструвати, яким чином можна побудувати таку конструкцію, розглянемо найпростіший приклад простору станів вільного скалярного поля, тобто простір Фока $\mathscr{F}_B$. Спершу треба побудувати базис у просторі:

$$\mathscr{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^1) \otimes L^2(\mathbb{R}^1) \otimes L^2(\mathbb{R}^1).$$

Базис у просторі $L^2(\mathbb{R}^1)$ можна вибрати у вигляді послідовності ортонормованих функцій Чебишева – Ерміта

$$\tilde{e}_i(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\ 2^i i!}\right)^{1/2} H_i(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Позначимо тепер базис у $L^2(\mathbb{R}^3)$, побудований за $\tilde{e}_i(t)$, через

$$e_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \tilde{e}_{k^{(1)}}(p^{(1)}) \tilde{e}_{k^{(2)}}(p^{(2)}) \tilde{e}_{k^{(3)}}(p^{(3)}),$$
$$\mathbf{k} = (k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}),\ k^{(i)} = 0, 1, 2, \ldots$$

Щоб побудувати базис у просторі n-частинок, визначимо функції

$$G_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = e_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{p}_1)\ \ldots\ e_{\mathbf{k}_n}(\mathbf{p}_n). \tag{19.75}$$

Система (19.75) є системою ортогональних та нормованих функцій. Але вони не є симетричними, оскільки якщо $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{k}_j$, то після перестановки $\mathbf{p}_i$ з $\mathbf{p}_j$ функції будуть різні.

Побудуємо симетричні функції за допомогою *оператора симетризації* $\widehat{S}$:

$$\begin{aligned} G^S_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= \widehat{S}\, G_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} G_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}(\mathbf{p}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{p}_{\pi(n)}), \end{aligned} \tag{19.76}$$

де S_n — група перестановок з n-елементів. Але тепер ці функції не будуть нормовані. Щоб зробити таку послідовність функцій нормованою, впорядкуємо їх таким чином.

Перш за все впорядкуємо вектори базису одночастинкового простору $\mathscr{F}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$. Тобто, нехай

$$\{e_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\} := \{e_j(\mathbf{p})\}_{j=1}^{\infty}.$$

Наприклад, $e_{0,0,0}(\mathbf{p}) := e_1(\mathbf{p})$, $e_{1,0,0}(\mathbf{p}) := e_2(\mathbf{p})$, $e_{0,1,0}(\mathbf{p}) := e_3(\mathbf{p})$, і т.д.

Зрозуміло, що у побудові функції (19.76) однакові базисні вектори можуть повторюватись якесь число разів. Нехай, наприклад, вектор $e_1(\mathbf{p})$ повторюється n_1-число разів, $e_2(\mathbf{p})$ повторюється n_2-число разів і т.д. Ясно, що $n_1 + n_2 + \cdots + n_j + \cdots = n$, а $n_j = 0, 1, 2, \ldots$. Позначимо через $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_j \ldots)$ — фінітну послідовність, тобто лише скінченне число чисел n_j, відмінне від нуля.

Для заданого $\mathbf{n}$ визначимо вектор

$$\begin{aligned} G^S_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) &= G^S_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, \ldots}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \\ &= \widehat{S}(e_1(\mathbf{p}_1) \ldots e_1(\mathbf{p}_{n_1}) e_2(\mathbf{p}_{n_1+1}) \ldots e_2(\mathbf{p}_{n_1+n_2}) \ldots). \end{aligned}$$

Базис у n-частинковому просторі визначимо системою векторів

$$e_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = N_{\mathbf{n}} G^S_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n),$$

де нормувальний множник $N_{\mathbf{n}}$ визначається з умови

$$(e_{\mathbf{n}}, e_{\mathbf{n}}) = 1. \tag{19.77}$$

З виразу (19.77) видно: якщо кратність векторів $e_i(\mathbf{p})$ є одиниця (тобто ($n_i = 1$)), тоді маємо

$$(G^S_{\mathbf{n}}, G^S_{\mathbf{n}}) = (n!)^{-1}, \tag{19.78}$$

оскільки внески доданків суми за π у (19.76) у ліву частину (19.78), що відповідають різним перестановкам, перетворюються у нуль внаслідок умов ортогональності

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Отже, ненульові будуть тільки $n!$ доданків, що відповідають однаковій перестановці π. Якщо ж внесок у $G^S_{\mathbf{n}}$ робитьn_1 векторів $e_1(\mathbf{p})$, n_2 векторів $e_2(\mathbf{p})$ і т.д., то перестановки імпульсів у групі векторів $e_1(\mathbf{p})$, $e_2(\mathbf{p})$ і т.д. не будуть приводити до ортогональних членів, оскільки фактично не будуть змінювати функції $G_{\mathbf{n}}$. Таких однакових членів буде $n_1!n_2! \ldots n_k! \ldots$, а в сумі залишиться

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \ldots n_k! \ldots}$$

ортогональних один до одного доданків.

Отже, у цьому випадку отримаємо

$$(G^S_{\mathbf{n}}, G^S_{\mathbf{n}}) = \frac{n_1! \ldots n_k! \ldots}{n!},$$

тобто

$$N_{\mathbf{n}} = \left(\frac{n!}{n_1! \ldots n_k! \ldots} \right)^{1/2}.$$

Тоді остаточно *базисом* у $\mathscr{F}_B$ є послідовність векторів вигляду

$$\hat{e}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Розклад довільного вектора $F \in \mathscr{F}_B$ за базисом $\{\hat{e}_{\mathbf{n}}\}$ запишеться у вигляді

$$F = \sum_{\{\mathbf{n}\}} f_{\mathbf{n}} \hat{e}_{\mathbf{n}} = \sum_{n_1, n_2, \ldots} f(n_1, n_2, \ldots) \hat{e}_{\mathbf{n}}. \tag{19.79}$$

Для того, щоб отримати представлення комутаційних співвідношень для операторів, що відповідають операторам $\varphi^{\pm}(\mathbf{p})$ і діють у просторі коефіцієнтів розкладу $f(n_1, n_2, \ldots)$, розкладемо оператори $\varphi^{\pm}(\mathbf{p})$ за одночастинковим базисом $e_i(\mathbf{p})$ $i = 1, 2, \ldots$

$$\varphi^{\pm}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(\mathbf{p}) a_i^{\pm}.$$

Звідси маємо

$$a_i^{\pm} = (\varphi^{\pm}, e_i) = \int d\mathbf{p} \varphi^{\pm}(\mathbf{p}) e_i(\mathbf{p}),$$

а з формул (19.12) легко обчислитити, що

$$a_i^{+} f(n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots) = \sqrt{n_i + 1}\, f(n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots),$$

$$a_i^{-} f(n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots) = \sqrt{n_i}\, f(n_1, n_2, \ldots, n_i - 1, \ldots).$$

Можна перевірити, що

$$[a_i^{-}, a_j^{+}]_{-} = \delta_{ij},$$

$$[a_i^{\pm}, a_j^{\pm}]_{-} = 0.$$

Ці оператори діють у просторі l^2 послідовностей $\hat{f} = \{f_{\mathbf{n}}\}$, таких, що для $\hat{f} \in l^2$

$$\|f\|_{l^2} = \sum_{\{\mathbf{n}\}} |f_{\mathbf{n}}|^2 = \sum_{n_1, n_2, \ldots} |f(n_1, n_2, \ldots)|^2 < \infty.$$

Гільбертів простір l^2 є унітарно еквівалентний простору Фока $\mathscr{F}_B$. Оператор, що вводить таку унітарну еквівалентність, задається формулою (19.79), що здійснює фактично відповідне фур'є-перетворення функцій $F \in \mathscr{F}_B$ у послідовності $\hat{f} \in l^2$.

§ 20. Функції Гріна

Функції Гріна були введені у математичній фізиці як допоміжний об'єкт для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь. Кожна функція Гріна може бути пов'язана зі "своїм" диференціальним оператором D_x і визначається як розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних:

$$D_x G(x) = -\delta(x). \tag{20.1}$$

Такий розв'язок ще називають *фундаментальним розв'язком* диференціального оператора. Він визначений з точністю до довільної функції, яка задовольняє однорідне рівняння (20.1) (див. [21], § 10).

Але у квантовій теорії поля це поняття набуває ширшого значення і, як побачимо нижче, функції Гріна квантованих полів описують причинний зв'язок процесів народження і знищення частинок у різних точках простору Мінковського. Ці функції тісно пов'язані з переставними функціями вільних квантованих полів. У даному параграфі будуть розглянуті функції Гріна, що відповідають вільним, невзаємодіючим полям. Доцільність вивчення функцій Гріна у квантовій теорії поля була вперше запропонована Гелл–Маном і Лоу [25] та Швінгером [103]. Швінгер поклав функції Гріна в основу свого підходу до побудови квантової теорії поля.

20.1. Функції Гріна скалярного поля

У випадку скалярного поля оператор D_x збігається з оператором Клейна–Гордона–Фока (4.6), а рівняння (20.1) набуває вигляду

$$(\Box_x - m^2) G(x) = -\delta(x). \tag{20.2}$$

Так само, як і у п. 4.3, розв'язок зручно шукати у вигляді інтеграла Фур'є

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk\ e^{-ik\cdot x} \tilde{G}(k). \tag{20.3}$$

Використовуючи представлення для δ-функції

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk\ e^{-ik\cdot x},$$

отримаємо рівняння для $\tilde{G}(k)$:

$$(m^2 - k^2)\tilde{G}(k) = 1.$$

Внаслідок того, що у виразі для

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{m^2 - k^2} \tag{20.4}$$

є дві сингулярні точки $k^0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, інтеграл (20.3) (як інтеграл за змінною k^0) має два полюси і може бути обчислений методом *лишків*. Але таке обчислення не є однозначним, оскільки його значення залежить від правила обходу контуром полюсів. Така неоднозначність цілком зрозуміла, через те, що диференціальне рівняння у частинних похідних (20.2) буде мати єдиний розв'язок лише тоді, коли зафіксувати граничні умови.

Важливими для практичного застосування є *запізнювальна* функція Гріна, *випереджувальна* функція Гріна і *причинна функція Грина*.

Запізнювальна функція Гріна визначається граничною умовою

$$G(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0. \tag{20.5}$$

Тоді маємо

$$G(x) = D^{ret}(x) = \theta(x^0)D(x), \tag{20.6}$$

де $D(x)$ – переставна функція Паулі–Йордана, визначена рівнянням (15.8).

Випереджувальна функція Гріна визначається граничною умовою

$$G(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^0 > 0. \tag{20.7}$$

Тоді отримуємо

$$G(x) = D^{adv}(x) = -\theta(-x^0)D(x). \tag{20.8}$$

Формули (20.6) і (20.8) легко отримати з виразу (20.3), підставляючи туди (20.4) і виконуючи інтегрування за змінною k^0 за допомогою теорії лишків (задача 20.1). При цьому правило обходу полюсів у комплексній площині змінної k^0 визначається відповідними граничними умовами (20.5) або (20.7) (див. вказівки до задачі 20.1).

Найбільш важливою функцією Гріна у квантовій теорії поля є *причинна функція Гріна* $D^c(x-y)$. Вона описує причинний зв'язок процесів народження і знищення частинок у різних точках простору часу x та y. Згідно з інтерпретацією операторів $\varphi^{\pm}(x)$ процес народження частинки у точці $x \in \mathbb{M}$ і її знищення у точці $y \in \mathbb{M}$ (тобто $y^0 > x^0$) очевидно описується матричним елементом $(\Omega_0, \varphi^-(y)\varphi^+(x)\Omega_0)$. Тоді з формул (15.5),(15.6) виходить

$$(\Omega_0, \varphi^-(y)\varphi^+(x)\Omega_0) = \frac{1}{i}D^-(y-x) = iD^+(x-y).$$

І навпаки, при $x^0 > y^0$ частинка народжується в точці y, а зникає в точці x, тобто

$$(\Omega_0, \varphi^-(y)\varphi^+(x)\Omega_0) = \frac{1}{i}D^-(x-y).$$

Тому причинний зв'язок цих процесів повинна описувати така функція $D^c(x-y)$, яка є пропорційною $D^+(x-y)$ при $x^0 < y^0$, а при $x^0 > y^0$ пропорційною до $D^-(x-y)$. Легко переконатися, виконуючи прості обчислення,

що такі умови задовольнятиме функція

$$D^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{m^2-k^2-i\varepsilon}\,dk. \tag{20.9}$$

Інтеграл у правій частині треба розуміти як невластивий інтеграл за змінною k^0 з правилами обходу полюсів $k^0 = \pm\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}$. Це правило задається введенням нескінченно малого параметра ε, який зміщує полюси у комплексній площині змінної k^0 у точки $k^0 = \pm\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2} \mp i\varepsilon$. Отже, шлях інтегрування $\mathrm{Im}\ k^0 = 0$ обходить правий полюс зверху, а лівий – знизу. Після взяття інтеграла параметр ε треба спрямувати до нуля. Інколи у визначенні (20.9) замість $i\varepsilon$ вживають просто значок $i0$.

Переконаємося, що вибрана таким чином функція $D^c(x-y)$ задовольняє потрібні вимоги. Розглянемо, наприклад, випадок $x^0 > y^0$. Тоді маємо

$$e^{ik^0(x^0-y^0)} = e^{i(\mathrm{Re}\ k^0)(x^0-y^0)-(\mathrm{Im}\ k^0)(x^0-y^0)}. \tag{20.10}$$

Функція (20.10) спадає, коли $\mathrm{Im}\ k^0 > 0$. Щоб обчислити інтеграл за k^0 в (20.9), треба замкнути контур інтегрування у верхній півплощині $\mathrm{Im}\ k^0 \geq 0$ і визначити значення інтеграла за лівим значенням полюса (задача 20.2). Тоді отримаємо, що

$$D^c(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{2k^0}, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}. \tag{20.11}$$

Отже, при $x^0 > y^0$ причинна функція тотожна $D^-(x-y)$ (див. (15.6). Зовсім аналогічно можна переконатись, що при $x^0 < y^0$

$$D^c(x-y) = -D^+(x-y).$$

Таким чином, остаточно виходить

$$D^c(x-y) = \theta(x^0-y^0)D^-(x-y) - \theta(y^0-x^0)D^+(x-y). \tag{20.12}$$

Зауваження 20.1. *Легко переконатися, що функція $D^c(x-y)$ не визначена при $x^0 = y^0$. При $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ таку невизначеність можна усунути, оскільки при $x^0 \to y^0$ і справа, і зліва границя буде такою ж:*

$$D^c(0,\mathbf{x}-\mathbf{y}) = D^-(0,\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -D^+(0,\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Але при $x = y$ усі три функції є сингулярні, і їх зв'язок з формулою (20.12) вже не можна вважати точним, оскільки фактично це є проблема визначення добутку узагальнених функцій.

20.2. Функції Гріна спінорних, векторних та електромагнітного полів

У § 16 і 17 були обчислені переставні функції спінорних, векторних та електромагнітного полів. З формул (16.7) та (17.12) видно, що вони можуть бути отримані з переставної функції скалярного поля (функції Паулі–Йордана) дією відповідних диференціальних операторів, а функція Гріна електромагнітного поля просто збігається (з точністю до $-g^{\mu\nu}$) з функцією Паулі–Йордана при $m = 0$. З визначення причинної функції Гріна для скалярного поля, очевидно, що і для причинних функцій спінорних, векторних і електромагнітного полів такі співвідношення будуть зберігатись (задача 20.3). Отже, можна просто за означенням визначити причинні функції цих полів формулами

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\rho} D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(m + \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} e^{-ip\cdot x} dp, \tag{20.13}$$

$$D^c_{\mu\nu}(x) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right)}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} e^{-ik\cdot x} dk, \tag{20.14}$$

$$D^{c,}_{\mu\nu}(x - y) = g_{\mu\nu} D^c_0(x - y) = g^{\mu\nu} D^c(x - y) \,|_{m=0} = -\frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 + i\varepsilon} \, dk. \tag{20.15}$$

Функцію $D^c(x)$, а отже, і причинні функції Гріна інших полів можна обчислити точно (див. [13], § 15). Ця узагальнена функція є сингулярною і має такий вигляд:

$$\begin{aligned} D^c(x) &= \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) \{ J_1(m\sqrt{x^2}) - iN_1(m\sqrt{x^2}) \} + \\ &+ \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-x^2}} \theta(-x^2) K_1(m\sqrt{-x^2}), \end{aligned} \tag{20.16}$$

де $J_1(z)$ — функція Бесселя 1-го порядку, $N_1(z)$ — функція Неймана 1-го порядку і $K_1(z)$ — функція Ганкеля уявного аргументу нульового порядку.

Зауваження 20.2. *У даному пункті визначено функції Гріна як фундаментальні розв'язки (див. [21], § 10) диференціальних операторів, які входять у праві частини рівнянь для відповідного поля. Єдиність представлення можна забезпечити, якщо шукати розв'язки рівняння (20.1) у певному класі функцій, накладаючи певні граничні умови. Але внаслідок того, що ці розв'язки є сингулярними узагальненими функціями, їх обчислення за формулами (20.13)–(20.15) треба виконувати з певною обережністю. Наприклад, обчислення функції Гріна скалярного поля $D^c(x - y)$ виконано при $x^0 \neq y^0$, тому при $x^0 = y^0$ ця функція не є визначеною (див. (20.12) і зауваження 20.1), а обчислення функцій (20.13)–(20.15) за допомогою виразу (20.12) можуть привести до появи додаткових доданків, що є узагальненими функціями, зосередженими у точках $x^0 = y^0$.*

Зауваження 20.3. *При обчисленні функцій Гріна векторних полів та електромагнітного поля треба враховувати інваріантність теорії відносно градієнтних перетворень. Така інваріантність дає можливість фіксувати калібровку і отримувати різні рівняння (див., наприклад, (7.6) і (7.9) для електромагнітного поля) для одного й того самого поля. Це означає, що диференціальні оператори, які фігурують у рівнянні (20.1), можуть відрізнятись у визначенні функції Гріна. А це означає, що і вигляд функцій Гріна того самого поля для різних калібровок буде різний. Це питання детальніше обговоримо у розділі VII. Зауважимо лише, що функція Гріна електромагнітного поля $D_0^c(x-y)$ є функцією Гріна оператора д'Аламбера (4.5).*

20.3. Хронологічний добуток і функції Гріна

Для узагальнення поняття функцій Гріна на випадок взаємодіючих полів буде зручно записати функції Гріна вільних полів у вигляді вакуумних середніх *хронологічного добутку* (T-добутку) вільних операторів поля.

Визначимо для цього операцію хронологічного добутку двох операторів поля $u_i(x)$, $u_j(y)$ таким чином:

$$T(u_i(x)u_j(y)) = \begin{cases} u_i(x)u_j(y) & \text{при } x^0 > y^0, \\ \pm u_j(y)u_i(x) & \text{при } x^0 < y^0, \end{cases} \tag{20.17}$$

де знак "+" вибирають, коли обидва оператори є бозе-оператори або ж один бозе-оператор, а другий фермі-оператор, а знак "−",– коли обидва оператори є фермі-оператори. Тоді легко порахувати, що, наприклад, для скалярного дійсного поля

$$(\Omega_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Omega_0) = \begin{cases} (\Omega_0, \varphi(x)\varphi(y)\Omega_0) = \dfrac{1}{i}D^-(x-y) & \text{при } x^0 > y^0, \\ (\Omega_0, \varphi(y)\varphi(x)\Omega_0) = iD^+(x-y) & \text{при } x^0 < y^0. \end{cases}$$

Отже,

$$i(\Omega_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Omega) = D^c(x-y). \tag{20.18}$$

Аналогічні співвідношення можна записати для функцій Гріна спінорних векторних і електромагнітного полів:

$$i(\Omega_0, T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\Omega_0) = S^c_{\alpha\beta}(x-y), \tag{20.19}$$

$$i(\Omega_0, T(V_\mu(x)V_\nu(y))\Omega_0) = D^c_{\mu\nu}(x-y), \tag{20.20}$$

$$i(\Omega_0, T(A_\mu(x)A_\nu(y))\Omega_0) = -g^{\mu\nu}D^c_0(x-y). \tag{20.21}$$

20.4. Теореми Віка

20.4.1. Теорема Віка для нормальних добутків

Поняття нормального добутку було визначено при формулюванні постулату **ПК9**. Для двох операторів вільного поля $u_i(x)$ і $u_j(y)$ звичайний добуток $u_i(x)u_j(y)$ відрізняється від нормального добутку $:u_i(x)u_j(y):$ лише перестановкою операторів $u_i^-(x)$ і $u_j^+(y)$ (див. ф-лу (14.32)). Тобто

$$\begin{aligned} u_i(x)u_j(y) &= :u_i(x)u_j(y): + u_i^-(x)u_j^+(y) - \varepsilon u_j^+(y)u_i^-(x) = \\ &= :u_i(x)u_j(y): + [u_i^-(x), u_j^+(y)]_\pm, \end{aligned} \tag{20.22}$$

де комутатор ($\varepsilon = 1$) береться у випадку, коли хоча б одне з полів є бозе-поле і антикомутатор ($\varepsilon = -1$), коли обидва поля є фермі-полями. Операцію комутації, яка стоїть в останньому доданку виразу (20.22) будемо називати операцією *спарювання* полів $u_i(x)$ і $u_j(y)$, а її результат *спарюванням* і позначати квадратною дужкою внизу. Оскільки вакуумне середнє від нормального добутку завжди перетворюється в нуль, то спарення можна також визначить як вакуумне середнє від звичайного добутку двох операторів. Тобто

$$\underline{\lfloor u_i(x)u_j(y) \rfloor} = [u_i^-(x), u_j^+(y)]_\pm = (\Omega_0, u_i(x)u_j(y)\Omega_0). \tag{20.23}$$

Тепер частинний випадок теореми Віка для двох операторів вільних полів можна записати у вигляді

$$u_1(x_1)u_2(x_2) =: u_1(x_1)u_2(x_2): + \underline{\lfloor u_1(x_1)u_2(x_2) \rfloor}.$$

Щоб сформулювати теорему Віка для добутку довільного числа полів, уведемо поняття нормального добутку зі спареннями. Але спершу зауважимо, що безпосередньо з означення нормального добутку випливає, що

$$:u_1(x_1)\dots u_n(x_n): = (-1)^{p_F} :u_{i_1}(x_{i_1})\dots u_{i_n}(x_{i_n}):,$$

де p_F — кількість перестановок між фермі-операторами при переході від порядку $1, 2, \dots, n$ до порядку $i_1, i_2, \dots, i_n$. Покладемо за означенням

$$:u_1(x_1)\dots \underline{\lfloor u_j(x_j)\dots u_k(x_n) \rfloor} \dots u_n(x_n): = (-1)^{p_F(j,k)} \underline{\lfloor u_j(x_j)u_k(x_k) \rfloor} \times$$

$$\times :u_1(x_1)\dots u_{j-1}(x_{j-1})u_{j+1}(x_{j+1})\dots u_{k-1}(x_{k-1})u_{k+1}(x_{k+1})\dots u(x_n):,$$

де $p_F(j,k)$ — кількість перестановок фермі-операторів при переході від порядку $1, \dots, n$ до порядку $j, k, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$.

Аналогічно визначаються нормальні добутки з довільним числом спарювань.

Теорема 20.1. *Добуток довільного числа операторів вільних квантованих полів дорівнює сумі, в якій кожний доданок дорівнює нормальному добутку*

цих полів із усіма можливими спареннями, включаючи доданок нормального добутку без спарювання:

$$u_1(x_1)\dots u_n(x_n) = :u_1(x_1)\dots u_n(x_n): +$$

$$+\sum_{\{j_1,j_2\}\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{p_F(j_1,j_2)}:\underbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_2}(x_{j_2})}:u_1(x_1)\cdots\widehat{u_{j_1}(x_{j_1})}\cdots\widehat{u_{j_2}(x_{j_2})}\cdots u_n(x_n):+$$

$$+\sum_{\{j_1,\dots,j_4\}\subset\{1,\dots,n\}}\Big[(-1)^{p_F(j_1,j_2,j_3,j_4)}\underbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_2}(x_{j_2})}\,\underbrace{u_{j_3}(x_{j_3})u_{j_4}(x_{j_4})}+$$

$$+(-1)^{p_F(j_1,j_3,j_2,j_4)}\underbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_3}(x_{j_3})}\,\underbrace{u_{j_2}(x_{j_2})u_{j_4}(x_{j_4})}+$$

$$+(-1)^{p_F(j_1,j_4,j_2,j_3)}\underbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_4}(x_{j_4})}\,\underbrace{u_{j_2}(x_{j_2})u_{j_3}(x_{j_3})}\Big]\times$$

$$\times:u_1(x_1)\cdots\widehat{u_{j_1}(x_{j_1})}\cdots\widehat{u_{j_4}(x_{j_4})}\cdots u_n(x_n):+\dots.$$

Тут і далі значок $\widehat{u}$ означає відсутність поля u у відповідному добутку.

Доведення теореми легко виконати методом математичної індукції.

Зауваження 20.1. *Теорема 20.1 залишається справедливою також і у випадку, коли треба привести до нормального вигляду (тобто у вигляді нормального добутку) добуток операторів, кожен з яких є нормальним добутком деякого числа операторів, тобто добуток вигляду*

$$:u_1(x_1)\dots u_{n_1}(x_{n_1}):\,:u_{n_1+1}(x_{n_1+1})\dots u_{n_1+n_2}(x_{n_1+n_2}):\dots$$

$$:u_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}(x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1})\dots u_{n_1+\dots+n_k}(x_{n_1+\dots+n_k}):$$

Але у даному випадку не треба враховувати спарювань операторів, що входять під знак одного і того ж нормального добутку.

Приклад:

$$\begin{aligned}
&:u_1(x_1)u_2(x_2)::u_3(x_3)u_4(x_4):=:u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)u_4(x_4):+\\
&+:\underbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)}\,u_4(x_4):+:\underbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)u_4(x_4)}:+\\
&+:u_1(x_1)\underbrace{u_2(x_2)u_3(x_3)}\,u_4(x_4):+:u_1(x_1)\underbrace{u_2(x_2)u_3(x_3)u_4(x_4)}:+\\
&+:\underbrace{u_1(x_1)\underbrace{u_2(x_2)u_3(x_3)}\underbrace{u_4(x_4)}}:+:\underbrace{u_1(x_1)\underbrace{u_2(x_2)u_3(x_3)}\,u_4(x_4)}:.
\end{aligned}\tag{20.24}$$

На завершення цього підпункту наведемо вигляд спарень для основних полів. З означення (20.23) і співвідношень (15.6), (15.14), (16.5), (17.10), (17.25) маємо:

- для дійсного скалярного поля

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}=\frac{1}{i}D^-(x-y);\tag{20.25}$$

• для комплексного скалярного поля

$$\underbrace{\varphi(x)\overset{*}{\varphi}(y)} = \underbrace{\overset{*}{\varphi}(y)\varphi(x)} = \frac{1}{i}D^-(x-y), \tag{20.26}$$

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \underbrace{\overset{*}{\varphi}(x)\overset{*}{\varphi}(y)} = 0; \tag{20.27}$$

• для спінорних полів

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = \frac{1}{i}S^-_{\alpha\beta}(x-y), \tag{20.28}$$

$$\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = \frac{1}{i}S^+_{\beta\alpha}(y-x), \tag{20.29}$$

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = 0; \tag{20.30}$$

• для векторних полів

$$\underbrace{V_\mu(x)\overset{*}{V}_\nu(y)} = \frac{1}{i}D^-_{\mu\nu}(x-y), \tag{20.31}$$

$$\underbrace{V_\mu(x)V_\nu(y)} = \underbrace{\overset{*}{V}_\mu(x)\ \overset{*}{V}_\nu(y)} = 0; \tag{20.32}$$

• для електромагнітного поля

$$\underbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)} = ig^{\mu\nu}D^-_0(x-y). \tag{20.33}$$

Зауважимо також, що всі спарювання полів різного типу тотожно дорівнюють нулю.

20.4.2. Теорема Віка для хронологічного добутку

У п. 20.3 визначено операцію хронологічного добутку для двох полів. Легко узагальнити формулу (20.17) на випадок довільного числа полів:

$$T(u_1(x_1)\dots u_n(x_n)) = (-1)^{p_F}u_{i_1}(x_{i_1})\dots u_{i_n}(x_{i_n}),\ x^0_{i_1} > x^0_{i_2} > \dots > x^0_{i_n}, \tag{20.34}$$

де p_F — число перестановок фермі-операторів при переході від порядку $1,\dots,n$ до порядку $i_1,\dots,i_n$.

Внаслідок того, що звичайні добутки полів виражаються через нормальні добутки за теоремою 20.1, можна так само переписати T-добутки у вигляді суми нормальних добутків із усіма можливими спарюваннями. Але замість того, щоб уживати звичайне спарювання при фіксованих часових змінних, можна ввести так зване *хронологічне спарювання*. Розглянемо для цього хронологічний добуток двох операторів:

$$T(u_1(x_1)u_2(x_2)) = \begin{cases} u_1(x_1)u_2(x_2), & \text{якщо } x^0_1 > x^0_2, \\ \varepsilon u_2(x_2)u_1(x_1), & \text{якщо } x^0_2 > x^0_1, \end{cases} \tag{20.35}$$

$\varepsilon = +1$ для бозе-полів і $\varepsilon = -1$ для фермі-полів.

За теоремою 20.1

$$u_1(x_1)u_2(x_2) =: u_1(x_1)u_2(x_2) : + \underline{u_1(x_1)u_2(x_2)} \tag{20.36}$$

і

$$\begin{aligned} \varepsilon u_2(x_2)u_1(x_1) &= \varepsilon : u_2(x_2)u_1(x_1) : + \varepsilon \, \underline{u_2(x_2)u_1(x_1)} = \\ &= : u_1(x_1)u_2(x_2) : + \varepsilon \, \underline{u_2(x_2)u_1(x_1)}. \end{aligned} \tag{20.37}$$

Визначимо хронологічне *спарення* (як результат хронологічного спарювання) за формулою

$$\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)} = \begin{cases} \underline{u_1(x_1)u_2(x_2)}, & \text{при } x_1^0 > x_2^0, \\ \varepsilon \, \underline{u_2(x_2)u_1(x_1)}, & \text{при } x_2^0 > x_1^0. \end{cases} \tag{20.38}$$

Тоді з виразів (20.35)–(20.38) легко записати, що

$$T(u_1(x_1)u_2(x_2)) =: u_1(x_1)u_2(x_2) : + \overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)}. \tag{20.39}$$

З означення (20.38) випливає

$$\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)} = \varepsilon \, \overbrace{u_2(x_2)u_1(x_1)}, \tag{20.40}$$

а враховуючи, що середнє за вакуумом від нормального добутку полів дорівнює нулю, отримаємо інше означення спарення

$$\overbrace{u_1(x)u_2(x)} = (\Omega_0, T(u_1(x_1)u_2(x_2))\Omega_0). \tag{20.41}$$

Легко зрозуміти, що теорема 20.1 може бути переформульована на випадок T-добутків.

Теорема 20.2. *T-добуток операторів вільних полів (або їх лінійних комбінацій) дорівнює сумі нормальних добутків цих полів із усіма можливими хронологічними спареннями, включаючи доданок без спарювання*

Тобто

$$\begin{aligned} T(u_1(x_1)\dots u_n(x_n)) &=: u_1(x_1)\dots u_n(x_n) : + \\ &+ \sum_{\{j_1,j_2\}\subset\{1,\dots,n\}} (-1)^{p_F(j_1,j_2)} : \overbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_2}(x_{j_2})} : u_1(x_1)\cdots\widehat{u_{j_1}(x_{j_1})}\cdots\widehat{u_{j_2}(x_{j_2})}\cdots u_n(x_n) :+ \\ &+ \sum_{\{j_1,\dots,j_4\}\subset\{1,\dots,n\}} \Big[(-1)^{p_F(j_1,j_2,j_3,j_4)}\overbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_2}(x_{j_2})}\,\overbrace{u_{j_3}(x_{j_3})u_{j_4}(x_{j_4})} + \\ &+(-1)^{p_F(j_1,j_3,j_2,j_4)}\overbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_3}(x_{j_3})}\,\overbrace{u_{j_2}(x_{j_2})u_{j_4}(x_{j_4})} + \\ &+(-1)^{p_F(j_1,j_4,j_2,j_3)}\overbrace{u_{j_1}(x_{j_1})u_{j_4}(x_{j_4})}\,\overbrace{u_{j_2}(x_{j_2})u_{j_3}(x_{j_3})}\Big] \times \end{aligned}$$

$$\times : u_1(x_1)\cdots\widehat{u_{j_1}(x_{j_1})}\cdots\widehat{u_{j_4}(x_{j_4})}\cdots u_n(x_n) : + \ldots,$$

Для T-добутків операторів, що є нормальними добутками деякого числа операторів, справедливе зауваження типу 20.1 і формула, подібна до (20.24) з хронологічними спарюваннями замість звичайних.

На завершення підпункту зауважимо, що в силу означень (20.38)–(20.41) і формул (20.18)–(20.21) хронологічні спарювання вільних полів збігаються з причинними функціями Гріна цих полів. Тому відповідно до формул (20.25) – (20.33) маємо:

• для дійсного скалярного поля

$$\overbracket{\varphi(x)\ \varphi(y)} = \frac{1}{i}D^c(x-y), \tag{20.42}$$

• для комплексного скалярного поля

$$\overbracket{\varphi(x)\ \overset{*}{\varphi}(y)} = \overbracket{\overset{*}{\varphi}(y)\ \varphi(x)} = \frac{1}{i}D^c(x-y), \tag{20.43}$$

$$\overbracket{\varphi(x)\varphi(y)} = \overbracket{\overset{*}{\varphi}(y)\ \ \overset{*}{\varphi}(y)} = 0, \tag{20.44}$$

• для спінорних полів

$$\overbracket{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}(y)} = \frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(x-y). \tag{20.45}$$

$$\overbracket{\psi_\alpha(x)\ \psi_\beta(y)} = \overbracket{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = 0, \tag{20.46}$$

• для векторних полів

$$\overbracket{V_\mu(x)\ \overset{*}{V}_\nu(y)} = \frac{1}{i}D^c_{\mu\nu}(x-y), \tag{20.47}$$

$$\overbracket{V_\mu(x)V_\nu(y)} = \overbracket{\overset{*}{V}_\mu(x)\ \overset{*}{V}_\nu(y)} = 0, \tag{20.48}$$

• для електромагнітного поля

$$\overbracket{A_\mu(x)A_\nu(y)} = ig^{\mu\nu}D^c_0(x-y). \tag{20.49}$$

Хронологічні спарювання полів різного типу тотожно дорівнюють нулю.

20.4.3. Узагальнена теорема Віка

З теореми 20.2 легко отримати ще одне корисне співвідношення для середнього за вакуумом від T-добутку вільних полів.

Теорема 20.3.

$$(\Omega_0, T(u(x)u_1(x_1)\ldots u_n(x_n))\Omega_0) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{p_F(j)}\overbracket{u(x)u_j(x_j)}\times$$

$$\times(\Omega_0, T(u_1(x_1)\dots u_{j-1}(x_{j-1})u_{j+1}(x_{j+1})\dots u_n(x_n))\Omega_0), \qquad (20.50)$$

де $p_F(j)$—кількість перестановок фермі-операторов при переході від порядку $1,\dots,n$ до порядку j, $1,\dots,j-1,\ j+1,\dots,n$.

Теорема 20.3 випливає із теореми 20.2 і того факту, що середні по вакууму від нормальних добутків операторів вільних полів перетворюються в нуль (див. задачу 20.4).

Зауваження 20.4. *З визначення T-добутку випливає, що під знаком T-добутку оператори можна переставляти, враховуючи їх статистику. Тобто*

$$T(u_1(x_1)\dots u_n(x_n)) = (-1)^{p_F} T(u_{i_1}(x_{i_1})\dots u_{i_n}(x_{i_n})),$$

де p_F—кількість перестановок фермі-операторів при переході від порядку $1,\dots,n$ до порядку $i_1,\dots,i_n$.

Зауваження 20.5. *Легко побачити з визначень (20.35) і (20.38), що операція T-добутку не є однозначною, коли часові змінні операторів збігаються. З іншого боку, використовуючи теорему Віка, бачимо: T-добутки операторів виражаються через нормальні добутки, що супроводжуються звичайними добутками сингулярних причинних функцій (див. ф-лу (20.16)). З (20.16) видно, що сингулярності зосереджені в точках, де аргументи збігаються.*

20.5. Операція множення і регуляризація узагальнених функцій

У наступних розділах розглядатимемо теорію взаємодіючих полів. Найбільш конструктивним методом теорії є теорія збурень. З математичної точки зору на сьогоднішній день метод теорії збурень для квантованих полів не є обґрунтованим навіть у випадку, коли константа взаємодії є дуже малою. Так у квантовій електродинаміці, де обрахунки деяких фізичних ефектів (лембівський зсув тощо) блискуче узгоджуються з експериментальними даними, немає строгого доведення збіжності рядів теорії збурень після усунення ультрафіолетових розбіжностей. Але якщо навіть не звертати увагу на розбіжність усього ряду, то виникають математичні проблеми, пов'язаними з операцією множення сингулярних функцій типу $D^c(x-y)$, $S^c(x-y)$ і т.д. У теорії узагальнених функцій операція множення узагальнених функцій з однаковими аргументами не є визначеною (див., наприклад, [21], § 5.9). Фактично постулат **ПК9** забезпечує коректне визначення виразів, що визначають основні фізичні величини, які містять у собі добутки операторно-значних узагальнених функцій в одній точці. Тобто віківський добуток є варіантом регуляризації таких добутків. Але подальше застосування теорії збурень призводить до появи нових добутків сингулярних узагальнених функцій із однаковими аргументами, і це вимагає нових методів регуляризації, які не завжди можна обґрунтувати з фізичної точки зору.

З деякими загальними аспектами регуляризації функцій Гріна і їх добутків можна ознайомитись у праці [13, § 15 і 16].

20.6. N-точкові функції Гріна вільних полів

Формули (20.18)–(20.21) визначають двоточкові функції Гріна як середні за вакуумом від T-добутку відповідних полів. Надалі для зручності будемо називати двоточковою функцією Гріна вільних полів вирази $\frac{1}{i}D^c(x-y)$, $\frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(x-y)$, $\frac{1}{i}D^c_{\mu\nu}(x-y)$ та $ig^{\mu\nu}D^c_g(x-y)$. У теорії взаємодіючих полів функції Гріна відіграють важливу роль при вивченні різних фізичних явищ. Їх потрібно буде узагальнити на випадок більшого числа змінних. Тоді за визначенням: • для дійсного скалярного поля

$$G^0_N(x_1,\dots,x_N) := (\Omega_0, T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N))\Omega_0), \tag{20.51}$$

• для комплексного скалярного поля

$$G^0_N(x_1,\dots,x_N;y_1,\dots,y_N) = (\Omega_0, T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N)\overset{*}{\varphi}(y_1)\dots\overset{*}{\varphi}(y_N))\Omega_0), \tag{20.52}$$

• для спінорних полів

$$G^0_N(\alpha_1,x_1;\dots;\alpha_n,x_n\,|\,\beta_1,y_1;\dots;\beta_n,y_n) =$$
$$= (\Omega_0, T(\psi_{\alpha_1}(x_1)\dots\psi_{\alpha_n}(x_n)\bar\psi_{\beta_1}(y_1)\dots\bar\psi_{\beta_n}(y_n))\Omega_0), \tag{20.53}$$

• для векторних полів.

$$G^0_n(\mu_1,x_1;\dots;\mu_n,x_n) = (\Omega_0, T(V_{\mu_1}(x_1)\dots V_{\mu_n}(x_n))\Omega_0). \tag{20.54}$$

Аналогічні співвідношення можна записати для комплексного векторного поля і електромагнітного поля.

Теорема Віка 20.2 дає можливість обчислити функції Гріна вільних полів. Застосовуючи цю теорему і враховуючи, що середнє за вакуумом від нормальних добутків полів перетворюється в нуль, отримаємо, наприклад, для N-точкової функції Гріна вільного скалярного поля (для $N=2n$):

$$G^0_N(x_1,\dots,x_N) = \sum_{(i_1,\dots,i_N)}{}' \frac{1}{i}D^c(x_{i_1}-x_{i_2})\dots\frac{1}{i}D^c(x_{i_{N-1}}-x_{i_N}), \tag{20.55}$$

де сума за індексами $(i_1,\dots,i_N)$ береться відносно всіх можливих різних наборів пар $(x_{i_1},x_{i_2})\dots(x_{i_{N-1}},x_{i_N})$, з набору зміни $x_1\dots x_N$. Формулу (20.55) можна також отримати із рекурентного співвідношення

$$G^0_N(x_1,\dots,x_N) = \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{i}D^c(x_1-x_k)G^0_{N-2}(x_2,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_N),$$

яке легко отримати з формули (20.51), застосувавши узагальнену теорему Віка (теорема 20.3) до оператора $\varphi(x_1)$. Аналогічні співвідношення легко записати для функцій Гріна інших полів, використовуючи означення (20.52)–(20.54), теорему 20.3 і формули (20.42)–(20.49).

Задачі до розділу IV

Задача 15.1. Показати, що оператори вільного скалярного поля задовольняють постулати квантування **ПК3**–**ПК7**.

Задача 16.1. Показати, що оператори вільного електронно-позитронного поля задовольняють постулати квантування **ПК3**–**ПК7**.

Задача 17.1. Виходячи з лагранжіана (17.15) вивести одночасові комутаційні співвідношення між узагальненою координатою (полем) $V_\mu(x)$ і узагальненим імпульсом $\pi^\mu(x)$, тобто довести справедливість постулату **ПК7**.

Задача 17.2. Отримати одночасові комутаційні співвідношення, користуючись методом Дірака квантування систем із додатковими зв'язками.

Задача 17.3. Довести, що рівняння Гейзенберга для електромагнітного поля сумісне з рівняннями Максвелла.

Задача 17.4. Отримати матрицю зв'язків для електроманітного поля в кулонівській калібровці.

Задача 18.1. Встановити закон перетворення зарядово-спряженого спінора ψ^c при перетворенні просторової інверсії (ф-ла 18.16).

Задача 18.2. Довести антилінійність оператора $U_{\widehat{T}}$ (ф-ли 18.21).

Задача 18.3. Довести, що поле $\nu^{\widehat{P}\widehat{C}}$, де $\widehat{P}\widehat{C}$ - перетворення вільного нейтринного поля задовольняє додаткову умову (5.148).

Задача 18.4. Чи є інваріантним відносно $\widehat{P}$, $\widehat{C}$, $\widehat{P}\widehat{C}$ перетворень лагранжіан вільного нейтринного поля (5.153).

Задача 18.5. Перевірити співвідношення (18.30)–(18.32).

Задача 19.1. Довести, що оператор вільної енергії дійсних скалярних бозонів є симетричним невід'ємним оператором.

Задача 19.2. Довести формулу (19.35).

Задача 19.3. Виходячи з означень (17.32), (17.35) і (19.68), перевірити формули (19.71).

Задача 20.1. Отримати інтегральні представлення для запізнювальної і випереджувальної функцій Гріна. Записати їх вирази за допомогою функції Паулі – Йордана.

Задача 20.2. Обчислити інтеграл за змінною k^0 у виразі (20.9) і виразити функцію $D^c(x-y)$ у вигляді (20.11).

Задача 20.3. Записати у вигляді фур'є-перетворень причинні функції Гріна спінорного, векторного та електромагнітного полів.

Задача 20.4. Довести формулу (20.50).

Розділ V. Квантова теорія взаємодіючих полів. Загальні проблеми

§ 21. Побудова квантових взаємодіючих полів і проблеми такої побудови

У попередньому розділі були розглянуті оператори вільних квантованих полів, які задовольняли всі вимоги (постулати) квантової релятивістської теорії. Тут буде описано побудову теорії взаємодіючих полів. Зауважимо, що побудова таких полів залежить від вигляду взаємодії. Наприклад, вигляд оператора електронно-позитронного поля, що бере участь в електромагнітній взаємодії, буде відрізнятись від оператора того ж поля, яке відповідає електронам, що задіяні у процесах слабких взаємодій.

Тому для побудови єдиного квантового поля, що відповідає конкретній елементарній частинці, необхідно розглядати теорію, що об'єднує всі відомі взаємодії між елементарними частинками. Побудова такої теорії є справа майбутнього і, мабуть, багато в чому залежить від експериментальних і теоретичних досліджень у всіх напрямках математики і фізики. У даному розділі розглянемо основні принципи такої побудови і проблеми, що виникають у процесі такої побудови. Основні проблеми є спільними і не залежать від вигляду взаємодії. Конкретний вигляд взаємодії обумовлює лише ступінь складності цих проблем. Для простоти візьмемо самовзаємодію дійсного скалярного поля. Більш реалістичні моделі, які були введені у розділі III, будуть розглядатись у розділі VII.

21.1. Формальна побудова квантового поля

Розглянемо модель самовзаємодіючого дійсного скалярного поля з лагранжіаном

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \lambda \mathscr{L}_I(x), \tag{21.1}$$

де $\mathscr{L}_0(x)$ — лагранжіан вільного поля:

$$\mathscr{L}_0(x) = \frac{1}{2} : \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) : \, - m^2 : \varphi^2(x) :, \tag{21.2}$$

$\mathscr{L}_I(x)$ описує самовзаємодію у вигляді

$$\mathscr{L}_I(x) = - : \varphi^4(x) :, \tag{21.3}$$

а константа $\lambda \geq 0$ називається константою взаємодії.

Рівняння Лагранжа–Ейлера, що відповідає лагранжіану (21.1)–(21.3), виглядає так:

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 4\lambda \, : \varphi^3(x) : . \tag{21.4}$$

При формулюванні постулату **ПК9** (див. зауваження 14.1) було обґрунтувано введення нормального добутку як процедури регуляризації операції множення операторно-значних узагальнених функцій із однаковим аргументом. У формулах (21.3) і (21.4) це відповідно означає:

$$\begin{aligned} &: \varphi^4(x) := \varphi^4(x) - 6\varphi^2(x)(\Phi_0, \varphi^2(x)\Phi_0), \\ &: \varphi^3(x) := \varphi^3(x) - 3\varphi(x)(\Phi_0, \varphi^2(x)\Phi_0). \end{aligned} \tag{21.5}$$

Праві частини (21.3),(21.4) треба розуміти у значенні граничного переходу типу (14.35), тобто треба визначити операції (21.5) для нормальних добутків $: \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) :$ та $: \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) :$, користуючись комбінаторикою теореми Віка та підставляючи замість спарювання двох полів вакуумне середнє $(\Phi_0, \varphi(x_i)\varphi(x_j)\Phi_0)$, а потім в отриманому виразі виконати граничний перехід $x_i \to x$, $i = 1, 2, 3, 4$. Зауважимо також, що нескінченна константа

$$(\Phi_0, \varphi^2(x)\Phi_0) = (\Omega_0, \varphi_0^2(x)\Omega_0) = \frac{1}{i} D^-(0) \tag{21.6}$$

де $\varphi_0(x)$—оператор вільного поля, а Ω_0—це вільний вакуум. Тотожність (21.6) випливає з спектрального представлення двоточкової функції Вайтмана $(\Phi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\Phi_0)$ (див. [102], гл. 17, § 2).

У § 14.4.1 було встановлено, що рівняння Гейзенберга для вільного скалярного поля збігається з рівнянням Клейна – Гордона – Фока. Очевидно, що те ж саме повинне виконуватись і у випадку взаємодіючого поля, тобто рівняння (21.4) еквівалентне рівнянню Гейзенберга:

$$i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^0} = [\varphi(x), H_\lambda], \tag{21.7}$$

де

$$H_\lambda = P_\lambda^0 = H_0 + \lambda H_I, \tag{21.8}$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{x^0=0} [: \partial_\mu \varphi_0(x) \partial_\mu \varphi_0(x) : + m^2 : \varphi_0^2(x) :] d\mathbf{x}, \tag{21.9}$$

а

$$H_I = \int\limits_{x^0=0} : \varphi_0(0,\mathbf{x})^4 : d\mathbf{x}. \tag{21.10}$$

Дійсно, вважаючи, що в початковий момент часу $x^0 = 0$, $\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_0(0,\mathbf{x})$, записуємо розв'язок рівняння (21.7) у вигляді

$$\varphi(x) = e^{ix^0 H_\lambda}\varphi_0(0,\mathbf{x})e^{-ix^0 H_\lambda} \tag{21.11}$$

і покажемо, що цей розв'язок задовольняє рівняння (21.4). З виразу (21.11) маємо

$$\partial_k\partial_k\varphi(x) = e^{ix^0 H_\lambda}\partial_k\partial_k\varphi_0(0,\mathbf{x})e^{-ix^0 H_\lambda} \tag{21.12}$$

і

$$\begin{aligned} \partial_0\partial_0\varphi(x) &= i\partial_0\left(e^{ix_0 H_\lambda}[H_\lambda,\varphi_0(0,\mathbf{x})]_- e^{-x_0 H_\lambda}\right) = \\ &= ie^{ix_0 H_\lambda}[H_\lambda,\partial_0\varphi(x)]_{-,x^0=0}e^{-ix_0 H_\lambda}, \end{aligned} \tag{21.13}$$

де використане співвідношення

$$[H_\lambda,\varphi_0(0,\mathbf{x})] = -i\partial_0\varphi(x)|_{x^0=0}, \tag{21.14}$$

яке є наслідком одночасових комутаційних співвідношень (14.20) для скалярного поля. Аналогічно знаходимо, що

$$[H_\lambda,\partial_0\varphi(x)]_{-,x^0=0} = i\partial_k\partial_k\varphi_0(0,\mathbf{x}) + im^2\varphi_0(0,\mathbf{x}) + i4\lambda : \varphi_0^3(0,\mathbf{x}) : . \tag{21.15}$$

Тепер зрозуміло, що (21.13) разом з (21.15) і (21.11) тотожне до (21.4).

Враховуючи також вільну еволюцію вільного скалярного поля (тобто рівняння (14. 40)), отримуємо

$$\varphi_0(x) = e^{ix^0 H_0}\varphi_0(0,\mathbf{x})e^{-ix^0 H_0}, \tag{21.16}$$

перепишемо (21.11) у вигляді

$$\varphi(x) = e^{ix^0 H_\lambda}e^{-ix^0 H_0}\varphi_0(x)e^{ix^0 H_0}e^{-ix^0 H_\lambda} \;=\; U^{-1}(x^0,0)\varphi_0(x)U(x^0,0), \tag{21.17}$$

де оператор еволюції

$$U(x^0,0) := e^{ix^0 H_0}e^{-ix^0 H_\lambda} \tag{21.18}$$

формально є унітарним оператором і задовольняє рівняння

$$i\frac{\partial}{\partial x^0}U(x^0,0) = \lambda H_I(x^0)U(x^0,0), \quad U(0,0) = \mathbb{1} \tag{21.19}$$

і де

$$H_I(x^0) := e^{ix^0 H_0}H_I e^{-ix^0 H_0}. \tag{21.20}$$

Розв'язок (21.17),(21.18) має формальний вигляд. Для того, щоб він мав строгий математичний зміст, треба визначити його у деякому гільбертовому

просторі станів, довести самоспряженість операторів H_0 і H_λ і встановити, що спектр H_λ відповідає вимогам постулату **ПК5**, а також побудувати основний стан гамільтоніана H_λ, тобто *фізичний вакуумний стан* Φ_0:

$$H_\lambda \Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 \neq 0.$$

Виявляється, що це дуже складна математична задача. Існує досить вузький вид моделей, майже еквівалентних моделі з відсутністю взаємодії, для яких це можна зробити. Існує три основні проблеми на шляху такої побудови:

1) об'ємні розбіжності (теорема Хаага);

2) ультрафіолетова катастрофа;

3) нестабільність вакууму.

З цими проблемами коротко познайомимося у наступному підрозділі.

Таким чином, зауважимо, що на формальному рівні квантування взаємодіючого скалярного поля в рамках самовзаємодії (21.3) зводиться до квантування вільного поля і побудови гейзенбергового поля за формулою (21.11).

21.2. Математичні проблеми побудови квантового взаємодіючого поля

У п.19.2.3 детально було досліджено гамільтоніан вільного скалярного поля H_0, що діє у просторі Фока $\mathscr{F} = \mathscr{F}_B$ і є в ньому додатнім самоспряженим оператором. Для побудови квантового поля необхідно визначити повний гамільтоніан H_λ. Отже, залишилось визначити у просторі $\mathscr{F}_B$ гамільтоніан взаємодії, який має вигляд (21.10). Скористаємось для цього формулою (15.2) і тотожністю

$$: \varphi_0(0,\mathbf{x})^4 := \sum_{j=0}^{4} C_4^j \varphi^+(0,\mathbf{x})^j \varphi^-(0,\mathbf{x})^{4-j},$$

де $C_4^j = 4!/j!(4-j)!$. Далі легко обчислити (задача 21.2), враховуючи формулу вигляду (4.58), що

$$H_I = \sum_{j=0}^{4} C_4^j H_{j,4-j}, \tag{21.21}$$

де

$$H_{j,4-j} = \int\limits_{\mathbb{R}^{4s}} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_4 \frac{(2\pi)^s \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{j+1} - \dots - \mathbf{k}_4)}{\prod_{i=1}^4 (2\pi)^{s/2} \sqrt[4]{\mathbf{k}_i^2 + m^2}} \times$$

$$\times \varphi^+(\mathbf{k}_1) \dots \varphi^+(\mathbf{k}_j) \varphi^-(\mathbf{k}_{j+1}) \dots \varphi^-(\mathbf{k}_4). \tag{21.22}$$

З міркувань, які стануть зараз зрозумілими, запишемо оператор $H_{j,4-j}$ через змінні $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^s$, $s = 1, 2, 3$. Розглянемо для прикладу випадок $j = 4$. Тоді для

$\widehat{f} \in \mathscr{D}_0^{\rm loc}$ (див. формулу (19.27)) легко обчислити, користуючись формулами (19.12), (19.12') що

$$(H_{4,0}\widehat{f})_N(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_N) = \frac{1}{\sqrt{N(N-1)(N-2)(N-3)}}\times$$

$$\times \sum_{j_l\neq j_k,\, k\neq l} \frac{(2\pi)^s\delta(\mathbf{p}_{j_1}+\dots+\mathbf{p}_{j_4})}{\prod_{i=1}^4(2\pi)^{s/2}\sqrt[4]{\mathbf{p}_i^2+m^2}} f_{N-4}(\mathbf{p}_1,\dots,\widehat{\mathbf{p}}_{j_1},\dots,\widehat{\mathbf{p}}_{j_4},\dots,\mathbf{p}_N). \qquad (21.23)$$

Тут $\widehat{\mathbf{p}}_{j_1}$ означає, що аргумент $\mathbf{p}_{j_1}$ у функції f_{N-4} відсутній. Можна побачити, що права частина (21.23) не може бути компонентою вектора з простору Фока, оскільки

$$\int d\mathbf{p}|f(\mathbf{p})|^2\delta(\mathbf{p})^2 = \delta(0)^s\,|f(0)|^2 = +\infty. \qquad (21.24)$$

Отже, це є перша принципова математична проблема, яку можна назвати об'ємними розбіжностями. З формул (21.23),(21.24) випливає, що не можна визначити узгоджено гамільтоніан взаємодії у тому ж просторі, що й вільний гамільтоніан H_0. Але ця проблема глибша і пов'язана з теоремою Хаага, яка стверджує: у рамках аксіом, які були сформульовані у § 14, взагалі неможливо побудувати представлення взаємодії. Сформулюємо цю теорему у поданому нижче вигляді.

Теорема Хаага(див., наприклад, [88])

Нехай $\varphi_0(\mathbf{x},x^0)$ — вільне поле маси m, а $\varphi(\mathbf{x},x^0)$ — поле, що задовольняє умови постулатів **ПК1 – ПК9**. *А саме для $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^s)$ (основна функція з простору Шварца) є два незвідні набори операторів у момент часу $t=x^0$: $\varphi_0(f,x^0)=\int f(\mathbf{x})\,\varphi_0(\mathbf{x},x^0)d\mathbf{x}$ і $\varphi(f,x^0)$, що діють відповідно у гільбертових просторах $\mathscr{H}_1$ і $\mathscr{H}_2$ (можливо $\mathscr{H}_1\equiv\mathscr{H}_2$). У кожному з просторів діє відповідне унітарне представлення групи Лоренца U_j. Припустимо,що для кожного з представлень U_j існує єдиний інваріантний стан $\Phi_0^{(j)}$, тобто*

$$U_j\Phi_0^{(j)} = \Phi_0^{(j)}.$$

Нехай існує унітарний оператор $V=V(x^0)$, такий, що

$$\varphi(f,x^0) = V^{-1}\varphi_0(f,x^0)V.$$

Тоді поле $\varphi(\mathbf{x},x^0)$ є вільним полем маси m.

Основним висновком цієї теореми є те, що фактично неможливо побудувати взаємодіюче поле на основі формули (21.17). У зв'язку з цим Хааг і Кастлер [142] запропонували дещо змінити систему аксіом і обмежитись розглядом спостережуваних величин, що належать тільки алгебрам локальних спостережуваних $U(\mathscr{O})$, де $\mathscr{O}$–деяка відкрита область простору Мінковського $\mathbb{M}^d=\mathbb{M}^{s+1}$. У спрощеному вигляді ідея полягає у тому, що замість глобальної динаміки

(21.17) треба розглянути локальну динаміку, вважаючи, що взаємодія відбувається лише у деякому відносно невеликому “ящику” простору-часу:

$$T \times \Lambda \subset \mathbb{M}, \quad T \subset \mathbb{R}^1, \quad \Lambda \subset \mathbb{R}^s, \quad s = 1, 2, 3.$$

Тоді замість оператора Гамільтона H, визначеного формулами (21.8)–(21.10), можна визначити новий гамільтоніан

$$H_\lambda(\mathbf{g}) = H_0 + \lambda H_I(\mathbf{g}), \tag{21.25}$$

$$H_I(\mathbf{g}) = \int\limits_{x^0=0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) : \varphi_0(0,\mathbf{x})^4 :, \tag{21.26}$$

де $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ називатимемо функцією інтенсивності взаємодії, причому

$$\text{supp } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \subset \Lambda, \tag{21.27}$$

тобто $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \notin \Lambda$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 1$ при $\mathbf{x} \in \Lambda \backslash \partial^\delta \Lambda$, де $\partial^\delta \Lambda$ – деяка область товщиною δ, що лежить всередині Λ і охоплює всю поверхню $\partial\Lambda$ області Λ. Залежно від задачі цю область (і функцію $\mathbf{g}(\mathbf{x})$) задають по-різному. Будемо вважати, що $0 < \mathbf{g}(\mathbf{x}) < 1$ в області $\partial^\delta \Lambda$ і є нескінченно диференційовною функцією своїх аргументів $x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}$. Інколи будемо також користуватись просторово-часовим "включенням"взаємодії. У даному випадку замість функції $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ розглядатимемо функцію $g(x)$ у вигляді

$$g(x) = g^0(x^0)\mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{21.28}$$

з supp $g^0(x^0) \subset T$ і такими ж властивостями на $\partial^\delta T$. Для гамільтоніана (21.26) буде справедливим таке ж представлення (21.21) і (21.22) з

$$H_{j,4-j}(\mathbf{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{4s}} d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_4 \frac{\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{j+1} - \cdots - \mathbf{k}_4)}{\prod_{i=1}^4 (2\pi)^{s/2} \sqrt[4]{\mathbf{k}_i^2 + m^2}} \times$$

$$\times \varphi^+(\mathbf{k}_1) \cdots \varphi^+(\mathbf{k}_j) \varphi^-(\mathbf{k}_{j+1}) \cdots \varphi^-(\mathbf{k}_4), \tag{21.29}$$

де $\widetilde{\mathbf{g}}$ – фур’є-перетворення функції $\mathbf{g}$ у просторі $\mathbb{R}^s$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{\mathbb{R}^s} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}\, \widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{21.30}$$

Використавши означенн норми (19.6) в N-частинковому просторі $\mathscr{F}_N$, легко порахувати, що

$$\|(H_{4,0}\hat{f})_N\|^2_{\mathscr{F}_N} \leqslant \text{const}\, K(\mathbf{g}) N(N-1)(N-2)(N-3)\, \|\hat{f}_{N-4}\|_{\mathscr{F}_{N-4}}, \tag{21.31}$$

де

$$K(\mathbf{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{4s}} d\mathbf{k}_1 \ldots d\mathbf{k}_4 \frac{|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_4)|^2}{\sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m^2} \ldots \sqrt{\mathbf{k}_4^2 + m^2}}. \tag{21.32}$$

Якщо скористатися нерівністю

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \prod_{j\neq i} a_j^{\frac{n}{n-1}}$$

з $a_j = (\mathbf{k}_j^2 + m^2)^{-1/2}$ і $n = 4$, то маємо

$$K(\mathbf{g}) \leqslant 4 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^s} \frac{d\mathbf{k}}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^{2/3}} \right)^3 \int |\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}.$$

Другий інтеграл є скінченний унаслідок вибраних властивостей функції $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, а перший—лише у випадку $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^1$ (тобто $s = 1$). Отже, у реальному фізичному $(1+3)$-вимірному просторі часу для вектора $H_{4,0}\hat{f}$ знову буде отримана нескінченна норма, через те що інтеграли за імпульсними змінними будуть розбігатися при великих значеннях $\mathbf{k}$. Ці розбіжності мають назву *ультрафіолетових розбіжностей.*

Усуненню цих розбіжностей присвячена *теорія перенормувань*, з якою познайомимося дещо пізніше. На завершення лише зауважимо, що на рівні побудови оператора Гамільтона це означає, що замість оператора $H_I(g)$ треба розглянути регуляризований оператор $H_I^{\varkappa}(g)$, який має такий самий вигляд (21.21), (21.29), але інтегрування за імпульсми $\mathbf{k}_j$, $j = 1, \ldots, 4$ виконуються не по усьому просторі $\mathbb{R}^s$, а з обмеженнями $|k_j^{(i)}| \leqslant \varkappa$, $j = 1, \ldots, 4$, $i = 1, 2, 3$.

Далі потрібно змінити вигляд взаємодії, додавши до повного гамільтоніана деякий спеціально підібраний для даної моделі оператор-контрчлен $\delta H^{\varkappa}(g, m)$. Таким чином треба щоб повний гамільтоніан

$$H_\lambda(\mathbf{g}; \varkappa) = H_0 + \lambda H_I^{\varkappa}(\mathbf{g}) + \delta H^{\varkappa}(\mathbf{g}, \lambda, m)$$

збігався у значенні операторної збіжності при $\varkappa \to \infty$ до деякого самоспряженого додатнього оператора у просторі станів.

Така програма є досить складною математичною проблемою, яка на сьогоднішній день реалізована лише для невеликого числа досить простих моделей у 2-, 3-вимірному просторі-часі (див. [27]).

У зв'язку з цим залишається також невирішеною проблема існування основного стану (фізичного вакууму), відносно якого можна було б будувати теорію збурень, яка є основним інструментом при теоретичних обчисленнях.

§ 22. Теорія розсіяння. Матриця розсіяння

Основним джерелом інформації для вивчення фізичних властивостей взаємодії елементарних частинок та дослідження їх структури є експериментальні та теоретичні дані процесів розсіяння. Теорія розсіяння є основним інструментом

для аналізу експериментальних даних. Саме тому побудова теорії розсіяння є найбільш важливим розділом усієї квантової теорії поля. На жаль, у найбільш загальному вигляді побудова релятивістсько-інваріантної теорії розсіяння є справою майбутнього. У зв'язку з цим розрізняють релятивістську і нерелятивістську теорію розсіяння. Насправді друга є нерелятивістським наближенням першої і фактично вивчає реакції, у яких відсутні процеси народження і знищення частинок. Тобто види частинок до взаємодії і після не змінюються (так звана *одноканальна теорія розсіяння*). Така теорія є найбільш розвинутою з математичної точки зору. Зауважимо, що в межах нерелятивістського підходу можна вивчати також і багатоканальні процеси (коли результатом процесу розсіяння є зовсім інші частинки чи ті самі з народженими новими частинками і т.д.), але така теорія є вже набагато складнішою і містить у собі досить значні математичні проблеми. У цьому параграфі будуть описані проблеми, пов'язані з побудовою релятивістської теорії розсіяння. Власне, основні загальні принципи такої побудови чи то для класичної теорії розсіяння, чи то для квантово-механічної (або нерелятивістської) теорії, чи, нарешті, для квантово-польової (або релятивістської) є однаковими (див. детальніше [43,89,90]).

22.1. Квантовий опис розсіяння. Визначення оператора розсіяння

На відміну від класичної теорії, де використовувались такі поняття, як координати та імпульси частинок, у квантовій теорії система визначається своїм станом Ψ. У картині Шредінгера цей стан залежить від часу, і його еволюція описується рівнянням Шредінгера

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t). \tag{22.1}$$

Формальний розв'язок цього рівняння (за умови, що гамільтоніан H є добре визначеним самоспряженим оператором у гільбертовому просторі станів $\mathscr{H}$) задається унітарним оператором еволюції в картині Шредінгера $U_S(t) = U(t)$:

$$\Psi(t) = U(t)\Psi(0) = e^{-iHt}\Psi(0), \tag{22.2}$$

де $\Psi(0)$ – деякий нормований вектор із $\mathscr{H}$, що відповідає початковому стану.

Якщо застосувати цю ідеологію до опису процесу розсіяння, тобто вважати, що вектор $\Psi(t) = U(t)\Psi(0)$ описує еволюцію деякого процесу розсіяння, то зручніше припустити, що сам акт розсіяння відбувається в момент $t = 0$. Тоді $\Psi(0)$ вже незручно називати початковим станом. Отже, будемо називати його вектором стану у момент розсіяння і позначати просто

$$\Psi = \Psi(0). \tag{22.3}$$

Припустимо, що у далекому минулому ($t \to -\infty$) частинки рухались як вільні, тобто їх еволюція описувалася вектором

$$\Psi_{in}(t) = U_0(t)\Psi_{in} = e^{-iH_0t}\Psi_{in}. \tag{22.4}$$

Аналогічне припущення зробимо для розсіяних частинок, що рухаються після акту розсіяння (у далекому майбутньому $t \to +\infty$) як вільні

$$\Psi_{out}(t) = U_0(t)\Psi_{out} = e^{-iH_0 t}\Psi_{out}. \tag{22.5}$$

Важливо зауважити, що в загальній ситуації вільний гамільтоніан падаючих частинок H_0^{in} і вільний гамільтоніан розсіяних частинок H_0^{out} не тотожні:

$$H_0^{in} \neq H_0^{out}. \tag{22.6}$$

У цьому випадку, щоб зберегти справедливість формул (22.4) і (22.5), треба покласти

$$H_0 = H_0^{in} + H_0^{out}. \tag{22.7}$$

Якщо ж серед падаючих і розсіяних частинок є частинки одного виду, то у сумі (22.7) відповідний гамільтоніан треба взяти один раз. Для того, щоб формули (22.1) – (22.7) відповідали одному процесу розсіяння, необхідно виконати такі *асимптотичні умови*:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to-\infty}(\Psi(t) - \Psi_{in}(t)) = 0, \\ &\lim_{t\to+\infty}(\Psi(t) - \Psi_{out}(t)) = 0. \end{aligned} \tag{22.8}$$

Тут не обговорюються питання, як треба розуміти границі (22.8), оскільки поки що розглядаються чисто формальні побудови.

Асимптотичні умови (22.8) гарантують існування векторного стану $\Psi(t)$ для будь-яких векторів Φ_{in} і Φ_{out} з гільбертового простору станів $\mathscr{H}$. Це означає, що ми можемо визначити (з ф-л (22.2)–(22.5) і (22.8)) пару так званих хвильових операторів $\Omega_\pm$ (їх називають *меллерівськими хвильовими операторами*) за допомогою формул

$$\begin{aligned} \Psi &= \lim_{t\to-\infty} \overset{*}{U}(t)U_0(t)\Psi_{in} := \Omega_+\Psi_{in}, \\ \Psi &= \lim_{t\to+\infty} \overset{*}{U}(t)U_0(t)\Psi_{out} := \Omega_-\Psi_{out} \end{aligned} \tag{22.9}$$

або в операторному вигляді

$$\Omega_\pm := \lim_{t\to\mp\infty} \overset{*}{U}(t)U_0(t). \tag{22.10}$$

Цікавим є обернена задача: чи визначає кожний вектор $\Psi \in \mathscr{H}$ деякий стан $\Psi(t) = U(t)\Psi$, що має *in*- та *out*-асимптотики? З точки зору фізики відповідь повинна бути негативною, оскільки гамільтоніан $H = H_0 + H_{int}$ може мати зв'язні стани. Тоді, якщо Ψ відповідає зв'язному стану, то стан $U(t)\Psi$ є стаціонарним станом, у якому частинка залишається локалізованою у деякій обмеженій області.

Зі сказаного вище випливає, що гільбертів простір станів має принаймні три компоненти: $\mathscr{H}_{in}$, $\mathscr{H}_{out}$ і $\mathscr{H}_b$. Виявляється (див. [90], гл. 2, § 4), що для асимптотично повних теорій

$$\mathscr{H}_{in} = \mathscr{H}_{out} \tag{22.11}$$

$$\mathscr{H}_{in} \perp \mathscr{H}_b, \quad \mathscr{H}_{out} \perp \mathscr{H}_b \tag{22.12}$$

і

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{in} \oplus \mathscr{H}_b = \mathscr{H}_{out} \oplus \mathscr{H}_b. \tag{22.13}$$

Щоб визначити оператор розсіяння, зауважимо, що хвильові оператори $\Omega_\pm$ є ізометричними операторами в $\mathscr{H}$. Дійсно, через те, що оператори $U(t)$ і $U_0(t)$ є унітарними

$$\|U(t)^* U_0(t)\Psi_{in}\|_{\mathscr{H}} = \|\Psi_{in}\|_{\mathscr{H}}. \tag{22.14}$$

Очевидно, що і в границі (якщо вона існує), це співвідношення збережеться, тобто

$$\|\Omega_\pm \Psi_{in}\|_{\mathscr{H}} = \|\Psi_{in}\|_{\mathscr{H}}. \tag{22.15}$$

Рівність (22.15) забезпечує ізометричність операторів $\Omega_\pm$ і співвідношення

$$\Omega_\pm^* \Omega_\pm = 1. \tag{22.16а}$$

Але в загальному випадку $\Omega_\pm \Omega_\pm^* \neq 1$, тобто оператори $\Omega_\pm$ можуть бути не унітарними.

Виявляється, що неунітарність хвильових операторів пов'язана з існуванням непорожнього підпростору зв'язних станів $\mathscr{H}_b$. Розмірність цього підпростору служить мірою відхилення ізометричних операторів $\Omega_\pm$ від їх унітарності. Можна порахувати, що (див. [102], гл. 11, § 4)

$$\Omega_\pm \Omega_\pm^* = 1 - P_b, \tag{22.16б}$$

де P_b – оператор проектування на $\mathscr{H}_b$.

Визначимо тепер *оператор розсіяння* як відображення векторів Ψ_{in} у вектори Ψ_{out}:

$$\Psi_{out} = S\Psi_{in}. \tag{22.17}$$

Матриця розсіяння, як середнє значення оператора S між двома фізичними станами, була вперше введена Уіллером [197] ще в 1937 р. Пізніше, у 1943 р., Гайзенберг [144] визначив S-матрицю у зв'язку з проблемами теорії розсіяння симетричних частинок і поклав її в основу сучасної квантової теорії розсіяння.

З формул (22.9) і (22.16а) легко отримати, що

$$\Psi_{out} = \Omega_-^* \Psi = \Omega_-^* \Omega_+ \Psi_{in}. \tag{22.18}$$

Отже, S-оператор можна виразити через хвильові оператори співвідношенням

$$S = \Omega_-^* \Omega_+. \tag{22.19}$$

Традиційно для побудови операторів S і $\Omega_{\pm}$ методом теорії збурень використовують картину взаємодії, про яку було детально описано у п.14.2. Визначимо для цього оператор зсуву за часовою змінною, який формально можна визначити співвідношенням

$$U(t_2,t_1)\Phi(t_1)=\Phi(t_2),\ \Phi(t_i)\in\mathscr{H},\ i=1,2. \tag{22.20}$$

З означення (22.20) і того факту, що $\Phi(t)$—нормований фізичний стан у просторі станів, випливають важливі властивості оператора $U(t_2,t_1)$ (задача 22.1):

$$U(t,t)=\mathbb{1}, \tag{22.21}$$

$$U(t_2,t_0)U(t_0,t_1)=U(t_2,t_1) \tag{22.22}$$

і

$$U(t_2,t_1)=U^{-1}(t_1,t_2)=\overset{*}{U}(t_1,t_2). \tag{22.23}$$

Нагадаємо (див. п.14.2), що вектор стану $\Phi(t)$ у представленні взаємодії пов'язаний із вектором стану $\Psi(t)$ у представленні Шредінгера формулою

$$\Phi(t)=e^{iH_0t}\Psi(t). \tag{22.24}$$

Тоді, записуючи розв'язок рівняння (22.1) у вигляді (22.2), але з початковою умовою

$$\Psi(t)|_{t=t_1}=\Psi(t_1), \tag{22.25}$$

отримуємо

$$\Psi(t_2)=e^{-iH(t_2-t_1)}\Psi(t_1). \tag{22.26}$$

Враховуючи (22.24) і (22.26), маємо

$$\begin{aligned}\Phi(t_2) &= e^{iH_0t_2}\Psi(t_2)=e^{iH_0t_2}e^{-iH(t_2-t_1)}\Psi(t_1)= \\ &= e^{iH_0t_2}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0t_1}\Phi(t_1).\end{aligned} \tag{22.27}$$

Порівнюючи (22.20) і (22.27), отримуємо явний вираз для оператора еволюції $U(t_2,t_1)$ (див. також (21.18):

$$U(t_2,t_1)=e^{iH_0t_2}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0t_1}. \tag{22.28}$$

Легко перевірити, що оператор $U(t,t_0)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$i\partial_tU(t,t_0)=\lambda H_I(t)U(t,t_0), \tag{22.29}$$

де $H_I(t)$ визначається формулою (21.20).

Задачу знаходження оператора еволюції $U(t,t_0)$ з диференціального рівняння (22.29) можна розглядати як операторну задачу Коші з початковою умовою

$$U(t_0,t_0)=\mathbb{1}. \tag{22.30}$$

Розглянемо це питання у наступному підрозділі.

З означення векторів у представленні взаємодії (22.24) і формули (22.4) випливає, що вектори *in*- або *out*-станів

$$\Phi_{\substack{in\\out}}(t) = e^{iH_0 t}\Psi_{\substack{in\\out}}(t) = \Psi_{\substack{in\\out}}$$

не залежать від часу, і тому можна вважати, що

$$\Psi_{\substack{in\\out}} = \Phi_{\substack{in\\out}}(\mp\infty).$$

Тоді, порівнюючи (22.27) з (22.17), оператор розсіяння можна визначити як

$$S = \lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}} U(t_2, t_1). \tag{22.31}$$

З означень хвильових операторів $\Omega_\pm$ (див. (22.9)) і оператора еволюції $U(t_2, t_1)$ (див. (22.28)) легко переконатися, що

$$\Omega_\pm = \lim_{t\to\mp\infty} U(0, t). \tag{22.32}$$

На завершення даного пункту зауважимо, що всі наведені тут конструкції є формальними побудовами,які потребують строгого обґрунтування для кожного конкретного вигляду гамільтоніанів H_0 і H. На жаль, на сьогоднішній день таку теорію можна побудувати лише для певного вузького класу взаємодій.

22.2. Формальна побудова оператора розсіяння методом теорії збурень

Теорія збурень є одним із основних теоретичних методів для обчислення конкретних фізичних процесів. Звичайно, рамки застосувань теорії збурень обмежені і залежать від наявності малого параметра, від правильного вибору основного стану, відносно якого розглядається збурення, та інших факторів.

Тому у цьому пункті розглянемо побудову формальної теорії збурень для оператора розсіяння, не обговорюючи проблеми збіжності ряду теорії збурень і математичної коректності членів цього ряду. Незважаючи на математичні проблеми, пов'язані із застосуванням представлення взаємодії (картини Дірака), побудова теорії збурень у цьому представленні найбільш зручна, оскільки оператор розсіяння визначається за допомогою оператора еволюції $U(t, t_0)$, який задовольняє диференціальне рівняння (22.29) і початкову умову (22.30). Ці рівняння еквівалентні інтегральному рівнянню для $U(t, t_0)$:

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i\lambda \int_{t_0}^{t} H_I(\tau) U(\tau, t_0) d\tau. \tag{22.33}$$

Методом послідовних ітерацій із рівняння (22.33) можна записати вираз для оператора еволюції у вигляді нескінченного ряду

$$U(t,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(t,t_0), \tag{22.34}$$

де

$$U_n(t,t_0)=(-i\lambda)^n\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\int\limits_{t_0}^{t_1}dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nH_I(t_1)\ldots H_I(t_n). \tag{22.35}$$

Ф. Дайсон [29,30] помітив, що вираз (22.35) можна перетворити, якщо записати, що всі інтеграли у виразі (22.35) змінюються в інтервалі $[t_0,t]$, ввівши в підінтегральний вираз добуток функцій Хевісайда $\theta(t_i-t_j)$ (див. означення в п.4.3) і скориставшись визначенням T-добутку (20.34):

$$\begin{aligned}U_n(t,t_0) &= (-i\lambda)^n\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\int\limits_{t_0}^{t}dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t}dt_n\theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)\cdots\theta(t_{n-1}-t_n)\times\\
&\times\ H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)=\frac{(-i\lambda)^n}{n!}\sum_{\pi\in P_n}\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\ldots\int\limits_{t_0}^{t}dt_n\times\\
&\times\ \theta(t_{\pi(1)}-t_{\pi(2)})\cdots\theta(t_{\pi(n-1)}-t_{\pi(n)})H_I(t_{\pi(1)})\cdots H_I(t_{\pi(n)})=\\
&=\ \frac{(-i\lambda)^n}{n!}\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\ldots\int\limits_{t_n}^{t}dt_nT(H_I(t_1)\ldots H_I(t_n)),\end{aligned}$$

де P_n—група перестановок чисел $1,2,\ldots,n$.

Запишемо тепер остаточний вигляд ряду теорії збурень для оператора розсіяння, скориставшись визначенням (22.31). Щоб записати цей ряд у явно коваріантній формі, врахуємо, що для теорій, що не містять у собі похідних у лагранжіані взаємодії, згідно з (3.60),(3.61) отримуємо

$$\lambda H_I(t)=\lambda H_I(x^0)=\int d\mathbf{x}\ T_I^{00}(x)=-\lambda\int d\mathbf{x}\ \mathscr{L}_I(x).$$

Тоді остаточно маємо

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S_n=\mathbb{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4n}}S_n(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n, \tag{22.36}$$

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=(i\lambda)^nT(\mathscr{L}_I(x_1)\cdots\mathscr{L}_I(x_n)). \tag{22.37}$$

Інколи вирази (22.36),(22.37) записують у вигляді так званої *T-експоненти*.

Якщо формально винести знак T-добутку за знак інтеграла, то вираз для S_n можна переписати у вигляді

$$S_n = \frac{1}{n!} T \left(i\lambda \int \mathscr{L}_I(x) dx \right)^n , \tag{22.38}$$

а вираз для S-оператора – як

$$S = T \left(e^{i\lambda \int \mathscr{L}_I(x) dx} \right) . \tag{22.39}$$

Вираз (22.39) хоч і є формальним, але має такі ж комбінаторні властивості, як і звичайна експонента, і тому може бути використаний для доведення основних властивостей S-оператора.

Зауваження 22.1. *З формули (3.60) випливає, що густина гамільтоніана взаємодії $\mathscr{H}_I(x) = T_I^{00}(x)$ не збігається з густиною лагранжіана взаємодії $\mathscr{L}_I(x)$ для теорій, що містять у собі похідні в лагранжіані взаємодії. У цьому випадку ряд (22.34) при $t_0 = -\infty$ і $t = +\infty$ не буде збігатися з виразом (22.36). Але виявляється (див. [102], гл. 14, § 3), що для отримання правильних фізичних наслідків треба прийняти розклад (22.36).*

Зауважимо також, що вираз (22.36) для S-оператора можна отримати, виходячи з найбільш загальних (аксіоматичних) принципів релятивістської інваріантності, унітарності і причинності. Така схема побудови була започаткована Штюкельбергом [188], [187] і завершена в праці Боголюбова [9]. Вона детально викладена в монографії [13, § 17].

Зауваження 22.2. *Через невизначеність T-добутку при*

$$x_i^0 = x_j^0, \quad i \neq j$$

вираз для S_n не є однозначно визначеним. S_n визначається з точністю до деякого антиермітового квазілокального (тобто зникаючого при $x_i \neq x_j$) оператора $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$. Далі цей факт буде використовуватися в теорії усунення розбіжностей у виразі для S_n.

На завершення запишемо вигляд S-оператора для випадку, коли взаємодію внесено з інтенсивністю $g(x)$ (див. формулу (21.28)):

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n. \tag{22.40}$$

Вираз для $S(g)$ збігається з (22.36),(22.37), якщо замість лагранжіана $\mathscr{L}_I(x)$ поставити лагранжіан

$$\mathscr{L}_I(x; g) = \mathscr{L}_I(x) g(x)$$

з функцією $g(x)$, що визначається формулою (21.28). Аналогічно до формули (22.39) оператор $S(g)$ також можна записати у вигляді T-експоненти:

$$S(g) = T(e^{i\lambda \int \mathscr{L}_I(x;g) dx}). \tag{22.41}$$

22.3. Основні властивості S-оператора

У даному пункті коротко зупинимось на деяких основних властивостях оператора розсіяння: релятивістська інваріантність, унітарність, мікропричинність. Але спершу встановимо ще одне важливе представлення S-оператора у вигляді розкладу за нормальними добутками операторів вільних полів.

22.3.1. Нормальна форма оператора S

Визначення (22.31) оператора S і його представлення через хвильові оператори (22.19), (22.32) є досить загальним і неконструктивним. Для обчислення процесів розсіяння треба мати більш конкретний аналітичний вираз для S-оператора. Наведемо такий вираз на рівні додаткової аксіоми, яку обґрунтуємо в процесі викладення теорії S-оператора. Основою для такого представлення є теорема Березіна [6, гл. 2, § 1, п. 10] про представлення обмеженого оператора, що діє у Фоківському просторі $\mathcal{F}$ у вигляді розкладу за операторами народження і знищення вільних полів. Релятивістсько-інваріантний аналог такого розкладу за вільними полями $u_j^{(k)}(x)$, де $x \in \mathbb{M}^4$, $k = 1, 2, \ldots, t$, t — число видів полів, а j пробігає значення компонент поля виду k, має вигляд

$$S = \sum_{\mathbf{N}=\mathbf{0}} \frac{1}{\mathbf{N}!} \sum_{\mathbf{j}} \int\limits_{\mathbb{M}^{4|\mathbf{N}|}} F_{\mathbf{N}}(x|\mathbf{j})_{\mathbf{N}} : \prod_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{u}_{\mathbf{j_n}}(x_{\mathbf{n}}) : (dx)^{|\mathbf{N}|}, \tag{22.42}$$

де

$$\mathbf{N} := (N_1, \ldots, N_t), \quad \mathbf{N}! := N_1! \ldots N_t!, \quad |\mathbf{N}| := N_1 + \ldots + N_t,$$

$$(x\,|\,\mathbf{j})_{\mathbf{N}} := \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{N_1}^{(1)}\,|\,j_1^{(1)}, \ldots, j_{N_1}^{(1)}; \ldots; x_1^{(t)}, \ldots, x_{N_t}^{(t)}\,|\,j_1^{(t)}, \ldots, j_{N_t}^{(t)}\right),$$

$$\prod_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{u}_{\mathbf{j_n}}(x_{\mathbf{n}}) := u_{j_1^{(1)}}^{(1)}(x_1^{(1)}) \ldots u_{j_{N_1}^{(1)}}^{(1)}(x_{N_1}^{(1)}) \ldots u_{j_1^{(t)}}^{(t)}(x_1^{(t)}) \ldots u_{j_{N_t}^{(t)}}^{(t)}(x_{N_t}^{(t)}),$$

$$(dx)^{\mathbf{N}} := dx_1^{(1)} \ldots dx_{N_1}^{(1)} \ldots dx_1^{(t)} \ldots dx_{N_t}^{(t)}.$$

Коефіцієнтні функції $F_{\mathbf{N}}$ є симетричними функціями за аргументами одного виду полів, якщо частинки цього виду є бозонами, і антисиметричними, якщо частинки є ферміонами.

Формально оператор S у вигляді (22.42) можна отримати з представлення його рядом теорії збурень (22.36),(22.37). Щоб це побачити, треба обмежитися конкретним виглядом взаємодії. Для простоти знову розглянемо випадок самовзаємодії скалярного поля (21.3). У цьому випадку представлення (22.42) буде мати вигляд

$$S = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int\limits_{\mathbb{M}^{4N}} F_N(x_1, \ldots, x_N) : \varphi(x_1) \ldots, \varphi(x_N) : dx \ldots dx_N. \tag{22.43}$$

Першим кроком для отримання представлення (22.43) є приведення до нормальної форми (тобто представлення у вигляді нормальних (віківських) добутків) кожного члена ряду теорії збурень (22.36),(22.37).

Почнемо з першого порядку, $n = 1$.

$$S_1 = -i\lambda \int\limits_{\mathbb{M}^4} T(:\varphi^4(x_1):)dx_1 = -i\lambda \int\limits_{\mathbb{M}^4} :\varphi^4(x_1): dx_1. \tag{22.44}$$

Щоб порівняти (22.44) з відповідним внеском у вираз (22.43), перепишемо S_1 у вигляді

$$\begin{aligned} S_1 &= \int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 4}} \left[(-i\lambda) \int\limits_{\mathbb{M}^4} dy_1\ \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_1)\delta(x_3-y_1)\delta(x_4-y_1) \right] \times \\ &\times\ :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_4): dx_1\dots dx_4 = \\ &= \frac{1}{4!} \int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 4}} \left[(-i\lambda) \sum_{\pi\in P_4} \int\limits_{\mathbb{M}^4} dy_1\ \delta(x_{\pi(1)}-y_1)\dots\delta(x_{\pi(4)}-y_1) \right] \times \\ &\times\ :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_4): dx_1\dots dx_4. \end{aligned} \tag{22.45}$$

Зіставивши (22.43) з (22.45), приходимо до висновку, що вираз у квадратних дужках є першим членом розкладу коефіцієнтної функції $F_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$ в ряд теорії збурень за константою взаємодії λ. Тобто, якщо записати

$$F_N(x_1,\dots,x_N) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda^n F_N^{(n)}(x_1,\dots,x_N), \tag{22.46}$$

то

$$F_4^{(1)}(x_1,\dots,x_4) = (-i) \sum_{\pi\in P_4} \int\limits_{\mathbb{M}^4} dy_1\ \delta(x_{\pi(1)}-y_1)\dots\delta(x_{\pi(4)}-y_1). \tag{22.47}$$

Перший член розкладу, що відповідає $n = n_0$, буде залежати від N, тобто $n_0 = n_0(N)$. Для $N = 4$, $n_0 = 1$. Далі для S_2 маємо

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} T\ \left(:\varphi^4(x_1): :\varphi^4(x_2):\right) dx_1dx_2 = \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} \Big[:\varphi^4(x_1)\varphi^4(x_2): + 16 :\varphi^3(x_1)\ \overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}\ \varphi^3(x_2): + \\ &+ 72 :\varphi^2(x_1) \left(\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}\right)^2 \varphi^2(x_2): + 96 :\varphi(x_1) \left(\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}\right)^3 \varphi(x_2): + \\ &+ 24 \left(\overbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}\right)^4 \Big] dx_1dx_2. \end{aligned} \tag{22.48}$$

В останній рівності було застосовано теорему Віка для хронологічного добутку (теорема 20.2).

Тепер легко переконатися, що

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\lambda^2}{8!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 8}} F_8^{(2)}(x_1,\dots,x_8)\ :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_8):\ dx_1\dots dx_8 + \\ &+ \frac{\lambda^2}{6!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 6}} F_6^{(2)}(x_1,\dots,x_6)\ :\varphi(x_1)\dots\varphi(x_6):\ dx_1\dots dx_6 + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 4}} F_4^{(2)}(x_1,\dots,x_4) : \varphi(x_1)\dots\varphi(x_4):\ dx_1\dots dx_4 + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} F_2^{(2)}(x_1,x_2) : \varphi(x_1)\varphi(x_2):\ dx_1\, dx_2 + \frac{\lambda^2}{0!}F_0^{(2)}, \end{aligned}$$

де, врахувавши (20.42) та визначення (22.43), (22.46), вирази для $F_N^{(2)}$, $N = 0,2,4,6,8$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} F_8^{(2)}(x_1,\dots,x_8) &= \frac{(-i)^2}{2!}\sum_{\pi\in P_8}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dy_1\, dy_2\ \delta(x_{\pi(1)}-y_1)\dots \\ &\dots\ \delta(x_{\pi(4)}-y_1)\,\delta(x_{\pi(5)}-y_2)\dots\delta(x_{\pi(8)}-y_2), \end{aligned} \tag{22.49}$$

$$\begin{aligned} F_6^{(2)}(x_1,\dots,x_6) = \frac{(-i)^2\cdot 16}{2!}\sum_{\pi\in P_6}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dy_1 dy_2 \delta(x_{\pi(1)}-y_1)\delta(x_{\pi(2)}-y_1)\delta(x_{\pi(3)}-y_1)\times \\ \times\ \frac{1}{i}D^c(y_1-y_2)\delta(x_{\pi(4)}-y_2)\delta(y_2-x_{\pi(5)})\delta(y_2-x_{\pi(6)}), \end{aligned} \tag{22.50}$$

$$\begin{aligned} F_4^{(2)}(x_1,\dots,x_4) &= \frac{(-i)^2\cdot 72}{2!}\sum_{\pi\in P_4}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dy_1 dy_2\,\delta(x_{\pi(1)}-y_1)\,\delta(x_{\pi(2)}-y_1)\times \\ &\times\ \left(\frac{1}{i}D^c(y_1-y_2)\right)^2\delta(y_2-x_{\pi(3)})\,\delta(y_2-x_{\pi(4)}). \end{aligned} \tag{22.51}$$

$$\begin{aligned} F_2^{(2)}(x_1,x_2) &= \frac{(-i)^2\cdot 96}{2!}\sum_{\pi\in P_2}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dy_1 dy_2\,\delta(x_{\pi(1)}-y_1)\times \\ &\times\ \left(\frac{1}{i}D^c(y_1-y_2)\right)^3\delta(y_2-x_{\pi(2)}) \end{aligned} \tag{22.52}$$

і, нарешті,

$$F_0^{(2)} = \frac{(-i)^2\cdot 24}{2!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dy_1 dy_2\ \left(\frac{1}{i}D^c(y_1-y_2)\right)^4. \tag{22.53}$$

Тепер можна зрозуміти, що для $N = 8, 6, 2$, $n_0 = 2$, а для $N = 0$ треба покласти, що

$$F_0^{(0)} = 1,$$

тобто $n_0(0) = 0$. Виконуючи такі самі операції з S_3, S_4, і т.д. і формально просумовуючи члени з однаковими N, отримаємо розклад (22.43) з F_N, що виражається рядом (22.46). Описану вище процедуру називають *приведенням S-оператора до нормальної форми.*

Зауваження 22.3. *Легко пересвідчитись, що коефіцієнтні функції є сингулярними узагальненими функціями. Більше того, внаслідок трансляційної інваріантності функції $D^c(x-y)$ інтеграл (22.53) є розбіжним, тобто $F_0^{(2)}$ пропорційна безмежній константі. Але, як буде далі з'ясовано, суми всіх вакуумних вкладів F_0 (ряд (22.46) при $N = 0$) є множником перед кожною коефіцієнтною функцією, тобто*

$$F_N(x_1, \ldots, x_N) = F_0 \cdot F'_N(x_1, \ldots, x_N), \tag{22.54}$$

а F_0 – повна амплітуда переходу вакуум-вакуум. Для більшості теорій можна обчислити, що

$$F_0 = e^{i\varphi_0},$$

де φ_0– дійсна безмежна константа, тобто F_0 є уявною і на імовірність переходу не буде впливати [102, гл. 14, § 2]. Для того, щоб позбутися розбіжностей, пов'язаних із вакуумними вкладами, треба у проміжних викладах розглядати оператор $S(g)$, заданий формулою (22.41).

22.3.2. Інваріантність матриці розсіяння відносно перетворень Лоренца і перетворень зарядового спряження

Важливою фізичною умовою є релятивістська коваріантність. Це означає, що визначення оператора розсіяння формулою (22.17) залишається таким самим і для перетворених амплітуд станів, тобто

$$\Psi'_{out} = S\Psi'_{in} \quad \text{або} \quad \Phi'_{out}(+\infty) = S\Phi'_{in}(-\infty), \tag{22.55}$$

де

$$\Phi'(\pm\infty) = U_L\Phi(\pm\infty),$$

а U_L—лінійний, унітарний оператор, що відповідає перетворенню Лоренца L (1.20) і задає представлення групи Лоренца у просторі станів. Тоді, порівнюючи (22.17) і (22.55), закон релятивістської інваріантності матиме вигляд

$$S = U_L^{-1} S U_L. \tag{22.56}$$

Запишемо також закон перетворення для випадку, коли взаємодія буде внесена з інтенсивністю $g(x)$. Тоді необхідно врахувати, що при перетворенні Лоренца (1.20) змінюється і сама функція $g(x)$. Але з фізичних міркувань зрозуміло, що в системі координат $\{x'\}$ область взаємодії повинна бути тією самою,

тобто

$$g(x) \to g'(x') = g(x)$$

або

$$g'(x) = g(L^{-1}x) := \widehat{L}g. \tag{22.57}$$

Отже, закон перетворення амплітуди буде таким:

$$\Phi(g) \to \Phi'(g') = U_L\Phi(g).$$

А означення оператора $S(g)$ для цього випадку має вигляд

$$\Phi'_{out}(g') = S(g')\Phi'_{in}(g')$$

або

$$\Phi_{out}(g) = S(g)\Phi_{in}(g).$$

Звідси, враховуючи вираз (22.57), маємо

$$S(\widehat{L}g) = U_L S(g) U_L^{-1}.$$

З умови (22.56) та умови релятивістської інваріантності операторів поля (14.13) легко отримати умови релятивістської інваріантності для коефіцієнтних функцій (задача 22.2):

$$(\det\,\Lambda)^{|\mathbf{N}|} F_{\mathbf{N}}(Lx\,|\,\mathbf{j}')(S_L)_{\mathbf{j}'\mathbf{j}} = F_{\mathbf{N}}(x\,|\,\mathbf{j}),$$

де $S_L = S(\Lambda, a)$ визначені формулою (1.24). Запишемо також умову інваріантності оператора розсіяння відносно операції зарядового спряження:

$$U_{\widehat{C}}^{-1} S U_{\widehat{C}} = S. \tag{22.58}$$

Ця рівність є наслідком рівнянь (18.10) і (22.39).

22.3.3. Унітарність оператора розсіяння

Одна з найбільш важливих властивостей S-оператора – його унітарність. Цю властивість легко довести, користуючись його представленням (22.19) через хвильові оператори і їх властивості ізометричності (22.16а),(22.16б).

Дійсно,

$$\begin{aligned} S^*S &= (\Omega_-^*\Omega_+)^*\Omega_-^*\Omega_+ = \Omega_+^*\Omega_-\Omega_-^*\Omega_+ = \\ &= \Omega_+^*\Omega_+ - \Omega_+^* P_b \Omega_+ = \mathbb{1} - 0 = \mathbb{1} \end{aligned} \tag{22.59а}$$

і

$$SS^* = \Omega_-^*\Omega_+\Omega_+^*\Omega_- = \Omega_-^*\Omega_- - \Omega_-^* P_b \Omega_- = \mathbb{1} - 0 = \mathbb{1}. \tag{22.59б}$$

Рівність нулю операторів $\Omega_{\pm}^{*} P_b \Omega_{\pm} \equiv 0$ є наслідком властивості ортогональності (22.12). Унітарність оператора S означає, що для кожного нормованого вектора Ψ_{in} існує єдиний нормований вектор Ψ_{out} і навпаки. Факт унітарності S-оператора відіграє дуже важливу роль при побудові перенормованої матриці розсіяння методом теорії збурень, а також при доведенні дисперсійних співвідношень. У звязку з цим необхідно переписати умову унітарності

$$S(g) \overset{*}{S}(g) = \overset{*}{S}(g) S(g) = \mathbb{1} \tag{22.60}$$

на мові коефіцієнтів розкладу – операторів $S_n(x)_n$. Підставимо розклад (22.40) в умову (22.60) і застосуємо відому формулу пересумування рядів. Остаточно отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \int S_k(x_1, ..., x_k) \overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1}, ..., x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \mathbb{1}, \tag{22.61}$$

яка повинна виконуватися для довільної функції $g(x)$. Для того, щоб записати умови унітарності безпосередньо для операторів $S_n(x)_n$, перепишемо (22.61) у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \sum_{k=0}^{n} \sum_{\pi} S_k(x_{\pi_1}, ..., x_{\pi_k}) \overset{*}{S}_{n-k}((x)_n \backslash \{x_{\pi_1}, ..., x_{\pi_k}\}) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0,$$

де член з $n = 0$ скоротився з одиничним оператором у правій частині, а множник $n!/k!(n-k)!$ переписаний за допомогою суми всіх можливих відображень множини індексів $\{1, ..., n\}$ у множину $\{\pi_1, ..., \pi_k\}$, користуючись симетричністю $S_n(x_1, ..., x_k)$ і $\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1}, ..., x_n)$ за своїми аргументами. Тоді, внаслідок довільності функції $g(x)$, остаточно отримаємо нескінченну систему рівнянь ($n \geq 1$):

$$S_n(x_1, ..., x_n) + \overset{*}{S}_n(x_1, ..., x_n) + \tag{22.62}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\pi} S_k(x_{\pi_1}, ..., x_{\pi_k}) \overset{*}{S}_{n-k}((x)_n \setminus \{x_{\pi_1}, ..., x_{\pi_k}\}) = 0.$$

Наступним завданням є встановлення зв'язку між величинами, що вимірюються експериментально (диференціальними перерізами) і S-оператором. Але, перш ніж переходити до цього питання, встановимо ще одну важливу властивість оператора S, яка полягає у тому, що він зберігає енергію падаючого пучка.

22.3.4. Закон збереження енергії

При побудові S-оператора припускалося, що частинки падаючого пучка і частинки розсіяного пучка є вільними, тобто не взаємодіють між собою. Отже, їх енергія є кінетичною енергією вільних частинок:

$$E_{in} = (\Psi_{in}, H_0, \Psi_{in}), \quad E_{out} = (\Psi_{out}, H_0, \Psi_{out}).$$

Тоді основним твердженням цього підпункту є:

твердження 22.1. *Якщо частинки, що падають на мішень, і частинки, що розсіюються, є вільними, то*

$$E_{in} = E_{out}. \tag{22.63}$$

Доведення. З означення (22.17) і унітарності оператора S (див. (22.59а),(22.59б)) випливає, що рівність (22.63) еквівалентна тому факту, що S комутує з H_0:

$$SH_0 = H_0S. \tag{22.64}$$

Щоб довести рівність (22.64), розглянемо тотожність

$$e^{iH\tau}e^{iHt}e^{-iH_0t} = e^{iH(t+\tau)}e^{-iH_0(t+\tau)}e^{iH_0\tau},$$

або в термінах операторів $U(t)$, $U_0(t)$ (див. (22.2), (22.4)):

$$e^{iH\tau}\overset{*}{U}(t)U_0(t) = \overset{*}{U}(t+\tau)U_0(t+\tau)e^{iH_0\tau}. \tag{22.65}$$

Легко пересвідчитись: якщо границі (22.10) існують, то в (22.65) також можемо перейти до границь $t \to \mp\infty$. Тоді отримаємо, що

$$e^{iH\tau}\Omega_\pm = \Omega_\pm e^{iH_0\tau}.$$

Звідси, диференціюючи за τ і покладаючи $\tau = 0$, маємо

$$H\Omega_\pm = \Omega_\pm H_0. \tag{22.66}$$

Звичайно ж, рівність (22.66) буде виконуватись уже не на всіх векторах із $\mathscr{H}$, а лише на області визначення $\mathscr{D}(H) \cap \mathscr{D}(H_0)$.

Тепер видно, що (22.64) слідує безпосередньо з означення (22.19) формули (22.66) і самоспряженості операторів H і H_0 (задача 22.3).

Твердження доведене. □

Зауваження 22.4. *Важливою умовою для фізичних процесів, у тому числі і процесів розсіяння, є умова причинності. Вона означає: будь-яка подія, що відбулася в момент часу x^0, у точці* **x** *може вплинути на подію, що відбудеться в момент часу $y^0 > x^0$ у точці* **y** *лише тоді, коли $(x-y)^2 \geqslant 0$. Цю умову сформульовано мовою польових операторів у вигляді постулату* **ПК6** *(див. підпункт 14.3). Її можна також записати у вигляді деякого операторного рівняння у варіаційних похідних*[1] *для матриці розсіяння $S(g)$. Вона має вигляд*

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(g)}\overset{*}{S}(g)\right) = 0 \quad \textit{при} \quad x \lesssim y, \tag{22.67}$$

[1]Означення варіаційної похідної дивись у § 24 (зауваження 24.2).

де $x \lesssim y$ означає, що $x^0 < y^0$, і $(x-y)^2 < 0$. Тобто події, що відбулися в точках x, $y \in \mathbb{M}^4$, розділені просторовоподібним інтервалом, і подія у точці $\mathbf{x}$ *відбулася раніше.*

Детальне обґрунтування рівняння (22.67) можна знайти п.17.5 монографії [13]. Умов релятивістської інваріантності, унітарності і причинності досить для того, щоб побудувати ряд теорії збурень для оператора $S(g)$ у вигляді (22.39). Саме такий метод був застосований у праці [13] (див. § 18).

22.3.5. Матричні елементи S-оператора і амплітуда розсіяння

Для того, щоб мати зв'язок теорії і експерименту, треба отримати робочі формули, що пов'язують ефективні перерізи процесів розсіяння і матричні елементи матриці розсіяння між початковим і кінцевим станами. Перш ніж вивести ці формули, треба зауважити, що будемо спиратися на деякі припущення, які, взагалі кажучи, не є сумісними з фізичної точки зору. Так, наприклад, вважається, що усі частинки падаючого на мішень пучка вільні (стан системи до процесу взаємодії (розсіяння) є власним станом оператора вільної енергії H_0). Звичайно ж, не можна виключити взаємодію між частинками пучка. Такий самий прийом застосовують і при визначенні матриці розсіяння S. Нехай початковий стан системи описується амплітудою Φ_s, де s означає число видів частинок, що рухаються як вільні при $t = -\infty$.

Для того, щоб зробити виклади математично коректними і фізично послідовними, будемо вважати, що у далекому минулому і на великих відстанях від мішені (або від місця, де відбувається процес розсіяння) частинки рухаються як вільні, а їх взаємодія відбувається у просторово-часовому кубі $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{M}^4$ ($|\widetilde{\Lambda}| = VT$). Така ситуація забезпечується введенням у гамільтоніан взаємодії функції $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ (див. (21.25)—(21.27)), а також функції $g(x)$ (див. (21.28)) у вираз дії для матриці розсіяння. Для амплітуд початкового і кінцевого стану зручно застосувати періодичну апроксимацію операторів поля (дивись, наприклад, [13, § 3.3] або [68, § 12.1]).

Задамо за допомогою такої апроксимації початкову амплітуду Φ_s. У випадку одночастинкового стану таку амплітуду можна записати у вигляді

$$\Phi_1^\Lambda = \int \tilde{\chi}^\Lambda_{\mathbf{k},\sigma}(\mathbf{p}) a^+_\sigma(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}\, \Omega_0 = V^{1/2} a^+_{\sigma,\Lambda}(\mathbf{k})\Omega_0,$$

де $a^+_\sigma(\mathbf{p})$ – оператор народження вільної частинки з імпульсом $\mathbf{p}$ і дискретними квантовими числами σ. Функція

$$\tilde{\chi}^\Lambda_{\mathbf{k},\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^{3/2}} \chi_{\mathbf{k},\Lambda}(\mathbf{p}),$$

де $\chi_{\mathbf{k},\Lambda}(\mathbf{p})$ — індикатор куба $I_{\mathbf{k},\Lambda}$, виконує роль хвильової функції частинки в імпульсному представленні (див. [13, §22]). При $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^3$ $\tilde{\chi}^\Lambda_{\mathbf{k},\sigma} \to (2\pi)^{3/2}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$.

Внаслідок комутаційних (або антикомутаційних) співвідношень маємо

$$\|\Phi_1^\Lambda\|^2 = V, \tag{22.68}$$

тобто амплітуда буде нормованим вектором в одиниці об'єму.

Отже, у границі безмежного об'єму одночастинковий стан можна записати у вигляді

$$\Phi_1 \equiv \Phi_{\mathbf{k}_1} = (2\pi)^{3/2} a_\sigma^+(\mathbf{k}_1)\Omega_0.$$

Тоді амплітуда стану, що складається з L_1 частинок першого виду з імпульсами $k_1^{(1)}, \ldots, k_{L_1}^{(1)}$ і квантовими числами $j_1^{(1)}, \ldots, j_{L_1}^{(1)}, \ldots$, з L_s частинок s-го виду з імпульсами $k_1^{(s)}, \ldots, k_{L_s}^{(s)}$ і квантовими числами $j_1^{(s)}, \ldots, j_{L_s}^{(s)}$, має вигляд

$$\Phi_s^\Lambda = V^{|L|/2} \prod_{n=1}^{s} \prod_{m_n=1}^{L_n} a^+_{\sigma_{m_n}^{(n)},\Lambda}\left(\mathbf{k}_{m_n}^{(n)}\right) \Omega_0. \tag{22.69}$$

Аналогічним виглядає стан f-видів частинок після розсіяння

$$\Phi_f^\Lambda = V^{|M|/2} \prod_{n=1}^{f} \prod_{m_n=1}^{M_n} a^+_{\sigma_{m_n}^{\prime(n)},\Lambda}\left(\mathbf{k}_{m_n}^{\prime(n)}\right) \Omega_0 \tag{22.70}$$

або у границі безмежного об'єму

$$\Phi_s = (2\pi)^{3|L|/2} \prod_{n=1}^{s} \prod_{m_n=1}^{L_n} a^+_{\sigma_{m_n}^{(n)}}(\mathbf{k}_{m_n}^{(n)})\Omega_0, \tag{22.71}$$

$$\Phi_f = (2\pi)^{3|M|/2} \prod_{n=1}^{f} \prod_{m_n}^{M_n} a^+_{\sigma_{m_n}^{(n)}}(\mathbf{k}_{m_n}^{\prime(n)})\Omega_0. \tag{22.72}$$

Залежно від ситуації будемо користуватись або формулами (22.69),(22.70), або ж формулами (22.71),22.72). В обчисленнях, які пов'язані з імовірнісною інтерпретацією, треба використовувати амплітуди, нормовані на одиницю. Тому з математичної точки зору більш коректно спершу скористатись скінченно об'ємною апроксимацією, а потім перейти до термодинамічної границі ($V \to \infty$) у кінцевій функції.

Далі потрібно записати матричний елемент

$$(\Phi_f,\ S(g)\Phi_s), \tag{22.73}$$

де $S(g)$ — матриця розсіяння із взаємодією, включеною з інтенсивністю g. $S(g)$ визначається через оператор $U(t_2, t_1; g)$, який будується за допомогою оператора $H(g)$ і формул (22.28) або (22.34), (22.35) з

$$t_1 = \min\{t \mid t \in T\}, \quad t_2 = \max\{t \mid t \in T\}.$$

Треба зауважити, що включення і виключення взаємодії в деякі визначені моменти t_1 і t_2 приводить до невизначеності енергії падаючих розсіяних частинок внаслідок співвідношення невизначеності Гейзенберга $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Тому більш послідовним є поступове або, як його називають, *адіабатичне* включення взаємодії, яке полягає у тому, що замість $H_I(t)$ у рівнянні для визначення $U(t, t_0)$ треба взяти $e^{-\varepsilon |t|} H_I(t)$, а в остаточних формулах спрямувати ε до нуля.

Але з точки зору розрахунків буде зручніше користуватися функцією (21.28). Тоді оператор $S(g)$ буде мати вигляд (22.42) із коефіцієнтними функціями $F_{\mathbf{N}}(g; (x\,|\,\mathbf{j})_{\mathbf{N}})$, причому

$$F_{\mathbf{N}}(g; (x\,|\,\mathbf{j})_{\mathbf{N}}) \xrightarrow{g \to 1} F_{\mathbf{N}}(x\,|\,\mathbf{j})_{\mathbf{N}}.$$

З технічних причин вигляд матричного елемента зручніше записати при $g = 1$, оскільки тоді функція $F_{\mathbf{N}}(x\,|\,\mathbf{j})_{\mathbf{N}}$ є трансляційно-інваріантною функцією за змінними $(x)_{\mathbf{N}}$.

Для того, щоб обчислити матричний елемент (22.73), зауважимо, що згідно з (15.2),(16.2), вільні поля $u_j(x)$ можна представити у вигляді

$$u_j(x) = u_j^+(x) + u_j^-(x),$$
$$u_j^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{\pm ip\cdot x} \widetilde{u}_j^\sigma(\mathbf{p}) a_\sigma^\pm(\mathbf{p}),$$

а їх комутатори (чи антикомутатори) з операторами $a_\sigma^\pm(\mathbf{k})$ мають вигляд

$$[u_j^\pm(x), a_\sigma^\mp(\mathbf{k})]_\varepsilon = (\mp 1)^{\delta_{-1,\varepsilon}} e^{\pm ik\cdot x} \widetilde{u}_j^{\sigma,\pm}(\mathbf{k}), \tag{22.74}$$

де при $\varepsilon = -1$ (або просто $-$) береться комутатор і $\delta_{-1,\varepsilon} = +1$, а при $\varepsilon = +1$ – антикомутатор і $\delta_{-1,\varepsilon} = 0$.

Величини $\widetilde{u}_j^\sigma(\mathbf{k})$ є звичайними функціями:

• для скалярного поля

$$\widetilde{u}_j^{\sigma,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}; \tag{22.75}$$

• для спінорних полів (див. (16.2))

$$\widetilde{u}_j^{\sigma,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v^{\sigma,\pm}(\mathbf{k}) \quad \text{або} \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{v}^{\sigma,\pm}(\mathbf{k}); \tag{22.76}$$

• для векторних полів

$$\widetilde{u}_\mu^{a,\pm}(\mathbf{k}) = \frac{e_\mu^a(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}, \tag{22.77}$$

де $e_\mu^a(\mathbf{k})$ є амплітудами відповідних поляризацій.

Детальніше поговоримо про ці функції при розгляді конкретних моделей КЕД або КХД.

Підставляючи тепер вирази (22.42), (22.71) і (22.72) в (22.73) при $g = 1$ і враховуючи, що в сумі (22.42) зберігається лише член із $|\mathbf{N}| = |\mathbf{L}| + |\mathbf{M}|$ і оператори, що відповідають видам падаючих і розсіяних частинок, отримуємо вираз

$$\begin{aligned}(\Phi_f, S(1)\Phi_s) &= (2\pi)^{\frac{3N}{2}} \int\limits_{\mathbb{M}^{4|\mathbf{N}|}} (dx')^{|\mathbf{M}|}(dx)^{|\mathbf{L}|} \prod_{n=1}^{f}\prod_{m'=1}^{M_n} \widetilde{u}^{\sigma'^{(n)}_{m'}}_{j^{(n)}_{m'}}(\mathbf{k}'^{(n)}_{m'}) e^{ik'^{(n)}_{m'}\cdot x'^{(n)}_{m'}} \times \\ &\times F_{\mathbf{M},\mathbf{L}}((x' \,|\, j')_{\mathbf{M}};\, (x \,|\, j)_{\mathbf{L}}) \prod_{n=1}^{s}\prod_{m'=1}^{L_n} \widetilde{u}^{\sigma^{(n)}_{m_n}}_{j^{(n)}}(\mathbf{k}^{(n)}_m) e^{ik^{(n)}_m\cdot x^{(n)}_m}. \qquad (22.78)\end{aligned}$$

Зауваження 22.5. *Матричний елемент $(\Phi_f, S(1)\Phi_s)$ буде також відмінний від нуля і у випадку, коли $|\mathbf{L}| + |\mathbf{M}| > |\mathbf{N}|$, але при цьому один чи декілька операторів народження в амплітуді Φ_s збігаються з аналогічними операторами в амплітуді Φ_f і мають такі самі імпульси. Але це фактично означає, що частинки, які відповідають цим операторам з імовірністю одиниці, пролітають повз мішень, не беручи участі у розсіянні, Тому надалі будемо вважати, що частинки однакового виду до розсіяння і після мають різні значення імпульсів.*

Внаслідок умови (22.56) коефіцієнтні функції є трансляційно-інваріантними узагальненими функціями. Це означає, що матричний момент (22.78) має таку структуру:

$$\begin{aligned}(\Phi_f, S(1)\Phi_s) &= \delta\left(-\sum_{n=1}^{f}\sum_{m=1}^{L_n} k'^{(n)}_{m'} + \sum_{n=1}^{s}\sum_{m'=1}^{M_n} k^{(n)}_m\right) \times \\ &\times \mathscr{F}_{\mathbf{ML}}((k' \,|\, j')_{\mathbf{M}}\,; (k \,|\, j)_{\mathbf{L}}), \qquad (22.79)\end{aligned}$$

де $\mathscr{F}_{\mathbf{ML}}$ – перетворення Фур'є функцій $F_{\mathbf{ML}}$, домножених на $\widetilde{u}^{\sigma}_{j}$. Функції $\mathscr{F}_{\mathbf{ML}}$ називають амплітудами розсіяння, а δ-функція перед амплітудою $\mathscr{F}_{\mathbf{ML}}$ виражає закон збереження енергії-імпульсу пучка падаючих на мішень частинок. Структура самих функцій $\mathscr{F}_{\mathbf{ML}}$ стане прозорою, коли будемо обчислювати їх за теорією збурень. Зауважимо також, що інколи амплітудою називають функцію, яка є просто перетворенням Фур'є коефіцієнтної функції $F_{\mathbf{ML}}$ (після виділення δ-функції) і не включає множників $u^{\sigma}_{j}(\mathbf{k})$.

22.4. Діаграми Фейнмана

У попередніх пунктах були записані аналітичні вирази для матриці розсіяння у кожному порядку теорії збурень, якщо заданий вигляд лагранжіана взаємодії. Основним технічним прийомом є приведення ряду теорії збурень (22.36),(22.37) до нормального виду за допомогою теореми Віка для T-добутку.

Користуючись цією теоремою, легко встановити, що n-й порядок теорії збурень $S_n(x_1, \dots, x_n)$ (див. (22.37)) дорівнює сумі нормальних добутків лагранжіанів $\mathscr{L}(x_1), \dots, \mathscr{L}(x_n)$ з усіма можливими хронологічними спареннями операторів, що входять в означення лагранжіана (включаючи і член без спарення), помножені на $(i\lambda)^n$. Можна, однак, уникнути багаторазового повторення процедури застосування теореми Віка і скористатись методом графічного зображення громіздких аналітичних формул, увівши правила відповідності, які отримали назву *діаграм Фейнмана*. Такі правила були вперше запропоновані американським вченим Р. Фейнманом (R. Feynman) у 1949 році [94,95]. Запишемо ці правила спершу для S-оператора, точніше, для його розкладу у ряд теорії збурень, а потім встановимо аналогічні правила для матричних елементів, що відповідають конкретним процесам розсіяння.

22.4.1. Діаграми Фейнмана для S-оператора

Зі сказаного вище зрозуміло: правила відповідності між аналітичними виразами, що утворюються внаслідок теореми Віка, і діаграмами Фейнмана залежатимуть від вигляду лагранжіана $\mathscr{L}(x)$, тобто від кількості і виду полів, які входять в означення лагранжіану. У наступних розділах розглянемо усі можливі види полів, а зараз для простоти викладів знову зосередимось на прикладі найпростішого поля, тобто дійсного скалярного поля із самовзаємодією (21.3). У даному випадку досить буде ввести лише три правила відповідності. Кожному спаренню двох операторів $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$, аналітичний вираз якого задається формулою (20.42), домовимось ставити у відповідність, тобто зображати на діаграмі, суцільну або (у випадку декількох типів полів, якщо суцільна лінія задіяна для позначення спарення інших полів) пунктирну лінію

x y ,   (22.80)

яка є внутрішньою лінією діаграми. Кожному вільному оператору лінію

x ,   (22.81)

яка є зовнішньою лінією діаграми, а кожній вершині множник $(-i\lambda)$. Тоді легко бачити, що, наприклад, операторно-значній узагальненій функції $S_1(x_1)$ (див. (22.44)) відповідає діаграма

$x_1,$

(22.82)

а операторно-значній узагальненій функції $S_2(x_1, x_2)$ (див. (22.48)) – діаграми (рис. 22.1 а – –д)

x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2

, , ,

а б в

x_1 x_2 x_1 x_2

, .

г д

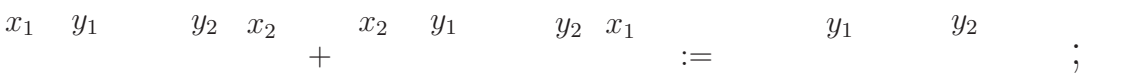
Рис. 22.1

Треба зауважити, що кратність, з якою кожна діаграма входить у відповідний вираз для $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ обчислюється комбінаторним шляхом згідно з правилами теореми Віка.

22.4.2. Діаграми Фейнмана для коефіцієнтних функцій S-оператора

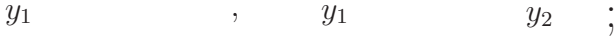
Коефіцієнтні функції пов'язані з конкретними процесами розсіяння, а саме з амплітудами розсіяння відповідних процесів. Фактично їх перетворення Фур'є з точністю до деяких множників буде збігатися з матричними елементами S-оператора між початковим і кінцевим станами відповідного процесу розсіяння. Тому для повноти картини наведемо також правила відповідності між аналітичними виразами для коефіцієнтних функцій $F_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N)$ у n-му порядку за теорією збурень. Кожній такій функції буде відповідати сума діаграм (з відповідними кратностями), внески яких обчислюватимемо таким чином. Усі діаграми, що відповідають $F_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N)$, матимуть n внутрішніх вершин $y_1, \ldots, y_n$ і N зовнішніх вершин $x_1, \ldots, x_N$. *Зовнішньою вершиною* будемо називати вершину, яка з'єднана з діаграмою лише однією лінією. Кожній лінії, що з'єднує дві внутрішні вершини, $y_1 \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, y_2$, відповідатиме причинна функція $\dfrac{1}{i} D^c(y_1 - y_2)$; кожній лінії, що з'єднує зовнішню вершину з внутрішньою, $y_1 \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, x_1$,–$\delta$-функція Дірака (а точніше, їх добуток за кожною компонентою координати) $\delta(y_1 - x_1)$. Кожній внутрішній вершині буде відповідати множник $(-i\lambda)$, а кожній зовнішній—1.

У кожній внутрішній вершині виконується інтегрування по всьому простору $\mathbb{M}^4$. Отже, згідно з цими правилами, виразу для $F_0^{(2)}$ (див. (22.53)) відповідає діаграма д на рис. 22.1, виразу $F_2^{(2)}(x_1, x_2)$ (див. (22.52))—діаграми



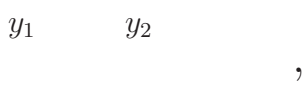
(22.83)

виразам $F_4^{(1)}(x_1,\ldots,x_4)$ і $F_4^{(2)}(x_1,\ldots,x_4)$(див.(22.47), (22.51))—відповідно діаграми



а б (22.84)

виразу $F_6^{(2)}(x_1,\ldots,x_6)$ (див. (22.50))—діаграму



(22.85)

а виразу $F_8^{(2)}(x_1,\ldots,x_8)$ (див. (22.49))—діаграми



(22.86)

Кружальця на зовнішніх лініях означають, що ця діаграма відповідає сумі вкладів, що беруться з усіма можливими перестановками зовнішніх змінних $x_1,\ldots,x_N$, щоб забезпечити симетричність коефіцієнтних функцій (для зовнішніх ліній, що відповідають Фермі частинкам, кружальце буде означати антисиметризатор).

22.4.3. Діаграми Фейнмана для матричних елементів S-оператора

Для обчислень амплітуд конкретних процесів розсіяння елементарних частинок техніку діаграм Фейнмана можна перенести для запису матричних елементів S-оператора за теорією збурень. У підпункті 22.3.5 вже фактично були зроблені усі попередні виклади. Було встановлено: якщо початковий і кінцевий стан задати за допомогою амплітуд (22.71),(22.72), то процедура запису матричних елементів зведеться до обчислення комутаторів (чи антикомутаторів) усіх операторів народження, що входять в означення амплітуд Φ_s і Φ_f (див. (22.71),(22.72)), і операторів знищення, що входять в означення (22.42). Результат таких комутацій задається формулою (22.74), де функції $\widetilde{u}_j^\sigma(\mathbf{k})$ залежать від типу полів

і представлені формулами (22.75)—(22.77) для основних типів полів. У випадку дійсного скалярного поля $\widetilde{u}_j^\sigma(\mathbf{k})$ задається формулою (22.75). Так само, як і у випадку, коли з операторно значними виразами $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ для $n=1,2$, зіставлялася діаграма (22.82) і діаграми, що зображені на рис. 22.1, для матричних елементів S-оператора можна встановити правила відповідності між їх аналітичним виглядом за теорією збурень і відповідними графічними зображеннями. Важливою особливістю цих зображень є той факт, що кожній зовнішній лінії такої діаграми відповідає реальна частинка в початковому або кінцевому стані процесу розсіяння. Внутрішні лінії діаграм відповідають так званим *віртуальним* станам частинок, тобто таким, що не можуть бути спостережуваними. Отже, діаграми Фейнмана для матричних елементів можна розглядати як відображення реальних процесів розсіяння, а точніше, реальних каналів взаємного перетворення частинок, кожний із яких дає відповідний внесок у повну імовірність конкретного процесу.

Для того, щоб зрозуміти ці правила відповідності, обчислимо матричний елемент S-оператора $(\Phi_s, S(1)\Phi_f)$ у другому порядку теорії збурень, тобто величину

$$(\Phi_s, S_2\Phi_f) \tag{22.87}$$

для випадку, коли початковий стан Φ_s і кінцевий стан Φ_f є станами, що відповідають двом вільним частинкам з імпульсом k_1, k_2 і k_1', k_2' відповідно, причому

$$k_i \neq k_j' \quad \text{для всіх} \quad i,j=1,2.$$

Як і у попередньому підпункті, розглянемо випадок самовзаємодії (21.3). Крім того, поки що не цікавитимемося питанням нормування амплітуд початкового і кінцевого стану, що треба розглядати залежно від умов конкретної задачі. Нехай початкова і кінцева амплітуди мають вигляд

$$\Phi_s = (2\pi)^3\varphi^+(\mathbf{k}_1)\varphi^+(\mathbf{k}_2)\Omega_0, \tag{22.88}$$

$$\Phi_f = (2\pi)^3\varphi^+(\mathbf{k}_1')\varphi^+(\mathbf{k}_2')\Omega_0. \tag{22.89}$$

Тоді, враховуючи (22.88), (22.89) і (22.48), а також означення нормального добутку (див., наприклад (14.32)), отримуємо для матричного елемента (22.87) вираз

$$\begin{aligned}(\Phi_f, S_2\Phi_s) &= 36(-i\lambda)^2(2\pi)^6 \int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dx_1dx_2 \left(\frac{1}{i}D^c(x_1-x_2)\right)^2 \Big(\varphi^+(\mathbf{k}_1')\varphi^+(\mathbf{k}_2')\Omega_0, \times \\ &\times \ [2\varphi^+(x_1)\varphi^+(x_1)\varphi^-(x_2)\varphi^-(x_2) + 4\varphi^+(x_1)\varphi^+(x_2)\varphi^-(x_1)\varphi^-(x_2)] \times \\ &\times \ \varphi^+(\mathbf{k}_1)\varphi^+(\mathbf{k}_2)\Omega_0\Big).\end{aligned}$$

Використаємо тепер комутаційні співвідношення (22.74), які у нашому випадку виглядають як

$$[\varphi^-(x), \varphi^+(\mathbf{k})]_- = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}e^{-ik\cdot x}, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}. \tag{22.90}$$

Застосувавши (22.90), будемо переставляти оператори $\varphi^-(x)$ з операторами $\varphi^+(\mathbf{k}_j)$ доти, доки оператори $\varphi^-(x_i)$ подіють на вакуумний вектор Ω_0, і отримаємо нульовий вклад. Внаслідок чого остаточно маємо

$$\begin{aligned}
(\Phi_f, S_2\Phi_s) &= \frac{288(-i\lambda)^2}{4(2\pi)^6\sqrt{k_1'^0k_2'^0k_1^0k_2^0}}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dp_1dp_2(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-p_1-p_2)\times\\
&\times \frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_1^2-i\varepsilon)}\,\frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_2^2-i\varepsilon)}\times\\
&\times (2\pi)^4\delta(p_1+p_2-k_1'-k_2')+\\
&+\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dp_1dp_2(2\pi)^4\delta(k_1-k_1'-p_1-p_2)\frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_1^2-i\varepsilon)}\times\\
&\times \frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_2^2-i\varepsilon)}(2\pi)^4(k_2-k_2'+p_1+p_2)+\\
&+\int\limits_{\mathbb{M}^{4\cdot 2}} dp_1dp_2(2\pi)^4\delta(k_1-k_2-p_1-p_2)\frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_1^2-i\varepsilon)}\times\\
&\times \frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_2^2-i\varepsilon)}(2\pi)^4\delta(k_2-k_1'+p_1+p_2)\Bigg]. \qquad (22.91)
\end{aligned}$$

При обчисленнях виразу (22.91) було вжито представлення причинної функції $D^c(x_1-x_2)$ у вигляді (20.9) і формулу

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{M}^4} dx e^{-ip\cdot x} = \delta(p) = \prod_{\mu=0}^{4}\delta(p^\mu). \qquad (22.92)$$

Якщо тепер не звертати увагу на числовий множник 288, легко зрозуміти, що аналітичний вираз (22.91) можна отримати, сумуючи внески від діаграм Фейнмана, зображених на рис. 22.2:

k_1 k_1' k_1 k_2'

k_1 p_1 k_1'

, p_1 p_2 , p_1 p_2 .

k_2 p_2 k_2'

k_2 k_2' k_2 k_1'

а б в

Рис. 22.2

Для цього треба використати наступні правила відповідності.

Кожній зовнішній лінії діаграми, що супроводжується імпульсом $k = (k^0, \mathbf{k})(k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2})$, відповідає фактор

$$k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}} \tag{22.93}$$

кожній внутрішній лінії—пропагатор

$$p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2 - p^2 - i\varepsilon)}\ , \tag{22.94}$$

а кожній вершині—δ-функція, що вказує на закон збереження енергії-імпульсу:

$$(-i\lambda)(2\pi)^4\delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} k_1 & & p_1 \\ & & \\ k_2 & & p_2 \end{matrix}\ . \tag{22.95}$$

По кожній із внутрішніх ліній проводиться інтегрування за 4-імпульсом, що "несе" ця лінія.

Зауважимо, що кратність внесків, тобто числовий множник, треба обчислювати комбінаторним способом, враховуючи теорему Віка і число комутувань операторів, що входять в амплітуди початкового і кінцевого станів з операторами виразу для $S_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Зауваження 22.6. *Легко помітити, що внески (22.91) від діаграм а, б і в (рис. 22.2) є нескінченними, оскільки інтеграли, що входять у визначення цих внесків, розбігаються при великих значеннях імпульсів. Внаслідок цього такі розбіжності отримали назву "ультрафіолетових розбіжностей".*

Проблеми, пов'язані з виникненням ультрафіолетових розбіжностей, і методи їх усунення будуть розглядатися в § 25.

22.5. Ефективні перерізи і матриця розсіяння

У даному пункті наведемо і обґрунтуємо основні формули, що пов'язують теоретичні обчислення фізичних процесів з їх характеристиками, які можна виміряти експериментально. Такими характеристиками процесів розсіяння елементарних частинок є диференціальні та повні ефективні перерізи. Для того, щоб загальні уявлення про них найадекватніше відображали реальну картину, почнемо з класичної теорії.

22.5.1. Класичні уявлення

Спершу вважатимемо, що частинки – це деякі маленькі кульки, потік яких налітає на диск дуже малого радіуса – мішень.

Нехай мішень має маленьку площу, меншу за одиничну (наприклад, 1 см^2), а кількість частинок, що налітає на одиницю площі за 1 сек, є $\bar{n}$. Тоді частина пучка буде пролітати повз мішень, а частина відхилятись завдяки зіткненню з мішенню. За означенням частка частинок, що відхиляється від напрямку руху і розсіюється під кутом θ до напрямку руху у деякий тілесний кут $\Delta\Omega$ за 1 сек, буде пропорційна $\bar{n}$:

$$\Delta N = \sigma(\theta;\Delta\Omega)\bar{n} = \sigma(\theta)\bar{n}\Delta\Omega, \tag{22.96}$$

де коефіцієнт пропорційності $\sigma(\theta)$ має розмірність площі, оскільки розмірність $[\bar{n}] = \text{см}^{-2}\ \text{сек}^{-1}$, а розмірність $[\Delta N] = \text{сек}^{-1}$. Величину $\sigma(\theta)$ або

$$d\sigma = \sigma(\theta)d\Omega \tag{22.97}$$

називають *диференціальним перерізом* процесу розсіяння. Зрозуміло, що повний переріз

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta)d\Omega. \tag{22.98}$$

Повний переріз визначає, яка частка падаючих частинок розсіюється при умові, що на одиницю площі мішені за одиницю часу падає одна частинка. У наведеному вище означенні σ_t буде збігатися з площею диска. У випадку, коли мішенню є окремий атом або навіть якась елементарна частинка, то розсіяння частинок буде відбуватись не внаслідок прямого зіткнення падаючих частинок із атомом або елементарною частинкою, а внаслідок їх взаємодії. Саме таку площу, всередині якої відбувається відхилення падаючих частинок, називають *ефективним перерізом* розсіяння. Звичайно, один окремий атом (чи елементарна частинка) не може бути мішенню. Мішенню може служити дуже тонка пластинка, наприклад, з товщиною d і площею S. Тоді, якщо позначити кількість атомів (що і є "елементарними мішенями") в одиниці об'єму через n, то кількість таких "елементарних мішеней"в одиниці площі пластинки дорівнює nd, а число частинок, що відхилилось внаслідок розсіяння згідно з (22.96)–(22.98)—

$$n\sigma_t\bar{n}d. \tag{22.99}$$

Яким чином можна виміряти диференціальний та повний ефективні перерізи процесу розсіяння?

Встановимо, що $\bar{n}(0)$ — це число частинок, що падає на одиницю площі мішені за 1 сек, а $\bar{n}(x)$ – така ж величина всередині мішені на відстані від її поверхні. Тоді $\bar{n}(x) - \bar{n}(x+\Delta x)$– число розсіяних частинок за час, коли вони пролітали відстань Δx. Тоді згідно з (22.99) маємо

$$\bar{n}(x) - \bar{n}(x+\Delta x) = n\sigma_t\bar{n}(x)\Delta x \tag{22.100}$$

співвідношення (22.100) при $\Delta x \to 0$ перетворюється у просте диференціальне рівняння, розв'язком якого є вираз

$$\bar{n}(x) = \bar{n}(0)e^{-n\sigma_t x}. \tag{22.101}$$

Треба зауважити, що формула (22.101) отримана з припущення, що кожна падаюча частинка "стикається" з "елементарною мішенню" лише один раз, тобто не відбувається багатократного розсіяння. Щоб це забезпечити, треба виготовити дуже тонку мішень. Отже, для дуже тонких мішеней (з заданими n і d), вимірюючи $\bar{n}(0)$ для падаючого пучка і $\bar{n}(d)$ для пучка, що проходить через мішень, можна визначити σ_t. Диференціальний переріз $\sigma(\theta)$ можна визначити, якщо виміряти відносну щільність потоку розсіяних частинок до падаючих на одиницю площі мішені для різних кутів розсіяння θ.

Наступний крок полягає у тому, що треба пов'язати величини σ_t і $\sigma(\theta)$ з фізичними характеристиками частинок. Такі формули дають можливість встановити зв'язок між теорією і експериментом.

Треба зауважити, що виведення формули для диференціальних перерізів найкраще проводити для кожного конкретного процесу і конкретно заданих умов експерименту. Ці формули можуть відрізнятись деякими множниками, що виникають внаслідок різних нормувань хвильових функцій початкового стану. Але в усіх випадках диференціальний переріз пропорційний квадрату *амплітуди розсіяння*, що визначається матричним елементом S-матриці між початковим і кінцевим станом. Найпростіше це можна показати на прикладі розсіяння плоских хвиль, що рухаються вздовж осі OX зі швидкістю $v = \dfrac{\hbar k}{m}$ $(k = k^{(1)})$:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik\cdot x}.$$

Тоді кількість частинок через одиничну площу за одиницю часу збігається з густиною течії частинок:

$$N_{in} = j_x = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial \overset{*}{\varphi}_k}{\partial x}\varphi_k - \overset{*}{\varphi}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right) = \frac{v}{(2\pi)^3}. \tag{22.102}$$

Остання формула є квантово-механічним аналогом (див.(3.35)) $\overset{*}{\varphi}_k \widehat{\mathbf{p}}/m\varphi_k$ класичного потоку ρv, де ρ —густина падаючих частинок, а v—їх швидкість. Щоб підрахувати кількість частинок ΔN_{out}, що проходять за одиницю часу через елемент поверхні ΔS, яка перебуває на відстані r під кутом θ від центру розсіяння, треба у формулі (22.102) замість φ_k взяти сферичну частину розсіяної хвилі (див. [46, гл. XVII]):

$$\chi_k(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta),$$

де $f(\theta)$ називається *амплітудою розсіяння.*

Таким чином, враховуючи лише члени, що спадають не швидше $1/r^2$, отримуємо:

$$\Delta N_{out} = j_r \Delta S = \frac{v}{(2\pi)^3} |f(\theta)|^2 \Delta\Omega,$$

де $\Delta\Omega = \dfrac{\Delta S}{r^2}$ — тілесний кут, під яким видно площину ΔS з точки розсіяння.

Отже, остаточно враховуючи формули (22.96),(22.97), маємо для диференціального перерізу

$$d\sigma = \sigma(\theta) d\Omega = |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

Звичайно, ця формула справедлива тільки при пружному розсіянні (швидкості падаючої і розсіяної хвилі є однакові), але, як побачимо нижче, залежність від амплітуди буде такою самою для загального випадку.

22.5.2. Квантовий випадок

З формули (22.96) легко пересвідчитись:якщо б стежити за розсіянням однієї частинки, тобто стежити, чи з'явиться вона в деякому тілесному куті $\Delta\Omega$, що лежить під кутом θ до напрямку руху падаючої частинки, то величини $\sigma(\theta)$ (при багатократному повторенні експерименту) визначали б імовірність такого розсіяння частинки.

Згідно з квантово-механічними уявленнями число розсіяних частинок в одиниці об'єму за одиницю часу, як і таких, що мають деякі випадкові імпульси $\mathbf{k}_1'^{(1)}, \ldots, \mathbf{k}_{M_f}'^{(f)}$ в інтервалах $d\mathbf{k}_1'^{(1)} \cdots d\mathbf{k}_{M_f}'^{(f)}$, можна обчислити за допомогою матричних елементів S-матриці. Для того, щоб зробити процедуру обчислення математично-коректною, треба знову скористатись скінченно-об'ємною апроксимацією для амплітуд початкового і кінцевого станів, а також S-оператором $S(g)$, тобто коли у деякому скінченному ящику $\Lambda(|\Lambda| = V)$ і в інтервалі часу $T = |[t_1, t_2]|$ взаємодія має інтенсивність g.

Отже, щільність імовірності, віднесена до одиничного інтервалу часу і одиничного об'єму, буде обчислюватись за формулою:

$$w_{fs}^{\Lambda} = L_1 \cdots L_s \frac{|(\Phi_f^{\Lambda}, S(g)\Phi_s^{\Lambda})|^2}{VT\|\Phi_f^{\Lambda}\|^2 \|\Phi_s^{\Lambda}\|^2}.$$

Також треба врахувати, що розглядаються лише ті частинки, що беруть участь в акті розсіяння, тобто змінюють свій імпульс, Це означає, що діагональний матричний елемент S-матриці дорівнює нулю , тобто ми фактично обчислюємо матричний елемент оператора $S(g) - 1$. Тоді, враховуючи (22.68)—(22.70), маємо

$$w_{fs}^{\Lambda} = n_1 \ldots n_s \frac{|(\Phi_f^{\Lambda}, [S(g) - 1]\Phi_s^{\Lambda})|^2}{VTV^{|\mathbf{N}|}},$$

де $n_1, \ldots, n_s$ — кількість частинок на одиницю об'єму для кожного виду падаючих на мішень пучків.

Щоб спростити обчислення, зауважимо, що в реальних експериментах як правило беруть один або два види початкових пучків, а в кінцевому стані отримують один, два, максимум три види частинок, Тому для простоти ми візьмемо $s = f = 2$. Далі врахуємо, що вигляд матричного елемента згідно з (22.79) має вигляд

$$(\Phi_f, [S(g) - 1]\Phi_s) = \tilde{g}(k_1 + k_2 - k_1' - k_2')\mathscr{F}_{2;2}(k_1, k_2, k_1', k_2'),$$

де $\tilde{g}(k)$ — перетворення Фур'є функції $g(x)$. Тому у границі $g(x) \to 1$ (при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^3$, $t_1 \to -\infty$, $t_2 \to +\infty$) функція $g(k) \to \delta(k)$, а $|\tilde{g}(k)|^2 \to \delta(k)\delta(k)$, що не має сенсу.

Але будемо вважати, що об'єм Λ, хоч і є дуже великий, але не безмежний, і замінимо $\delta^2(k)$ на

$$\delta(k)\tilde{g}(0) = \delta(k)\frac{1}{(2\pi)^4}\int g(x)dx \approx \delta(k)\frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

Врахуємо також, що число кінцевих станів для однієї квантової частинки, що перебуває у фазовому об'ємі $d\mathbf{k}\times\Lambda$, дорівнює $Vd\mathbf{k}/h^3 = Vd\mathbf{k}/(2\pi)^3$ ($\hbar = 1$). Тоді число розсіяних частинок в інтервалі імпульсів $dk_1'dr_2'$ дорівнюватиме

$$n_1 n_2 (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2') \,|\, \mathscr{F}_{22}(k_1, k_2, k_1', k_2')\frac{dk_1'}{(2\pi)^3}\frac{dk_2'}{(2\pi)^3}. \tag{22.103}$$

З іншого боку, враховуючи визначення диференціального ефективного перерізу (22.96) і те, що кількість частинок, яка падає на одиницю площі мішені (у нашому випадку мішенню є пучок частинок другого виду), за одиницю часу можна переписати через відносну швидкість пучків 1 і 2, маємо (див. також (22.99))

$$n_1 n_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma. \tag{22.104}$$

Порівнюючи (22.103) з (22.104), отримуємо зв'язок диференціального ефективного перерізу з амплітудою розсіяння

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{\delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2')}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}|\mathscr{F}_{22}(k_1, k_2, k_1', k_2')|^2 \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}. \tag{22.105}$$

Можна показати, що цей вираз є релятивістські-інваріантним (див. [3, § 18]).

§ 23. Рівняння для коефіцієнтних функцій S-матриці

У попередньому параграфі був визначений оператор розсіяння S і побудовано його представлення (22.36), (22.37) (або у скороченому записі (22.39)) за теорією збурень для заданого лагранжіана взаємодії. Але навіть для найбільш простої моделі самовзаємодіючого дійсного скалярного поля (21.3) аналіз внесків, що

відповідають другому порядку розкладу оператора S за константою взаємодії λ, показує: інтеграли, що відповідають цим внескам, є розбіжними при великих значеннях імпульсів, якщо розмірність простору-часу $d = s + 1 \geqslant 3$ (див. зауваження 22.6). Але, якщо навіть штучно усунути ці розбіжності, поклавши розмірність простору $s = 1$ (тобто $d = 2$), або обмежити інтегрування скінченим інтервалом, виникає інша проблема, пов'язана зі збіжністю ряду в цілому, навіть при дуже малих значеннях константи взаємодії λ. Ця проблема пов'язана з тим, що кількість можливих діаграм Фейнмана збільшується з порядком теорії збурень швидше, ніж $n!$ (для теорії (21.3) як $(n!)^2$). У таких випадках можна говорити лише про асимптотичність такого ряду (див. [79, § XII.4]) і відповідну процедуру сумування. У зв'язку з виникненням цієї проблеми важливим є вивчення S-оператора поза рамками теорії збурень. Одним із найбільш ефективних методів такого підходу є побудова і дослідження різних типів рівнянь для коефіцієнтних функцій F_N, які повністю визначають S-оператор. Уперше такі рівняння (виходячи з аналізу діаграм Фейнмана) були запропоновані у праці [66]. Пізніше, у працях [38,68] вони були виведені аналітично або ж із рівнянь Швінгера для функції Гріна, або самостійно з формальних рівнянь для S-оператора. У даному параграфі коротко опишемо процедуру виведення таких рівнянь, встановимо їх зв'язок із загальноприйнятою теорією збурень і коротко проаналізуємо методи, які дають змогу вийти за рамки теорії збурень. Докладніший аналіз цих рівнянь і їх дослідження можна знайти у монографії [68]. Перш ніж приступити до виведення рівнянь для коефіцієнтних функцій, розглянемо дві формальні операції над довільними віківськи впорядкованими функціоналами (ВВФ) типу (22.42), (22.43). Цим операціям відповідатимуть два формальні "оператори", що діють на коефіцієнтні функції ВВФ. Ця дія дуже нагадує дію операторів народження і знищення вільних полів у просторі Фока (див. ф-ли (19.40а,б)). У зв'язку з такою аналогією вони отримали назву операторів народження і знищення зовнішніх ліній діаграм Фейнмана (див. [68, § 11]).

23.1. Оператори народження і знищення зовнішніх ліній діаграм Фейнмана

Знову для простоти розглянемо лише випадок дійсного скалярного поля. Довільний ВВФ визначається формулою

$$W = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int\limits_{\mathbb{M}^{4N}} f_N(x_1, \ldots, x_N) : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N) : (dx)^N, \tag{23.1}$$

де $\varphi(x)$ – оператор вільного дійсного скалярного поля, а f_N – послідовність коефіцієнтних функцій, які однозначно задають W у просторі станів $\mathscr{H}$.

Зауважимо, що у випадку взаємодії (21.3) коефіцієнтні функції

$f_N(x_1,\dots,x_N)$ є симетричними функціями своїх аргументів, тобто

$$f_N(x_1,\dots,x_N)=f_N(x_{i_1},\dots,x_{i_N}), \tag{23.2}$$

де $\{i_1,\dots,i_N\}$ – довільна перестановка індексів $\{1,\dots,N\}$.

Визначимо два нових ВВФ вигляду

$$W_+(x)=:\varphi(x)W:,\quad W_-(x)=:\overbrace{\varphi(x)W}:.$$

Під спарюванням вільного поля $\varphi(x)$ з W треба розуміти суму всіх можливих спарювань оператора $\varphi(x)$ із кожним з операторів розкладу для W. Обчислимо коефіцієнтні функції нових функціоналів

$$W_+(x)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4N}} f_N(x)_N:\varphi(x)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N):(dx_1)^N=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4(N+1)}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\delta(x-x_i)f_N\big((x)_{N+1}\setminus\{x_i\}\big)\right]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{N+1})(dx)^{N+1}=$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4N}} f_N^{(+)}\big(x;(x)_N\big):\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N):(dx)^N. \tag{23.3}$$

У другій рівності (23.3) було використано симетричність коефіцієнтних функцій $f_N(x_1,\dots,x_N)$ і позначення, що скорочують запис (див. список позначень 1.). У третій рівності (23.3) перейшли спершу до сумування від $N=1$, а потім, поклавши $f_0^+=0$, знову до сумування від $N=0$.

Нова послідовність коефіцієнтних функцій $f_N^{(+)}$ визначається формулами

$$\begin{gathered} f_0^{(+)}=0,\\ f_N^{(+)}\big(x;(x)_N\big)=(a^+(x)f)_N(x_1,\dots,x_N)=\\ =\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)f_{N-1}\big((x)_N\setminus\{x_i\}\big),\ N\geq 1. \end{gathered} \tag{23.4}$$

Аналогічно для $W_-(x)$

$$W_-(x)=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4N}} f_N(x)_N\sum_{j=1}^{N}:\overbrace{\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_j)}\dots\varphi(x_N)(dx)^N=$$

$$=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{(N-1)!}\int\limits_{\mathbb{M}^{4(N-1)}}\left[\int\limits_{\mathbb{M}^4}\frac{1}{i}D^c(x-y)f_N\big(y,(x)_{N-1}\big)dy\right]:\varphi(x_1)\dots\varphi(x_{N-1}):\times$$

$$\times(dx)^{N-1} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int\limits_{\mathbb{M}^{4N}} f_N^{(-)}\big(x,(x)_N\big) : \varphi(x_1)\dots\varphi(x_N) : (dx)^N. \qquad (23.5)$$

Нова послідовність коефіцієнтних функцій $f_N^{(-)}$ визначається за формулою

$$f_N^{(-)}\big(x,(x)_N\big) = \big(a^-(x)f\big)_N(x)_N = \int\limits_{\mathbb{M}^4} \frac{1}{i} D^c(x-y) f_{N+1}\big(y,(x)_N\big)dy. \qquad (23.6)$$

"Оператори" $a^{\pm}(x)$ діють у просторі послідовностей

$$f = \{f_N(x_1,\dots,x_N)\}_{N=0}^{\infty}.$$

Якщо зробити перенормування

$$f_N \to \frac{1}{\sqrt{N!}} f_N,$$

то дія "операторів" $a^{\pm}(x)$ повністю нагадуватиме дію операторно-значних узагальнених функцій вільного скалярного поля (19.40а,б). Відмінність лише в тому, що для польового оператора $\varphi^-(x)$ треба написати функцію $\frac{1}{i}D^-(x)$ замість $\frac{1}{i}D^c(x)$.

У наступному пункті побачимо, що ряд теорії збурень для коефіцієнтних функцій F_N можна переписати за допомогою дії степенів "операторів" $a^{\pm}(x)$ на вакуумний вектор Ω_0. Тоді відповідно до правил Фейнмана, сформульованих у п. 22.4.2, оператор $a^+(x)$ буде породжувати внесок, що відповідає зовнішній лінії діаграми Фейнмана, а "оператор" $a^-(x)$ внесок, що відповідає внутрішній лінії діаграми Фейнмана, тобто буде знищувати зовнішню лінію, перетворюючи її у внутрішню.

Для виведення рівнянь потрібно ще розглянути ВВФ вигляду $T(\varphi(x)W)$. Тоді згідно з теоремою Віка для T-добутку отримаємо

$$T(\varphi(x)W) =: \varphi(x)W : + : \overbrace{\varphi(x)W}^{} : . \qquad (23.7)$$

Згідно з (23.3), (23.5) функціоналу (23.7) у просторі коефіцієнтних функцій буде відповідати "оператор"

$$a(x)f = a^+(x)f + a^-(x)f, \qquad (23.8)$$

де f — послідовність коефіцієнтних функцій ВВФ W.

Легко узагальнити це правило відповідності на більш складні ВВФ. Наприклад, аналогічно до (23.7) маємо

$$T(:\varphi^2(x):W) =: \varphi^2(x)W : +2 : \varphi(x)\overbrace{\varphi(x)W}^{} : + : \overbrace{\varphi(x)\overbrace{\varphi(x)W}^{}}^{} : .$$

Тоді послідовність відповідних коефіцієнтних функцій виглядає як

$$a^+(x)a^+(x)f + 2a^+(x)a^-(x)f + a^-(x)a^-(x)f =: a^2(x) : f,$$

де операція нормального добутку для "операторів" $a^{\pm}(x)$ визначається так само, як і для вільних полів $\varphi^{\pm}(x)$.

Нарешті, узагальнивши попередні обчислення, сформулюємо таке твердження (див. також задачу 23.1).

Пропозиція 23.1.

Нехай $P_n(\varphi(x))$ довільний вікіївський поліном ступеня n від вільного поля $\varphi(x)$. Тоді ВВФ-у $T(P_n(\varphi(x))W)$ буде відповідати послідовність коефіцієнтних функцій

$$P_n\big(a(x)\big)f, \tag{23.9}$$

де f – послідовність коефіцієнтних функцій ВВФ-а W.

На завершення зауважимо, що з формул (23.4) і (23.6) легко встановити формальні комутаційні співвідношення для "операторів" $a^{\pm}(x)$:

$$[a^-(x), a^+(y)]_- = \frac{1}{i}D^c(x-y).$$

Внаслідок парності функції $D^c(x)$ "оператори" $a(x)$ і $a(y)$ комутують

$$[a(x), a(y)]_- = 0$$

на відміну від операторів вільного поля, які комутують лише для просторово-подібних точок, тобто при $(x-y)^2 < 0$.

23.2. Рівняння резольвентного типу

З формули (22.39) легко отримати формальне співвідношення:

$$\frac{\delta S}{\delta u_i(x)} = i\lambda T\left(\frac{\partial \mathscr{L}_I}{\partial u_i(x)}S\right). \tag{23.10}$$

Функціональні похідні від S-оператора за квантовими полями визначаються як границі відповідних функціональних похідних за адитивними класичними додатками $\eta(x)$ (див. зауваження 24.2) до операторно значних функцій $u_i(x)$ при $\eta(x) \equiv 0$ (див. детальніше [13], гл. IX).

У випадку взаємодії (21.3) співвідношення (23.10) виглядатиме як

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} = -4i\lambda T\big(:\varphi^3(x):S\big).$$

Підставляючи сюди S у вигляді (22.43), у лівій частині маємо ВВФ виду (23.1) з коефіцієнтними функціями

$$f_N = F_{N+1}(x, x_1, \ldots, x_N),$$

а в правій частині ВВФ із коефіцієнтними функціями, що обчислюються формулою (23.9) згідно з пропозицією 23.1. Тобто отримуємо рівняння

$$F_{N+1}(x, x_1, \ldots, x_N) = -4i\lambda(:a^3(x):F)_N(x_1, \ldots, x_N)$$

або

$$F_N(x, x_1, \dots, x_{N-1}) = -4i\lambda\big(: a^3(x) : F\big)_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}). \tag{23.11}$$

Рівняння (23.11) можна записати таким чином (покладаючи $x = x_j$, а $x_j = x_N$ і користуючись (23.2)):

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = -4i\lambda\big(: a^3(x_j) : F\big)_{N-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N).$$

Просумовуючи за $j = 1, 2, \dots, N$, отримуємо рівняння (для $N \geqslant 1$)

$$F_N(x)_N = -4i\lambda \int\limits_{M^4} dx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)\big(: a^3(x) : F\big)_{N-1}\left((x)_N \setminus \{x_j\}\right), \tag{23.12}$$

або, враховуючи визначення "оператора" $a^+(x)$ (ф-ла (23.4)) і визначаючи оператор кількості частинок $\widehat{N}$ формулою

$$(\widehat{N}^{-1} f)_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} f_N, (x_1, \dots, x_N), \quad N > 0,$$

перепишемо (23.12) у вигляді ($N \geq 1$)

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = -4i\lambda \int\limits_{\mathbb{M}^4} dx\big(\widehat{N}^{-1} a^+(x) : a^3(x) : F\big)_N(x_1, \dots, x_N), \tag{23.13}$$

Врахуємо тепер розбиття (23.8). Тоді

$$: a^3(x) := (a^-(x))^3 + 3a^+(x)(a^-(x))^2 + 3a^-(x)(a^+(x))^2 + (a^+(x))^3. \tag{23.14}$$

Підставимо (23.14) у формулу (23.13) і використаємо формули (23.4) і (23.6). Отримаємо нескінченну систему співвідношень між коефіцієнтними функціями F_N:

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = -\frac{4i\lambda}{N} \sum_{k=1}^{4} C_3^{4-k} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k}^{N} \int\limits_{\mathbb{M}^4} dx \prod_{l=1}^{k} \delta(x_{i_l} - x) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{4-k} \frac{1}{i} D^c(x - y_j) F_{N-2k+4}\big((y)_{4-k}, (x)_N \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}\big), \tag{23.15}$$

де $N = 1, 2, 3, \dots$, а $F_{-k} \equiv 0$ для $k \geqslant 1$.

Крім того, з аналізу внесків за теорією збурень видно, що для теорії з лагранжіаном взаємодії (21.3) не існує діаграм Фейнмана з непарним числом зовнішніх ліній, тобто

$$F_{2k-1} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{23.16}$$

Тотожності (23.16) для $k = 2, 3, \dots$ випливають також із рівнянь (23.15). Отже, система рівнянь (23.15) справедлива для $N = 2, 4, \dots$. Треба також врахувати, що останній член рівняння (23.15) при $N = 4$ містить у собі константу F_0, яка

з визначення розкладу S-оператора (22.43) відповідає сумі внесків усіх вакуумних діаграм:

$$F_0 = (\Omega_0, S\Omega_0). \tag{23.17}$$

Систему (23.15) можна записати у вигляді одного операторного рівняння, якщо ввести послідовність

$$F = \big(0, 0, F_2(x_1, x_2), 0, F_4(x_1, \dots, x_4), \dots\big), \tag{23.18}$$

тобто

$$F_0 \equiv 0, \quad F_{2k-1} \equiv 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \dots$$

Позначимо через F^0 послідовність із

$$F_N^0(x_1, \dots, x_N) = \delta_{4N}(-i\lambda) \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_4}^{4} \int dx \prod_{l=1}^{4} \delta(x_{i_l} - x) F_0.$$

Легко переконатися, що член $F_4^0(x_1, \dots, x_4)$ відповідає першому члену розкладу коефіцієнтної функції $F_4(x_1, \dots, x_4)$ у ряд теорії збурень за λ (див. (22.47)), помноженому на F_0, тобто

$$F_4^0(x_1, \dots, x_4) = \lambda F_4^{(1)}(x_1, \dots, x_4) F_0. \tag{23.19}$$

Систему ж рівнянь (23.15) можна записати у вигляді одного операторного рівняння у просторі послідовностей (23.18):

$$F = \lambda B F + F^0, \tag{23.20}$$

де

$$B = -4i\widehat{N}^{-1} \int dx a^+(x) : a^3(x) : .$$

Рівняння (23.15) називаємо рівняннями резольвентного типу, оскільки формальний розв'язок рівняння (23.20) можна записати у вигляді дії резольвенти оператора B на вектор F^0:

$$F = (\mathbf{1} - \lambda B)^{-1} F^0$$

або у вигляді ряду ітерацій рівняння (23.20):

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n B^n F^0.$$

Легко пересвідчитися: якщо врахувати (23.19), то послідовність коефіцієнтних функцій можна представити формальним рядом

$$F = F_0 \cdot F', \quad F' = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} B^n F'^0, \tag{23.21}$$

де

$$F'^0 = (0,0,0,0,F_4^{(1)}(x_1,\ldots,x_4),0,\ldots). \tag{23.22}$$

Зауваження 23.1. *Формули (23.21),(23.22) повністю відтворюють ряди теорії збурень без внесків від вакуумних діаграм для коефіцієнтних функцій F_N. Причому внески від усіх можливих діаграм Фейнмана з відповідною кратністю отримуються за допомогою дії ступенів оператора B на вектор F^0.*

Зауваження 23.2. *Виділення множника F_0 у формулі (23.15) можна вважати формальним доведенням формули (22.54).*

23.3. Рівняння еволюційного типу

Розглянемо еволюцію S-оператора за константою зв'язку λ. Очевидно, що $S|_{\lambda=0} = \mathbb{1}$. Так само, як і у попередньому пункті, з розкладів (22.36)–(22.39) легко отримати формальне співвідношення

$$\frac{dS}{d\lambda} = iT(\mathscr{L}_I S)$$

або ж для лагранжіана взаємодії (21.3) маємо

$$\frac{dS}{d\lambda} = -iT\int\limits_{\mathbb{M}^4} \big(:\varphi^4(x):S\big)dx. \tag{23.23}$$

Підставимо в (23.23) вираз для S у вигляді (22.43).

Враховуючи пропозицію 23.1, отримуємо рівняння для послідовності коефіцієнтних функцій F (задача 23.2):

$$\frac{dF}{d\lambda} = -AF, \quad F|_{\lambda=0} = \Omega_0 = (1,0,0,\ldots), \tag{23.24}$$

де

$$A = i\int\limits_{\mathbb{M}^4} :a^4(x):dx, \tag{23.25}$$

а дія операторів $a(x) = a^+(x) + a^-(x)$ на коефіцієнтні функції задається формулами (23.4), (23.6). Послідовно виконуючи ці операції, отримуємо нескінченну систему рівнянь у вигляді

$$\frac{d}{d\lambda}F_N(x_1,\ldots,x_N) = -i\sum_{k=0}^{4} C_4^k \sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k}^{N}\int\limits_{\mathbb{M}^4} dx \prod_{l=1}^{k}\delta(x_{i_l}-x)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{4-k}\frac{1}{i}D^c(x-y_j)F_{N-2k+4}\big((y)_{4-k},(x)_N\setminus\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}\big). \tag{23.26}$$

Зауваження 23.3 *Рівняння (23.26) записані для $N \geqslant 4$. Форма рівнянь для $N \leqslant 3$ змінюється таким чином: при $N = 3$ і $N = 1$, відповідні коефіцієнтні функції тотожно дорівнюють нулю (див. (23.16)); при $N = 2$—відсутні члени, що відповідають $k = 3, 4$; при $N = 0$—відсутні члени, що відповідають $k = 1, 2, 3, 4$.*

Зауваження 23.4 *Формальний розв'язок рівняння (23.24) у вигляді експоненти*

$$F = e^{-\lambda A}\Omega_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} A^n \Omega_0 \tag{23.27}$$

повністю відновлює всю структуру S-матриці, тобто член $A^n\Omega_0$ відповідає внеску всіх діаграм Фейнмана n-го порядку (тобто з n вершинами).

Зауваження 23.5. *У випадку ферміонних полів оператори-символи $\Psi^{\pm}(x)$ і $\overline{\Psi}^{\pm}(x)$, які є аналогами $a^{\pm}(x)$ (ф-ли (23.4) і (23.6)) можна записати з тих самих міркувань (див. п.23.1). (задача 23.3). У розділі VI (п.29.2.2) будуть побудовані евклідові аналоги цих операторів.*

У розділі VI коротко розглянемо це рівняння в евклідовій області і введемо об'ємні та ультрафіолетові регуляризації для того, щоб математично строго сформулювати задачу про існування розв'язків рівняння (23.24) поза рамками теорії збурень.

§ 24. Функції Гріна та їх зв'язок із S-оператором

У попередніх пунктах були розглянуті процеси взаємодії квантованих полів, коли взаємодія відбувається в деякій "ефективній області", яка необмежено розширюється. Така апроксимація дає змогу досить ефективно описати процеси розсіяння, коли до розсіяння і після нього частинки можна вважати вільними. Це хоч і не відповідає реальній ситуації, але дає досить точний теоретичний опис таких процесів.

Однак це не вичерпує всіх проблем, що стоять перед теорією. Важливим її напрямком є опис зв'язних станів взаємодіючої системи: визначення енергетичних рівнів, часу життя збуджених станів або ж ефективних поперечних перерізів для випадків, коли початковий і кінцевий стани мають зв'язні комплекси елементарних частинок.

Для розв'язку таких задач необхідно розглядати рівняння типу рівнянь Шредінгера у квантовій механіці для хвильової функції зв'язної релятивістської частинки, яка, очевидно, пов'язана з квантованим Гейзенберговим полем, що відповідає цій частинці, і фізичним вакуумним (основним) станом, що відповідає взаємодіючій системі. Останні величини виражаються через функції Гріна, які в підпунктах 20.1, 20.2 та 20.6 були визначені для вільних (невзаємодіючих) полів. Апарат функцій Гріна інтенсивно використовується, наприклад, для обчислення аномального магнітного моменту електрона або надтонкої структури атома водню (*лембівський зсув*). Ці питання детально викладені у монографії

[13, § 37,38]. Важливість функцій Гріна у вивченні зазначених вище процесів була вперше описана в роботах Гелл – Мана і Лоу [28] та Швінгера [103]. Швінгер поклав функції Гріна в основу формулювання квантової теорії поля [104]. Почнемо вивчення функцій Гріна зі встановлення їх зв'язку з оператором розсіяння.

24.1. Функції Гріна і S-матриця в представленні взаємодії

У підпункті 20.6 N-точкові функції Гріна вільних полів були визначені як середні за вакуумом від T-добутку гейзенбергових операторів вільного поля. Очевидно, що у випадку взаємодіючих полів означення залишається такими самими, але вільний вакуум треба замінити фізичним вакуумом системи взаємодіючих полів, а гейзенбергові оператори вільних полів на гейзенбергове поле, що задовольняє рівняння взаємодіючих полів. Як і у попередньому підрозділі, для простоти викладів розглянемо самовзаємодію дійсного скалярного поля (21.3). Отже, N-точкова функція Гріна визначається за формулою

$$G_N(x_1,\dots,x_N) = (\Phi_0, T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N))\Phi_0). \tag{24.1}$$

Із властивості T-добутку (див. (20.34)) і того факту, що $\varphi(x)$ є бозе-поле, випливає, що G_N є симетричною функцією своїх аргументів, а з умови Лоренц-інваріантності полів (постулат **ПК4**) випливає: G_N залежить від різниці цих аргументів або, точніше, від псевдоевклідових відстаней між усіма можливими парами аргументів.

Перепишемо тепер вираз (24.1) через оператори полів у представленні взаємодії. Зауважимо, що всі викладки цього пункту мають чисто формальний характер і можуть бути строго обґрунтовані лише за допомогою введення об'ємних та ультрафіолетових "*обрізань*". Скористаємося спершу формулою (21.17) і, враховуючи властивості оператора еволюції $U(x_2^0, x_1^0)$ (див. (22.21)–(22.23)), запишемо, що

$$\varphi(x) = U(0,x^0)\varphi_0(x)U(x^0,0). \tag{24.2}$$

Виразимо тепер вакуумний вектор Φ_0 через вільний вакуум Ω_0.

Вважатимемо, що при $t = \pm\infty$ взаємодія між полями адіабатично виключається. Крім того, будемо вважати, що відсутні зв'язні стани взаємодіючих полів. Тоді, якщо Φ_n – це власні вектори стаціонарних станів у момент часу $x^0 = 0$, то вектори

$$\Phi_n(\pm\infty) = U(\pm\infty, 0)\Phi_n$$

повинні бути власними векторами гамільтоніана вільних полів. Тоді і фізичний вакуум Φ_0 пов'язаний з вільним вакуумом Ω_0 таким самим співвідношенням

$$\Phi_0(\pm\infty) = U(\pm\infty, 0)\Phi_0. \tag{24.3}$$

Отже, вектори, що стоять у лівій частині рівності (24.3) можна вибрати за вільний вакуум. Врахувавши умову єдиності вакуумного стану, виберемо

$$\Omega_0 = \Phi_0(-\infty),$$

тобто

$$\Omega_0 = U(-\infty, 0)\Phi_0.$$

Зрозуміло, що $\Phi_0(+\infty)$ і $\Phi_0(-\infty)$ можуть відрізнятися лише комплексним числом S_0 – таким, що

$$S_0\overline{S}_0 = |S_0|^2 = 1, \tag{24.4}$$

тобто

$$\Phi_0(+\infty) = S_0\Omega_0 = U(+\infty, 0)\Phi_0.$$

Враховуючи властивість (22.23) оператора $U(x_1^0, x_2^0)$, отримаємо два представлення для вакуумного вектора Φ_0:

$$\Phi_0 = U(0, -\infty)\Omega_0, \tag{24.5}$$

$$\Phi_0 = S_0U(0, +\infty)\Omega_0. \tag{24.6}$$

Для того, щоб переписати функцію Гріна (24.1), будемо вважати (не порушуючи загальності опису), що

$$x_1^0 > x_2^0 > \cdots > x_N^0.$$

Тоді, враховуючи означення T-добутку і формули (24.2), (24.5), (24.6), вираз (24.1) буде перетворюватися таким чином:

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = (\Phi_0, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\Phi_0) =$$

$$= \Big(S_0U(0, +\infty)\Omega_0, U(0, x_1^0)\varphi_0(x_1)U(x_1^0, 0)U(0, x_2^0)\varphi_0(x_2)U(x_2^0, 0)\ldots$$

$$\ldots U(0, x_N^0)\varphi_0(x_N)U(x_N^0, 0)U(0, -\infty)\Omega_0\Big).$$

Застосувавши властивості (22.22), (22.23), означення S-оператора (22.31), визначення T-добутку і умову (24.4), остаточно отримаємо формулу

$$G_N(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{S_0}(\Omega_0, T(\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_N)S)\Omega_0). \tag{24.7}$$

Константу нормування S_0 можна визначити з формул (24.5), (24.6), означення S-оператора—(22.31) і умов ортонормованості вакуумних станів Φ_0 і Ω_0:

$$1 \;=\; (\Phi_0, \Phi_0) = (S_0U(0, +\infty)\Omega_0, U(0, -\infty)\Omega_0) = \overline{S}_0(\Omega_0, U(+\infty, 0)U(0, -\infty)\Omega_0).$$

Тоді, враховуючи (24.4), (22.22) і (22.31), отримуємо, що (див., також, (23.17))

$$S_0 = (\Omega_0, S\Omega_0) = F_0.$$

Використавши запис S-оператора у вигляді T-добутку (22.39), функції Гріна (24.7) можна записати також у вигляді

$$G_N(x)_N = \frac{\Omega_0, T(\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_N)e^{i\lambda\int\mathscr{L}_I(x)dx})\Omega_0}{(\Omega_0, Te^{i\lambda\int\mathscr{L}_I(x)dx})\Omega_0}. \tag{24.8}$$

У розділі VI ця формула буде отримана для регуляризованих евклідових функцій Гріна на строгому математичному рівні. Аналогічні представлення можна записати для інших взаємодій.

24.2. Рівняння Швінгера для функцій Гріна

Рівняння для функцій Гріна є прямим наслідком рівнянь Гейзенберга (21.4) для операторів квантованого поля. Покажемо це спочатку на прикладі 2-точкової функції Гріна $G_2(x_1, x_2)$. Запишемо її у вигляді

$$G_N(x_1, x_2) = \theta(x_1^0 - x_2^0)(\Phi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\Phi_0) + \theta(x_2^0 - x_1^0)(\Phi_0, \varphi(x_2)\varphi(x_1)\Phi_0). \quad (24.9)$$

Щоб отримати рівняння для $G_2(x_1, x_2)$, треба подіяти оператором $\Box_{x_1} - m^2$ на обидві частини (24.9). Зауважимо, що всі математичні операції треба розуміти як дії з узагальненими функціями. Оператор $\Box_{x_1} - m^2 \equiv -\partial_{x_1^0}\partial_{x_1^0} + \Delta_{\mathbf{x}_1}$, де $\Delta_{\mathbf{x}_1}$—оператор Лапласа за просторовими змінними $\mathbf{x}_1$. Оператор $\Delta_{\mathbf{x}_1}$ не включає похідну за часом і, тому буде діяти безпосередньо на поле $\varphi(x)$. Обчислимо похідні за часом. Легко побачити, що

$$\begin{aligned} \partial_{x_1^0} G_2(x_1, x_2) &= \delta(x_1^0 - x_2^0)(\Phi_0, [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]_- \Phi_0) + \\ &+ \theta(x_1^0 - x_2^0)(\Phi_0, \partial_{x_1^0}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\Phi_0) + \\ &+ \theta(x_2^0 - x_1^0)(\Phi_0, \varphi(x_2)\partial_{x_1^0}\varphi(x_1)\Phi_0). \end{aligned}$$

Перший доданок пропорційний $\delta(x_1^0 - x_2^0)$, тобто вимагає, щоб $x_1^0 = x_2^0$. Але згідно з **ПК7** (ф-ла (14.20)) одночасовий комутатор полів $\varphi(x_1)$ і $\varphi(x_2)$ тотожно дорівнює нулю.

Аналогічно обчислюється друга похідна

$$\begin{aligned} \partial_{x_1^0}\partial_{x_1^0} G_2(x_1, x_2) &= \delta(x_1^0 - x_2^0)(\Phi_0, [\partial_{x_1^0}\varphi(x_1), \varphi(x_2)]\Phi_0) + \\ &+ (\Phi_0, T(\partial_{x_1^0}\partial_{x_1^0}\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Phi_0). \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи (15.1) і умову нормування Φ_0, маємо

$$(\Box_{x_1} - m^2)G_2(x_1, x_2) = (\Phi_0, T((\Box_{x_1} - m^2)\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Phi_0) + i\delta(x_1 - x_2),$$

а з виразів (21.4)—(21.6) та означення (24.1) остаточно отримуємо рівняння для 2-частинкової функції Гріна:

$$(\Box_{x_1} - m^2)G_2(x_1, x_2) = 4\lambda G_4(x_1, x_1, x_1, x_2) - 12\lambda C G_2(x_1, x_2) + i\delta(x_1 - x_2),$$

де $C = \dfrac{1}{i}D^-(0)$ — нескінченна константа, яка компенсує розбіжність функції $G_4(x_1, x_1, x_1, x_2)$, що виникає при однакових аргументах.

Більш громіздкі обчислення можна виконати і в загальному випадку N-точкової функції Гріна (24.1)(див., наприклад, [68, п.3.1]), що приводить до рівняння

$$\begin{aligned} (\Box_{x_1} - m^2) \; G_N \; (x_1, \ldots, x_N) &= \\ &= 4\lambda G_{N+2}(x_1, x_1, x_1, x_2, \ldots, x_N) - 12\lambda C G_N(x_1, \ldots, x_N) + \\ &+ \sum_{j=2}^{N} i\delta(x_1 - x_j) G_{N-2}(x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N). \end{aligned} \quad (24.10)$$

Враховуючи, що функцією Гріна оператора $\Box_x - m^2$ є причинна функція $D^c(x)$ (див. визначення (20.2), (20.9)), рівняння (24.10) легко переписати у вигляді інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} G_N(x_1,\ldots,x_N) &= -4i\lambda \int dy \frac{1}{i} D^c(x_1-y) G_{N+2}(y,y,y,x_2,\ldots,x_N) + \\ &+ 12i\lambda C \int dy \frac{1}{i} D^c(x_1-y) G_N(y,x_2,\ldots,x_N) + \\ &+ \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{i} D^c(x_1-x_j) G_{N-2}(x_2,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_N), \end{aligned} \tag{24.11}$$

яке можна також отримати з представлення (24.7), використовуючи узагальнену теорему Віка (див. задачу 24.1).

Для скорочення запису і наочності рівняння (24.11) зручно переписати у графічній формі. Використаємо для цього такі позначення:

$$\frac{1}{i} D^c(x_1-x_2) \iff x_1 \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, x_2,$$

$$G_N(x_1,\ldots,x_N) \iff \begin{matrix} & x_2 \\ x_1 & \\ & x_N \end{matrix} \quad G_N \quad , \tag{24.12}$$

$$\sum_{j=2}^{N} \frac{1}{i} D^c(x_1-x_j) \iff x_1 \bullet\!\!-\!\!-\!\!\circ\, .$$

Тоді рівняння (24.11) набуде зображення

$$\begin{matrix} x_1 \\ \\ \end{matrix} \quad G_N \quad = -4i\lambda \begin{matrix} x_1 & y \\ & \end{matrix} \quad G_{N+2} \quad + 12i\lambda \begin{matrix} x_1 \\ \\ y \end{matrix} \quad G_N \quad + \quad G_{N-2} \quad , \qquad \begin{matrix} x_1 \\ \\ \end{matrix}$$

(24.13)

де у кожній внутрішній вершині виконується інтегрування.

24.3. Про зв'язок функцій Гріна з коефіцієнтними функціями S-оператора розсіяння

Для того, щоби встановити зв'язок функцій Гріна з коефіцієнтними функціями, визначимо спочатку так звані *одягнені* коефіцієнтні функції

$$\widetilde{F}_N(x_1,\ldots,x_N)=\int\Big(\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{i}D^c(x_j-y_j)\Big)F_N(y_1,\ldots,y_N)dy_1\ldots dy_N, \qquad (24.14)$$

тобто за кожною змінною виконується згортка з причинною функцією Гріна. Таку операцію можна назвати продовженням коефіцієнтних функцій за масову поверхню, оскільки їх перетворення Фур'є $\widetilde{\widetilde{F}}_N(p_1,\ldots,p_N)$ залежатиме від 4-імпульсів $p_1,\ldots,\ p_N$, які не пов'язані співвідношеннями $p_j^2=m^2$, $j=1,2,\ldots,N$. Вираз (24.14) можна переписати за допомогою введених у попередньому параграфі формальних операторних перетворень (див. ф-ли (23.4) і (23.6)):

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_N(x_1,\ldots,x_N) &= (a^-(x_1)\ldots a^-(x_N)F)_0=\\ &= (\Omega_0,a^-(x_1)\cdots a^-(x_N)F)=\\ &= (\Omega_0:a(x_1)\cdots a(x_N):F),\end{aligned} \qquad (24.15)$$

де $F=\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$. Далі скористаємося пропозицією 23.1 і запишемо вирази (24.7), (24.8) для функцій Гріна через операції $a(x)$:

$$G_N(x_1,\ldots,x_N)=(\Omega_0,a(x_1)\cdots a(x_N)F), \qquad (24.16)$$

де F – послідовність коефіцієнтних функцій, яку згідно з п.23.2 і 23.3, можна записати так:

$$F \;=\; \Big(\Omega_0,e^{i\lambda\int\mathscr{L}_I(x;a)dx}\Omega_0\Big)^{-1}e^{i\lambda\int\mathscr{L}_I(x;a)dx}\Omega_0. \qquad (24.17)$$

У формулі (24.17)$\mathscr{L}_I(x;a)$ має вигляд $\mathscr{L}_I(x)$ з $a(x)$ замість $\varphi(x)$. Застосуємо тепер теорему Віка для нормальних добутків до добутку у виразі (24.16). Тоді, згідно з (24.15) отримаємо вираз ($N=2k$)

$$\begin{aligned}G_N(x_1,\ldots,x_N) &= \widetilde{F}_N(x_1,\ldots,x_N)+\sum_{\{j_1,j_2\}\subset\{1,\ldots,N\}}\frac{1}{i}D^c(x_{j_1}-x_{j_2})\times\\ &\times\ \widetilde{F}_{N-2}(x_1,\ldots,\widehat{x}_{j_1},\ldots,\widehat{x}_{j_2},\ldots,x_N)+\\ &+\sum_{\{j_1,\ldots,j_4\}\subset\{1,\ldots,N\}}\Bigg[\frac{1}{i}D^C(x_{j_1}-x_{j_2})\frac{1}{i}D^c(x_{j_3}-x_{j_4})+\\ &+\ \frac{1}{i}D^c(x_{j_1}-x_{j_3})\frac{1}{i}D^c(x_{j_2}-x_{j_4})+\\ &+\ \frac{1}{i}D^c(x_{j_1}-x_{j_4})\frac{1}{i}D^c(x_{j_2}-x_{j_3})\Bigg]\times\\ &\times\ \widetilde{F}_{N-4}(x_1,\ldots,\widehat{x}_{j_1},\ldots,\widehat{x}_{j_4},\ldots,x_N)+\cdots\ .\end{aligned} \qquad (24.18)$$

На завершення запишемо формальні вирази для функцій $\widetilde{F}_N$ і G_N через операторні символи $a(x)$ для моделі (21.3):

$$\widetilde{F}_N(x_1,\dots,x_m)=\frac{1}{F_0}\Big(\Omega_0,:a(x_1)\cdots a(x_N):e^{-i\lambda\int:a^4(x):dx}\Omega_0\Big), \tag{24.19}$$

$$G_N(x_1,\dots,x_m)=\frac{1}{F_0}\Big(\Omega_0,a(x_1)\cdots a(x_N)e^{-i\lambda\int:a^4(x):dx}\Omega_0\Big), \tag{24.20}$$

$$F_0=S_0=\Big(\Omega_0,e^{-i\lambda\int:a^4(x):dx}\Omega_0\Big). \tag{24.21}$$

Зауваження 24.1. *Представлення (23.21), (23.22) і (23.27) коефіцієнтних функцій S-матриці (або (24.19) функцій $\widetilde{F}_N$) і (24.20), (24.21) функцій Гріна є формальним способом квантування полів. Цей метод еквівалентний квантуванню за допомогою методу континуальних інтегралів, який детально опишемо в § 26.*

24.4. Рівняння для функцій Гріна в функціональних похідних

Важливим технічним методом, який дає змогу значно спростити виведення деяких рівнянь для функцій Гріна та дослідження розкладів за константою взаємодії, є метод функціональних похідних. Для деякої дійсної, гладенької функції $j(x)$, $x\in\mathbb{M}^4$, що досить швидко спадає на безмежності, визначимо так званий *породжувальний функціонал* для послідовності функцій Гріна $G_N(x_1,\dots,x_N)$:

$$\begin{aligned}G\{j\} &:= \Big(\Phi_0,Te^{i\int dxj(x)\varphi(x)}\Phi_0\Big)=\\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{i^N}{N!}\int dx_1\dots dx_Nj(x_1)\dots j(x_N)G_N(x_1,\dots,x_N).\end{aligned} \tag{24.22}$$

Функція Гріна $G_N(x_1,\dots,x_N)$ визначається як N-кратна функціональна похідна

$$\begin{aligned}G_N(x_1,\dots,x_N) &= (-i)^N\frac{\delta^N}{\delta j(x_1)\dots\delta j(x_N)}G\{j\}\Big|_{j\equiv0}:=\\ &:= (-i)^NG_{x_1,\dots,x_N}\{j\}\Big|_{j\equiv0}.\end{aligned} \tag{24.23}$$

Зауваження 24.2 *Тут і далі під варіаційною похідною розумітимемо формальну операцію, яка діє на функціонали типу (24.22) як звичайна похідна, вважаючи, що*

$$\frac{\delta j(x)}{\delta j(y)}:=\delta(x-y). \tag{24.24}$$

Користуючись означеннями (24.22), (24.23), з рівнянь (24.10) легко отримати рівняння для $G\{j\}$. Для цього треба взяти першу варіаційну похідну від розкладу (24.22), подіяти оператором $(\Box_x - m^2)$ і скористатись правою частиною (24.10). Тоді отримаємо рівняння

$$(\Box_x - m^2)G_x\{j\} = -4\lambda G_{xxx}\{j\} - 12\lambda C G_x\{j\} - ij(x)G\{j\}. \tag{24.25}$$

Легко бачити, що розв'язок рівняння (24.25) при $\lambda = 0$ має вигляд

$$G^0\{j\} = e^{-\frac{1}{2}\int j(x)\frac{1}{i}D^c(x-y)j(y)dxdy}, \tag{24.26}$$

що відповідає вигляду породжувального функціонала для вільних функцій Гріна. У цьому можна пересвідчитись, якщо підставити (24.26) у (24.23), виконати варіаційне диференціювання і покласти $j \equiv 0$. Внаслідок цього отримаємо вираз (20.55).

При $\lambda \neq 0$ розв'язок рівняння (24.25) будемо шукати у вигляді

$$G\{j\} = AG^0\{j\}, \tag{24.27}$$

де оператор A є функцією варіаційних похідних $\delta/\delta j(x)$:

$$A = f\left(\frac{\delta}{\delta j}\right).$$

Враховуючи, що оператор A залежить лише від варіаційних похідних і комутує з $\dfrac{\delta}{\delta j(x)}$, тому, діючи оператором A на рівняння (24.25) при $\lambda = 0$ маємо вираз

$$(\Box_x - m^2)\frac{\delta}{\delta j(x)}AG^0\{j\} = -iA(j(x)G^0\{j\}). \tag{24.28}$$

При $\lambda \neq 0$ вираз (24.25) запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}(\Box_x - m^2)\frac{\delta}{\delta j(x)}AG^0\{j\} \quad &+ \quad 4\lambda\frac{\delta^3}{\delta j(x)^3}AG^0\{j\} + \\ &+ \quad 12\lambda C\frac{\delta}{\delta j(x)}AG^0\{j\} = -ij(x)AG^0\{j\}.\end{aligned} \tag{24.29}$$

Віднімаючи формулу (24.29) від (24.28), отримуємо співвідношення

$$-i[A, j(x)]_- G^0\{j\} = -4\lambda\frac{\delta^3}{\delta j(x)^3}AG^0\{j\} - 12\lambda C\frac{\delta}{\delta j(x)}AG^0\{j\}.$$

Оператор A можна шукати як розв'язок формального операторного рівняння у варіаційних похідних:

$$[A, j(x)]_- = -4i\lambda A\frac{\delta^3}{\delta j(x)^3} - 12i\lambda CA\frac{\delta}{\delta j(x)}. \tag{24.30}$$

Зручно скористатись аналогією з функціями однієї змінної, для яких виконуються такі формальні співвідношення:

$$\left[\frac{d}{dx}, x\right]_- = \mathbb{1}, \quad \left[f\left(\frac{d}{dx}\right), x\right]_- = f'\left(\frac{d}{dx}\right).$$

Тоді легко побачити, що оператор A, який задовольняє рівняння (24.30), має вигляд

$$A = C_0 \exp\left[-i\lambda \int dx \frac{\delta^4}{\delta j(x)^4} - 6i\lambda C \int dx \frac{\delta^2}{\delta j(x)^2}\right],$$

а породжувальний функціонал (24.27) представляється так:

$$\begin{aligned} G\{j\} &= C_0 \exp\left[-i\lambda \int dx \frac{\delta^4}{\delta j(x)^4} - 6i\lambda C \int dx \frac{\delta^2}{\delta j(x)^2}\right] \times \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}\int j(x)\frac{1}{i}D^c(x-y)j(y)dxdy\right]. \end{aligned} \tag{24.31}$$

Константа C_0 вибирається з умови $G\{0\} = 1$. Врахувавши першу формулу (21.5), вираз (24.31) можна переписати у загальному вигляді

$$G\{j\} = C_0 \exp\left[-i\lambda \int dx \mathscr{L}_I\left(x, \frac{\delta}{\delta j(x)}\right)\right] G^0\{j\}, \tag{24.32}$$

де , як і у формулі (24.17), покладаємо $\mathscr{L}_I(x;a) = \mathscr{L}_I(x) = - : a^4(x) :$ з $a(x) = \delta/\delta j(x)$. Формула (24.32) справедлива для довільного лагранжіана . У випадку, коли $\mathscr{L}_I(x)$ залежить від спінорних полів, породжувальний функціонал G залежатиме також від спінорних джерел $\eta(x)$ і $\overline{\eta}(x)$, які будуть грасмановими змінними.

24.5. Рівняння для зв'язних функцій Гріна

З аналізу діаграм Фейнмана для функцій Гріна і коефіцієнтних функцій видно, що ряд теорії збурень, який відповідає, наприклад, N-точковій функції, є сумою внесків від зв'язних діаграм із N-зовнішніми лініями та всіх можливих незв'язних діаграм (тобто таких, що їх внески є добутками внесок від її кожної зв'язної частини). Якщо формально просумувати внески всіх порядків теорії збурень, то структура повної функції залишиться такою самою. Тоді зв'язок функції Гріна з її зв'язними частинами (truncated Green functions) можна визначити такими співвідношеннями (для системи скалярних бозе-частинок):

$$\begin{aligned} G_N(x_1, \ldots, x_N) &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n_1+\cdots+n_k=N} \sum_{\sigma_k} G^T_{n_1}(x_{i_1^{(1)}}, \ldots, x_{i_{n_1}^{(1)}}) \cdots \\ &\cdots \quad G^T_{n_k}(x_{i_1^{(k)}}, \ldots, x_{i_{n_k}^{(k)}}), \end{aligned} \tag{24.33}$$

де сума за змінною σ_k означає сумування за всіма перестановками індексів $\{1,\dots,N\}$ між групами $\{n_1\},\dots,\{n_k\}$ так, щоб члени в сумі не повторювались. Наприклад, для $N=4$ розклад (24.33) буде мати вигляд

$$G_4(x_1,\dots,x_m)=G_4^T(x_1,\dots,x_m)+G_3^T(x_1,x_2,x_3)G_1^T(x_4)+G_3^T(x_1,x_2,x_4)G_1^T(x_3)+$$

$$+G_3^T(x_1,x_3,x_4)G_1^T(x_2)+G_3^T(x_2,x_3,x_4)G_1^T(x_1)+G_2^T(x_1,x_2)G_2^T(x_3,x_4)+$$

$$+G_2^T(x_1,x_3)G_2^T(x_2,x_4)+G_2^T(x_1,x_4)G_2^T(x_2,x_3)+G_2^T(x_1,x_2)G_1^T(x_3)G_1^T(x_4)+$$

$$+G_2^T(x_1,x_3)G_1^T(x_2)G_1^T(x_4)+G_2^T(x_1,x_4)G_1^T(x_2)G_1^T(x_3)+G_2^T(x_2,x_3)G_1^T(x_1)G_1^T(x_4)+$$

$$+G_2^T(x_2,x_4)G_1^T(x_1)G_1^T(x_3)+G_2^T(x_3,x_4)G_1^T(x_1)G_1^T(x_2)+$$

$$+G_1^T(x_1)G_1^T(x_2)G_1^T(x_3)G_1^T(x_4). \tag{24.34}$$

Зауважимо, що представлення (24.33), (24.34) записані для загального випадку без урахування конкретного вигляду взаємодії. Наприклад, при взаємодії (21.3) всі непарні функції Гріна дорівнюють нулю.

Із представлення (24.33) видно, що послідовність зв'язних функцій Гріна G_N^T повністю визначає послідовність G_N. Для того, щоб отримати рівняння для функцій $G_N^T(x_1,\dots,x_m)$, найбільш зручним методом є метод варіаційних рівнянь для породжувальних функціоналів. Породжувальний функціонал для зв'язних частин G_N^T визначається такою самою формулою

$$\begin{aligned} G^T\{j\} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int j(x_1)\dots j(x_n)G_n^T(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n =: \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}G_n^T\{j\}. \end{aligned} \tag{24.35}$$

Для того, щоб отримати рівняння для $G^T\{j\}$ з рівнянням (24.25), треба виразити функціонал $G\{j\}$ через функціонал $G^T\{j\}$. Підставимо для цього розклад

(24.33) у визначення функціонала $G\{j\}$ (24.22):

$$\begin{aligned}
G\{j\} &= 1+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{i^N}{N!}\int dx_1\dots dx_N j(x_1)\cdots j(x_N)\times\\
&\times\sum_{k=1}^{N}\sum_{n_1+\cdots+n_k=N}\sum_{\sigma_k}G^T_{n_1}(x_{i_1^{(1)}},\dots,x_{i_{n_1}^{(1)}})\cdots G^T_{n_k}(x_{i_1^{(k)}},\dots,x_{i_{n_k}^{(k)}})=\\
&= 1+\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{l\geqslant 1}\sum_{\substack{m_1<\dots<m_l\\ m_1\nu_1+\cdots+m_l\nu_l=N}}\frac{i^N}{N!}\frac{N!}{(m_1!)^{\nu_1}\cdots(m_l!)^{\nu_l}}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_l!}\times\\
&\times\ G^T_{m_1}\{j\}^{\nu_1}\cdots G^T_{m_l}\{j\}^{\nu_l}=1+\\
&+\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{l\geqslant 1}\sum_{\substack{m_1<\dots<m_l\\ m_1\nu_1+\cdots+m_l\nu_l=N}}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_l!}\left(\frac{i^{m_1}}{m_1!}G^T_{m_1}\{j\}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{i^{m_l}}{m_l!}G^T_{m_l}\{j\}\right)^{\nu_l}=\\
&= 1+\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{i^{m_1}}{m_1!}G^T_{m_1}\{j\}+\frac{1}{2!}\sum_{m_1,m_2}\frac{i^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!}G^T_{m_1}\{j\}G^T_{m_1}\{j\}=\\
&= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}G^T_n\{j\}\right].
\end{aligned}$$

Отже, остаточно маємо

$$G\{j\}=e^{G^T\{j\}}. \tag{24.36}$$

З формули (24.36) виходить

$$\begin{aligned}
G_x\{j\}&=G^T_x\{j\}G\{j\},\\
G_{xx}\{j\}&=G^T_{xx}\{j\}G\{j\}+G^T_x\{j\}^2G\{j\},\\
G_{xxx}\{j\}&=G^T_{xxx}\{j\}G\{j\}+3G^T_{xx}\{j\}G^T_x\{j\}G\{j\}+G^T_x\{j\}^3G\{j\}.
\end{aligned}\tag{24.37}$$

Підставляючи вирази (24.37) у рівняння (24.25) і скорочуючи на $G\{j\}$, отримуємо рівняння

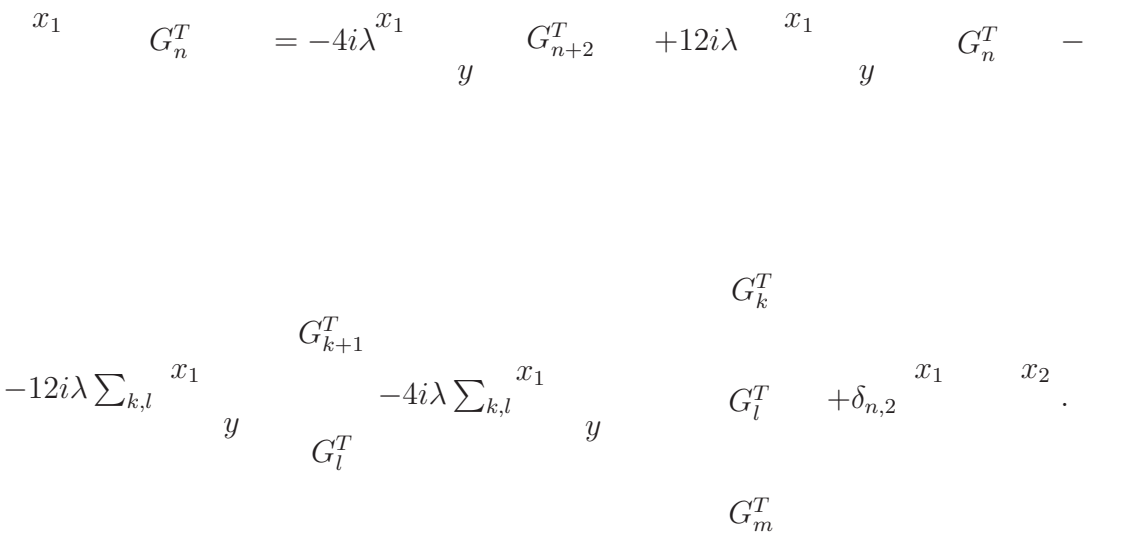
$$\begin{aligned}
(\Box_x-m^2)G^T_x\{j\} &= -4\lambda G^T_{xxx}\{j\}-12\lambda CG^T_x\{j\}-\\
&- 12\lambda G^T_{xx}\{j\}G^T_x\{j\}-4\lambda G^T_x\{j\}^3-ij(x),
\end{aligned}\tag{24.38}$$

яке є нелінійним, оскільки третій і четвертий доданки правої частини містять у собі добутки похідних від породжувального функціонала $G^T\{j\}$. Щоб отримати рівняння для функції $G^T_n(x_1,\dots,x_n)$, треба взяти варіаційні похідні від обох частин рівняння (24.38) за змінними-функціями $j(x_2),\dots,j(x_n)$. Тоді отримаємо для $n=2,3,\dots$ нескінченну систему нелінійних диференціальних (або інтегральних, коли перекинути оператор $\Box_x-m^2$ у праву частину) рівнянь

$(x = x_1)$:

$$
\begin{aligned}
(\Box_{x_1} \;+\; m^2)G_n^T(x_1,\ldots,x_n) &= 4\lambda G_{n+2}^T(x_1,x_1,x_1.x_2,\ldots,x_n) - 12\lambda C G_n^T(x_1,\ldots,x_n) + \\
&+\; 12\lambda \sum_{\substack{k,l\geqslant 1\\ k+l=n+1}} \sum_{\sigma_2} G_{k+1}^T(x_1,x_1,x_{i_2},\ldots,x_{i_k}) G_l^T(x_1,x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_n}) + \\
&+\; 4\lambda \sum_{\substack{k,l,m\geqslant 1\\ k+l+m=k+2}} \sum_{\sigma_3} G_k^T(x_1,x_{i_2},\ldots,x_{i_k}) G_l^T(x_1,x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_{k+l-1}}) \times \\
&\times\; G_m^T(x_1,x_{i_{k+l},\ldots,x_{i_n}}) + i\delta(x_1-x_2)\delta_{n2},
\end{aligned}
\tag{24.39}
$$

де сума за σ_2 – сума всіх можливих розбиттів індексів $\{2,\ldots,n\}$ на дві групи $\{i_2,\ldots,i_k\}$ і $\{i_{k+1},\ldots,i_n\}$, а сума за σ_3 – на три групи $\{i_2,\ldots,i_k\}$, $\{i_{k+1},\ldots,i_{k+l-1}\}$ і $\{i_{k+l},\ldots,i_n\}$ таким чином, щоб усі члени відрізнялися один від одного. Користуючись такими ж позначеннями, як і в (24.12), зобразимо інтегральне рівняння, що відповідає (24.39), графічно



(24.40)

24.6. Рівняння для сильнозв'язних функцій Гріна. Рівняння Дайсона

Почнемо з визначення слабозв'язної та сильнозв'язної діаграм Фейнмана. Діаграма Фейнмана називається *слабозв'язною*, якщо вона зв'язна і містить хоча б одну внутрішню лінію, розриваючи яку, діаграма стає незв'язною (тобто перетворюється на дві зв'язні діаграми). Якщо такої лінії немає, діаграма є *сильнозв'язною* (англ. 1-particle irreducible). Будь-яку слабозв'язну діаграму можна

представити у вигляді

$$G_k^T \qquad\qquad G_l^T \qquad\qquad .$$

(24.41)

Аналогічні поняття можна ввести і для функцій Гріна, розклади за теорією збурень яких будуть складатися із внесків відповідних діаграм Фейнмана. Виявляється, що сильнозв'язну (one-particle irreducible) функцію Гріна можна визначити також аналітично. Ми почнемо з 2-точкової функції, що відповідає так званим власне-енергетичним діаграмам Фейнмана.

Позначимо таку функцію через $\frac{1}{i}\sum(x,y)$, а її графічне зображення –

$$x \qquad\qquad \Sigma \qquad\qquad y \qquad ,$$

(24.42)

причому зовнішнім лініям будуть відповідати δ-функції. Наприклад, у другому порядку за теорією збурень діаграмі

$$x \qquad x' \qquad\qquad y' \qquad y$$

(24.43)

буде відповідати внесок

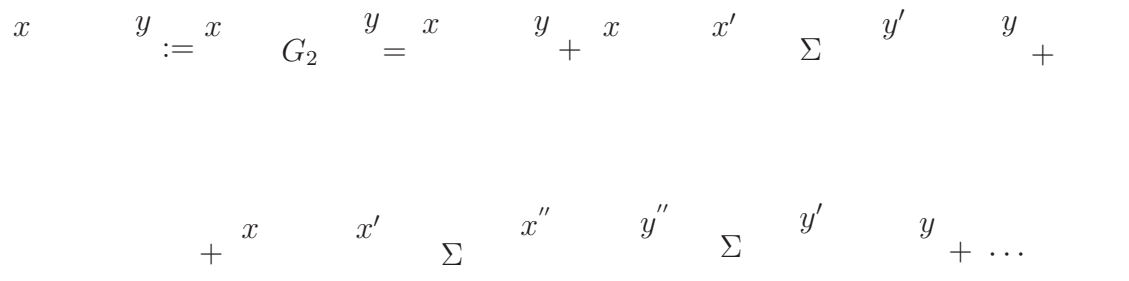
$$\frac{1}{i}\Sigma^{(2)}(x,y) = (-i\lambda)^2 \int dx'dy'\delta(x-x')\left(\frac{1}{i}D^c(x'-y')\right)^3\delta(y'-y).$$

З означень відповідних внесків для коефіцієнтних функцій S-матриці (див. п. 22.4.2) видно, що

$$F_2^{(2)}(x,y) \equiv \frac{1}{i}\Sigma^{(2)}(x,y).$$

Отже, сильнозв'язні функції Гріна будуть збігатися із сильнозв'язними коефіцієнтними функціями. Встановимо тепер зв'язок між сильно зв'язною 2-частинковою функцією $\Sigma(x,y)$ і повною 2-частинковою функцією Гріна $G_2(x,y) \equiv G_2^T(x,y)$.

З аналізу їх розкладів за теорією збурень легко переконатися, що



(24.44)

або аналітично

$$\begin{aligned} G_2(x,y) &= \frac{1}{i}D^c(x-y) + \int dx'dy' \frac{1}{i}D^c(x-x')\frac{1}{i}\Sigma(x',y')\frac{1}{i}D^c(y'-y) + \\ &+ \int dx'dx''dy'dy'' \frac{1}{i}D^c(x-x')\frac{1}{i}\Sigma(x',x'')\frac{1}{i}D^c(x''-y'') \times \\ &\times \frac{1}{i}\Sigma(y'',y')\frac{1}{i}D^c(y'-y) + \dots . \end{aligned} \tag{24.45}$$

Ряд (24.45) можна також отримати методом ітерацій інтегрального рівняння

$$G_2(x,y) = \frac{1}{i}D^c(x-y) + \int dx'dy' \frac{1}{i}D^c(x-x')\frac{1}{i}\Sigma(x',y')G_2(y',y). \tag{24.46}$$

У випадку трансляційно-інваріантної взаємодії функції $G_2(x,y)$ і $\Sigma(x',y')$ залежать від різниці аргументів, а рівняння (24.46) є рівнянням у згортках. Переходячи до фур'є-перетворень, отримуємо алгебраїчне рівняння

$$\widetilde{G}_2(p^2) = \widetilde{G}_2^0(p^2) + \widetilde{G}_2^0(p^2)\frac{1}{i}\widetilde{\Sigma}(p^2)\widetilde{G}_2(p^2), \tag{24.47}$$

де

$$\widetilde{G}_2^0(p^2) = \frac{1}{i(m^2 - p^2 - i\varepsilon)}, \tag{24.48}$$

а залежність функцій $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{G}_2^0$ і Σ від $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$ є наслідком їх лоренц-інваріантності.

Це рівняння пов'язує повну функцію Гріна з масовим оператором $\Sigma(p^2)$ і має назву рівняння *Дайсона*.

З рівняння (24.46) легко отримати вираз функції $\Sigma(x,y)$ через повну функцію $G_2(x,y)$:

$$\Sigma(x,y) = G_0^{-1}(x,y) - G_2^{-1}(x,y), \tag{24.49}$$

де $G_0(x,y) := \dfrac{1}{i}D^c(x-y)$, а обернені функції $G^{-1}(x,y)$ треба розуміти як згортку, тобто

$$\int dx' G(x,x')G^{-1}(x',y) = \int dx' G^{-1}(x,x')G(x',y) = \delta(x-y). \tag{24.50}$$

Наприклад, для функції $G_0(x,y) = \frac{1}{i}D^c(x-y)$ функція $G_0^{-1}(x,y)$ є узагальненою функцією вигляду

$$G_0^{-1}(x,y) = -i(\Box_x - m^2)\delta(x-y). \tag{24.51}$$

Щоб визначити n-точкові зв'язні функції, введемо позначення

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= (-i)\frac{\delta G^T\{j\}}{\delta j(x)} - G_1^T(x) = (-i)G_x^T\{j\} - G_1^T(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n G_{n+1}(x,x_1,\dots,x_n)j(x_1)\dots j(x_n)\end{aligned} \tag{24.52}$$

і будемо розглядати $\alpha(x)$ як незалежну змінну, а (24.52) розглядати як рівняння для визначення $j(x)$ як деякого функціонала Γ відносно змінної α або, точніше,

$$j(x) = i\frac{\delta\Gamma\{\alpha\}}{\delta\alpha(x)} = i\Gamma_x\{\alpha\}. \tag{24.53}$$

Останню формулу можна перевірити у кожному порядку теорії збурень.

З (24.52) випливає, що

$$\frac{\delta\alpha(x)}{\delta j(y)} = (-i)G_{xy}^T\{j\} \tag{24.54}$$

або

$$\frac{\delta j(x)}{\delta\alpha(y)} = iG_{xy}^{T,-1}\{j\}. \tag{24.55}$$

Вважаючи $\alpha(x)$ і $j(x)$ аналогами канонічних змінних, визначимо аналог перетворення Лежандра 1-го роду

$$\Gamma\{\alpha\} = G^T\{j\} - i\int dx j(x)(\alpha(x) + G_1^T(x)). \tag{24.56}$$

Розглянемо $\Gamma\{\alpha\}$ як породжувальний функціонал деяких узагальнених функцій $\Gamma_n(x_1,\dots,x_n)$, $n \geqslant 2$:

$$\Gamma\{\alpha\} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\dots dx_n\alpha(x_1)\dots\alpha(x_n)\Gamma_n(x_1,\dots,x_n) \tag{24.57}$$

і відповідно

$$\Gamma_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{\delta^n}{\delta\alpha(x_1)\dots\delta\alpha(x_n)}\Gamma\{\alpha\}\Big|_{\alpha\equiv 0}. \tag{24.58}$$

Виявляється, що функції $\Gamma_n(x_1,\dots,x_n)$ мають розклад за теорією збурень, яка враховує лише внески від сильно-зв'язних діаграм Фейнмана з тією самою кратністю, що і функції $G_n^T(x_1,\dots,x_n)$. Щоб це побачити, визначимо операцію,

яку можна назвати "*роздяганням*" функцій $G_n^T(x_1,\dots,x_n)$, обернену операції "*одягання*", визначену в (24.14):

$$G_n^T(x_1,\dots,\underline{x}_j,\dots,x_n) =$$

$$= \int dx' G_2^{-1}(x_j,x') G_n^T(x_1,\dots,x_{j-1},x',x_{j+1},\dots,x_n). \tag{24.59}$$

Наприклад, повністю "роздягнена" 2-точкова функція Гріна (від англ. *amputated* Green function) має вигляд

$$G_2(\underline{x},\underline{y}) = \int dx'dy' G_2^{-1}(x,x') G_2^{-1}(y,y') G_2(x',y') = G_2^{-1}(x,y).$$

З формул (24.53) і (24.57) знаходимо

$$j(x) = i\Gamma_x\{j\} = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\dots dx_n \alpha(x_1)\dots\alpha(x_n)\Gamma_{n+1}(x,x_1,\dots,x_n). \tag{24.60}$$

Підставимо вираз (24.60) для $j(x)$ у вираз (24.52) для $\alpha(x)$ і прирівняємо коефіцієнти при однакових ступенях (точніше, з однаковим числом функцій α). Тоді члени, що містять у собі одну функцію α, дають рівність

$$\alpha(x) = i^2\int dx'dy' G_2(x,x')\Gamma_2(x',y')\alpha(y').$$

Як наслідок довільності функції α цю рівність задовольняє функція

$$\Gamma_2(x_1,x_2) = -G_2^{-1}(x_1,x_2). \tag{24.61}$$

Отже, враховуючи (24.49), бачимо, що Γ_2 з точністю до $G_0^{-1}(x,y)$ збігається з $\Sigma(x,y)$, що є сумою внесків усіх сильнозв'язних діаграм Фейнмана з двома зовнішніми лініями. Прирівнюючи коефіцієнт при $\alpha(x_2)\alpha(x_3)$ у правій частині (24.52) до нуля, отримуємо

$$\int dx_1' G_2(x,x_1')\Gamma_3(x_1',x_2,x_3) = \int dx_2'dx_3' G_3^T(x,x_2',x_3')\Gamma_2(x_2',x_2)\Gamma_2(x_3',x_3).$$

Діючи на обидві частини інтегральним оператором з ядром $G_2^{-1}(x_1,x)$ і враховуючи (24.50), означення (24.59) і формулу (24.61), маємо

$$\Gamma_3(x_1,x_2,x_3) = G_3^T(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3). \tag{24.62}$$

Для взаємодії (21.3) обидві функції в (24.62) тотожно дорівнюють нулю. Але якщо, наприклад, розглянути взаємодію

$$\mathscr{L}_I(x) = \lambda : \varphi^3(x) :, \tag{24.63}$$

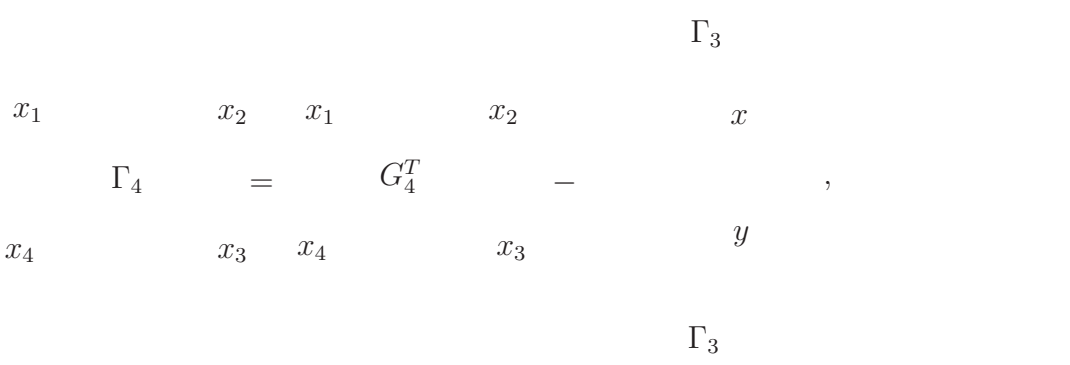
то функція $G_3(x_1, x_2, x_3)$ описуватиме повну вершинну функцію Гріна, тобто 3-точкову функцію Гріна, а функція $G_3^T(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$—"роздягнену" функцію Гріна відносно всіх трьох аргументів. Легко пересвідчитись, що операція (24.59) для $G_3^T(x_1, x_2, x_3)$ означає, що розклад функції $G_3^T(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ за теорією збурень складається лише з внесків сильнозв'язних діаграм Фейнмана з трьома зовнішніми лініями. Обчислимо для наочності ще члени, що стоять при добутку трьох функцій α. Тоді, враховуючи, що вираз для Γ_4 є симетричною функцією своїх аргументів, отримуємо

$$\Gamma_4(x_1, \ldots, x_4) = G_4^T(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_4) - \sum_{\sigma_4} \int dx' G_3^T(x_{i_1}, x_{i_2}, x') \Gamma_3(x', x_{i_3}, x_{i_4}). \quad (24.64)$$

Якщо врахувати означення (24.59), рівність (24.50) для функції $G_2(x, y)$ і (24.62), то рівність (24.64) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x_1, \ldots, x_4) &= G_4^T(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_4) - \\ - \int dxdy\, &\Gamma_3(x_1, x_2, x) G_2(x, y) \Gamma_3(y, x_3, x_4) - \\ - \int dxdy\, &\Gamma_3(x_1, x_3, x) G_2(x, y) \Gamma_3(y, x_2, x_4) - \\ - \int dxdy\, &\Gamma_3(x_1, x_4, x) G_2(x, y) \Gamma_3(y, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (24.65)$$

Зручно (24.65) зобразити графічно



(24.66)

де жирною лінією позначено функцію G_2, а кружечки означають суми таких самих функцій з переставленими аргументами.

Зауваження 24.3. *Вигляд функції* Γ_4 *за допомогою зображення (24.66) відповідає теорії поля з взаємодією (24.63). У випадку взаємодії (21.3) другий доданок правої частини рівняння (24.66) перетворюється тотожно в нуль, і для* Γ_4 *виходить формула, аналогічна (24.62).*

Якщо розкласти праву частину за теорією збурень, то легко помітити, що внески, які відповідають слабозв'язним діаграмам (відповідно у першому і другому доданках), будуть компенсуватися, і тому отримаємо лише внески від сильнозв'язних діаграм. Детальне доведення того, що функції $\Gamma_n(x_1,\ldots,x_n)$ є сумою внесків тільки сильно-зв'язних діаграм, можна знайти у роботі [19].

Для того щоб отримати рівняння для функцій $\Gamma_n(x_1,\ldots,x_n)$, знову застосуємо метод варіаційних рівнянь для породжувальних функціоналів. Проробимо це для взаємодії (21.3).Для цього треба записати вираз функціонала $G^T\{j\}$ через функціонал $\Gamma\{\alpha\}$ і скористатись рівнянням (24.38).

Тоді з формул (24.52)–(24.56) маємо

$$G^T_x\{j\} = i\alpha(x), \quad G^T_{xx}\{j\} = \Gamma^{-1}_{xx}\{\alpha\}. \tag{24.67}$$

Далі з (24.67) отримаємо

$$G^T_{xxx}\{j\} = \frac{\delta\Gamma^{-1}_{xx}\{\alpha\}}{\delta j(x)} := \int dz \frac{\delta\Gamma_{xx}\{\alpha\}}{\delta\alpha(z)}\,\frac{\delta\alpha(z)}{\delta j(x)}. \tag{24.68}$$

Знайдемо варіаційну похідну $\dfrac{\delta\Gamma^{-1}_{xx}\{\alpha\}}{\delta\alpha(z)}$. Обернені функціонали визначаються так само, як і обернені функції співвідношеннями (24.50):

$$\int dy\,\Gamma^{-1}_{xy}\{\alpha\}\Gamma_{yu}\{\alpha\} = \delta(x-u). \tag{24.69}$$

Проваріюємо рівність (24.69) за змінною $\alpha(z)$:

$$\int dy \frac{\delta\Gamma^{-1}_{xy}\{\alpha\}}{\delta\alpha(z)}\,\Gamma_{yu}\{\alpha\} + \int dy\,\Gamma^{-1}_{xy}\{\alpha\}\frac{\delta\Gamma_{yu}\{\alpha\}}{\delta\alpha(z)} = 0.$$

Звідси, використовуючи (24.69), маємо

$$\frac{\delta\Gamma^{-1}_{xv}\{\alpha\}}{\delta\alpha(z)} = -\int dy\,du\Gamma^{-1}_{xy}\{\alpha\}\Gamma_{yuz}\{\alpha\}\Gamma^{-1}_{uv}\{\alpha\}. \tag{24.70}$$

Підставляючи (24.70) у (24.68) і враховуючи (24.54) та (24.67), отримуємо

$$G^T_{xxx}\{j\} = i\int dydudz\,\Gamma^{-1}_{xy}\{\alpha\}\Gamma^{-1}_{xu}\{\alpha\}\Gamma^{-1}_{xz}\{\alpha\}\Gamma_{yuz}\{\alpha\}.$$

Отже, варіаційне рівняння для функціонала $\Gamma\{\alpha\}$ матиме вигляд

$$\begin{aligned}(\Box_x - m^2 \;&+\; 12\lambda C)\alpha(x) = -4\lambda\int dydudz\,\Gamma^{-1}_{xy}\{\alpha\}\Gamma^{-1}_{xu}\{\alpha\}\Gamma^{-1}_{xz}\{\alpha\}\Gamma_{yuz}\{\alpha\} - \\ &-\; 12\lambda\Gamma^{-1}_{xx}\{\alpha\}\alpha(x) + 4\lambda\alpha(x)^3 - i\Gamma_x\{\alpha\}.\end{aligned} \tag{24.71}$$

Щоб отримати рівняння для $\Gamma_n(x_1,\ldots,x_n)$, потрібно (покладаючи $x = x_1$) проваріювати (24.71) за змінними $\alpha(x_2),\ldots,\alpha(x_n)$, використовуючи правило (24.70) і означення (24.58) (задача 24.2).

24.7. Спектральне представлення 2-точкової функції Гріна (представлення Челлена –Лемана)

У попередніх пунктах було отримано низку формальних рівнянь для функцій Гріна в моделі, що відповідає взаємодії (21.3). Метод їх отримання дає змогу записати такі самі рівняння для довільної теорії, які вже розглядалися. Існування розв'язків цих рівнянь і знаходження явного вигляду функцій Гріна є складною математичною проблемою. На сьогодні ця проблема розглянута лише на мові формальної теорії збурень, яка приводить до виникнення розбіжностей, що буде описано далі. Але виявляється, що, виходячи із загальних принципів побудови квантової теорії полів (постулати **ПК1**–**ПК5**), можна записати представлення для 2-точкової функції Гріна, яке характеризує деякі загальні властивості і пов'язане з спектром мас оператора енергії-імпульсу.

З означень (24.1) і T-добутку маємо

$$\begin{aligned} G_2(x_1,x_2) &= (\Phi_0, T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Phi_0) = \\ &= \theta(x_1^0-x_2^0)W_2(x_1,x_2)+\theta(x_2^0-x_1^0)W_2(x_2,x_1), \end{aligned} \tag{24.72}$$

де

$$W_2(x,y) = (\Phi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Phi_0) \tag{24.73}$$

2-точкова функція Вайтмана [199].

З умов інваріантності (14.13) для операторів поля і вакуумного стану (14.18) випливає, що

$$W_2(x,y) = W_2(\Lambda x + a, \Lambda y + a), \tag{24.74}$$

де (Λ, a) – довільне перетворення групи Лоренца. Рівність (24.74) означає, що

$$W_2(x,y) = w((x-y)^2), \tag{24.75}$$

тобто залежить від квадрата відстані між точками x і y у просторі Мінковського, а рівність (24.75) означає, що перетворення Фур'є узагальненої функції $W_2(x,y)$ залежить від квадрату імпульса $p^2 = p^{0^2} - \mathbf{p}^2$. Наступним кроком, який дає можливість дійти більш детального висновку щодо структури функції $W_2(x,y)$ є застосування постулату спектральності **ПК5**.

Позначимо повну систему станів, що відповідає спектру оператора енергії-імпульсу P^μ через

$$\Phi_n = \Phi_{(\mathbf{p}_{(n)},\alpha_{(n)})}, \tag{24.76}$$

де $\mathbf{p}_{(n)}$ – повний імпульс n-го стану, а $\alpha_{(n)}$ – значення інших квантових характеристик, тобто

$$P^\mu \Phi_n = p^\mu_{(n)} \Phi_n. \tag{24.77}$$

Зауважимо, що система векторів (24.76) є повною ортонормованою системою у гільбертовому просторі станів $\mathscr{H}$ і залежить від своїх неперервних і дискретних змінних, а величини $\mathbf{p}_{(n)}$ і $\alpha_{(n)}$ є лише індексами відповідних станів. Тому

умову повноти можна записати у вигляді

$$\sum_n \Phi_n \overset{*}{\Phi}_n = \sum_n \sum_{\alpha_{(n)}} \int d\mathbf{p}_{(n)} \Phi_{(\mathbf{p}_{(n)},\alpha_{(n)})} \overset{*}{\Phi}_{(\mathbf{p}_{(n)},\alpha_{(n)})} = \mathbb{1}, \tag{24.78}$$

де $\mathbb{1}$—одиничний оператор у просторі $\mathscr{H}$ або, точніше, ядро одиничного оператора, якщо записати аргументи векторів Φ_n і $\overset{*}{\Phi}_n$ (вони повинні бути різні) [1]. З рівняння Гейзенберга (14.39) для поля $\varphi(x)$ і рівняння (24.77) маємо співвідношення

$$(\Phi_m, \varphi(x)\Phi_n) = (\Phi_m, \varphi(0)\Phi_n) e^{-i(p_{(n)}-p_{(m)})\cdot x}. \tag{24.79}$$

Поставимо в означенні функції Вайтмана (24.73) одиничний оператор (24.78) між полями $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$. Внаслідок цього отримаємо

$$(\Phi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Phi_0) = \sum_n \sum_{\alpha_{(n)}} \int dp_{(n)} |(\Phi_0, \varphi(0)\Phi_{(p_{(n)},\alpha_{(n)})})|^2 e^{-ip_{(n)}\cdot(x-y)}. \tag{24.80}$$

З інших міркувань функції Гріна описують реальні фізичні процеси, і носій перетворення Фур'є цих функцій повинен бути зосереджений у верхньому світловому конусі змінної $p = (p^0, \mathbf{p})$, тобто $p^2 \geqslant 0$, $p^0 > 0$. Враховуючи ці зауваження, можна записати, що

$$W_2(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp\ \theta(p^2)\theta(p^0)\rho(p^2) e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{24.81}$$

або, використовуючи для функції Хевісайда $\theta(p^2)$ представлення

$$\theta(p^2) = \int_0^\infty d\mu^2 \delta(p^2 - \mu^2), \tag{24.82}$$

остаточно маємо (враховуючи (15.7)):

$$W_2(x,y) = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \frac{1}{i} D^-(x-y;\mu^2), \tag{24.83}$$

де $\dfrac{1}{i}D^-(x,\mu^2) \equiv \dfrac{1}{i}D^-(x)$. Залежність від маси виділена для більшої наочності.

Порівнюючи формули (24.80) і (24.81), легко побачити, що спектральна функція $\rho(\cdot)$ задовольняє співвідношення

$$\theta(p^2)\theta(p^0)\rho(p^2) = (2\pi)^3 \sum_n \sum_{\alpha_{(n)}} |(\Phi_0, \varphi(0)\Phi_{(p,\alpha_{(n)})})|^2, \tag{24.84}$$

[1] Нагадаємо, що ядром одиничного оператора за дискретними змінними є символ Кронекера, а за неперервними змінними δ-функція.

де сума береться за всіма станами $\Phi_{(\mathbf{p}_{(n)},\alpha_{(n)})}$ з фіксованим значенням імпульсу $p_{(n)} = p$, що обмежує кількість членів суми деяким скінченним числом. Причому, якщо система складається з частинок декількох видів $i = 1, \ldots, L$, то ізольовані точки спектра при $p^2 = 0$ і $p^2 = m_i^2$ відповідають вакуумному стану і стабільним одночастинковим станам видів $i = 1, 2, \ldots, L$. Неперервний спектр починається при $p^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{L} n_i m_i\right)^2$, $n_i = 0, 1, 2, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{L} n_i \geqslant 1$.

Більш детальне доведення формули (24.83) можна знайти у монографії [10], або ж більш формально, але наглядніше з фізичної точки зору, у монографії [102, гл. 17].

Враховуючи означення (20.12),(24.72), остаточно отримуємо представлення для функції Гріна

$$G_2(x, y) = \int\limits_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) G_2^0(x, y; \mu^2), \tag{24.85}$$

де

$$G_2^0(x, y; \mu^2) = \frac{1}{i} D^c(x - y)$$

є функція Гріна, що відповідає вільній скалярній частинці маси μ.

Вперше представлення (24.85) використав Челлен [155](*Källen G.*) і пізніше довів Леман [48]. Детальніша структура спектральної функції $\rho(\mu^2)$ залежить від вигляду взаємодії і відповідного спектра фізичних станів (див., наприклад, [102, гл. 17]).

Очевидно, що коли взаємодія відсутня, то

$$\rho(\mu^2) = \delta(\mu^2 - m_0^2),$$

де m_0 – так звана *гола* маса, тобто маса вільної (невзаємодіючої) скалярної частинки. У випадку взаємодіючої системи також можна виділити точку спектра, яка відповідає стабільному одночастинковому стану частинки маси m. Тоді

$$\rho(\mu^2) = Z_3 \delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2), \tag{24.86}$$

де нова функція розподілу враховує спектр станів, який починається з $p^2 > m^2$.

Наведемо вигляд представлення (24.85) в імпульсному просторі

$$\widetilde{G}_2(k) = \frac{Z_3}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} + \int\limits_{m^2}^\infty d\mu^2 \frac{\sigma(\mu^2)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}.$$

Важливо зауважити, що функція $\widetilde{G}_2(k)$ має полюс при $p^2 = m^2$, де m – спостережувана маса частинки.

Константа нормування Z_3 також залежить від взаємодії і визначається з міркувань, які забезпечують перенормованість відповідної теорії. Але деяку загальну умову на Z_3 можна записати зі спектрального представлення для комутатора:

$$(\Phi_0, [\varphi(x), \varphi(y)]_- \Phi_0) = \int\limits_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \frac{1}{i} D(x-y;\mu^2), \tag{24.87}$$

де $D(x-y;\mu^2)$ – переставна функція вільного скалярного поля маси μ (див. (15.8)). Співвідношення (24.87) є наслідком (24.73), (24.83) і (15.7)–(15.8). Диференціюючи обидві частини (24.87) за x^0 і покладаючи $x^0 = y^0$, а також враховуючи (14.20) і (15.1), отримуємо

$$1 = \int\limits_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) = Z_3 + \int\limits_{\mu^2}^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2). \tag{24.88}$$

Звідси внаслідок додатності спектральної функції $\sigma(\mu^2)$ (див. (24.84)) маємо

$$0 \leqslant Z_3 \leqslant 1. \tag{24.89}$$

Більш детальні наслідки спектрального представлення будуть випливати з конкретного вигляду взаємодії (наприклад для взаємодії псевдоскалярних нейтральних мезонів з нуклонами див. [102, гл. 17, § 2]).

§ 25. Загальна теорія усунення розбіжностей

У § 22 було обчислено матрицю розсіяння за теорією збурень при заданому лагранжіані взаємодії полів. Разом із тим було помічено (див. зауваження 22.6), що, починаючи з другого порядку теорії збурень, аналітичні вирази, які відповідають діаграмам Фейнмана, зображеним на рис. 22.1 *в, г, д*, містять у собі розбіжні інтеграли.

У даному параграфі спробуємо проаналізувати природу цих розбіжностей, характер і вивчити конструктивні методи їх усунення. Поки що зупинимось на вивченні моделі дійсного скалярного поля із самовзаємодією (21.3). Більш реалістичні моделі КЕД і КХД розглянемо у розділі VII.

Теорія усунення розбіжностей відома як теорія перенормувань, вона виникла ще в середині минулого століття в роботах Бете, Дайсона, Швінгера, Фейнмана та ін. Пізніше було отримано коректне математичне формулювання її в роботах Боголюбова, Парасюка та Хеппа, а в 70—80-х роках з'явилася дуже велика кількість робіт, у яких ця теорія отримала подальший розвиток. Для детального ознайомлення з методами сучасної теорії перенормувань радимо звернутись до монографій [34], [133], [99]. Тут коротко зупинимося на основних моментах теорії перенормувань, спробуємо обґрунтувати розвинуті математичні методи з точки зору фізики.

25.1. Примітивно-розбіжні діаграми. Виділення розбіжностей методом Паулі – Вілларса

Усі розбіжні діаграми 2-го порядку є *примітивно-розбіжні* за означенням. Розглянемо тепер розбіжну діаграму 3-го порядку. Якщо, розриваючи по черзі одну з внутрішніх ліній такої діаграми, будемо отримувати діаграми, вклади яких є збіжними, то така діаграма і буде називатися примітивно-розбіжною діаграмою 3-го порядку. Якщо ж хоч одна з утворених діаграм є розбіжною, то це означає, що початкова діаграма містить у собі (як підблок) розбіжну діаграму другого порядку. Тобто вона не є примітивно розбіжною, а просто—розбіжною. Отже,

розбіжна діаграма n-го порядку G є примітивно-розбіжною, якщо всі діаграми $(n-1)$-го порядку, отримані з G розриванням внутрішніх ліній, будуть збіжними.

Для взаємодії (21.3) примітивно-розбіжними діаграмами є лише три діаграми 2-го порядку, зображені на рис. 22.1 *в, г, д*. Усі розбіжні діаграми вищих порядків будуть містити у собі (як підблоки) примітивно-розбіжні діаграми 2-го порядку. Проаналізуємо характер розбіжностей цих трьох діаграм. Не будемо розглядати вакуумну діаграму рис. 22.1 *д*, оскільки внески усіх вакуумних діаграм можна усунути перенормуванням S-оператора або послідовності його коефіцієнтних функцій в цілому (див. (23.21) та зауваження 23.2). Внески двох інших діаграм у S-оператор мають такий вигляд:

$$S_2 \sim (-i\lambda)^2 \int dx_1 dx_2 : \varphi^k(x_1) \left(\frac{1}{i} D^c(x_1 - x_2)\right)^{4-k} \varphi^k(x_2) :, \qquad (25.1)$$

де $k = 1$ відповідає діаграмі *г*, а $k = 2$ діаграмі— *в*. В обох випадках вирази (25.1) містять у собі добуток (степінь) двох узагальнених функцій із однаковими аргументами. Математично така операція не є визначеною, і для її визначення вона потребує додаткової регуляризації. Одним із методів регуляризації для визначення добутку сингулярних узагальнених функцій є метод Паулі–Вілларса (див. [13, § 15]). Застосуємо його до визначення виразу (25.1). Першим кроком є заміна причинної функції $D^c(x)$ функцією $D^c_M(x)$, яка визначається формулою

$$\begin{aligned} D^c_M(x) &= D^c(x;m) - D^c(x;M) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \left[\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{M^2 - k^2 - i\varepsilon}\right] e^{ik\cdot x} = \\ &= \frac{M^2 - m^2}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{ik\cdot x}}{(m^2 - k^2 - i\varepsilon)(M^2 - k^2 - i\varepsilon)}, \end{aligned} \qquad (25.2)$$

де маса M введена штучно і не відповідає реальним частинкам.

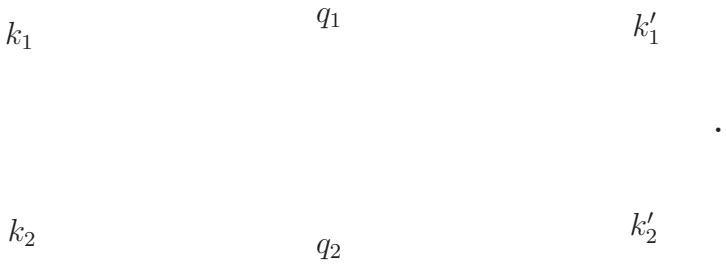
Уже з явного вигляду функції $D^c(x,m)$ (див. (20.16)) видно, що функція $D^c_M(x)$ не містить доданка, пропорційного до $\delta(x^2)$. Більш детальний аналіз

показує, що відсутні також сингулярності інших типів (див. [13], § 15). Крім того, з виразу (25.2) видно, що у значенні слабкої збіжності маємо

$$w - \lim_{M\to\infty} D^c_M(x) = D^c(x) \equiv D^c(x;m).$$

Розглянемо спершу вираз, що відповідає правій частині (25.1) при $k = 2$. Цей вираз є внеском у вершинну частину S-оператора у другому порядку теорії збурень. Він також робить внесок в амплітуду розсіяння двох частинок, які до розсіяння мали імпульси k_1 і k_2, а після розсіяння – імпульси k'_1 і k'_2.

Розглянемо одну з можливих діаграм Фейнмана, що описує такі процеси:



(25.3)

Згідно з правилами Фейнмана (22.93) – (22.95) відповідний аналітичний вираз має вигляд

$$F^{(2)}_{2;2}(k_1,k_2,k'_1,k'_2) = \frac{(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-k'_1-k'_2)}{4(2\pi)^6\sqrt{k_1^0k_2^0k_1'^0k_1'^0}}\lambda^2\widetilde{\Gamma}^{(2)}_4(k_1+k_2), \tag{25.4}$$

де

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}_4(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dq\,\frac{1}{(m^2-q^2-i\varepsilon)[m^2-(q-k)^2-i\varepsilon]}. \tag{25.5}$$

При великих значеннях імпульсів q інтеграл у правій частині (25.5) буде логарифмічно розбіжний. Щоб у цьому переконатися, будемо вважати, що q^2 є квадрат у 4-вимірному евклідовому просторі. Тоді, переходячи до сферичної системи координат, інтеграл (25.5) при великих $|q|$ буде мати асимптотику (опускаємо інтеграли за кутовими змінними)

$$\int\limits_{|q|}^{+\infty}\frac{\rho^3 d\rho}{\rho^4} = \int\limits_{|q|}^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho},$$

тобто логарифмічно розбігається.

Після регуляризації (25.2) $\widetilde{\Gamma}^{(2)}_4(k)$ набуває вигляду

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}_4(k;M) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dq\widetilde{D}^c_M(q)\widetilde{D}^c_M(q-k), \tag{25.6}$$

де

$$\widetilde{D}^c_M(q) = \frac{1}{m^2-q^2-i\varepsilon} - \frac{1}{M^2-q^2-i\varepsilon} = \frac{M^2-m^2}{(m^2-q^2-i\varepsilon)(M^2-q^2-i\varepsilon)}. \tag{25.7}$$

Легко переконатися, провівши аналогічний аналіз, що при $M < \infty$ інтеграл (25.6) є збіжним. Для його обчислення скористаємося формулою ($\varepsilon > 0$)

$$\frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} = i \int\limits_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(q^2 - m^2 + i\varepsilon)}.$$

Тоді (25.6) можна переписати у вигляді

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k; M) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dq \int\limits_0^\infty d\mu_M^\varepsilon(\alpha) d\mu_M^\varepsilon(\beta) e^{i\alpha q^2 + i\beta(q-k)^2}, \tag{25.8}$$

де введено позначення

$$d\mu_M^\varepsilon(\alpha) = e^{-\varepsilon\alpha}(e^{-i\alpha m^2} - e^{-i\alpha M^2}).$$

Інтеграл за dq від експоненти у правій частині (25.8) не буде існувати у звичайному значенні, і тому щоб поміняти порядок інтегрування не можна застосувати теорему Фубіні, а треба знову застосувати проміжну регуляризацію, покладаючи

$$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{i(at^2 + 2bt)} dt = \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{i(at^2 + 2bt) - \delta t^2}, \quad a > 0.$$

Далі користуємося формулою

$$\int e^{i(ak^2 + 2b\cdot k)} dk = \frac{\pi^2}{ia^2} e^{-\frac{ib^2}{a}}, \quad a > 0 \tag{25.9}$$

(див. детальні обчислення в [13, § 24]).

Обчислення гауссових інтегралів типу (25.9) приводить до виразу

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k; M) = \frac{i}{16(\pi)^2} \int d\mu_M^\varepsilon(\alpha) d\mu_M^\varepsilon(\beta) \frac{e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}k^2}}{(\alpha+\beta)^2}. \tag{25.10}$$

Для обчислення інтеграла в (25.10) скористаємося заміною змінних (див. [13, § 24])

$$\alpha = \xi\lambda, \quad \beta = (1-\xi)\lambda.$$

Отримаємо

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k; M) = \frac{i}{16(\pi)^2} \int\limits_0^1 J_\varepsilon(\xi, k, M) d\xi, \tag{25.11}$$

де

$$J_\varepsilon(\xi, k, M) = \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda\varepsilon} \prod_{j=1}^2 \left(e^{iA_j(m)\lambda} - e^{iA_j(M)\lambda}\right) \tag{25.12}$$

і

$$A_1(\mu) = \xi(1-\xi)k^2 - \xi\mu^2, \quad A_2(\mu) = -(1-\xi)\mu^2, \quad \mu \in \{m, M\}.$$

Обчислення інтеграла (25.12) можна зробити за допомогою формули

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\left(e^{iA\lambda} - e^{iB\lambda}\right)e^{-\varepsilon\lambda} = \ln\frac{B+i\varepsilon}{A+i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тоді отримаємо вираз (задача 25.1)

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\xi,k,M) &= \ln\frac{(1-\xi)M^2 + \xi m^2 - \xi(1-\xi)k^2 - i\varepsilon}{m^2 - \xi(1-\xi)k^2 - i\varepsilon} + \\ &+ \ln\frac{\xi M^2 - \xi(1-\xi)k^2 + (1-\xi)m^2 - i\varepsilon}{M^2 - \xi(1-\xi)k^2 - i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{25.13}$$

Таким чином маємо розбиття $\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k;M)$ на розбіжну і збіжну частини при $M \to \infty$. Збіжність треба розуміти у слабкому значенні. Таке розбиття не є однозначним, його вибір фіксується умовою

$$\operatorname{reg}\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(0;M) \equiv \widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(0,M) = 0,$$

тобто перший член розкладу в ряд Маклорена перенормованої амплітуди повинен перетворюватися в нуль.

Зауваження 25.1. *Вибір нульової точки розкладу вершинної функції* $\Gamma_4^{(2)}$ *зроблений тут із міркувань зручності. Неоднозначність процедури розбиття на збіжну і розбіжну частини дає змогу зробити скінченне перенормування, тобто відняти чи додати скінченну константу. У випадку моделі (21.3), яка розглядається, повна вершинна частина* Γ_4 *повинна дорівнювати* $(-i\lambda)$*, якщо* $k_j^2 = m^2$*, а* $k_ik_j = -\frac{1}{3}m^2$*, де* m *— спостережувана маса частинок. Фізичне обґрунтування вибору точки розкладу або ж еквівалентну процедуру скінченного перенормування буде описано нижче.*

Отже, в даному випадку перенормована амплітуда визначається формулою

$$\widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(k) := \lim_{M\to\infty}\widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(k;M) := \lim_{M\to\infty}(\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k;M) - \widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(0,M)). \tag{25.14}$$

Для того, щоб визначити амплітуду $\widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}$ з виразу (25.11), віднімемо і додамо у виразі (25.13) величину $J_\varepsilon(\xi,0,M)$. Тоді

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k;M) = a_4^{(2)}(M) + \widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(k;M),$$

де

$$a_4^{(2)}(M) = \frac{i}{8(\pi)^2}\int\limits_0^1 d\xi \ln\frac{(1-\xi)M^2 + \xi m^2}{Mm},$$

$$\widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(k;M) = \frac{i}{16(\pi)^2}\int\limits_0^1 d\xi \ln\frac{[(1-\xi)M^2+\xi m^2-\xi(1-\xi)k^2-i\varepsilon]m^2}{[(1-\xi)M^2+\xi m^2][m^2-\xi(1-\xi)k^2-i\varepsilon]} +$$
$$+ \frac{i}{16(\pi)^2}\int\limits_0^1 d\xi \ln\frac{[\xi M^2-\xi(1-\xi)k^2+(1-\xi)m^2-i\varepsilon]M^2}{[\xi M^2+(1-\xi)m^2][M^2-\xi(1-\xi)k^2-i\varepsilon]}.$$

Легко переконатися, що

$$w-\lim_{M\to\infty}\widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(k;M) = \widetilde{\Gamma}_4^{R,(2)}(k) = \frac{i}{16(\pi)^2}\int\limits_0^1 d\xi \ln\frac{m^2}{m^2-\xi(1-\xi)k^2-i\varepsilon}, \quad (25.15)$$

де границю треба розуміти у слабкому значенні.

У конфігураційному просторі вираз, що відповідає діаграмі (25.3) і робить внесок у $S_2(x_1,x_2)$, виглядатиме як

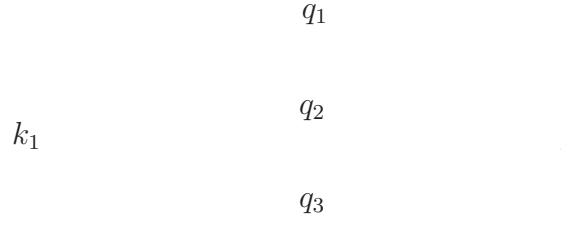
$$72\lambda^2 : \varphi^2(x_1)\Big[a_4^{(2)}(M)\delta(x_1-x_2)+\Gamma_4^{R,(2)}(x_1,x_2;M)\Big]\varphi^2(x_2) :, \quad (25.16)$$

а вираз, що робить внесок у розклад коефіцієнтної функції $F_4(x_1,\ldots,x_4)$ (ф-ла (22.51)) у другому порядку теорії збурень, має такий вигляд:

$$F_4^{(2)}(x_1,\ldots,x_4;M) = 36\sum_{\pi\in P_4}\Big[a_4^2(M)\delta(x_{\pi(1)}-x_{\pi(2)})\delta(x_{\pi(1)}-x_{\pi(3)})\delta(x_{\pi(1)}-x_{\pi(4)}) +$$
$$+ \delta(x_{\pi(1)}-x_{\pi(3)})\delta(x_{\pi(2)}-x_{\pi(4)})\Gamma_4^{R,(2)}(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)};M)]. \quad (25.17)$$

Таким чином, розбіжна частина S-матриці є квазілокальним оператором, і його носій зосереджений саме в тих точках, де не визначений T-добуток, що входить у вираз S-оператора в теорії збурень (22.37).

Зовсім аналогічно обчислюється внесок від другої примітивно розбіжної діаграми:



(25.18)

Відповідний вираз можна представити як (задача 25.2)

$$\widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k;M) = a_2^{(2)}(M^2)+b_2^{(2)}(M^2)k^2+\widetilde{\Gamma}_2^{R,(2)}(k;M). \quad (25.19)$$

де

$$a_2^{(2)}(M^2) \sim M^2, \quad \text{а} \quad b_2^{(2)}(M^2) \sim \ln \frac{M^2}{m^2}.$$

Отже, регуляризовану частину можна визначити так:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_2^{R,(2)}(k) &= \lim_{M\to\infty} \Big(\widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k;M) - \widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(0;M) - \\ &- \left.\frac{\partial \widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k;M)}{\partial k^\mu}\right|_{k=0} k^\mu - \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 \widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k;M)}{\partial k^\mu \partial k^\nu}\right|_{k=0} k^\mu k^\nu \Big). \end{aligned} \tag{25.20}$$

Аналогічно до (25.17) вираз (25.19) у координатному просторі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(2)}(x_1,x_2;M) &= a_2^{(2)}(M^2)\delta(x_1-x_2) + b_2^{(2)}(M^2)\Box_{x_1}\delta(x_1-x_2) + \\ &+ \Gamma_2^{R,(2)}(x_1,x_2;M). \end{aligned} \tag{25.21}$$

Так само, як і у випадку вершинної функції $\Gamma_4^{(2)}$, визначення $\widetilde{\Gamma}_2^{R,(2)}$ не є однозначним та може фіксуватися скінченним перенормуванням, тобто членом, який у цьому випадку є довільним поліномом к k степені $\omega(G) = 2$.

Зауваження 25.2. *У пункті 25.1 було розглянуто регуляризацію Паулі–Вілларса (25.2) для теорії φ_4^4, що дало змогу отримати скінченні внескии для вершинної функції $\Gamma_4^{(2)}(k;M)$ та внесок від власне енергетичної діаграми (25.18) $\Gamma_2^{(2)}(k;M)$.*

Але, наприклад, для моделі φ_4^6 заміни (25.2) буде недостатньо, щоб забезпечити скінченність внеску $\Gamma_4^{(2)}(k;M)$. Легко обчислити, що внесок від діаграми



(25.22)

буде логарифмічно розбіжний навіть при $M < \infty$. Для того, щоб забезпечити його збіжність, треба вводити вже дві додаткові маси M_1 і M_2.

У загальному випадку кількість додаткових параметрів

$$\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_N)$$

може бути довільним, а їх число вибирається таким, щоб отримати збіжність внеску відповідної діаграми, коли усі $M_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Для цього регуляризовану причинну функцію вибирають у вигляді

$$D^c_{\mathbf{M}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \left[\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} - \sum_{j=1}^{N} \frac{C_j}{M_j^2 - k^2 - i\varepsilon} \right] e^{ik\cdot x}, \tag{25.23}$$

а маси M_j та коефіцієнти C_j повинні задовольняти умови

$$\sum_{j=1}^{N} C_j M_j^{2k-2} = m^{2k-2} \quad \textit{для} \;\; k = 1, 2, \ldots, N. \tag{25.24}$$

Умови (25.24) дають можливість обчислити функцію $D^c_{\mathbf{M}}$ так:

$$D^c_{\mathbf{M}}(x) = \frac{K(\mathbf{M}, \mathbf{C})}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{ik\cdot x}}{\prod_{j=0}^{N}(M_j^2 - k^2 - i\varepsilon)},$$

де $M_0 = m$, а

$$K(\mathbf{M}, \mathbf{C}) = \prod_{j=1}^{N} M_j^2 \left(1 - m^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{C_j}{M_j^2}\right).$$

Із рівнянь (25.24) легко пересвідчитися (див. [13, § 16.4]), що коефіцієнти C_j рівномірно (за M_j, $j = 1, 2, \ldots, N$) обмежені деякою константою, що не залежить від M_j:

$$|C_j| \leqslant \text{const}\,.$$

Це дає змогу довести, що

$$w - \lim_{\substack{M_j \to \infty \\ j=1,2,\ldots,N}} D^c_{\mathbf{M}}(x) = D^c(x),$$

а процес виділення розбіжних доданків виконати описаним вище способом.

25.2. Індекси розбіжності діаграм Фейнмана

У даному пункті розглянемо загальну ситуацію, що відповідає деякому довільному лагранжіану. Нехай модель є такою, що внутрішній лінії l діаграми Фейнмана G відповідає проногатор

$$\widetilde{\Delta}^c(p_l) = \frac{Z_l(p_l)}{m^2 - p_l^2 - i\varepsilon}, \tag{25.25}$$

де $Z_l(p_l)$ – поліном за p_l степеня

$$r_l = \deg Z_l(p_l). \tag{25.26}$$

Поліном $Z_l(p_l)$ може залежати від спінорних і векторних індексів, які тут опускаються. У лагранжіан взаємодії загального типу можуть також входити похідні поля $u(x)$, тобто вирази $(\partial_\mu)^m u(x)$, де m – порядок похідної ∂_μ. Тоді в імпульсному просторі внесок у вершину діаграм міститиме фактор $(p_\mu)^m$, а також деякі сталі матриці або структурні константи, які теж не будемо враховувати. Така ситуація зустрінеться при розгляді полів Янга–Міллса.

Розглянемо сильнозв'язну діаграму n-го порядку (тобто з n-вершинами), яка має L внутрішніх ліній з імпульсами $p_1, \dots, p_L$ і N зовнішніх ліній, що індексуються імпульсами $k_1, \dots, k_N$. Розглянемо також загальну ситуацію ($d = s + 1$)-вимірного простору-часу, тобто

$$dp = dp^0 dp^1 \cdots dp^s.$$

Згідно з правилами Фейнмана внесок такої діаграми:

$$I_G \sim \int dp_1 \dots dp_L \prod_{l=1}^{L} \frac{Z_l(p_l)}{m^2 - p_l^2 - i\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} \delta \left(\sum_{l_j \in j} p_{l_j}^{\#} \right) \prod_{l_j \in j} [(p_{l_j}^{\#})^{\mu_j}]^{m_j(l_j)},$$

де $p_{l_j}^{\#} \in \{p_1, \dots, p_L\}$, якщо l_j — внутрішня лінія діаграми G і $p_{l_j}^{\#} \in \{k_1, \dots, k_N\}$, якщо l_j— зовнішня лінія. У випадку, коли діаграма сильно зв'язна, то $(n-1)$-е інтегрування знімається завдяки $(n-1)$-ої δ-функції ,і тоді приходимо до виразу для I_G

$$I_G \sim \delta \left(\sum_{i=1}^{N} k_i \right) \int dp_1 \dots dp_{L-(n-1)} \mathscr{P}_m(p,k) \prod_{l=1}^{L} \frac{Z_l(P_l)}{m^2 - P_l^2 - i\varepsilon}, \tag{25.27}$$

де P_l є лінійними комбінаціями внутрішніх імпульсів $p_1, \dots, p_L$ та зовнішніх імпульсів $k_1, \dots, k_N$, а $\mathscr{P}_m(p,k)$ – поліном степеня $m = m_1(l_1^1) + \cdots + m_1(l_{L_1}^1) + \cdots + m_n(l_1^n) + \cdots + m_n(l_{L_n}^n)$, $m_i(l_j^i)$ — степінь імпульсу $(p_{l_j}^{\#})^{\mu_j}$ лінії l_j, що входить в i-ту вершину, а m — це загальна кількість похідних, що входять у всі n-вершин діаграми.

Застосуємо до інтеграла (25.27) такі самі аргументи, як і для аналізу інтеграла (25.5). Тоді асимптотика інтеграла в (25.27) при великих значеннях імпульсів матиме вигляд

$$\int \rho^{d(L-n+1)-1} d\rho \, \rho^{\sum\limits_{l=1}^{L} r_l - 2L + m} = \int \rho^{\omega(G)} \frac{d\rho}{\rho}, \tag{25.28}$$

де

$$\boxed{\omega(G) := \sum_{l=1}^{L} (r_l + d - 2) + m - d(n-1)} \tag{25.29}$$

має назву *індексу розбіжності* діаграми G. Якщо $\omega(G) \geqslant 0$, то інтеграл (25.28) є розбіжним, і такі діаграми називаються *розбіжними*. Якщо $\omega(G) < 0$, то така діаграма називається *умовно збіжною*. Дійсно, умова

$$\omega(G) < 0$$

є лише *необхідною* умовою збіжності інтеграла (25.27), але не є достатньою.

Приклад розбіжної діаграми з індексом $\omega(G) = -2 < 0$ наведений на рис. 25.1. (при $d = 4$) (задача 25.4)

.

Рис. 25.1

Кожну діаграму Фейнмана можна розбити на елементарні узагальнені вузли:

$$G = G_1 * G_2 * \cdots * G_k.$$

Легко побачити (задача 25.7), що

$$\omega(G) = \sum_{j=1}^{k} \omega(G_j) + \sum_{l \in G \setminus \cup_{i=1}^{k} G_i} (r_l + d - 2) - d(k-1),$$

де друга сума відноситься до всіх внутрішніх ліній, що з'єднують вузли $G_1, \ldots, G_k$. Тоді для того, щоб діаграма G була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для кожного можливого розбиття на блоки $G_1, \ldots, G_k$ діаграми G виконувались умови

$$\omega(G) < 0 \quad \text{і} \quad \omega(G_j) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Останнє твердження є фактично наслідком теореми Боголюбова–Парасюка, яка буде сформульована нижче.

На завершення проаналізуємо можливі типи лагранжіанів і їх зв'язок з індексами розбіжності діаграм. Введемо для цього поняття *індексу вершини*

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{int}} \in i} (r_l + d - 2) + m_i - d, \tag{25.30}$$

де сума відноситься тільки до внутрішніх ліній, що входять (або виходять) у вершину i. Тоді легко переписати формулу (25.29) у вигляді

$$\omega(G) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l_{\text{int}} \in i} (r_l + d - 2) + m - dn + d = \sum_{i=1}^{n} \omega_i + d.$$

Індекс вершини ω_i є максимальним, коли всі лінії в i-й вершині будуть внутрішніми. Максимальний індекс $\omega_i^{\max}$ можна визначити рівністю

$$\omega_i = \omega_i^{\max} - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{ext}} \in i} (r_l + d - 2). \tag{25.31}$$

Тоді

$$\omega(G) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{\max} + d - \frac{1}{2}\sum_{l_{\text{ext}}}(r_l + d - 2). \tag{25.32}$$

Із визначення $\omega_i^{\max}$ зрозуміло, що він залежить лише від типу взаємодії. Якщо $\omega_i^{\max} \leqslant 0$, тоді для будь якого n індекс розбіжності $\omega(G) \leqslant d$. Такі теорії називають *перенормовними*. Якщо ж $\omega_i^{\max} > 0$, тоді для будь-якого цілого числа N можна знайти діаграму порядку $n = n(N)$ – таку, що її індекс розбіжності $\omega(G) > N$.

Такі теорії називаються *неперенормовними* теоріями. Ці питання будуть описані далі.

25.3. Усунення розбіжностей методом R-операції Боголюбова – Парасюка (БП)

У даному пункті розглянемо математичні питання, пов'язані з теорією перенормувань. Ще в 40-х роках минулого століття Томонага, Швінгер, Дайсон, Салам та ін. вчені зрозуміли, що "врятувати" квантову теорію поля (треба розуміти теорію збурень), можна тільки тоді, коли буде знайдено механізм усунення розбіжних внесків, що виникають у вищих порядках теорії збурень. У 1951 році М.М. Боголюбов (див. [8]) звернув увагу на те, що ці внески містять у собі добутки сингулярних причинних функцій, які треба розглядати як лінійні функціонали на відповідних просторах основних функцій. У класичній теорії узагальнених функцій добуток двох узагальнених функцій не є визначеним (див., наприклад, [21, п.5.9]). Отже, виникла ідея пов'язати процедуру перенормувань із визначенням нового функціонала, який є добутком сингулярних узагальнених функцій. Із виразів (25.17), (25.21) видно, що розбіжні (при $M \to \infty$) доданки зосереджені на поверхнях, де збігаються аргументи даних функцій. Це одразу дає змогу визначити граничний функціонал на спеціальній множині $\mathscr{M}$ основних функцій певного класу $\mathscr{K}$, які перетворюються в нуль разом зі своїми частинними похідними до деякого порядку. Дійсно, якщо $\Gamma_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N; M)$ – регуляризований за допомогою операції Паулі–Вілларса функціонал типу (25.17) або (25.21), що відповідає діаграмі Фейнмана n-го порядку з N зовнішніми лініями, а основна функція $\varphi \in \mathscr{M}$ така, що

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = 0 \quad \text{при} \quad x_i = x_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

тоді існує границя

$$(\Gamma_N^{(n)}, \varphi) = \lim_{M\to\infty} (\Gamma_N^{(n)}(\ldots; M), \varphi) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int dx_1 \ldots dx_N \Gamma_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N; M)\varphi(x_1, \ldots, x_N),$$

яка визначає граничний функціонал Γ на $\mathscr{M}$. Тоді згідно з відомою теоремою Гана–Банаха функціонал Γ може бути продовжений (неоднозначно!) на весь простір основних функцій $\mathscr{K}$.

Процедуру віднімання розбіжних доданків можна розглядати як конструктивну операцію продовження лінійних функціоналів, що визначаються внесками від діаграм Фейнмана. Спираючись на роботи Боголюбова–Парасюка [12], [61] (див. також [110]) коротко опишемо цю операцію. Нехай внесок діаграми Фейнмана G з n-вершинами, L-внутрішніми лініями і N-зовнішніми лініями пропорційний добутку причинних функцій $\Delta^c(x_i - x_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\Gamma_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N; y_1, \ldots, y_n) = \prod_{l=1}^{L+N} \Delta^{\#}(x^{\#}_{i(l)} - x^{\#}_{j(l)}), \tag{25.33}$$

де $\Delta^{\#}(x - y) = \dfrac{1}{i}\Delta^c(x - y)$ для кожної внутрішньої лінії і $\Delta^{\#}(x - y) = \delta(x - y)$ для кожної зовнішньої лінії. Вигляд причинної функції $\Delta^c(x_i - x_j)$ залежить від конкретного вигляду лагранжіана. Відповідно $x_i^{\#} = x_i$, якщо вершина є зовнішньою, і $x_i^{\#} = y_i$, якщо вершина є внутрішньою. Крім того, $x^{\#}_{i(l)} = x^{\#}_{i(l')}$, якщо обидві лінії l і l' $(l \neq l')$ входять у i-ту вершину.

Зауваження 25.3. *Для того, щоб отримати внесок діаграми G в аналітичний вираз для коефіцієнтної функції $F_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N)$ треба проінтегрувати $\Gamma_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_N; y_1, \ldots, y_n)$ за змінними кожної внутрішньої вершини.*

Для визначення добутку узагальнених функцій (25.33), треба замість причинної функції $\Delta^c(x)$ підставити у вираз (25.33) регуляризовану (наприклад, методом Паулі—Вілларса) функцію $\Delta_M^c(x)$, що визначається у загальному випадку аналогічно до функції (25.2) або ж (25.23).

Якщо діаграма G є примітивно-розбіжною типу (25.3) чи (25.18), то R-операція фактично визначається виразами (25.14) або (25.20), тобто оператор $R(G)$ буде діяти за правилом

$$R(G)\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k; M) := \widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k; M) - \widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(0, M)$$

у випадку діаграми (25.3) або

$$\begin{aligned} R(G)\widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k; M) \;&:=\; \widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k; M) - \widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(0, M) - \\ &-\; \frac{\partial\widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k; M)}{\partial k^\mu}\bigg|_{k=0} k^\mu - \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k; M)}{\partial k^\mu \partial k^\nu}\bigg|_{k=0} k^\mu k^\nu \end{aligned}$$

для діаграми (25.18).

Для того, щоб абстрактно записати оператор $R(G)$, визначимо оператор $M(G)$, який ставить у відповідність регуляризованому (наприклад, за допомогою операції Паулі–Вілларса) внеску $\mathscr{F}_G^{(n)}(k_1, \ldots, k_N; M) = \delta(\Sigma k_i)$ $\mathscr{F}_G^{\prime(n)}(k_1, \ldots, k_N; M)$ суму перших членів її розкладу в ряд Маклорена до членів порядку $\omega(G)$ включно (якщо $\omega(G) \geqslant 0$). Нагадаємо, що $\omega(G)$ – індекс розбіжності діаграми G. Отже,

$$M(G)\mathscr{F}_G^{(n)}(k_1, \ldots, k_N; M) =$$

$$= \begin{cases} \delta(\Sigma k_i)\{\mathscr{F}_G{}'(n)(k_1,\ldots,k_N;M)\}_{\omega(G)}, & \text{якщо } \omega(G)\geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } \omega(G)<0, \end{cases} \tag{25.34}$$

де для скорочення запису позначено за допомогою фігурних дужок з індексом $\omega(G)$ кратний ряд Маклорена до членів порядку $\omega(G)$. Тоді у випадку діаграм (25.3) і (25.18) маємо

$$R(G) = 1 - M(G).$$

Вище було відзначено (див. зауваження 25.1), що процедура віднімання не є однозначною і тому її фіксують вибором точки розкладу. Щоб врахувати цю неоднозначність, зручно ввести оператор скінченного перенормування $P(G)$, який діє на внесок $\mathscr{F}_G^{(n)}(k_1,\ldots,k_N;M)$ подібно до оператора $M(G)$, але замість розкладу F_G' у ряд Маклорена перетворює фейнманівську амплітуду F_G' у довільний поліном $\mathscr{P}_{\omega(G)}$ степеня $\omega(G)$, тобто

$$P(G)\mathscr{F}_G^{(n)}(k_1,\ldots,k_N;M) = \begin{cases} \delta(\Sigma k_i)\mathscr{P}_{\omega(G)}(k_1,\ldots,k_N), & \text{якщо } \omega(G)\geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } \omega(G)<0. \end{cases} \tag{25.35}$$

Коефіцієнти полінома $\mathscr{P}_{\omega(G)}$ вибирають залежно від моделі з міркувань нормування фейнманівських амплітуд (див. зауваження 25.1).

Отже, остаточно для діаграм (25.3) та (25.18) оператор $R(G)$ треба записати у вигляді

$$R(G) = 1 - M(G) + P(G). \tag{25.36}$$

Застосування операції (25.36) можна звести до віднімання ряду Тейлора в довільній точці розкладу.

Розглянемо тепер випадок, коли діаграма G є розбіжною, але не примітивно розбіжною, тобто порядку $n>2$ і містить у собі підблоки, які є розбіжними. Причому індекс розбіжності всієї діаграми може бути від'ємним. Із інтуїтивних міркувань зрозуміло, що для усунення розбіжностей із такої діаграми треба спершу усунути розбіжність у кожному підблоці діаграми G, потім у кожному об'єднанні цих підблоків і, нарешті,– в об'єднанні усіх підблоків, тобто у самій діаграмі G. Щоб побудувати оператор $R(G)$, розіб'ємо сукупність n вершин діаграми G на довільні непорожні і неперетинні підмножини вершин:

$$G = G_1 * \cdots * G_m, \quad m \leqslant n.$$

На амплітуді Фейнмана, що відповідає блоку G_i, визначимо оператори $\Delta(G_i)$ такими рекурентними співвідношеннями:

$$\Delta(G_i) = 1, \quad \text{якщо} \quad |G_i| = 1 \tag{25.37}$$

і

$$\Delta(G_i) = -M(G_i) \sum_{G_{i_1}*\cdots*G_{i_k}=G_i} \Delta(G_{i_1})\cdots\Delta(G_{i_k}) + P(G_i), \tag{25.38}$$

де сума виконується за всіма розбиттями множини G_i на непорожні неперетинні підмножини. У формулі (25.37) $|G_i|$ означає кількість вершин у підграфі G_i. Тоді R –операція визначається оператором

$$R(G) = 1 + \sum_{G_{i_1} * \cdots * G_{i_m}} \Delta(G_{i_1}) \cdots \Delta(G_{i_m}), \tag{25.39}$$

а теорема Боголюбова–Парасюка стверджує, що границя

$$\lim_{M \to \infty} R(G) \mathscr{F}_G(\cdot; \mathbf{M}) := \mathscr{F}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{R}}(\cdot)$$

існує як узагальнена функція і є лінійним неперервним функціоналом (узагальненою функцією) над простором основних функцій Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4|G|})$ (див., наприклад, [21, § 8]). Доведення цієї теореми досить складне і виходить за рамки цієї праці. Повністю воно наведене в роботі [61] і в підсумковій роботі [110]. Але технічні засоби, що використовувались при доведенні, не були оптимальними. Метод математичної індукції, який застосовувався при доведенні, був досить громіздким, а в самому доведенні було багато незрозумілих моментів. Тому майже десять років R-операцію БП мало хто розумів. У 1966 році К. Хепп [145] опублікував свою роботу, в якій значно спростив доведення, застосувавши нові технічні прийоми. Це доведення теж не є простим (детально воно викладене у праці [99]), але R-операція набула дуже великої популярності і почала називатись R-операція Боголюбова–Парасюка–Хеппа (БПХ), а пізніше, після роботи В. Циммермана [205]—R-операцією БПХЦ. З детальними викладами та історією цих питань можна познайомитися у працях О.І. Зав'ялова [34,35] (див., також [13, § 26]).

На завершення наведемо один приклад застосування R-операції до конкретної розбіжної діаграми, яка не є примітивно розбіжною і зробимо декілька зауважень.

Приклад 25.1. (теорія, з лагранжіаном (21.3)).

Розглянемо для прикладу діаграму на рис. 25.2:

2

1

3 .

Рис. 25.2

Легко переконатися, що внесок від усієї діаграми $G = G_{123}$ є розбіжним і за формулою (25.29) індекс її розбіжності $\omega(G) = 0$. Блок діаграми, що складається з вершин 2, 3 і двох внутрішніх ліній, також має індекс розбіжності $\omega(G_{23}) = 0$. Існує лише два нетривіальні розбиття

$$G_1 * G_2 * G_3 \quad \text{і} \quad G_1 * G_{23},$$

де G_i, $i = 1, 2, 3$ – прості вершини, а G_{23}– розбіжний підблок. Згідно з (25.37), (25.38) маємо

$$\Delta(G_i) = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$\Delta(G_{23}) = P(G_{23}) - M(G_{23})$$

і

$$\Delta(G) = P(G) - M(G)[1 + \Delta(G_{23})].$$

Отже, оператор, що відповідає повному відніманню (R-операції)

$$\begin{aligned} R(G) &= 1 - M(G_{23}) + P(G_{23}) + P(G) - \\ &- M(G)[1 + P(G_{23}) - M(G_{23})]. \end{aligned}$$

Якщо не робити скінченного перенормування (тобто покладемо $P(G) = P(G_{23}) = 0$), то отримаємо формулу

$$R(G) = (1 - M(G))(1 - M(G_{23})).$$

Це означає, що треба спершу зробити віднімання в розбіжному блоці G_{23}, а потім застосувати таку ж операцію до вкладу, який отримаємо після застосування операції $(1 - M(G_{23}))$.

Зауваження 25.4. *Для того, щоб визначити дію оператора $R(G)$ у координатному просторі, досить записати дію оператора $M(\Gamma_i)$, де Γ_i збігається або з самою діаграмою G, або ж з її підблоком, на внесок (25.33). Таку дію можна визначити формулою*

$$M(\Gamma_i)\Gamma_N^{(n)}(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N; M) =$$
$$= \begin{cases} g_{\omega(\Gamma_i)}(x^{\#}_{j_1}, \dots, x^{\#}_{j_{n_i}}; M) \prod\limits_{l \notin L(\Gamma_i)} \Delta^{\#}_M(x^{\#}_{i(l)} - x^{\#}_{j(l)}), & \text{якщо } \omega(\Gamma_i) \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } \omega(\Gamma_i) < 0, \end{cases} \tag{25.40}$$

де Γ_i – підблок, що об'єднує вершини $\{x^{\#}_{j_1}, \dots, x^{\#}_{j_{n_i}}\}$, які з'єднані лініями $l \in L(\Gamma_i)$, а $g_{\omega(\Gamma_i)}$ – обернене фур'є-перетворення (як узагальненої функції) полінома $M(\Gamma_i)\mathscr{F}_{\Gamma_i}(k_{j_1}, \dots, k_{j_{n_i}}; M)$ (див. (25.34)), якщо $\omega(\Gamma_i) \geqslant 0$. Оператор $P(\Gamma_i)$ визначається аналогічно, враховуючи (25.35).

Зауваження 25.5. *Фоормула (25.39) не є зручною для користування та доведення основної теореми (теореми БП). У роботі [36], а потім у роботі [205] було показано, що рекурентні співвідношення (25.37),(25.38) можна розв'язати і представити R-операцію у вигляді*

$$R(G) = \vdots (1 - M(\Gamma_1) + P(\Gamma_1))(1 - M(\Gamma_2) + P(\Gamma_2)) \cdots (1 - M(\Gamma_m) + P(\Gamma_m)) \vdots, \tag{25.41}$$

де $\Gamma_1 \equiv G$, а $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ – усі розбіжні підграфи графа G. Знак $\vdots \cdots \vdots$ будемо називати (за О.І. Зав'яловим [34]) "триточковим" добутком, в якому розташування співмножників відповідають таким правилам:

1) *якщо* Γ_i *і* Γ_j *частково перекриваються, тобто* $\Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \emptyset$, *але ні* Γ_j, *ні* Γ_j *не лежать повністю один в одному, то*

$$\vdots Q(\Gamma_{i_1}) \cdots Q(\Gamma_i) \cdots Q(\Gamma_j) \cdots Q(\Gamma_{i_k}) \vdots \equiv 0,$$

де $Q(\Gamma_i)$ *один з операторів* $M(\Gamma_i)$ *або* $P(\Gamma_i)$;

2) *якщо у добутку є такий* Γ_i, *що* $Q(\Gamma_i) = P(\Gamma_i)$ *і такий* Γ_j, *що* $\Gamma_j \subset \Gamma_i$, *то такий добуток теж перетворюється в нуль;*

3) *якщо* $\Gamma_j \subset \Gamma_i$, *то у добутку оператор* $Q(\Gamma_j)$ *стоїть справа від* $Q(\Gamma_i)$, *тобто спершу треба подіяти оператором* $Q(\Gamma_j)$, *а потім оператором* $Q(\Gamma_i)$. *Якщо* $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, *то порядок множників не має значення.*

Щоб врахувати правила 1) – 3), *треба перемножити ті пари, які фігурують у* 1) *та* 2). *Тоді, наприклад, для* Γ_i, Γ_j, *що є в* 1), *замість того, щоб підряд застосувати до внеску від діаграми* G *оператори* $(1 - M(\Gamma_i))(1 - M(\Gamma_j))$, *треба застосувати один оператор* $(1 - M(\Gamma_i) - M(\Gamma_j))$, *оскільки* $\vdots \cdots M(\Gamma_i)M(\Gamma_j) \cdots \vdots \equiv 0$.

Формулу (25.41) можна також спростити, якщо перевизначити оператор M, *змістивши центр розкладу фейнманівської амплітуди за степенями імпульсів, тобто використавши замість ряду Маклорена ряд Тейлора.*

Нехай оператор $T(\Gamma_i)$ *замінює фейнманівську амплітуду підграфа* Γ_i *на поліном степеня* $\omega(\Gamma_i)$ *за змінними* $(u - u_0)$, *де* u – *деякі скалярні комбінації зовнішніх імпульсів підграфа* Γ_i, *а* u_0– *спеціально підібрані значення величин* u, *які треба вибирати з фізичних міркувань. Тоді формулу (25.41) можна переписати у вигляді*

$$G(G) = \vdots (1 - T(\Gamma_1)) \cdot \cdots \cdot (1 - T(\Gamma_m)) \vdots . \tag{25.42}$$

Але треба зауважити, що операція (25.41) має більшу кількість довільних констант (коефіцієнтів у поліномів $P(\Gamma_i)$), *ніж операція (25.42). Дійсно, зсув точки віднімання в (25.42) завжди можна врахувати, підібравши відповідним чином оператори скінченного перенормування* $P(\Gamma_i)$. *Протилежне твердження не є справедливим.*

25.4. R-операція і контрчлени в лагранжіані

R-операція Боголюбова–Парасюка усуває математичні проблеми, які пов'язані з виникненням розбіжностей у кожному порядку теорії збурень для матриці розсіяння. Але на перший погляд така операція виглядає як деякий додатковий "рецепт" до квантової теорії взаємодіючих полів, фізична мотивація якого не зовсім зрозуміла. У даному пункті покажемо (хоч і на більш формальному з математичної точки зору рівні), що усунути розбіжності можна введенням у

лагранжіан послідовності (можливо, навіть нескінченної) *квазілокальних* операторів.

Означення 25.1. *Квазілокальним оператором називається операторно-значний функціонал (узагальнена операторно-значна функція) вигляду*

$$\Lambda_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} K_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n):u^{k_1}_{1;\alpha_1}(x_1)\cdots u^{k_n}_{n;\alpha_n}(x_n):, \qquad (25.43)$$

де $u_{i;\alpha_i}(x_j)$ – вільне поле виду $i=\overline{1,n}$, що входить у деякому цілому степені k_i, а коефіцієнти функції $K_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n)$ мають вигляд

$$K_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\left(\cdots\cdots,\frac{\partial}{\partial x},\cdots\cdots\right)\delta(x_1-x_2)\cdots\delta(x_1-x_n). \qquad (25.44)$$

Тут $P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\left(\cdots\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x},\cdots\cdots\right)$ – поліном відносно усіх можливих похідних $\partial/\partial x_j^{(\alpha)}$, $j=1,2,\dots,n$, $\alpha=0,1,2,3$, з постійними коефіцієнтами.

Зауважимо також: якщо поле $u_i(x)$ є спінорним ψ або комплексним, то у вираз (25.43) це поле входить у вигляді комбінацій $K_{\dots,\alpha,\alpha',\dots}\bar\psi_\alpha\psi_{\alpha'}$ чи $K_{\dots,\alpha,\alpha',\dots}\overset{*}{u}_\alpha u_{\alpha'}$. Крім того, якщо одне з $k_i=0$, то відповідний індекс α_i у функції $K_{\alpha,\dots,\alpha}$ відсутній.

Означення 25.2. *Квазілокальні оператори $\Lambda_n(x_1,\dots,x_n)$, $n=1,2,\dots$ будемо називати такими, що належать до одного типу, якщо вони відрізняються один від одного лише своїми коефіцієнтними функціями, тобто кількість та вид операторних полів, що стоять у правій частині виразу (25.43) під знаком нормального добутку, буде одне і те саме для всіх квазілокальних операторів даного типу.*

У виразі (25.43) тип квазілокального оператора визначають види полів u_i і степені k_i, в яких вони входять у конкретний доданок. У загальному випадку квазілокальний оператор є сумою квазілокальних операторів різного типу.

Легко спостерігати: якщо проінтегрувати квазілокальний оператор $\Lambda(x_1,\dots,x_n)$ за змінними $x_2,\dots,x_n$, то отримаємо звичайний локальний оператор, аналоги якого входять у визначення лагранжіанів (4.54), (5.114).

Проаналізуємо тепер вигляд S-оператора розсіяння у кожному порядку теорії збурень із точки зору невизначеності T-добутку, що входить в означення S_n (див. (22.36), (22.37)):

$$S_n(x_1,\dots,x_n)=i^nT(\mathscr{L}_I(x_1)\cdots\mathscr{L}_I(x_n)). \qquad (25.45)$$

У § 22 (див. зауваження 22.2) було з'ясовано, що цей вираз не є визначеним однозначно, якщо деякі аргументи $x_1,\dots,x_n$ збігаються, тобто, наприклад, $x_{i_1}=$

x_{i_2} при $i_1 \neq i_2$ або $x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3}$ і т.д. Отже, замість виразу (25.45) у визначенні S-оператора розсіяння можна розглядати вираз

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = i^n T(\mathscr{L}_I(x_1) \cdots \mathscr{L}_I(x_n)) + \Delta S_n(x_1, \ldots, x_n), \tag{25.46}$$

де ΔS_n виражаються через квазілокальні оператори $\Lambda_2(x_1, x_2), \ldots$, $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$ вигляду (25.43). Ці оператори можна вибрати таким чином, щоб вираз (25.46) так само, як і вираз (25.45) задовольняв необхідні вимоги релятивістської інваріантності, унітарності, причинності тощо. Щоб у цьому переконатися, радимо познайомитись з аксіоматичним підходом до побудови S-матриці за ступенями взаємодії, викладеним у праці М.М. Боголюбова і Д.В. Широкова [13, § 18].

У зв'язку з представленням (25.46) виникає природнє питання: чи не можна підібрати оператори $\Delta S_n(x_1, \ldots, x_n)$ таким чином, щоб компенсувати розбіжності, що виникають при використанні виразу (25.45)? Позитивна відповідь на це питанння випливає з аналізу цих розбіжностей і структури R-операції, які вже розглядалися. Дійсно, почнемо з $n = 2$. Тоді вираз $i^2 T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2))$ міститиме у собі внески всіх примітивно розбіжних діаграм другого порядку. Застосування до внесків від цих діаграм R-операції Боголюбова–Парасюка еквівалентне відніманню від них квазілокальних операторів, які можна задати за допомогою оператора $M(G)$ (див. ф-лу (25.40)). Отже, треба покласти

$$\Delta S_2(x_1, x_2) = i\Lambda_2(x_1, x_2),$$

де $\Lambda_2(x_1, x_2)$– сума всіх квазілокальних операторів, кожен з яких відповідає виразу

$$M(G_i)\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = g_{\omega(G_i)}(x_1, x_2), \tag{25.47}$$

G_i, $i = 1, 2, \ldots$ – це всі примітивно розбіжні діаграми, що виникають у виразі $i^2 T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2))$, а $\omega(G_i)$ – їх індекси розбіжності. Функція $g_{\omega(G_i)}$ є коефіцієнтною функцією відповідного квазілокального оператора і будується за рецептом, який описаний у зауваженні 25.4. Наприклад, для взаємодії (21.3) згідно з формулами (25.16) і (25.21) квазілокальний оператор $\Lambda_2(x_1, x_2)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(x_1, x_2) &= \Lambda_2^{(2)}(x_1, x_2) + \Lambda_2^{(4)}(x_1, x_2), \\
\Lambda_2^{(2)}(x_1, x_2) &= -i72\lambda^2 a_4^{(2)} \delta(x_1 - x_2) : \varphi^2(x_1)\varphi^2(x_2) :, \\
\Lambda_2^{(2)}(x_1, x_2) &= -i96\lambda^2 [a_2^{(2)} \delta(x_1 - x_2) + b_2^{(2)} \Box_{x_1} \delta(x_1 - x_2)] : \varphi(x_1)\varphi(x_2) :,
\end{aligned} \tag{25.48}$$

де коефіцієнти $a_4^{(2)}$, $a_2^{(2)}$ і $b_2^{(2)}$ – граничні значення констант $a_4^{(2)}(M)$, $a_2^{(2)}(M)$ і $b_2^{(2)}(M)$ при $M \to \infty$. Отже, ці коефіцієнти є нескінченними константами, і тому формальний вираз для $S_2(x_1, x_2)$, обчислений за формулою (25.46), треба розуміти так, що спершу розглядаються регуляризовані (наприклад, методом Паулі–Вілларса) фейнманівські пропогатори, потім виділяються розбіжні доданки, які скорочуються з відповідними контрчленами, і лише після цього

знімається проміжна регуляризація. Числові множники 72 та 96 з'являються внаслідок приведення оператора $S_2(x_1, x_2)$ до нормального вигляду, тобто застосування теореми Віка для T-добутку. Таким чином, правильним уведенням квазілокального оператора у вираз для $S_2(x_1, x_2)$ (див. (25.46)) можна усунути розбіжності, що виникають у формулі (25.45). Розглянемо тепер (25.45) при $n = 3$. Усі діаграми Фейнмана 3-го порядку можна отримати з діаграм 2-го порядку приєднанням вершини найрізноманітнішими способами: коли вершина приєднується незв'язним чином, що відповідає виразу

$$: \mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)\mathscr{L}_I(x_3) :,$$

коли вершина приєднується за допомогою однієї внутрішньої лінії, що відповідає спарюванню одного з операторів, що входить у $\mathscr{L}_I(x_3)$ з операторами, що залишаються неспареними у виразі $T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2))$, і т.д.

З такої побудови зрозуміло, що діаграми, які утворилися за допомогою приєднання вершини до примітивно-розбіжних діаграм другого порядку, залишаться розбіжними, оскільки будуть містити у собі розбіжний підблок. Згідно з конструкцією R-операції, щоб усунути розбіжність, яка відповідає цьому підблоку, треба відняти від внеску усієї діаграми внесок такої самої діаграми, але замість внеску, що відповідає розбіжному підблоку, треба поставити вираз типу (25.47). Це фактично означає, що структура контрчленів, що відповідають цьому відніманню, виглядатиме так:

$$i^2T(\mathscr{L}_I(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3)) + i^2T(\mathscr{L}_I(x_2)\Lambda_2(x_1, x_3)) + i^2T(\mathscr{L}_I(x_3)\Lambda_2(x_1, x_2)). \quad (25.49)$$

Контрчлени (25.49) усувають розбіжні внески тих діаграм з виразу $T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)\mathscr{L}(x_3))$, які мають лише один розбіжний підблок другого порядку. Приклад такої діаграми 3-го порядку зображений на рис. 25.3 у випадку взаємодії (21.3):

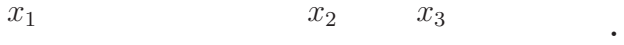
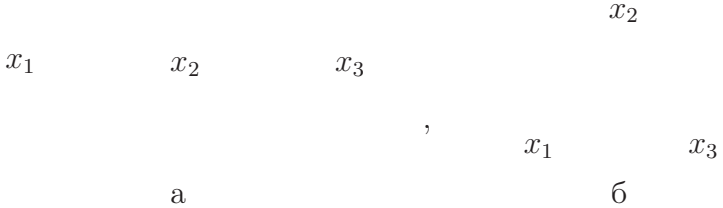


Рис. 25.3

Відповідний контрчлен буде міститись у виразі $T(\Lambda_2^{(2)}(x_1, x_2) : \varphi^4(x_3) :)$.

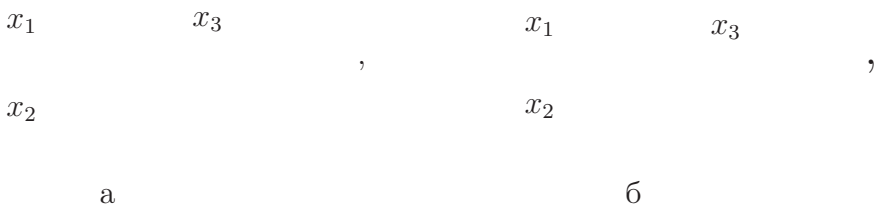
Але, наприклад, у випадку діаграм, зображених на рис. 25.4 *а* або рис. 25.4 *б*,



а б

Рис. 25.4

для усунення розбіжностей лише в одному з блоків досить контрчленів (25.49) з $\Lambda_2^{(4)}(x_i, x_j)$, $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ замість $\Lambda_2(x_i, x_j)$. Результат такого віднімання можна подати у вигляді діаграм, зображених на рис. 25.5:



а б

Рис. 25.5

де жирна вершина відповідає внеску, який отримується застосуванням операції $1-M(G_{12})$ до внеску діаграми (25.3). Але отримані внески $(1-M(G_{12}))\Gamma_4^{(3)}$ і $(1-M(G_{12}))\Gamma_2^{(3)}$ будуть знову розбіжні, і для повного усунення розбіжностей треба застосувати операцію $1 - M(G_{123})$, що еквівалентне введенню квазілокального контрчлена

$$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = \Lambda_3^{(4)}(x_1, x_2, x_3) + \Lambda_3^{(2)}(x_1, x_2, x_3), \tag{25.50}$$

де $\Lambda_3^{(4)}$ будується за внеском $(-M(G_{12}))\Gamma_4^{(3)}$, а $\Lambda_3^{(2)}$ – внеском $(-M(G_{12}))\Gamma_2^{(3)}$.

Якщо, крім отриманих розбіжностей, з'являться нові розбіжності, які виникли у 3-му порядку, тобто коли внесок $\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$ діаграми 3-го порядку G в цілому буде мати індекс розбіжності $\omega(G) \geqslant 0$, то треба зробити віднімання виразу

$$M(G)\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3),$$

який потрібно включити в контрчлен $\Lambda_3(x_1, x_2, x_3)$.

Отже, у 3-му порядку теорії збурень контрчлен $\Delta S_3(x_1, x_2, x_3)$ буде мати структуру

$$\begin{aligned} \Delta S_3(x_1, x_2, x_3) &= iT\{\mathscr{L}_I(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3) + \mathscr{L}_I(x_2)\Lambda_2(x_1, x_3) + \\ &+ \mathscr{L}_I(x_3)\Lambda_2(x_1, x_2)\} + i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Аналогічно можна усунути розбіжності у всіх порядках теорії збурень.

Отже, R-операція Боголюбова–Парасюка еквівалентна формальному визначенню оператора (25.45) виразом (25.46), тобто введенню послідовності квазілокальних операторів $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Оператор S_n матиме такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} S_n(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{i^k}{k!} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_k, m_i \geqslant 1 \\ m_1 + \ldots + m_k = n}} {\sum_{\pi \in \mathscr{P}_n}}' T(\Lambda_{m_1}(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(m_1)})) \cdots \\ &\cdots \Lambda_{m_k}(x_{\pi(m_1 + \cdots + m_{k-1} + 1)}, \ldots, x_{\pi(n)}), \end{aligned} \tag{25.51}$$

де $\Lambda_1(x) := \mathscr{L}_I(x)$, а Σ' за $\pi \in \mathscr{P}_n$ означає суму за всіма можливими перестановками індексів $\{1, \ldots, n\}$ між групами m_1, m_2, ..., m_k індексів. Така сума містить $n!/m_1! \ldots m_k!$ членів.

На перший погляд, ситуація залишилась такою ж , як і у випадку застосування додаткової процедури R-операції. Тобто для повного визначення S-матриці недостатньо задати лагранжіан взаємодії, а треба задати ще нескінченну послідовність квазілокальних операторів Λ_n.

Але виявляється, що комбінаторна структура (25.51) дає змогу переписати вираз для повного S-оператора у вигляді звичайного T-добутку з більш складним лагранжіаном, який включає всю послідовність квазілокальних операторів $\{\Lambda_n\}$. Іншими словами, справедлива така комбінаторна лема.

Лема 25.1. *S-оператор $S(g)$, що має вигляд*

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n) g(x_1) \ldots g(x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

з коефіцієнтними операторами (25.51) можна записати як звичайний T-добуток

$$\begin{aligned} S(g) &= T\left(e^{i \int \mathscr{L}_I(x;g) dx}\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int T(\mathscr{L}_I(x_1; g) \ldots \mathscr{L}_I(x_m; g)) dx_1 \ldots dx_m, \end{aligned}$$

де новий лагранжіан $\mathscr{L}_I(x; g)$ визначається безмежним рядом

$$\mathscr{L}_I(x; g) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \Lambda_m(x, x_1, \ldots, x_{m-1}) g(x) g(x_1) \cdots g(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_{m-1}. \qquad (25.52)$$

Доведення. Дивись задачу 25.7.

Лема 25.1 дає можливість визначити S-оператор звичайним чином за допомогою формули (22.39), але з більш складним лагранжіаном (25.52), який містить у собі послідовність квазілокальних операторів.

25.5. Класифікація взаємодій: перенормовні та неперенормовні теорії

Проаналізуємо тепер зв'язок між типом взаємодії, що визначає вигляд вершин у діаграмах Фейнмана, індексами розбіжності діаграм і типом контрчленів (див. означення 25.2), які необхідно ввести в лагранжіан (25.52) щоб усунути усі розбіжності в S-матриці. У кінці пункту 25.2 було названо перенормовними такі

теорії, лагранжіани взаємодії яких приводять до діаграм Фейнмана з максимальним індексом вершини $\omega_i^{\max} \leqslant 0$ (див. (25.30), (25.31)) . Щоб обґрунтувати цю назву, звернемося до формули (25.32). Враховуючи, що $\omega_i^{\max} \leqslant 0$ і вибираючи найгіршу ситуацію, коли усі $r_l \equiv 0$, отримаємо для будь-якої діаграми G з N-зовнішніми лініями, що

$$\omega(G) \leqslant N + d - \frac{1}{2}Nd.$$

У випадку реального 4-вимірного простору-часу($d = 4$) маємо

$$\omega(G) \leqslant 4 - N.$$

Ця формула означає, що індекс $\omega(G) \geqslant 0$ будуть мати лише ті діаграми G, у яких число зовнішніх ліній $N \leqslant 4$. Отже, згідно з означенням 25.2, можливе тільки скінченне число типів контрчленів $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$, що відповідають різним значенням N. Контрчлени, що відповідають розбіжним діаграмам з N зовнішніми лініями, виглядатимуть так:

$$\Lambda_m^{(N)}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_N}} K^{(m),N}_{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_N}}(x_1, \ldots, x_m) : u_{1;\alpha_{i_1}}(x_{i_1}) \cdots u_{N;\alpha_{i_N}}(x_{i_N}) :,$$

причому $K^{(n)} \sim \lambda^n$, де λ – константа взаємодії. Враховуючи вигляд коефіцієнтних функцій (25.44), у виразі (25.52) можна виконати інтегрування за $dx_1, \ldots$, dx_{n-1}, "перекинувши" дію похідних на оператори поля (при $g(x) \equiv 1$), і формально просумувати за степенями λ^m коефіцієнтні функції для кожного типу контрчленів. Внаслідок цього отримаємо новий лагранжіан, який відрізняється від "затравочного" $\mathscr{L}(x)$ скінченним числом нескінченних контрчленів:

$$\mathscr{L}_I(x, 1) = \mathscr{L}_I(x) + \sum_{N \geqslant 0} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} K^{(N)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} : u^{\#}_{1;\alpha_1}(x) \cdots u^{\#}_{N;\alpha_N}(x) :,$$

де $u^{\#}_{i;\alpha}(x)$ збігається або з полем $u_{i;\alpha}(x)$, або з похідною цього поля по ∂_μ. Далі покажемо, що константи $K^{(N)}$ можна пов'язати з константами перенормування основних фізичних параметрів відповідної моделі (тобто маси, заряду (або константи взаємодії), тощо). Саме тому теорії зі скінченним числом контрчленів називають перенормовними. У випадку, коли $\omega_i^{\max} \geqslant 1$, завжди можна побудувати діаграму Фейнмана, де $\omega(G) \geqslant 0$, якою великою не була б кількість зовнішніх ліній N. Це означає, що число типів контрчленів, які необхідно включити в означення лагранжіана (25.52), є нескінченним. Саме тому такі теорії вважаються неперенормовними.

Для аналізу конкретних модельних прикладів локальних взаємодій радимо звернутись до монографії [13, § 28]. Заслуговує також уваги ідея пов'язати взаємодії другого роду (тобто неперенормовні взаємодії) з нелокальним характером такого типу взаємодій (див. [13, § 28.3]).

25.6. Зв'язок контрчленів з перенормуванням основних констант теорії

У попередньому пункті зверталася увага на те, що у випадку перенормовних теорій число типів контрчленів є скінченним. Після формального пересумування кожного типу контрчленів у всіх порядках теорії збурень отримаємо додатковий лагранжіан $\Delta\mathscr{L}$, який має таку ж структуру, як і початковий повний лагранжіан $\mathscr{L}(x)$, але міститиме у собі коефіцієнти, що залежать від параметрів проміжної регуляризації (від мас M_i у випадку регуляризації Паулі–Вілларса). У границі $M_i \to \infty$ ці коефіцієнти будуть розбігатись і компенсувати розбіжності теорії збурень, яка побудована за лагранжіаном $\mathscr{L}_I(x)$, що є збуренням лагранжіану $\mathscr{L}_0(x)$ ($\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_I(x)$). Виявляється, що для більшості перенормовних теорій така процедура усунення розбіжностей еквівалентна перенормуванню початкових або так званих "*затравочних*" констант: маси, константи взаємодії тощо. Вперше це зрозумів Дайсон [29]. Він також розробив схему побудови перенормованих функцій Гріна і матричних елементів S-оператора, яку розглянемо на прикладі взаємодії (21.3).

Запишемо повний лагранжіан, що описує самовзаємодію дійсного скалярного поля у такому вигляді:

$$\mathscr{L}(x) \equiv \mathscr{L}(\varphi(x); m^2; \lambda) = \frac{1}{2} : \varphi(x)[\Box - m^2]\varphi(x) : -\lambda : \varphi^4(x) : . \qquad (25.53)$$

Поки що не будемо пов'язувати поле $\varphi(x)$ та параметри m і λ з реальними частинками і вважатимемо їх деякими змінними величинами. Крім того, у виразі (25.53) доданок, що відповідає вільному лагранжіану, записаний у вигляді, що відрізняється від стандартного виду (4.54). Для зручності перекинули похідну ∂_μ (це можна зробити, оскільки $\mathscr{L}(x)$ стоїть у виразі для дії) і скористались означенням оператора д'Аламбера (4.5). Аналіз розбіжних діаграм, проведений у пункті 25.1, показав, що такими є (крім вакуумних) діаграми з двома і чотирма зовнішніми лініями. Звичайно, у вищих порядках теорії збурень діаграми з шістьма (і більше) зовнішніми лініями, хоч і мають індекс розбіжності $\omega(G) < 0$, але можуть містити у собі розбіжні підблоки. Враховуючи формули (25.16) і (25.21), легко отримати такий вигляд контрчленів, що треба включити в лагранжіан (25.53) у другому порядку теорії збурень (див. також формулу (25.48)):

$$\begin{aligned} \Delta\mathscr{L}^{(2)}(x) &= 96\lambda^2 b_2^{(2)} : \varphi(x)\Box\varphi(x) : -96\lambda^2 a_2^{(2)} : \varphi(x)^2 : - \\ &- 72\lambda^2 a_4^{(2)} : \varphi(x)^4 : . \end{aligned} \qquad (25.54)$$

Контрчлен (25.54) відповідатиме першим членам розкладу в ряд Маклорена (до порядку $\omega(G)$) регуляризованих функцій $\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k; M)$ і $\widetilde{\Gamma}_2^{(2)}(k; M)$, які відповідають аналітичним виразам діаграм (25.3) і (25.18), якщо в них звичайний пропагатор замінити на регуляризований вираз (25.7). Враховуючи зауваження

25.1, розклад Маклорена можна замінити на розклад Тейлора у якійсь зручній точці розкладу. Виходячи з фізичних міркувань, такими є точки, в яких зовнішні імпульси лежать на масовій поверхні $k^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = m_r^2$, де m_r – маса реальної спостережуваної частинки. У випадку, коли $m_r = 0$, краще взяти якусь просторовоподібну точку з $k^2 = -\mu^2 < 0$. Тоді, покладаючи $m = m_r$, а $\lambda = \lambda_r$ (λ_r — спостережувана константа взаємодії), запишемо вигляд контрчлена (надалі індекс "r" ми опустимо)так:

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}K_2^{(2)}B_2^{(2)} : \varphi(x)[\Box - m^2]\varphi(x) : -\frac{1}{2}\lambda^2 K_2^{(2)}A_2^{(2)} : \varphi^2(x) : - \\ &- \lambda K_4^{(2)}A_4^{(2)} : \varphi^4(x) : . \end{aligned} \tag{25.55}$$

Контрчлен (25.55) відповідає квазілокальному оператору $\Lambda_2(x_1, x_2)$ і є сумою квазілокальних операторів двох типів $\Lambda_2^{(2)}$ і $\Lambda_2^{(4)}$. У третьому порядку теорії збурень контрчлен $\Lambda_3(x_1, x_2, x_3)$, що входить до лагранжіана взаємодії (25.52), виражається оператором (25.50), який має таку ж структуру, як і контрчлен (25.55), та відрізняється лише коефіцієнтами $K_2^{(3)}$, $K_4^{(3)}$, $B_2^{(3)}$, $A_2^{(3)}$ і $A_4^{(3)}$. Якщо тепер формально пересумувати отримані вирази в усіх порядках за λ, то будемо мати остаточний вигляд контрчлена до лагранжіана (25.53), який запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}(x) &= \frac{1}{2}(Z_\varphi - 1) : \varphi(x)[\Box - m^2]\varphi(x) : - \\ &- \frac{1}{2}Z_\varphi \delta m^2 : \varphi^2(x) : -\lambda(Z_\lambda - 1) : \varphi^4(x) :,\end{aligned}$$

де константи Z_φ, Z_λ і δm^2 записуються у вигляді формальних рядів:

$$Z_4 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda^n K_2^{(n)}B_2^{(n)}, \quad Z_\lambda = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda^{n-1}K_4^{(n)}A_4^{(n)}, \tag{25.56}$$

$$Z_\varphi \delta m^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\lambda^n K_2^{(n)}A_2^{(n)}. \tag{25.57}$$

Зауваження 25.6. *Константи $B_2^{(n)} = B_2^{(n)}(M)$, $A_2^{(n)} = A_2^{(n)}(M)$ і $A_4^{(n)} = A_4^{(n)}(M)$ прямують до нескінченності при $M \to \infty$. Але навіть при $M < \infty$ ряди (25.56)– (25.57) не будуть абсолютно збіжними ні при яких значеннях λ, оскільки комбінаторні множники $K_2^{(n)}$ і $K_n^{(n)}$ будуть рости з n як $(n!)^2$ (теорема Віка).*

Разом із тим сумування розбіжних рядів для $B_2 = B_2(M)$, $A_2 = A_2(M)$ і $A_4 = A_4(M)$ може привести до скінченних виразів навіть при $M \to \infty$. Наприклад, ряд

$$e^{-\lambda M^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n M^{2n}}{n!}, \quad \lambda > 0,$$

у якому при $M \to \infty$ ліва частина прямує до нуля, а права— формально до нескінченності. Тому вирази всіх констант перенормування треба розглядати виключно в рамках теорії збурень як формальні ряди за λ.

Таким чином, аналізуючи розбіжні діаграми теорії збурень у моделі (25.53) і виділивши всі розбіжні частини, побудуємо лагранжіан

$$\mathscr{L}_r(x) = \mathscr{L}(\varphi(x); m^2; \lambda) + \Delta\mathscr{L}(x). \tag{25.58}$$

Тоді теорія збурень, побудована за лагранжіаном взаємодії

$$\mathscr{L}_I^r(x) = -\lambda : \varphi^4(x) : + \Delta\mathscr{L}(x), \tag{25.59}$$

буде вільною від ультрафіолетових розбіжностей.

Покажемо тепер, що введення контрчлена $\Delta\mathscr{L}(x)$ можна звести до перенормування основних величин теорії: поля, маси і константи взаємодії. Перепишемо для цього лагранжіан (25.58) у такому вигляді

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_r(x) &= \frac{1}{2} : \varphi(x) Z_\varphi [\Box - m^2] \varphi(x) : - \\ &- \frac{1}{2} \delta m^2 Z_\varphi : \varphi^2(x) : - \lambda Z_\lambda : \varphi^4(x) : . \end{aligned} \tag{25.60}$$

Легко бачити, що цей лагранжіан має такий самий вигляд, як і (25.53).

Позначимо через

$$\mathscr{L}^0(x) := \mathscr{L}(\varphi^0(x); m_0^2; \lambda_0)$$

лагранжіан, що відповідає деяким *затравочним* значенням поля $\varphi^0(x)$, маси m_0 і константи взаємодії λ_0. Тоді можна бачити, що

$$\mathscr{L}^0(x) = \mathscr{L}_r(x),$$

якщо покласти

$$\varphi_r(x) = \varphi(x) = Z_4^{-1/2} \varphi^0(x), \tag{25.61}$$

$$\lambda_r = \lambda = Z_\lambda^{-1} Z_4^2 \lambda_0, \tag{25.62}$$

$$m_r^2 = m^2 = m_0^2 - \delta m^2. \tag{25.63}$$

Теорія збурень, побудована за лагранжіаном (25.59), не містить у собі ультрафіолетових розбіжностей. Це означає, що і теорія збурень, побудована за лагранжіаном $\mathscr{L}^0(x)$ не буде містити у собі розбіжностей, якщо в ньому замінити "*затравочні*" величини поля, маси і константи зв'язку на перенормовані за правилами (25.61) – (25.63). Але постає практичне питання. Яким чином будувати нову теорію збурень, щоб аналітичні вирази, які відповідають конкретним матричним елементам (або функціям Гріна), записувались через перенормовані величини? Щоб сформулювати такі правила, зафіксуємо спершу таке просте спостереження, яке безпосередньо випливає з вигляду лагранжіанів $\mathscr{L}^0(x)$ (див.

(25.53) при $\lambda = \lambda_0$) і $\mathscr{L}_r(x)$ (див. (25.60)). Формальна теорія збурень у термінах внесків від діаграм Фейнмана для теорії з лагранжіаном (25.60), яка з приведених вище викладів не повинна мати розбіжностей, може бути отримана з теорії збурень, що будується в теорії з лагранжіаном $\mathscr{L}^0(x)$ шляхом заміни пропагатора $\frac{1}{i}D^c(x-y;m_0^2) = i(\Box - m_0^2)^{-1}(x,y)$ на пропагатор $iZ_\varphi^{-1}(\Box - m_0^2)^{-1}(x,y)$, $m_0^2 = m^2 + \delta m^2$ вершинного внеску $(-i\lambda_0)$ на внесок $(-iZ_\lambda\lambda)$, а також у випадку діаграм із зовнішніми лініями на масовій поверхні (для матричних елементів S-матриці) фактора $\varphi^0(x)$ на $\varphi(x) = Z_\varphi^{-1/2}\varphi^0(x)$. Запишемо вказані заміни в імпульсному просторі

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i(m_0^2 - p^2 - i\varepsilon)} \to \frac{Z_\varphi^{-1}}{(2\pi)^4 i(m_0^2 - p^2 - i\varepsilon)},$$

$$\lambda_0 \to Z_\lambda = Z_\varphi^2\lambda_0, \quad \widetilde{\varphi}^0(p) \to \widetilde{\varphi}^0(p) = Z_\varphi^{-1/2}. \tag{25.64}$$

Аналізуючи розклад у ряд повної функції Гріна $G_2(x,y) \equiv G_2'(x-y)$ (див. (24.44)) (або в імпульсному просторі $\widetilde{G}_2(p) \equiv \widetilde{G}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0)$) у ряд по λ_0 , легко переконатися, що заміна (25.64) еквівалентна заміні внеску від кожної діаграми на такий самий внесок, домножений на фактор Z_φ^{-1}, у якому λ треба знову виразити через неперенормовану константу за формулою (25.62), тобто виконати заміну

$$\widetilde{G}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0) \to Z_\varphi^{-1}\widetilde{G}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0) := \widetilde{G}_2^r(p^2;m^2,\lambda). \tag{25.65}$$

Зауваження 25.7. *Аналогічні міркування приводять до правила перенормування коефіцієнтної функції* $\widetilde{F}_2(p;m_0^2,\lambda_0)$*:*

$$\widetilde{F}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0) \to Z_\varphi\widetilde{F}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0) := \widetilde{F}_2^r(p^2;m^2,\lambda), \tag{25.66}$$

що узгоджується з правилами перенормування основних величин (25.61)–(25.63). Дійсно, для матричного елемента треба розглядати оператор $\varphi^0(p)\widetilde{F}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0)\varphi^0(p)$*. Тоді маємо*

$$\varphi^0(p)\widetilde{F}_2(p^2;m_0^2,\lambda_0)\varphi^0(p) = \varphi_r(p)\widetilde{F}_2^r(p^2;m^2,\lambda)\varphi_r(p). \tag{25.67}$$

Для того, щоб визначити зв'язок регуляризованої вершинної частини (*роздягненої* сильнозв'язної функції Гріна 4-х змінних (див. п.4.6)), визначимо її для зручності у вигляді

$$\lambda\widetilde{\Gamma}_4(p_1,p_2,p_1+p_2-p_3) = \sum_{n=1}^{\infty} W_4^{(n)}(p_1,p_2,p_1+p_2-p_3), \tag{25.68}$$

де $W_4^{(n)}$ – сума вкладів усіх сильнозв'язних діаграм n-го порядку з 4-ма зовнішніми лініями після виділення δ-функції $\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$, що відповідає закону збереження 4-імпульсу.

Якщо тепер розглянути теорію збурень для повних функцій Гріна з N-зовнішніми лініями, тобто $G_N(x_1,\ldots,x_N)$ або для коефіцієнтних функцій S-матриці $F_N(x_1,\ldots,x_N)$, то легко помітити: суму внесків діаграм в усіх порядках можна звести до суми внесків від так званих *скелетних діаграм*, у яких кожній внутрішній лінії відповідає повна функція Гріна $G_2(x_1,x_2)$, а кожній вершині відповідає фактор $(-\lambda_0)\Gamma_4(x_1,x_2,x_3,x_4;m_0^2,\lambda_0)$. Якщо замість цих функцій стоятимуть перенормовані функції G_2^r і $\lambda\Gamma_4^r$, то такі діаграми повинні бути збіжними. Легко також перевірити: якщо в скелетні діаграми, що відповідають G_N з $N\geqslant 5$, поставити замість повної функції Гріна G_2 вільну функцію Гріна G_2^0, а замість повної вершини Γ_4 просто одиницю, то такі діаграми не будуть мати розбіжностей. Отже, перенормовані функції G_2^r і Γ_2^r повинні мати принаймні не гіршу поведінку, ніж вільні функції. Щоб визначити зв'язок $\widetilde{\Gamma}_4$ і $\widetilde{\Gamma}_4^r$ покладемо за аналогією з (25.65) і (25.66)

$$\widetilde{\Gamma}_4^r(\cdots;m^2,\lambda) := Z_\lambda^x Z_4^y \widetilde{\Gamma}_4(\ldots;m_0^2,\lambda_0),$$

де степені x, y поки що невідомі.

Розглянемо тепер довільну скелетну (сильнозв'язну) діаграму з n-вершинами, кожній із яких відповідає внесок $(-\lambda_0)\widetilde{\Gamma}_4(\ldots;m_0^2,\lambda_0)$, з L-внутрішніми лініями, кожній із яких відповідає повна функція Гріна $\widetilde{G}_2(\cdot;m_0^2,\lambda_0)$ і з N-зовнішніми лініями ($N\geqslant 5$), кожній із яких відповідає зовнішній фактор $\widetilde{\varphi}^0(p)$.

Вклад такої діаграми можна символічно записати у вигляді

$$W_N^{(n)}(p_1,\ldots) =$$

$$= \lambda_0^n \int \Big(\widetilde{\Gamma}_4(\ldots;m_0^2,\lambda_0)\Big)^n \Big(\widetilde{G}_2(\ldots;m_0^2,\lambda_0)\Big)^L \big(\widetilde{\varphi}^0(\cdot)\big)^N d^M K,$$

де $d^M K$, $(M=4(L-(n-1)))$ – інтеграція за внутрішніми імпульсами, що залишились після зняття $(n-1)$-ї δ-функції. Виразимо λ_0, $\widetilde{\Gamma}_4$, $\widetilde{G}_2$ і $\widetilde{\varphi}^0$ через відповідні перенормовані величини (25.61), (25.65), (25.68) і врахуємо, що для теорії $:\varphi^4:$ в усіх вершинах перетинаються рівно чотири лінії, а порядок діаграми пов'язаний із числом внутрішніх ліній L і зовнішніх ліній N співвідношенням

$$n = \frac{1}{2}L + \frac{1}{4}N.$$

Внаслідок цього отримаємо вираз

$$\begin{aligned} W_n^{(n)}(p_1,\ldots) &= Z_\lambda^{n(1-x)} Z_\varphi^{ny+L-\frac{N}{2}-2n} \times \\ &\times \lambda^n \int \Big(\widetilde{\Gamma}_4^r(\ldots;m^2,\lambda)\Big)^n \Big(\widetilde{G}_2^r(\ldots;m^2,\lambda)\Big)^L \big(\widetilde{\varphi}(\cdot)\big)^N d^M K. \end{aligned}$$

Отже, для того, щоб $W_N^{(n)}$ повністю виражався через перенормовані величини, треба покласти $x=1$, $y=0$. Тоді зв'язок (25.68) матиме вигляд

$$\widetilde{\Gamma}_4^r(\ldots;m^2,\lambda) = Z_\lambda \widetilde{\Gamma}_4(\ldots;m_0^2,\lambda_0). \tag{25.69}$$

Щоб завершити процедуру перенормування, треба розкрити невизначеності $Z_\varphi^{-1}\cdot\widetilde{G}_2$ і $Z_\lambda\cdot\widetilde{\Gamma}_4$, тобто побудувати перенормовані величини $\widetilde{G}_2^r$ і $\widetilde{\Gamma}_4^r$.

У пункті 24.6 був встановлений зв'язок між повною 2-точковою функцією Гріна G_2 і її сильнозв'язною частиною—власнеенергетичною частиною $\Gamma_2(x,y)=\dfrac{1}{i}\sum(x,y)$ (див. формули (24.47) і (24.49)). З формул (24.47), (24.48) знаходимо, що

$$\widetilde{G}_2(p^2)=\frac{-i}{m_0^2-p^2+\widetilde{\Sigma}(p^2)}. \tag{25.70}$$

Визначимо перенормовану власнеенергетичну частину формулою

$$\widetilde{\Sigma}^r(p^2)=Z_\varphi\left(\widetilde{\Sigma}(p^2)-\widetilde{\Sigma}(m^2)-(p^2-m^2)\widetilde{\Sigma}''(m^2)\right), \tag{25.71}$$

де

$$\widetilde{\Sigma}''(m^2)=\left.\frac{\partial^2\widetilde{\Sigma}(p)}{\partial p^\mu\partial p^\mu}\right|_{p^2=m^2}.$$

У другому порядку за λ ця формула збігається з визначенням $\Gamma_2^{R,(2)}=\dfrac{1}{i}\Sigma^{r,(2)}$ формулою (25.21), оскільки у цьому випадку Z_φ треба брати у нульовому порядку за λ, тобто $Z_\varphi^{(0)}=1$ (див. (25.56)).

У вищих порядках для обчислення $\widetilde{\Sigma}^{r,(n)}$ $n\geqslant 3$ треба застосовувати R-операцію Боголюбова–Парасюка і довести, що вона приведе до формули (25.71) після пересумування всіх порядків теорії збурень. Це нетривіальна задача. Перш за все покажемо, що таким чином вибрана перенормована власнеенергетична частина узгоджується з (25.65). Дійсно, якщо підставити вираз $\widetilde{\Sigma}(p)$, виражений через функцію $\widetilde{\Sigma}^r(p)$, в праву частину (25.69) і вибрати

$$m_0^2=m^2+\delta m^2,\quad \delta m^2=-\widetilde{\Sigma}(m^2),\quad Z_\varphi^{-1}=1-\widetilde{\Sigma}''(m^2),$$

отримаємо рівність (25.65) з

$$G_2^r(p^2,m^2,\lambda^2)=\frac{-i}{m^2-p^2+\widetilde{\Sigma}^r(p^2)}. \tag{25.72}$$

Повну вершинну частину можна представити у вигляді

$$\widetilde{\Gamma}_4(p,k,p+k-q)=1+\widetilde{\Lambda}_4(p,k,p+k-q),$$

де $\widetilde{\Lambda}_4$ – сума вкладів від сильнозв'язних діаграм в усіх порядках $n\geqslant 2$.

Визначимо регуляризовану функцію Λ_4^r за формулою

$$\widetilde{\Lambda}_4^r(p,k,p+k-q)=Z_\lambda\left(\widetilde{\Lambda}_4(p,k,p+k-q)-\widetilde{\Lambda}_4(m^2)\right),$$

де точка розкладу може бути вибрана, наприклад, при $p^2=m^2$, $k=q=0$, тобто

$$\widetilde{\Lambda}_4(m^2)=\left.\widetilde{\Lambda}_4(p,k,p+k-q)\right|_{\substack{p^2=m^2\\k=q=0}}.$$

Так само, як і у попередньому випадку, формула (25.72) збігається з визначенням регуляризованої функції $\Gamma_4^{R,(2)}$ у другому порядку теорії збурень формулами (25.16), (25.17). Тоді, вибираючи

$$Z_\lambda^{-1} = 1 + \widetilde{\Lambda}_4(m^2),$$

знаходимо, що

$$\widetilde{\Gamma}_4^r(p,k,p+k-q) = 1 + \widetilde{\Lambda}_4^r(p,k,p+k-q).$$

Для остаточної побудови перенормованої теорії треба довести, що формули (25.70) і (25.72) визначають повністю перенормовані власнеенергетичну і вершинну частини та побудувати для них теорію збурень, що не містить у собі розбіжностей. Це буде пророблено у розділі VII на прикладі моделі КЕД (див. також [181]). Для моделей (24.63) або (21.3) це можна зробити аналогічно.

25.7. Еквівалентні види перенормувань

Після вже згадуваної праці Хеппа [145], у якій, фактично, автор повторив доведення Боголюбова—Парасюка, вдосконаливши його і виправивши деякі технічні неточності, почали з'являтися зовсім нові схеми перенормувань. Серед них перш за все треба виділити аналітичне перенормування Спіра (див. [185]) та перенормування за допомогою введення довільної розмірності (див. [193]). Заслуговують, на наш погляд, також уваги перенормування за лініями Славнова [85] і одна оригінальна (не отримала свого продовження) ідея Петрини і автора цієї книги про зв'язок теорії перенормувань з проективно-ітеративними методами розв'язку рівнянь квантової теорії поля [69]. У даному пункті опишемо лише основні ідеї, пов'язані із згаданими вище підходами, а для детального ознайомлення радимо звернутись до оригінальних робіт.

Основна ідея аналітичного перенормування Спіра полягає у тому, щоб замість звичайної проміжної регуляризації Паулі–Вілларса, про яку детально було описано у пункті 25.1, розглянути пропогатор Фейнмана у вигляді

$$\widetilde{D}_\lambda^c(p) = \frac{Z(p)}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)^{1+\lambda}},$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, тобто є комплексним параметром. Тоді фейнманівська амплітуда $\mathscr{F}_\lambda(G)$, що відповідає діаграмі G, стає аналітичною функцією при досить великих $\operatorname{Re}\lambda$, причому її область аналітичності залежить від індексу розбіжності діаграми G. Перенормування амплітуди і зняття регуляризації ($\lambda \to 0$) зводиться до віднімання полюсів (членів розкладу Лорана з негативними показниками). Така процедура виявляється еквівалентною R-операції (див., наприклад, [34]).

Суть перенормування за допомогою введення довільної розмірності полягає у заміні 4-вимірного простору-часу на d-вимірний. Виявляється, що фейнманівську амплітуду можна обчислити при довільних значеннях $d = 4 - \delta$, і вони є аналітичними функціями комплексного параметра δ. Так само, як і у випадку

аналітичного перенормування отримання перенормованої амплітуди зводиться до вилучення полюсів у комплексній площині змінної δ. Таке перенормування є також еквівалентним R-операції (див. [34]).

У зв'язку з тим, що перенормування за допомогою введення довільної розмірності є досить простим та ефективним методом і набуло широкого застосування, продемонструємо його дію на прикладі обчислення інтеграла (25.5), що відповідає внеску від діаграми (25.3). Отже, будемо вважати, що інтегрування в (25.5) здійснюється по d–вимірному простору Мінковського. Тоді, застосувавши формулу

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{d\xi}{[a(1-\xi)+b\xi]^2}$$

з $a = m^2 - q^2 - i\varepsilon$ і $b = m^2 - (q-k)^2 - i\varepsilon$, прийдемо до інтеграла (попередньо зробивши зсув $q - \xi k \to q$)

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int\limits_{\mathbb{M}^d} dq \, \frac{1}{[m^2 - q^2 - \xi(1-\xi)k^2 - i\varepsilon]^2}, \tag{25.73}$$

де $dq = dq^0 dq^1 \cdots dq^s$, $\quad d = s+1$. Повернемо контур інтегрування в комплексній площині q^0 на 90° (див. п.29.1) і зробимо одночасно заміну $q^0 = iq^d$. Тоді

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} dq \, \frac{1}{[m^2 + q^2 - \xi(1-\xi)k^2]^2}, \tag{25.74}$$

де $dq = dq^1 \cdots dq^d$, а інтегрування виконується по евклідовому простору $\mathbb{R}^d$. Треба зауважити, що якщо амплітуда $\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k)$ обчислюється для фізичних значень зовнішніх імпульсів, тобто на масовій поверхні $k^2 = m^2$, то інтеграл у (25.74) не є сингулярним. Інтеграл обчислюється за відомою формулою

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{dq}{(q^2+x)^\alpha} = \pi^{d/2} x^{d/2-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)}, \tag{25.75}$$

де Γ—гамма-функція Ейлера. Праву частину (25.75) можна аналітично продовжити в комплексну площину за змінною d, а рівність (25.75) вважати визначенням інтеграла, що стоїть у лівій частині (25.75) для довільного (навіть комплексного) d. Тоді, поклавши $\alpha = 2$, отримаємо для $\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k)$ вираз

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k) = \frac{i}{16\pi^{4-d/2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \int_0^1 d\xi [m^2 - k^2\xi(1-\xi)]^{\frac{d}{2}-2}. \tag{25.76}$$

Отже, при $d = 4 \quad \Gamma(0) = \infty$, що відповідає розбіжності інтеграла (25.5). Розбіжність треба усунути за допомогою віднімальної процедури. Для цього розглянемо $\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k)$ як функцію комплексної змінної d (або $\delta = 4 - d$) і розкладемо її в ряд Лорана в області її аналітичності, тоді отримаємо

$$\widetilde{\Gamma}_4^{(2)}(k) = \frac{i}{8\pi^2\delta} + \text{const} - \frac{\mathrm{i}}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}\xi \ln[\mathrm{m}^2 - \mathrm{k}^2\xi(1-\xi)] + \mathrm{O}(\delta), \tag{25.77}$$

де $O(\delta)$ містить у собі всі члени розкладу за $\delta^n, \quad n \geq 1$. Зауважимо також, що при розрахунку коефіцієнтів a_{-1} і a_0 розкладу в ряд Лорана була використана формула асимптотичної поведінки функції $\Gamma(\delta/2)$ при малих δ

$$\Gamma(\frac{\delta}{2}) \approx \frac{2}{\delta} - \mathbb{C},$$

де $\mathbb{C}$—стала Ейлера, а також відома формула аналізу

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

З формули (25.77) легко побачити, що перенормована амплітуда, визначена формулою (25.14), буде збігатись з виразом (25.15), що був обчислений за допомогою регуляризації Паулі–Вілларса.

Зауваження 25.7. *При розрахунку фейнманівських амплітуд моделей, що містять у собі ферміони, треба сформулювати правила обчислення сліду від добутку γ-матриць, а також інтегралів по d–вимірному евклідовому простору. Деякі з цих формул ми наводимо нижче:*

$$\mathrm{Tr}\mathbf{I} = d,$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = dg^{\mu\nu},$$

$$\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) = d(g^{\mu\nu}g\rho\sigma - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\big),$$

$$\int_{\mathbb{R}} dpp^\mu p^\nu f(p^2) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dpp^2 f(p^2),$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+a)^\beta}dx = a^{\alpha-\beta}B(\alpha,\beta-\alpha) = a^{\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}.$$

У праці Славнова [85] перенормована амплітуда будується рекурентним чином із амплітуди, що відповідає діаграмі, в якій менше на одну внутрішню лінію. Така схема робить комбінаторну структуру перенормування дуже простою. Перенормування за лініями має досить загальний характер і два попередні (аналітичне і за розмірністю) є його частинними випадками.

На завершення коротко зупинимося на основній ідеї праці [69]. Ця ідея зводиться до того, що рівняння для S-матриці, а точніше рівняння для коефіцієнтних функцій (23.20) можна розглядати як некоректно поставлену задачу математичної фізики. Дійсно, рівняння (23.20), записане в евклідовій області (детальніше евклідів підхід до квантової теорії поля розглянемо у розділі VI), має вигляд

$$F = -\lambda AF + F^{(0)}.$$

Оператор A можна визначити у деякому банаховому просторі $\mathcal{B}$. Але яким би чином не вибирався цей простір, вектор $F^{(0)} \notin D(A)$, де $D(A)$– всюди щільна множина векторів ($D(A) \subseteq \mathcal{B}$), яка є областю визначення оператора A. Отже,

методом послідовних наближень таке рівняння розв'язувати не можна, оскільки $AF^{(0)} = \infty$. Тому, виходячи з теорії проективно-ітеративних методів, можна запропонувати таку схему.

Нехай A_r—оператор, який є деяким розширенням оператора A, тобто

$$Af = A_r f, \quad \text{якщо} \quad f \in D(A)$$

і, крім того,

$$D(A) \subset D(A_r) \quad \text{і} \quad F^{(0)} \in D(A_r).$$

У праці [69] показано, що оператор A_r можна побудувати таким чином, що

$$A_r^n F^{(0)} \in D(A_r),$$

а формальний ітераційний розв'язок нового рівняння

$$F = -\lambda A_r F + F^{(0)}$$

матиме зміст і буде еквівалентним теорії збурень для коефіцієнтних функцій S-матриці після застосування R-операції. Звичайно, ряд у цілому буде розбіжний.

§ 26. Метод континуальних інтегралів в теорії квантованих полів

Поняття континуального інтеграла вперше було введено Вінером [198] у зв'язку з задачами броунівського руху. Іншою назвою континуального інтеграла є інтеграл за траекторіями (*path integral*). На рівні фізичної інтуїції такий інтеграл можна уявляти як границю n-кратного інтеграла в $\mathbb{R}^n$ при $n \to \infty$. Дійсно, якщо розглядати точки x_0, $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in \mathbb{R}^1$) як значення деякої неперервної функції $x(t)$, $t \in [0, T]$, тобто $x_0 = x(0)$, $x_1 = x(t_1), \ldots$, $x_n = x(t_n)$, $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < T$, і з'єднати точки (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ відрізками у площині (x, t), то утворена ламана лінія при $n \to \infty$ буде наближатись до $x(t)$, а для певної неперервної функції $\varphi_n(x(\cdot)) = F(x_1, \ldots, x_n)$ n-кратний інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

можна розглядати як однократний інтеграл за змінною, яка пробігає усі можливі ламані лінії, що починаються в точці $x_0 \in X = \mathbb{R}^1$ півплощини TX. Він буде прямувати (треба допустити, що границя існує) до інтеграла

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x(t)) \prod_{t \in [0,T]} dx(t), \tag{26.1}$$

де Ω – сукупність усіх можливих неперервних функцій (траєкторій) $x(\cdot)$ на $[0,T]$, що починаються в точці x_0. Насправді запис (26.1) є чисто формальним. Строгого математичного змісту набуває слабка границя

$$w - \lim_{n\to\infty} p(x_0,x_1;t_1)p(x_1,x_2;t_2-t_1)\cdots p(x_{n-1},x_n;t_n-t_{n-1})dx_1\ldots dx_n =$$

$$= d\mu_{x_0}(x(t)),$$

де $p(x,y;\tau)$ – деяка спеціально побудована функція, а $\mu_{x_0}(\cdot)$ називається мірою Вінера (для відповідного $p(x,y;\tau)$) (більш детально див., наприклад, [77, § X.11]). Пізніше, на початку 40-х років минулого століття, Фейнман запропонував так званий *path-integral* підхід до квантової механіки, а в кінці 40-х років [120–121] на основі цього методу розробив нове формулювання квантової електродинаміки і діаграмну техніку, яку було розглянуто на прикладі скалярного поля, використовуючи операторні методи, у пункті 22.4. Побудована Фейнманом техніка отримала назву *квантування за допомогою континуальних інтегралів* (*path-integral quantization*). На відміну від канонічного квантування цей метод має свої переваги в теорії калібрувальних полів, де його вперше застосували Л.Д. Фаддєєв, В.М. Попов [118] і Б.С. де-Вітт [114–116]. Детальніше зупинимось на цьому у розділі VII.

Метою даного параграфа є короткий вступ для оволодіння формальною технікою континуального інтегрування і застосування цієї техніки до квантування калібрувальних неабелевих полів. На жаль, строгого математичного обґрунтування інтегралів Фейнмана на даному етапі розвитку теорії не існує. Лише в окремих випадках взаємодії скалярних полів в евклідовій області двох вимірів за простором-часом можна отримати строгі представлення для функцій Гріна (див. розділ VI.

26.1. Поняття та основні формули континуального інтегрування

Почнемо з відомої формули теорії uауссових інтегралів у просторі $\mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(y,C^{-1}y)+(z,y)}dy = (2\pi)^{n/2}(\det\, C)^{1/2}e^{\frac{1}{2}(z,Cz)}, \tag{26.2}$$

де C є дійсною, строго додатно визначеною $n\times n$ матрицею. Ця матриця має назву *матриці коваріації* або *оператора коваріації* імовірнісної гауссової міри $\mu(\cdot)$, яка визначається формулою

$$\mu(dy) = \frac{(\det\, C^{-1})^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}(y,C^{-1}y)}dy. \tag{26.3}$$

У формулах (26.2) і (26.3) величини (u,v) означають скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$ векторів u, $v\in\mathbb{R}^n$. У тому, що міра $\mu(\cdot)$ є імовірнісною легко переконатися,

проінтегрувавши (26.3) і скориставшись (26.2) при $z = 0$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu(dy) = 1.$$

Матричні елементи C є другими моментами міри $\mu(\cdot)$, тобто, якщо y_i, y_j це компоненти вектора $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} y_i y_j d\mu(y) = C_{ij}.$$

Для того, щоб узагальнити формулу (26.2) на випадок, коли y_j буде функцією, тобто індекс j прийматиме континуум значень, перепишемо $\det C$ в іншому вигляді. Якщо матриця C є діагональною, то легко порахувати, що

$$\ln \det C = \operatorname{Tr} \ln C. \tag{26.4}$$

Нескладно переконатися, що ця рівність справедлива для всіх (уже не діагональних) невироджених ($\det C \neq 0$) $n \times n$ матриць. У неперервному випадку, коли y є функцією, наприклад, $y(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, C буде інтегральним оператором з ядром $C(x, x')$, x, $x' \in \mathbb{R}^d$:

$$(Cy)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx' C(x, x') y(x'). \tag{26.5}$$

Тоді операції ln і Tr є загальноприйнятими, і в багатьох випадках їх можна визначити строго, а поняття det для такого оператора треба розуміти у сенсі формули (26.4).

Формально обернений оператор C^{-1} також буде оператором вигляду (26.5) з ядром $C^{-1}(x, x')$– таким, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} dx'' C(x, x'') C^{-1}(x'', x') = \delta(x - x'), \tag{26.6}$$

де $\delta(x - x') = \prod_{i=1}^d \delta(x^{(i)} - x'^{(i)})$ — δ-функція Дірака в $\mathbb{R}^d$.

У цьому випадку формулу (26.2) запишемо таким чином:

$$\int \mathscr{D}y e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} dx \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx' y(x) C^{-1}(x,x') y(x') + \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx\, z(x) y(x)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr} \ln C} e^{\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} dx \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx' z(x) C(x,x') z(x')}, \tag{26.7}$$

де (формально)

$$\mathscr{D}y = \prod_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{dy(x)}{(2\pi)^{d/2}}. \tag{26.8}$$

Формули (26.2) і (26.7) можуть бути узагальнені на випадок комплексних функцій $z(x)$ і $y(x)$:

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} dz d\overline{z} e^{-(\overline{z},C^{-1}z)+(\overline{z},y)} = (2\pi)^n (\det\, C) e^{(\overline{y},Cy)}, \tag{26.9}$$

де

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} dz\, d\overline{z}(\ldots) \equiv 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} d(\mathrm{Re}\, z) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d(\mathrm{Im}\, z)(\ldots) \tag{26.10}$$

і

$$\int \mathscr{D}z \mathscr{D}\overline{z}\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} dx' \overline{z(x)} C^{-1}(x,x') z(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx \overline{u(x)} z(x)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, \ln C} e^{\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} dx \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx' \overline{u(x)} C(x,x') u(x')}. \tag{26.11}$$

У розділі VI буде показано, що формули (26.7) і (26.11) можна строго обґрунтувати у випадку дійсного скалярного поля, якщо розглядати його в евклідовій області, тобто для уявних часів. Але в контексті викладу даного матеріалу використовується наведена вище техніка як зручний обчислювальний апарат, який приводить до правильного кінцевого результату. Це твердження ґрунтується на КЕД як теорії, наслідки якої збігаються з експериментом.

Континуальні інтеграли (26.7), (26.11) є узагальненням багатократних гауссових інтегралів (26.2). У випадку довільних мір на сьогодні не існує конструктивних методів визначення континуальних інтегралів, виходячи з їх внутрішньої побудови (відносно абстрактних означень мір на нескінченних тензорних добутках див., наприклад, [5, гл. 2]). Але для потреб квантової теорії (а точніше, теорії збурень) вивчення властивостей гауссових континуальних інтегралів є достатнім. Тому на завершення приведено деякі основні формули гауссового числення, які будуть застосовані нижче. Перепишемо для цього формулу (26.7) у вигляді інтеграла за гауссовою мірою (формально!):

$$\int d\mu_C(y) e^{\int dx\, z(x) y(x)} = e^{\frac{1}{2}\int dx \int dx' z(x) C(x,x') z(x')}, \tag{26.12}$$

де

$$d\mu_C(y) = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln C} e^{-\frac{1}{2}\int dx \int dx' y(x) C^{-1}(x,x') y(x')} \mathscr{D}y. \tag{26.13}$$

Зауважимо, що запис гауссової міри (26.13) є формальним навіть у тому випадку, коли інтеграл у (26.12) є строго визначеним. Формула (26.12) є основною для обчислення моментів гауссової міри.

1. Ф о р м у л а м о м е н т і в

$$\int y(x_1) \ldots y(x_n) d\mu_C(y) = \frac{\delta^n}{\delta z(x_1) \ldots \delta z(x_n)} e^{\frac{1}{2}\int dx \int dx' z(x) C(x,x') z(x')} \Big|_{z\equiv 0} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sum\limits_{(i)_n} C(x_{i_1}, x_{i_2}) \dots C(x_{i_{n-1}, x_{i_n}}), & n = 2k, \end{cases} \tag{26.14}$$

де сумування виконується відносно всіх розбиттів індексів $\{1, 2, \dots, n\}$ на різні невпорядковані пари $\{i_k, i_{k+1}\}$ таким чином, щоб усі члени суми були різними. Число таких членів буде дорівнювати

$$N_n = \frac{(2k)!}{k! 2^k} = (2k-1)!!, \quad n = 2k.$$

Нескладно переконатися, що формула (26.14) збігається з виразом для вільної $n = 2k$-точкової функції Гріна (20.48), якщо $C(x, y) = \frac{1}{i} D^c(x - y)$, яка була отримана за допомогою теореми Віка 20.2. У зв'язку з цим в теорії гауссових інтегралів формулу (26.14) називають інколи теоремою Віка.

2. Формула інтегрування за частинами

Нехай $F(y)$ є функціоналом над певним простором функцій, на якому визначений континуальний інтеграл за гауссовою мірою $d\mu_C$. Тоді справедливою буде формула

$$\int y(x) F(y) d\mu_C(y) = \int d\mu_C(y) \int dx' C(x, x') \frac{\delta F}{\delta y(x)}. \tag{26.15}$$

Цю формулу легко перевірити (задача 26.1) для функціонала вигляду $F(y) = e^{i \int z(x) y(x) dx}$. Це дає змогу легко узагальнити формулу (26.15) на функціонали $F(y)$ типу поліномів (задача 26.2) і за неперервністю розповсюдити на більш широкий клас функціоналів $F(y)$. Строге доведення формули (26.15) можна знайти, наприклад, в [27].

3. Формула багатократного гауссового інтеграла

Формула (26.12) може бути узагальнена, коли $y(x)$ є n-компонентна вектор-функція:

$$\mathbf{y}(x) := (y_1(x), \dots, y_n(x)).$$

У цьому випадку коваріаційний оператор C і його обернений C^{-1} будуть визначатися (відповідно) ядрами-матрицями $C_{ij}(x, x')$ та $C^{-1}_{ij}(x, x')$, а співвідношення (26.10) набуде вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^d} dx' C_{ij}(x, x') C^{-1}_{jk}(x', x'') = \delta_{ik} \delta(x - x').$$

Формула (26.12) буде такою:

$$\int d\mu_C(\mathbf{y}) e^{\sum\limits_{j=1}^{n} \int dx z_j(x) y_i(x)} = e^{\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \int dx \int dx' z_i(x) C_{ij}(x,x') z_j(x')}, \tag{26.16}$$

де

$$d\mu_C(\mathbf{y}) = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln C} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\int dx\int dx' y_i(x)C^{-1}_{ij}y_j(x')} \prod_{j=1}^{n} \mathscr{D}y_j,$$

а

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{j=1}^{n} \int dx\, A_{jj}(x,x).$$

Формально формулу (26.16) легко отримати з формул типу (26.2), якщо за допомогою граничного переходу (як у (26.1)) перейти в лівій частині (26.16) від інтегралів за $\mathscr{D}y_j \equiv \prod\limits_x (2\pi)^{-d/2} dy_j(x)$ до інтегралів за $(2\pi)^{-\frac{dm_j}{2}} dy_{j,1}\dots dy_{j;m_j}$, $j = 1,\dots,n$, потім шляхом переозначення змінних до інтегралів за $(2\pi)^{-N/2} dy^{(1)}\dots dy^{(N)}$, $N = m_1 + \dots + m_n$, застосувати (26.2) і, повернувшись до попередніх позначень, знову перейти до границі $m_j \to \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$.

4. В и з н а ч е н н я ф у н к ц і о н а л ь н о ї δ-ф у н к ц і ї

Виходячи з аналогії у визначенні звичайної δ-функції Дірака як лінійного функціонала над певним простором основних функцій, визначимо поняття *функціональної $\widetilde{\delta}$-функції* таким чином. Нехай $F(y)$ – функціонал (над деяким простором функцій $y(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$) з деякого простору "основних функціоналів" (не визначаємо тут поняття простору основних функціоналів, а лише користуємося цим терміном за аналогією до простору основних функцій при визначенні звичайної δ-функції). Тоді *функціональною δ-функцією* називатимемо функціонал, що задається формулою

$$\int F(y)\widetilde{\delta}(y - y')\mathscr{D}y' = F(y). \tag{26.17}$$

Взявши до уваги формальне позначення (26.8), очевидно, треба вважати, що

$$\widetilde{\delta}(y - y') = \prod_{x\in\mathbb{R}^d} \delta(y(x) - y'(x)),$$

де δ — звичайна δ-функція Дірака.

Формулі (26.17) можна надати строгий смисл, якщо розглянути функціонал $F(\varphi)$ у вигляді

$$F(y;j) = e^{-\frac{1}{2}\alpha\int dx\int dx' y(x)C^{-1}(x,x')y(x') + i\beta\int dx\, y(x)j(x)}, \tag{26.18}$$

де α, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $j(x)$ – деяка гладенька функція, а функціонал $\widetilde{\delta}$ представити так:

$$\widetilde{\delta}(y - y') = \int \mathscr{D}\eta e^{i\int (y(x)-y'(x))\eta(x)dx}. \tag{26.19}$$

У цьому випадку справедливість формули (26.17) легко встановити прямим обчисленням (задача 26.3), використовуючи формули (26.12), (26.13). Диференціюючи потім отриману рівність за β і підбираючи належним чином параметри

α, β та функцію $j(x)$, рівність (26.17) розповсюджується на досить широкий клас функціоналів $F(y)$. Представлення (26.19) розширюється і на більш складні аргументи:

$$\widetilde{\delta}(f(\cdot;y)-y') = \int \mathscr{D}\eta e^{i\int[f(x;y)-y'(x)]\eta(x)dx}, \tag{26.20}$$

де функціонал

$$f(x;y) = f_0(x) + \varphi(x) + \widetilde{f}(x;y),$$

а функціонал $\widetilde{f}(x;y)$ представляється розкладом

$$\widetilde{f}(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int C_n(x;x_1,\dots,x_n)y(x_1)\dots y(x_n)dx_1\dots dx_n. \tag{26.21}$$

Крім того, рівняння

$$f(x;y) - y'(x) = 0 \tag{26.22}$$

має єдиний розв'язок $\widetilde{y}(y')$, який можна представити рядом за g. Тоді формула типу (26.17) матиме вигляд

$$\int F(y)\widetilde{\delta}(f(\cdot;y)-y')\det\left\|\mathbb{1}+\frac{\delta\widetilde{f}}{\delta y}\right\|\mathscr{D}y = F(\widetilde{y}). \tag{26.23}$$

Тут визначник –

$$\det\left\|\mathbb{1}+\frac{\delta\widetilde{f}}{\delta y}\right\| = \exp\left\{\operatorname{Tr}\ln\left[\mathbb{1}+\frac{\delta\widetilde{f}}{\delta y}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int dx\frac{\delta\widetilde{f}(x)}{\delta y(x')}\bigg|_{x'=x} + \frac{1}{2}\int dxdx_1\frac{\delta\widetilde{f}(x)}{\delta y(x_1)}\frac{\delta\widetilde{f}(x_1)}{\delta y(x_2)}\bigg|_{x=x_2} + \cdots\right\}.$$

Доведення формули (26.23) можна знайти в [86, гл. II, § 5].

5. З а м і н а з м і н н и х

Виходячи з формули для моментів (26.14) видно, що гауссові інтеграли легко обчислити для функціоналів типу поліномів, виходячи з твірного функціоналу (26.12), який запишемо у вигляді перетворення Фур'є гауссової міри

$$\begin{aligned} I(\eta) &= \int d\mu_C(\phi)e^{i\int\phi(x)\eta(x)dx} \equiv \\ &\equiv e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln C}\int\mathscr{D}\phi\; e^{-\frac{1}{2}\int dx\int dx'\phi(x)C^{-1}(x,x')\phi(x)+i\int\phi(x)\eta(x)dx}. \end{aligned} \tag{26.24}$$

Розглянемо заміну змінної $\phi(x)$:

$$\phi(x) = f_0(x) + y(x) + \widetilde{f}(x;y), \tag{26.25}$$

де функціонал $\widetilde{f}$ визначений у (26.21). Тоді

$$I(\eta) = \int d\mu_C(y) e^{-\int dx \int dx' [f_0(x)+\widetilde{f}(x;y)] C^{-1}(x,x') y(x')} e^{i\int dx [f_0(x)+y(x)+\widetilde{f}(x;y)]\eta(x)} \times$$

$$\times \det \left\| \mathbb{1} + \frac{\delta \widetilde{f}}{\delta y} \right\|. \tag{26.26}$$

У справедливості формули (26.26) легко переконатися, підрахувавши фур'є-образи функціоналів $I(\eta)$, які задані формулами (26.24) і (26.26):

$$\widetilde{I}(\psi) = \int \mathscr{D}\eta \; I(\eta) e^{-i\int \eta(x)\psi(x)dx}. \tag{26.27}$$

При обчисленні (26.27) з $I(\eta)$, що задане за допомогою (26.24), треба скористатись формулами (26.19) і (26.17), а при обчисленні (26.27) з $I(\eta)$, що задане за допомогою (26.26)— формулами (26.20) і (26.23).

Зауваження 26.1. *Формула (26.26) може бути обґрунтована строго математично лише для досить вузького класу функціоналів вигляду (26.21). Наприклад, у випадку $\widetilde{f} \equiv 0$ заміна (26.25) відповідає просто зсуву (трансляції) гауссової змінної, а для*

$$\widetilde{f}(x;y) = g\int C_1(x;x_1)y(x_1)dx_1 + \frac{g^2}{2}\int C_2(x;x_1x_2)y(x_1)y(x_2)dx_1dx_2$$

квадратичному збуренню гауссової міри.

При певних обмеженнях на f_0, C_1, C_2 такі заміни можна виконати абсолютно строго (див., наприклад, [27, гл. 9]).

Але на рівні теорії збурень, яка лежить в основі усіх розрахунків сучасної квантової теорії поля, розроблений формалізм вважається математично обґрунтованим.

6. Регуляризація Віка

При квантуванні вільних полів було введено поняття нормального добутку і сформульовано теорему Віка, яка встановлює правила, за якими треба перемножувати поліноми від польових операторів. Ці правила дають можливість усунути нескінченні доданки, що виникають при визначенні добутку операторнозначних узагальнених функцій. Очевидно, що при квантуванні полів за допомогою континуальних інтегралів формалізм віківського числення треба перенести на гауссові поля, за якими відбувається інтегрування. У гауссовому аналізі формалізм віківського числення пов'язаний з ортогоналізацією поліномів $\mathscr{P}(\phi)$, які є елементами простору $L^2(\mathscr{S}', d\mu_C)$, де $\mathscr{S}'$ – простір лінійних неперервних функціоналів (над простором основних функцій $\mathscr{S}$), до якого належать гауссові поля $\phi(x)$ (див., наприклад, [5, гл. 2, § 2], [27, п.6.3]).

У випадку скалярного вільного квантового поля $\varphi(x)$ визначення нормального (віківського) добутку було пов'язане з розміщенням операторів народження $\varphi^+(x)$ і знищення $\varphi^-(x)$ у відповідному добутку. Гауссові поля $\phi(x)$ є $\mathscr{S}'$ не

пов'язують із таким розбиттям. Тому операцію віківського добутку визначають як операцію в просторі $L^2(\Phi', d\mu_C)$ таким чином:

$$: \phi(f_1)\phi(f_2) ::= \phi(f_1)\phi(f_2) - (f_1, Cf_2),$$

де

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \int f(x)\phi(x)dx, \quad f \in \Phi, \\ (f_1, Cf_2) &= \int dx \int dy f_1(x) C(x,y) f_2(y). \end{aligned}$$

Побудова віківського добутку 3-х і більше полів є процедурою ортогоналізації цих мономів у просторі $L^2(\mathscr{S}', d\mu_C)$. Не будемо тут наводити цю процедуру, але зауважимо, що вона повністю визначається теоремою Віка (див. п.20.4), якщо під спарюванням двох гауссових полів $\phi(x)$ і $\phi(y)$ розуміти їх коваріацію $C(x,y)$. Таким чином, для того, щоб визначити операцію віківського добутку $: \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) :$, треба записати теорему Віка для всіх добутків $\phi(x_1)\phi(x_2)$, $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3), \ldots,$ $\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)$, а потім розв'язати отримані співвідношення відносно віківських добутків $: \phi(x_1)\phi(x_2) :$, $: \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) :$, …, $: \phi(x_1)\ldots\phi(x_n) :$, тобто виразити їх через звичайні добутки і добутки відповідних коваріацій. Із визначення цієї процедури ясно, що для довільного n і довільних $f_i \in \mathscr{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int d\mu_C(\phi) : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) := 0. \tag{26.28}$$

Тоді з (26.28) випливає, що

$$\int d\mu_C(\phi) : e^{\phi(f)} := 1,$$

а з (26.12)—

$$\int d\mu_C(\phi) e^{\phi(f)} = e^{\frac{1}{2}(f,Cf)}. \tag{26.29}$$

Звідси легко переконатися, що

$$: e^{\phi(f)} := e^{-\frac{1}{2}(f,Cf)} e^{\phi(f)}. \tag{26.30}$$

Цю формулу можна також отримати для операторних полів за допомогою формули (19.36). З формул (26.29), (26.30) отримуємо (задача 26.4) важливу формулу

$$\int d\mu_C(\phi) : e^{\phi(f)} : : e^{\phi(g)} := e^{(f,Cg)}, \tag{26.31}$$

з якої випливає (задача 26.5) аналог формули моментів (26.18) для віківських добутків гауссових полів:

$$\int d\mu_C(\phi) : \prod_{j=1}^{m} \phi(x_j) : : \prod_{k=1}^{n} \phi(y_k) := \delta_{mn} \sum_{\pi \in S_n} C(x_1, y_{\pi(1)}) \cdots C(x_n, y_{\pi(n)}). \tag{26.32}$$

Висновок 26.1. *Отже, у формалізмі континуального інтегрування віківський добуток буде мати такий самий зміст, що і в операторному формалізмі. Коваріація буде збігатися із функцією Гріна відповідних квантованих полів, а інтегрування за гауссовою мірою—усередненню по вакууму.*

26.2. Формалізм інтегралів Фейнмана (інтегралів за траєкторіями) у квантовій механіці

Розглянемо квантово-механічну систему, що складається з однакових частинок маси m.

Нехай класичний гамільтоніан такої системи

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})_N = H(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1; \cdots ; \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N), \tag{26.33}$$

де $\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j$ – узагальнені координати та імпульси частинок. У п.3.2 було коротко описано перехід до квантово-механічної системи шляхом переходу до операторних величин $\widehat{\mathbf{q}}_j$ і $\widehat{\mathbf{p}}_j$, що задовольняють комутаційні співвідношення (3.31) із константою (3.36). Ці оператори зручно розглядати в координатному представленні функцій із $L^2(\mathbb{R}^{3N}, (d\mathbf{r})_N)$, де оператори $\widehat{\mathbf{p}}_j$ мають вигляд (3.35), а оператори $\widehat{\mathbf{q}}_j$ визначаються як оператори множення на змінну координати $\mathbf{r}_j$. Оператори $\widehat{\mathbf{p}}_j$ і $\widehat{\mathbf{q}}_j$ мають неперервний спектр, і тому їх власні функції (див., наприклад, [46, § 5]) не належать $L^2(\mathbb{R}^{3N}, (d\mathbf{r})^N)$:

$$\Psi_{\mathbf{q}} = \Psi_{(\mathbf{q})_N}(\mathbf{r})_N = \prod_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{q}_j), \quad \Psi_{\mathbf{p}} = \Psi_{(\mathbf{p})_N}(\mathbf{r})_N = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_j}. \tag{26.34}$$

Як уже зазначилося в п.3.2, побудова оператора Гамільтона $\widehat{H} = H(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{p}})$ у загальному випадку є нетривіальною задачею, оскільки оператори $\widehat{\mathbf{q}}$ і $\widehat{\mathbf{p}}$ не комутують. Розглянемо тут найбільш важливий випадок, коли енергія взаємодії між частинками не залежить від узагальнених імпульсів. Тоді

$$\widehat{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\widehat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + U(\widehat{\mathbf{q}})_N, \tag{26.35}$$

де $U(\cdot)$ – оператор потенціальної енергії взаємодії, яка залежить лише від положення частинок. Таким чином проблема побудови оператора є тривіальною. Стан системи в картині Шредінгера залежить від часу, а його еволюція визначається рівнянням

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \widehat{H}\Psi(t).$$

Отже, якщо в деякий початковий момент часу t_0 стан системи був заданий вектором стану $\Psi(t_0)$, то для довільного моменту часу можна формально знайти стан системи за формулою

$$\Psi(t) = \widehat{U}(t, t_0)\Psi(t_0),$$

де оператор еволюції

$$\widehat{U}(t,t_0)=e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\widehat{H}}. \tag{26.36}$$

Вважається, що всю інформацію про стан системи можна отримати, знаючи імовірності переходу зі стану $\Psi_{\mathbf{q}_0}$, в якому в момент часу t_0 точно визначені всі координати частинок, у стан $\Psi_{\mathbf{q}}$ у момент часу t за час $\tau=t-t_0$. Згідно з правилами квантової механіки така імовірність визначається формулою

$$P^t_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}=|(\Psi_{\mathbf{q}},U(t,t_0)\Psi_{\mathbf{q}_0})|^2.$$

Формально розглядаючи оператор еволюції (26.36) як інтегральний оператор і враховуючи явний вигляд функцій $\Psi_{\mathbf{q}}$ (26.34), амплітуда

$$\left(\Psi_{\mathbf{q}},\widehat{U}(t,t_0)\Psi_{\mathbf{q}_0}\right)=e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\widehat{H}}\left((\mathbf{q})_N;(\mathbf{q}_0)_N\right) \tag{26.37}$$

є по суті ядром оператора (26.36).

В основі підходу Фейнмана лежить формула, яка представляє ядро (26.37) у вигляді континуального інтеграла:

$$(\Psi_{\mathbf{q}_t},\widehat{U}(t,t_0)\Psi_{\mathbf{q}_0})=\int\limits_{\Omega_{\mathbf{q}_t\mathbf{q}_0}}\mathscr{D}\mathbf{p}\mathscr{D}\mathbf{q}e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{t,t_0}(\mathbf{p},\mathbf{q})}, \tag{26.38}$$

де

$$\mathcal{A}_{tt_0}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\mathbf{p}(\tau)\cdot\dot{\mathbf{q}}\,(\tau)-H(\mathbf{q}(\tau),\mathbf{p}(\tau))\Big)\,d\tau \tag{26.39}$$

є функція класичної дії (див. (3.8)), а міра інтегрування

$$\mathscr{D}\mathbf{p}\mathscr{D}\mathbf{q}=\prod_{j=1}^{N}\prod_{\tau'\in[t_0,t]}\frac{d\mathbf{p}_j(\tau')}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\frac{d\mathbf{q}_j(\tau')}{(2\pi\hbar)^{3/2}}. \tag{26.40}$$

$\Omega_{\mathbf{q}_t\mathbf{q}_0}$ — це множина всіх можливих неперервних траєкторій частинок, які в момент часу t_0 стартують із фазової точки $\mathbf{q}_0$, а в момент t опиняються в точці $\mathbf{q}_t$.

Формула (26.38) хоч і є формальною, але для оператора Гамільтона $\widehat{H}$, який виражається формулою (26.35), можна провести доведення, близьке до математично строгого, а у випадку відсутності взаємодії ($U\equiv 0$) отримати строгу формулу для ядра оператора $e^{-\frac{i}{\hbar}\tau H_0}$, хоч при цьому континуальний інтеграл перетворюється у звичайний.

Для доведення формули (26.38) скористаємося теоремою.

Теорема 26.1. [77; теорема IX.29] *Нехай $f_0\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Якщо $f_0\in L^2(\mathbb{R}^n))$ або перетворення Фур'є $\widetilde{f}_0\in L^1(\mathbb{R}^n))$, тоді*

$$(f_0(-i\nabla)\varphi)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\widetilde{f}_0(x-y)\varphi(y)dy \tag{26.41}$$

для всіх $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а інтеграл збігається для всіх x, якщо $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, і для майже всіх, якщо $\widetilde{f}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Скористаємося спершу формулою (26.41) у випадку відсутності взаємодії, тобто для оператора

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\widehat{H}_0}, \quad \tau = t_1 - t_0, \quad \widehat{H}_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\widehat{p}_j^2}{2m} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_j,$$

де $\Delta_j = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z_j^2}$ — оператор Лапласа в $L^2(\mathbb{R}^3, dr_j)$, $r_j = (x_j, y_j, z_j)$.

Оскільки функція $f_0(\lambda) = e^{-i\alpha\lambda^2}$, $\alpha = \dfrac{\hbar\tau}{2m}$ не задовольняє умови теореми 26.1, розглянемо регуляризовану функцію

$$f_\varepsilon(\lambda) = e^{-i(\alpha - i\varepsilon)\lambda^2}, \quad \varepsilon > 0, \tag{26.42}$$

яка при $\varepsilon \to 0$ поточково прямує до $f_0(\lambda)$ і задовольняє умови теореми.

Застосуємо теорему 26.1 до функції (26.42) з аргументом $-i\nabla$ в $\mathbb{R}^{3N}$:

$$-i\nabla := \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, -i\frac{\partial}{\partial z_N}\right).$$

Тоді, враховуючи, що перетворення Фур'є функції $f_\varepsilon(\lambda)$ має вигляд

$$\widetilde{f}_\varepsilon(x) = (2i\alpha + 2\varepsilon)^{-3N/2} e^{-\frac{x^2}{4(i\alpha+\varepsilon)}}, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{3N},$$

остаточно отримуємо формулу для ядра оператора $e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\widehat{H}_0}$:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\widehat{H}_0}((\mathbf{r})_N; (\mathbf{r}')_N) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{i\frac{m}{2\hbar\tau}\sum\limits_{j=1}^{N}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j)^2}. \tag{26.43}$$

У теорії нерелятивістського розсіяння цю функцію при $N = 1$ називають вільним пропагатором.

Для того, щоб не заплутатись в індексах у подальших конструкціях, введемо скорочені позначення

$$(\mathbf{r})_N = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) =: \mathbf{q}, (\mathbf{r}')_N =: \mathbf{q}'. \tag{26.44}$$

Розділимо інтервал часу $\tau = t - t_0$ на n рівних частинок

$$\Delta\tau_n = \frac{\tau}{n} = \frac{t - t_0}{n}, \quad t_j = t_{j-1} + \Delta\tau_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Застосуємо тепер до оператора

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\widehat{H}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\tau(\widehat{H}_0 + \widehat{U})} \tag{26.45}$$

теорему Троттера (див., наприклад, [76, теорема VIII.30]):

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\tau(\widehat{H}_0+\widehat{U})} = s - \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\tau}{n}\widehat{H}_0}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\tau}{n}\widehat{U}}\right)^n. \tag{26.46}$$

Враховуючи, що ядро

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\tau}{n}\widehat{U}}(\mathbf{q};\mathbf{q}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\tau}{n}U(\mathbf{q})}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}'),$$

а також формули (26.43) і (26.46), запишемо дію оператора (26.45) на функцію $f(\mathbf{q})$:

$$\left(e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\widehat{H}}f\right)(\mathbf{q}_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta\tau_n}\right)^{\frac{3N}{2}\cdot n}\int\limits_{\mathbb{R}^{3Nn}}(d\mathbf{q})_n e^{\frac{i}{\hbar}A_{t,t_0}(\mathbf{q})_n}f(\mathbf{q}_n), \tag{26.47}$$

де

$$\mathcal{A}_{t,t_0}(\mathbf{q})_n = \Delta\tau_n\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1}}{\Delta\tau_n}\right)^2 - U(\mathbf{q}_i)\right]. \tag{26.48}$$

Щоб отримати формулу (26.38) з формули (26.47), треба представити множник перед інтегралом у (26.47) разом з експонентою від першого доданку в (26.48) гауссовим інтегралом:

$$\left(\frac{m}{i\Delta\tau_n}\right)^{\frac{3N}{2}n} e^{\frac{i}{\hbar}\Delta\tau_n\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1}}{\Delta\tau_n}\right)^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^{3Nn}}\prod_{i=1}^{n}\frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^{\frac{3N}{2}}}e^{\frac{i}{\hbar}\Delta\tau_n\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\mathbf{p}_i\cdot\frac{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1}}{\Delta\tau_n}-\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}\right]}$$

(тут так само, як і у (26.44) $\mathbf{p}_i$ є $3N$-вимірний вектор), а потім покласти

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(t_i), \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}(t_i)$$

і, враховуючи вигляд $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ (див. (26.35)), формально перейти до границі $n\to\infty$.

Для того, щоб дати фізичну інтерпретацію формулам (26.38), (26.47) та (26.48), розглянемо випадок однієї частинки $N=1$. Якщо ця частинка рухається по ламаній лінії так, що в момент часу t_0 вона перебуває в точці з координатою $\mathbf{q}_0$, в t_1 — у точці $\mathbf{q}_1$ і т.д., то величина $(\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_{i-1})/\Delta\tau_n$ є середньою швидкістю частинки і при $n\to\infty$ прямує до $\dot{\mathbf{q}}(t_i)$, а сума в (26.72)– до інтеграла, що відповідає функціоналу дії (див. (3.1), (3.4)):

$$\mathcal{A}_{t,t_0}(\mathbf{q}) = \int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau'\left[\frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}(\tau')^2 - U(\mathbf{q}(\tau'))\right]. \tag{26.49}$$

Тоді n інтегралів у (26.47) можна розуміти як один інтеграл за всіма можливими ламаними лініями, а в границі $n\to\infty$ як інтеграл (26.38) за всіма можливими

неперервними траєкторіями частинки з точки $\mathbf{q}_0$ в момент часу t_0 до точки $\mathbf{q_t}$ в момент часу t. Функцію дії (26.49) можна також переписати у вигляді (26.39) (див. (3.8)), а сукупність усіх таких траекторій позначити через $\Omega_{\mathbf{q}_t\mathbf{q}_0}$.

Зауваження 26.2. *Розроблений формалізм континуального інтегрування дає можливість записувати представлення не тільки для матричних елементів вигляду (26.37), а й для матричних елементів часово впорядкованих добутків операторів Гейзенберга довільного вигляду*

$$F(\widehat{\mathbf{q}}(t),\widehat{\mathbf{p}}(t)) = e^{i\widehat{H}t}F(\widehat{\mathbf{q}},\widehat{\mathbf{p}})e^{-i\widehat{H}t}.$$

Відповідне представлення можна записати так $(t > t_1 > \cdots > t_m > t_0)$*:*

$$(\Psi_{\mathbf{q}_t}(t), F_1(\widehat{\mathbf{q}}(t_1),\widehat{\mathbf{p}}(t_1))\cdots F_m(\widehat{\mathbf{q}}(t_m),\widehat{\mathbf{p}}(t_m))\Psi_{\mathbf{q}_0}(t_0)) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{\mathbf{q}_0\mathbf{q}_t}} \mathscr{D}\mathbf{p}\mathscr{D}\mathbf{q}F_1(\mathbf{q}(t_1),\mathbf{p}(\mathbf{t_1}))\cdots\mathbf{F_m}(\mathbf{q}(\mathbf{t_m}),\mathbf{p}(\mathbf{t_m}))\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\mathbf{A_{tt_0}(p,q)}}, \tag{26.50}$$

де

$$\Psi_{\mathbf{q}_i}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t_i}\Psi_{\mathbf{q}_i}, \quad i = 1,2, \quad t_1 = t_0, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0, \quad t_2 = t, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_t$$

(див, наприклад, доведення в [16, гл. 9.1].

Зауваження 26.3. *Пояснимо, чому розроблений тут формалізм називають квантуванням класичних механічних систем за допомогою інтегралів за траєкторіями. При звичайному канонічному первинному квантуванні спостережувані величини оголошувались ермітовими операторами, які є функціями канонічних змінних* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *і які діють у просторі станів, а їх середні обчислюються згідно із загальними правилами (наприклад, для динамічної величини* F*):*

$$\overline{F} = \frac{(\Psi,\widehat{F}\Psi)}{(\Psi,\Psi)} = \frac{(\Psi,F(\widehat{\mathbf{q}},\widehat{\mathbf{p}})\Psi)}{(\Psi,\Psi)}.$$

У підході Фейнмана ці ж середні розраховуються за допомогою континуальних інтегралів вигляду (26.38), (26.50)

$$\overline{F} = \int\limits_{\Omega_0} F(\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{p}(\cdot))d\mu(\mathbf{q},\mathbf{p}), \tag{26.51}$$

де міра інтегрування

$$d\mu(\mathbf{q},\mathbf{p}) = N^{-1}e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{tt_0}(\mathbf{q},\mathbf{p})}\mathscr{D}\mathbf{p}\mathscr{D}\mathbf{q} \tag{26.52}$$

зосереджена на деякому фазовому просторі траекторій $\Omega_{0)}$*.*

По суті, спостережуваним величинам $F(\mathbf{q},\mathbf{p})$ *класичної механіки знову зіставляється класичний об'єкт, але він залежить вже не від фіксованих значень координати та імпульсу частинок (тобто дискретного числа змінних), а від усіх можливих траєкторій цих частинок (тобто континуального*

числа змінних), які (для даного інтеграла (26.51)) починаються (в момент t_0) і закінчуються (в момент t) в даній фазовій точці $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. Тобто класичне положення частинки $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ перебуває в деякій "хмарі" можливих її положень у фазовому просторі, що відповідає поняттю квантовості. Теоретично ці положення можуть перебувати на будь якій відстані від положення $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. Але можна порахувати, що імовірності траєкторій, які мають найбільш віддалену від $\mathbf{q}_0$ точку на відстані l, пропорційна $\exp[-cl^2]$, тобто при великих l є дуже малою (див., наприклад, [130]).

Представлення у вигляді (26.51), (26.52) є також зручним для переходу до класичної границі ($\hbar \to 0$). Для цього треба скористатись формальними розкладами підінтегральних функцій у ряд за степенями $\hbar$. Насправді на строгому математичному рівні це можна зробити для досить вузького класу модельних фізичних систем.

26.3. Формалізм інтегралів Фейнмана для систем зі зв'язками

Перш ніж перейти до запису інтеграла Фейнмана для механічної системи, в якій існують якісь додаткові зв'язки між узагальненими координатами та імпульсами, пояснимо суть проблеми, що виникає у даному випадку, на прикладі звичайного багатократного інтеграла. Нехай нашими канонічними змінними є змінні $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_N$, а аналог інтеграла, що стоїть у правій частині формули (26.38) є

$$I_N = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (dx)^N e^{i\mathcal{A}(x)_N}. \tag{26.53}$$

Як було з'ясовано вище, таке визначення I_N є коректним і приводить до правильних розрахунків у теорії, якщо змінні $x_1, \ldots, x_N$, відповідають незалежним канонічним змінним. Якщо ж у класичній теорії існують додаткові рівняння

$$\varphi_i(x)_N = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{26.54}$$

і при побудові інтеграла I_N треба врахувати ці зв'язки, то (припускаючи, що рівняння (26.54) є розв'язними відносно змінних $x_1, \ldots, x_m$) інтеграл (26.53) буде насправді мати вигляд

$$I_N = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (dx)^N e^{i\widetilde{\mathcal{A}}(x_{m+1}, \ldots, x_N)}, \tag{26.55}$$

де при умові розв'язності (теорема про неявну функцію)треба врахувати, що

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{m} \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0. \tag{26.56}$$

Дія в експоненті (26.55)

$$\widetilde{\mathcal{A}}(x_{m+1},\dots,x_N)=\mathcal{A}(f_1,\dots,f_m,x_{m+1},\dots,x_N), \tag{26.57}$$

а функції $f_i(x_{m+1},\dots,x_N)=x_i$, $i=\overline{1,m}$, є розв'язками системи (26.54). Отже, у цьому випадку $I_N=\infty$, оскільки

$$I_N=\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} dx_{m+1}\cdots dx_N e^{i\widetilde{\mathcal{A}}(x_{m+1},\dots,x_N)}\int\limits_{\mathbb{R}^m}(dx)_m\cdot 1=+\infty.$$

Очевидно, що аналогом інтеграла (26.53) повинен бути інтеграл

$$\widetilde{I}_N=\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} dx_{m+1}\dots dx_N e^{i\widetilde{\mathcal{A}}(x_{m+1},\dots,x_N)}. \tag{26.58}$$

Але інтеграл $\widetilde{I}_N$ можна знову записати через усі канонічні змінні, а зв'язки (26.54) врахувати в заміні звичайної міри Лебега на $\mathbb{R}^{N-m}$ на деяку міру $\mu((dx)_N)$ на $\mathbb{R}^N$, яку легко отримати, ввівши в (26.58) додаткові інтегрування за допомогою δ-функцій Дірака:

$$\widetilde{I}_N=\int\limits_{\mathbb{R}^N} dx'_1\dots dx'_m, dx_{m+1}\dots dx_N e^{i\mathcal{A}(f_1,\dots,f_m,x_{m+1},\dots,x_N)}\prod_{i=1}^m\delta(x'_i-f_i(x_{m+1},\dots,x_N)). \tag{26.59}$$

Перейдемо в інтегралі за $dx'_1\cdots dx'_m$ до нових змінних $x_1,\dots,x_m$ правилами

$$x'_i=\varphi_i(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_N)+f_i(x_{m+1},\dots,x_N),\quad i=\overline{1,m}$$

Це завжди можна зробити, оскільки якобіан переходу $J=\det\left\|\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\|_{i,j=1}^m\neq 0$, а внаслідок того, що в інтегралі з'являються функції $\delta(\varphi_i)$, які не є рівними нулю лише при $\varphi_i=0$, то всі $f_i=x_i$. Остаточно маємо

$$\widetilde{I}_N=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(dx)^N e^{i\mathcal{A}(x)_N}\det\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\|_{i,j=1}^m\prod_{i=1}^m\delta(\varphi_i(x)_N). \tag{26.60}$$

У п.3.1.4 був коротко сформульований канонічний формалізм класичної механіки при наявності додаткових зв'язків (3.22). Було встановлено, що гамільтонова система, що перебуває у фазовому просторі Γ^{2n} змінних q,p при наявності додаткових зв'язків (3.17) може бути зведена до звичайної гамільтонової системи у фазовому просторі $\widetilde{\Gamma}^{2(n-m)}$ змінних $(\widetilde{q},\widetilde{p})$, які вже є незалежними. Простір $\widetilde{\Gamma}^{2(n-m)}$ можна реалізувати як підпростір у Γ^{2n}, наклавши поряд із (3.22) деяку додаткову умову

$$\chi_j(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)=0,\quad j=\overline{1,m}, \tag{26.61}$$

для яких дужка Пуассона

$$\{\chi_j, \chi_k\} = 0, \tag{26.62}$$

а

$$\det \|\{\varphi_j, \chi_k\}\|_{j,k=1}^n \neq 0. \tag{26.63}$$

Умова (26.62) дає можливість вибрати χ_j таким чином, щоб, наприклад, перші m змінних узагальнених імпульсів збігалися з χ_j, тобто

$$p = (\chi_1, \ldots, \chi_m, \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-m}). \tag{26.64}$$

Тоді умова (26.63) набуде вигляду

$$\det \|\{\varphi_j, \chi_k\}\|_{j,k=1}^m = \det \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \right\|_{j,k=1}^m \neq 0. \tag{26.65}$$

За допомогою цього легко розв'язати систему рівнянь (3.22) відносно q_k, $k = \overline{1,m}$, і задати поверхню $\widetilde{\Gamma}^{2(n-m)}$ у Γ^{2n} рівняннями

$$p_k = 0, \quad q_k = q_k(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{n-m}; \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-m}), \tag{26.66}$$

а змінні $(\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_{n-m}; \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-m})$ розглядати як незалежні канонічні змінні. Тоді середні оператора еволюції (26.37) матимуть вигляд (26.38), записаний через змінні $(\widetilde{q}, \widetilde{p})$.

Але в практичних задачах отримати розв'язок системи рівнянь (3.22) у явному вигляді не завжди можна. Крім того, потрібно беде застосувати цей формалізм для побудови континуальних інтегралів у калібрувально-інваріантних теоріях і бажано забезпечити лоренц-коваріантний вигляд цих інтегралів. Тому зараз покажемо, що інтеграл (26.38), записаний у змінних $(\widetilde{q}, \widetilde{p})$ можна знову записати в старих змінних (q, p), але за мірою, яка враховує зв'язки (3.22), (26.61). Таким чином даний інтеграл має вигляд

$$(\Psi_q, U(t, t_0)\Psi_{q_0}) = \int\limits_{\Omega_{qq_0}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{tt_0}(q,q)} \prod_{\tau \in [t,t_0]} d\mu(q(\tau), p(\tau)), \tag{26.67}$$

де

$$d\mu(\tau) = (2\pi\hbar)^{m-n} \det \|\{\varphi_j, \chi_k\}\|_{j,k=1}^m \prod_{j=1}^m \delta(\chi_j)\delta(\varphi_j) \prod_{k=1}^n dq_k(\tau)dp_k(\tau). \tag{26.68}$$

Щоб це довести, перепишемо спершу вираз міри (26.68) через змінні (26.64) з урахуванням (26.65):

$$d\widetilde{\mu}(\tau) = (2\pi\hbar)^{m-n} \det \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \right\|_{j,k=1}^m \prod_{j=1}^m \delta(p_j)\delta(\varphi_j) \prod_{k=1}^n dq_k(\tau)dp_k(\tau). \tag{26.69}$$

Перейдемо в інтегралі (26.67) за мірою (26.69) до змінних

$$p_k = p'_k, \quad k = \overline{1,m}, \quad p_{j+m} = \widetilde{p}_j, \quad j = \overline{1,n-m},$$
$$q_k(\widetilde{q}_1 \ldots, \widetilde{q}_{n-m}; \widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{n-m}) = q'_k, \quad q_{j+m} = \widetilde{q}_j.$$

Тоді за рахунок якобіану переходу зникне $\det \left\| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \right\|_{j,k=1}^{m}$ (див. (26.54) – (26.60)) і міра (26.69) набуде вигляду

$$d\tilde{\mu}(\tau) = (2\pi)^{m-n} \prod_{j=1}^{m} \delta(p'_j)\delta(q'_j - q_j(\widetilde{q};\widetilde{p}))dq'_j dp'_j \prod_{k=1}^{n-m} d\widetilde{q}_k d\widetilde{p}_k. \tag{26.70}$$

Підставляючи (26.70) у вираз (26.67), знімаючи інтеграли за $\prod_{j=1}^{m} d\widetilde{p}'_j d\widetilde{q}'_j$ за допомогою δ-функцій і враховуючи, що

$$H(q,p)|_{\varphi=\chi=0} = H(\widetilde{q},\widetilde{p}),$$

отримуємо вираз (26.38).

Таким чином, для Гамільтонової системи, яка має додаткові зв'язки (3.17), оператор еволюції квантової системи зберігає форму інтеграла (26.38)) з мірою, яка враховує наявність зв'язків, тобто має вигляд (26.67).

26.4. Континуальний інтеграл і теорія збурень у моделях самовзаємодіючих скалярних полів

Формальне узагальнення гамільтонової системи, яка була описана в п.26.2, полягає в тому, що замість скінченного набору канонічних змінних $(\mathbf{q},\mathbf{p})_N$ у (26.33) маємо континуум змінних $(\varphi(x), \pi(x))$, $x \in \mathbb{M}$. Для того, щоб безпосередньо скористатися формалізмом пункту 26.2, треба визначитися з представленням комутаційних співвідношень для операторів $\varphi(x)$ і $\pi(x)$. У розділі IV було розглянуто представлення комутаційних співвідношень у просторі Фока. Для побудови континуального інтеграла (25.38) у квантовій механіці було використано так зване координатне представлення, у якому оператор координати діє як оператор множення, а оператор імпульсу – як диференціальний оператор. Аналогічне представлення можна реалізувати і в теорії квантованих полів. Для цього треба розглянути простір станів, вектори якого є функціоналами $\Phi(\varphi)$ значення полів $\varphi(0,\mathbf{x})$. Тоді одночасові комутаційні співвідношення (14.20) при $x^0 = y^0 = 0$ будуть реалізовані, якщо задати дію операторів $\varphi(0,\mathbf{x})$ і $\pi(0,\mathbf{x})$ такими формулами:

$$\varphi(0,\mathbf{x})\Phi(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})\Phi(\varphi), \quad \pi(0,\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})}\Phi(\varphi).$$

У цьому випадку представлення матричного елемента оператора еволюції (вигляду (26.37)) будується зовсім аналогічно і для системи самовзаємодіючого

скалярного поля з лагранжіаном

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2} : \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) : - \frac{m^2}{2} : \varphi^2(x) : - \lambda : \varphi^4(x) : \tag{26.71}$$

і гамільтоніаном

$$H = H(\pi, \varphi) =$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} : \pi^2(0, \mathbf{x}) : + \frac{1}{2} : |\nabla \varphi(0, \mathbf{x})|^2 : + \frac{m^2}{2} : \varphi^2(0, \mathbf{x}) : + \lambda : \varphi^4(0, \mathbf{x}) : \right] d\mathbf{x}.$$

Тоді, спираючись на аналогію з механічною квантовою системою, запишемо континуальний інтеграл вигляду (26.38) так:

$$\left(\Phi_2(\varphi), e^{-(x_2^0 - x_1^0)H} \Phi_1(\varphi) \right) = \int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\phi e^{\mathcal{A}_{x_2^0, x_1^0}(\psi, \phi)}, \tag{26.72}$$

де $x_2^0 > x_1^0$,

$$\mathcal{A}_{x_2^0, x_1^0}(\psi, \phi) = \int\limits_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} [\psi(x) \partial_0 \phi(x) - \mathscr{H}(\psi(x), \phi(x))], \tag{26.73}$$

а $\mathscr{H}(\psi(x), \phi(x))$ визначений таким чином, що

$$H(\psi, \phi) = \int d\mathbf{x} \mathscr{H}(\psi(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{x}))\big|_{x^0 = 0}. \tag{26.74}$$

Міра

$$\mathscr{D}\psi \mathscr{D}\phi = \prod_{x \in [x_1^0, x_2^0] \otimes \mathbb{R}^3} \frac{d\psi(x)}{(2\pi)^2} \frac{d\phi(x)}{(2\pi)^2}. \tag{26.75}$$

У формулах (26.72)–(26.75) змінна ϕ відповідає оператору поля φ, а змінна інтегрування ψ асоціюється з канонічною імпульсною змінною.

У квантовій теорії поля основним об'єктом є функції Гріна. Представлення для функцій Гріна у вигляді континуального інтеграла легко отримати, виходячи з загального формалізму, який був описаний у пункті 26.1. На рівні теорії збурень, в контексті якої і будемо користуватись континуальними інтегралами, для отримання потрібного представлення досить скористатись аналогією між формулою (26.14) та теоремою Віка (теорема 20.2). Якщо покласти у формулі (26.14)

$$C(x, y) = \frac{1}{i} D^c(x - y),$$

то, враховуючи (20.18), маємо

$$\int d\mu_C(\phi) \phi(x) \phi(y) = (\Omega_0, T(\varphi(x)\varphi(y))\Omega_0),$$

де формально міра $d\mu_C$ визначається формулою (26.13) з

$$C^{-1}(x,x') = i(g^{\mu\mu}\partial_\mu\partial'_\mu - m^2)\delta(x-x').$$

Враховуючи також фур'є-представлення функцій $\delta(x-x')$ і $\frac{1}{i}D^c(x-x')$ (див. (22.92), (20.9)), легко розрахувати безмежну константу

$$\mathrm{Tr}\ln C = \int dx \int \frac{dp}{(2\pi)^4}\ln(p^2-m^2).$$

Але ця константа не повинна входити в розрахунки, оскільки є, по суті, постійним нормувальним множником для гауссового інтеграла, і повинна зникати при правильному його обчисленні. Аналогічно легко отримати формулу (задача 26.6)

$$\int d\mu_C(\phi)\phi(x_1)\cdots\phi(x_N) = (\Omega_0, T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N))\Omega_0). \tag{26.76}$$

Тоді N-точкову функцію Гріна, яка в представленні взаємодії задавалась формулою (24.8), можна переписати у вигляді континуального інтегралу (для взаємодії (21.3))

$$G_N(x)_N = \frac{1}{S_0}\int d\mu_C(\phi)\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)e^{-i\lambda\int:\phi^4(x):dx},$$

де

$$S_0 = \int d\mu_C(\phi)e^{-i\lambda\int:\phi^4(x):dx}.$$

Враховуючи (26.12), (26.13), цю формулу можна переписати так:

$$G_N(x)_N = \frac{1}{S'_0}\int \mathscr{D}\phi\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)e^{i\int\mathscr{L}(x)dx}, \tag{26.77}$$

де $\mathscr{L}(x)$ збігається з (26.71), а S'_0 відрізняється від S_0 на множник $e^{-1/2\mathrm{Tr}\ln C}$, який скоротився з відповідним множником у чисельнику. Запис (26.77) називають лагранжевою формою континуального представлення функцій Гріна. Формулу (26.77) можна переписати в гамільтоновій формі

$$G_N(x)_N = \frac{1}{S''_0}\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\phi\ \phi(x_1)\cdots\phi(x_N)e^{i\int dx[\psi(x)\partial_0\phi(x)-\mathscr{H}(\psi(x),\phi(x))]}. \tag{26.78}$$

Щоб переконатися в еквівалентності записів (26.77) і (26.78) треба в (26.78) зробити заміну змінних типу зсуву (див. (26.25)):

$$\psi(x) = \psi'(x) + \partial_0\phi(x) \tag{26.79}$$

та проінтегрувати за мірою $\mathscr{D}\psi'$.

Формула (26.78) узгоджується з представленням (26.72), яке записано, спираючись на аналогію з механічною квантовою системою.

Зауваження 26.4. *Якщо у формулі (26.77) розкласти експоненту в ряд за λ і проінтегрувати кожний член цього ряду, застосувавши формулу (26.14), то отримаємо такий самий ряд теорії збурень для функції Гріна G_N.*

Зауваження 26.5. *Легко переконатися, використовуючи формули (26.9), (26.10), що розроблений вище формалізм переноситься на випадок комплексних скалярних полів, а також на випадок взаємодії декількох скалярних полів. Теж саме можна зауважити і щодо векторних полів. Але побудова континуальних інтегралів для електромагнітного поля та векторних калібрувальних полів має свої особливості через наявність додаткових умов (зв'язків) і тому повинна спиратися на аналогію з відповідною механічною системою, яка була описана в пункті 26.3. Далі покажемо, що формалізм інтегрування можна розробити і для полів матерії, тобто фермі-полів.*

26.5. Континуальний інтеграл для фермі-полів

Конструкція континуального інтеграла для фермі-полів ґрунтується на понятті *грасманової змінної* a або багатьох грасманових змінних $a_1, \ldots, a_n$, які мають назву твірних скінченно вимірної *грасманової алгебри* і які задовольняють такі антикомутаційні співвідношення:

$$[a_i, a_k]_+ \;=\; 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Для застосування апарату грасманових змінних до опису квантових фермісистем слід розглядати грасманові алгебри з *інволюцією*, тобто поряд зі змінними a_i розглянемо також їм спряжені змінні $\overset{*}{a}_i$. У цьому випадку повна система переставних співвідношень виглядатиме так:

$$[a_i, \overset{*}{a}_k]_+ = \delta_{ik}, \quad [a_i, a_k]_+ \;=\; [\overset{*}{a}_i, \overset{*}{a}_k]_+ = 0. \tag{26.80}$$

Як наслідок (26.80) маємо важливі співвідношення

$$a_i^2 = \overset{*}{a}_i^{\,2} = 0. \tag{26.81}$$

Прикладом грасманової змінної a може бути, наприклад, комплексна матриця

$$a = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |z|^2 = z\bar{z} = 1. \tag{26.82}$$

На грасмановій алгебрі можна визначити простір аналітичних функцій і побудувати диференціальне та інтегральне числення. Більш детально про це можна прочитати, наприклад, у монографіях [6, § 3], [119]. Приведемо тут лише основні формули, необхідні для побудови звичайних інтегралів і їх континуальних аналогів за грасмановими змінними.

Для того, щоб визначити інтеграли за змінними $a_1, \dots, a_n$, уведемо символи $da_1, \dots, da_n$ таким чином, щоб вони задовольняли антикомутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &[da_i, da_j]_+ = [d\overset{*}{a}_i, d\overset{*}{a}_k]_+ = [da_i, d\overset{*}{a}_j]_+ = 0, \\ &[a_i, da_j]_+ = [da_i, \overset{*}{a}_j]_+ = [\overset{*}{a}_i, d\overset{*}{a}_k]_+ = [a_i, d\overset{*}{a}_j]_+ = 0. \end{aligned} \tag{26.83}$$

Визначимо однократні інтеграли за змінними a_i, $\overset{*}{a}_i$ співвідношеннями

$$\int a_i da_i = \int \overset{*}{a}_i d\overset{*}{a}_i = 1, \quad \int da_i = \int d\overset{*}{a}_i = 0. \tag{26.84}$$

Співвідношення (26.80) – (26.84) дають змогу визначити n-кратні інтеграли

$$\int \mathscr{P}(\overset{*}{a}, a) d\overset{*}{a}\, da \;:=\; \int \mathscr{P}(\overset{*}{a}_1, \dots, \overset{*}{a}_n; a_1, \dots, a_n) \prod_{i=n}^{1} d\overset{*}{a}_i\, da_i$$

на поліномах

$$\mathscr{P}(\overset{*}{a}, a) = \sum_{\substack{(\bar{s})_n, (s)_n \\ \bar{s}_i, s_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,n}}} C_{(\bar{s})_n;(s)_n} (\overset{*}{a}_1)^{\bar{s}_1} \cdots (\overset{*}{a}_n)^{\bar{s}_n} (a_1)^{s_1} \cdots (a_n)^{s_n}, \tag{26.85}$$

де коефіцієнти $C_{(\bar{s})_n;(s)_n} \in \mathbb{C}$.

Для визначення загального вигляду полінома степеня $\overline{N} = (\overline{N}_1, \dots, \overline{N}_n; N_1, \dots, N_n)$ сумування за $(\bar{s})_n = \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ і $(s)_n = (s_1, \dots, s_n)$ повинно виконуватися за $\bar{s}_j = 0, 1, \dots, \overline{N}_j$, $s_j = 0, 1, \dots, N_j$, $j = 1, \dots, n$. Але внаслідок співвідношень (26.81) "виживають" лише члени, в яких $\bar{s}_j, s_j \in \{0, 1\}$. З тих же причин для будь-якої аналітичної функції її розклад в ряд є поліномом вигляду (26.85). Користуючись властивостями (26.80)–(26.84), можна обчислити інтеграл, який є аналогом гауссового інтеграла (26.9) (див. задачу 26.7):

$$I_n = \int e^{-(\overset{*}{a}, Ba)} d\overset{*}{a}\, da = \det B, \tag{26.86}$$

де B – $n \times n$ косоермітова невироджена матриця, для чого потрібне узагальнення цієї формули, аналогічне формулі (26.11):

$$\frac{\int e^{-(\overset{*}{a}, Ba) + (\overset{*}{\eta}, a) + (\overset{*}{a}, \eta)} d\overset{*}{a}\, da}{\int e^{\overset{*}{a}, Ba} d\overset{*}{a}\, da} = e^{(\overset{*}{\eta}, B^{-1}\eta)}, \tag{26.87}$$

де нова розширена грасманова алгебра будується на твірних $a_1, \dots, a_n$, $\eta_1, \dots, \eta_n$, які задовольняють такі самі співвідношення (26.80)–(26.84). Формула (26.87) випливає з (26.86), якщо в (26.87) зробити заміну

$$a_i \;\to\; a_i + (B^{-1})_{ij} \eta_j.$$

Далі на формальному рівні формули (26.86), (26.87) узагальнюються на континуальний випадок, тобто на випадок, коли твірними грасманової алгебри є грасманове поле $\psi(x)$, $x \in \mathbb{M}$, а неперервний аналог матриць B і B^{-1} асоціюється з диференціальним оператором-матрицею, що визначає ліву частину рівняння Дірака (5.7) і його функцію Гріна, тобто

$$B(x,y) = i(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_x \delta(x-y),$$
$$B^{-1}(x,y) = \frac{1}{i} S^c(x-y).$$

Відповідна формула має такий вигляд:

$$\frac{\int \mathscr{D}\bar\psi \mathscr{D}\psi \; e^{i\int dx \; \bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + i\int dx[\bar\psi(x)\eta(x) + \bar\eta(x)\psi(x)]}}{\int \mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}\psi \, e^{i\int dx \bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)}} =$$
$$= e^{\int dx \int dy \, \bar\eta(x) \frac{1}{i} S^c(x-y)\eta(y)}, \tag{26.88}$$

де

$$\mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}\psi = \prod_{x\in\mathbb{M}^4} \prod_{\alpha=1}^{4} d\bar\psi_\alpha(x) d\psi_\alpha(x). \tag{26.89}$$

Формула (26.88) дає змогу отримати формулу для моментів міри

$$d\mu_\psi := e^{i\int dx \; \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)} \mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi$$

аналогічно до формули (26.14).

Грасманові варіаційні похідні $\delta/\delta\eta(x)$ і $\delta/\delta\overline{\eta}(x)$ діють на відповідні функціонали так само, як і у випадку звичайних варіаційних похідних (24.24), але при цьому треба врахувати, що вони антикомутують із величинами $\overline{\psi}$, ψ, $\overline{\eta}$, η при їх перестановці. З іншого боку, застосування цієї формули до довільного полінома за грасмановими змінними $\overline{\psi}$ і ψ еквівалентне застосуванню теореми Віка і обчисленню вакуумних середніх від таких самих поліномів за квантовими полями Дірака $\overline{\psi}(x)$ і $\psi(x)$ [1]. Ця аналогія дає можливість записати функцію Гріна, фермі- і бозе-полів у вигляді континуального інтеграла.

На завершення запишемо це представлення для полів, що взаємодіють за допомогою лагранжіана юкавського типу:

$$\mathscr{L}_I(x) = g : \overline{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x) : . \tag{26.90}$$

Тоді

$$G_{2n;m}((x)_n;(y)_n;(z)_m) =$$
$$= \frac{1}{S_0} \int \psi(x_1)\dots\psi(x_n)\overline{\psi}(y_1)\dots\overline{\psi}(y_n)\varphi(z_1)\dots\varphi(z)_m e^{ig\int :\overline{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x):dx} d\mu(\overline{\psi},\psi,\varphi), \tag{26.91}$$

[1] Щоб не виникали непорозуміння, треба відрізняти квантові поля $\psi(x)$ і $\overline{\psi}(x)$ від грасманових змінних $\overline{\psi}(x)$ і $\psi(x)$, за якими відбувається інтегрування.

де

$$d\mu(\overline{\psi},\psi,\varphi)=e^{i\int\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0)\psi(x)dx+i\int\varphi(x)(\Box-\mu_0^2)\varphi(x)dx}\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\varphi, \tag{26.92}$$

а

$$S_0=\int d\mu(\bar{\psi},\psi,\varphi)e^{ig\int\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x)dx}. \tag{26.93}$$

Зауваження 26.6. *Формули (26.88) і (26.91) були отримані на основі аналогії між теоремою Віка і правилом обчислення інтегралів вигляду (26.87). Але їх можна отримати, виходячи зі стандартного формалізму канонічних змінних. На відміну від скалярних полів, де аналогія між записом у канонічній формі (26.78) і коваріантній формі (26.77) встановлювалась після заміни (26.79) і інтегруванні за канонічними імпульсними змінними $\mathscr{D}\psi'$, у випадку форміонів такої процедури робити не треба, оскільки канонічні імпульси $p_j\equiv i\psi(x)$ (див. (5.129)) зовсім не пов'язані з $\dot{q}_j\equiv\partial_0\psi(x)$, а внаслідок (3.8)*

$$\sum_j p_j(\tau)\dot{q}_j(\tau)-\mathscr{H}_0(p(\tau),q(\tau))=\mathscr{L}\equiv\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x),$$

і (див. (26.40) і (26.89))

$$\mathscr{D}\mathbf{p}\mathscr{D}\mathbf{q}=\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi,$$

то інтегрування за імпульсними і координатними змінними збігається з інтегруванням за $\overline{\psi}$ і ψ, що й забезпечує еквівалентність гамільтонової і коваріантної форми запису.

Задачі до розділу V

Задача 21.1. Довести, що вільне поле, записане у вигляді (21.16) задовольняє рівняння Клейна–Гордона–Фока (4.6).

Задача 21.2. Показати, що гамільтоніан самовзаємодії дійсного скалярного поля (21.10) можна записати у вигляді (21.21)–(21.22).

Задача 21.3. Отримати оцінки вигляду (21.31) для операторів $H_{3,1}$, $H_{2,2}$, $H_{1,2}$ і $H_{0,4}$.

Задача 22.1. Довести, що еволюційний оператор, визначений формулою (22.20), на нормованих станах гільбертового простору $\mathscr{H}$ задовольняє умови (22.21)–(22.23).

Задача 22.2. Записати умови релятивістської інваріантності для коефіцієнтних функцій S-матриці у випадку взаємодій:
а) $\mathscr{L}_I=\lambda:\varphi^4:$;
б) $\mathscr{L}_I=\lambda:\overline{\psi}\psi\varphi:$.

Задача 22.3. Довести, що S-оператор, визначений за допомогою самоспряжених операторів H і H_0 формулами (22.31), (22.28), (22.19), комутує з оператором H_0.

Задача 23.1. Довести, що послідовність коефіцієнтних функцій ВВФ $T(:\varphi^4(x):W)$ має вигляд $:a^4(x):f$, де f– послідовність коефіцієнтних функцій ВВФ (див. (23.1)).

Задача 23.2. Вивести рівняння (23.24), користуючись формальними означеннями операторів-символів $a^{\pm}(x)$.

Задача 23.3. Записати вираз ВВФ у випадку взаємодії Юкави $\mathscr{L}_I(x) = \lambda :\overline{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x):$ і отримати правила дії "операторів" $\Psi^{\pm}(x)$ і $\overline{\Psi}^{\pm}(x)$ на послідовність коефіцієнтних функцій.

Задача 23.4. Записати рівняння резовельтного та еволюційного типу для моделі Юкави $\mathscr{L}_I(x) = \lambda :\overline{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x):$.

Задача 24.1. Вивести рівняння (24.11) з представлення функцій Гріна виразом (24.7), використовуючи узагальнену теорему Віка.

Задача 24.2. Вивести рівняння для вершинних сильнозв'язних функцій Гріна $\Gamma_3(x_1,x_2,x_3)$ в теорії $\lambda\varphi^3$ і $\Gamma_4(x_1,\ldots,x_4)$ в теорії $\lambda\varphi^4$.

Задача 25.1. Користуючись регуляризацією Паулі–Вілларса, виділити розбіжну частину вершинної функції Γ_4 (для теорії $\lambda\varphi^4$) у другому порядку теорії збурень.

Задача 25.2. Розв'язати задачу 25.1 для власнеенергетичної частинки $\Gamma_2^{(2)}$.

Задача 25.3. Виділити розбіжність і визначити його характер внеску від власнеенергетичної діаграми 2-го порядку в моделі з лагранжіаном взаємодії $\lambda\varphi^3(x)$ методом Паулі–Вілларса.

Задача 25.4. Порахувати індекс розбіжності діаграми, зображеної на рис. 25.1. Довести, що вклад від цієї діаграми є розбіжний.

Задача 25.5. Порахувати індекси розбіжності діаграм (у просторі $\mathbb{M}^4$).

, ,

а б

в .

Рис. 25.5

Якому лагранжsану взаємодії відповідають ці діаграми? Які внески є збіжними, а які розбіжними у наведених діаграмах?

Задача 25.6. Знайти максимальний індекс вершини в моделях з лагранжианами взаємодій: $\lambda\varphi_4^4$, $\lambda\varphi_3^6$, $\lambda\varphi_4^6$. Які з теорій є перенормовані, а які неперенормовані (нижній індекс вказує розмірність простору Мінковського $\mathbb{M}^d$)?

Задача 25.7. Виразити індекс розбіжності діаграми Фейнмана, яку можна розбити на k-вузлів $G_1, \ldots, G_k$ через індекси розбіжності вузлів.

Задача 25.8. Довести лему 25.1 (п.25.4).

Задача 25.9. Проаналізувати вигляд контрчленів і виписати повний перенормований лагранжіан для взаємодії $\lambda\varphi_4^3$.

Задача 26.1. Перевірити формулу (26.15) для функціоналів $F(y) = \exp[i \int z(x)y(x)dx]$.

Задача 26.2. Перевірити формулу (26.15) для функціоналів $F(y) = P(y)$, де

$$P(y) = \int P_n(x_1, \ldots, x_n)y(x_1)\cdots y(x_n).$$

Задача 26.3. Перевірити формулу (26.17), користуючись представленням (26.15).

Задача 26.4. Довести формулу (26.31).

Задача 26.5. Довести формулу (26.32).

Задача 26.6. Довести формулу (26.76).

Задача 26.7. Довести, що для всякої невиродженої косоермітової $n \times n$ матриці B справедлива формула (26.86) (порахувати для $n = 2, 4$).

Розділ VI. Аксіоматична та Евклідова теорії поля

Виникнення будь-якої фізичної теорії починається, як правило, з теоретичного обґрунтування явищ, які спостерігаємо у природі або в підготовленому і продуманому експерименті. Такий "стихійний" розвиток теорії завжди приводить до виникнення проблем (математичних, технічних, тощо), які інколи так само "стихійно" долаються, а інколи приводять до зовсім суперечливих результатів. Саме тоді найчастіше і виникає потреба осмислити теорію з точки зору її вихідних положень—*аксіом* та питання, наскільки повною є сукупність припущень, які поступово починають набувати магічного змісту і перетворюються в *аксіоми*. До аксіоматичної теорії спершу з'являється дещо скептичне ставлення, особливо у тих науковців, які звикли більше щось розраховувати, а не доводити існування того, чого вони ніколи не спостерігали. Але з часом виявляється, що розвиток аксіоматичного підходу, а особливо пошуки нетривіального прикладу, що задовольняє сформульовану систему аксіом, приводить до нових теоретичних (а інколи і експериментальних) результатів або ж до виникнення теоретичного підходу, який можна застосувати і в інших галузях теоретичної фізики. Прикладом такого розвитку подій може служити *конструктивна квантова теорія поля* (ККТП), яка виникла внаслідок пошуку нетривіальної моделі, яка б задовольняла систему аксіом Вайтмана. ККТП набула дуже широкого застосування у статистичній механіці, теорії твердого тіла, тощо.

Особливе значення аксіоматичної теорії полягає у тому, що система аксіом, яка спершу формулюється для вихідних об'єктів якоїсь фізичної теорії, може бути переписана у нову систему аксіом для інших об'єктів, які звичайно пов'язані з вихідними об'єктами, але мають зовсім інший характер, і їх дослідження значно полегшується. Прикладом може бути система аксіом для функцій Вайтмана або функцій Швінгера (евклідових функцій Гріна).

Першою спробою вийти за рамки традиційних підходів до побудови квантової теорії елементарних частинок був підхід Гейзенберга [144], який ввів поняття S-матриці як основного математичного об'єкта, в термінах якого треба виразити всі спостережувані величини. Спершу здавалось, що досить сформулювати якесь необхідне і достатнє число аксіом на S-оператор і ввести поняття поля. Але такий підхід виявився занадто загальним. Пізніше від нього відмовився і сам Гейзенберг. Тому дальший розвиток аксіоматичного підходу пішов за шля-

хом вивчення локальних величин: поля, гамільтоніанів тощо.

У цьому розділі буде коротко описано основні аксіоматичні підходи і вказано джерела, до яких треба звернутися в разі необхідності поглибити свої знання. Але основна мета даного розділу полягає у плавному або, точніше, логічному переході до евклідової теорії поля, яка з математичної точки зору є більш строгою і на сьогодні є загальноприйнятою, незважаючи на те, що поки що не є повністю обґрунтованою.

На завершення радимо прочитати вступ до книжки Р. Йоста [39], в якому автор висловлює свою оригінальну точку зору на історію розвитку квантової теорії і її аксіоматизовності. Незважаючи на те, що ці думки були висловлені майже півстоліття тому, вони не втратили актуальності і на сучасному етапі розвитку квантової теорії.

Корисним є також короткий екскурс в історію аксіоматичного підходу, викладений у вступі до монографії [11], і тому радимо його прочитати.

§ 27. Аксіоматика Вайтмана

Аксіоматика Вайтмана (A.S. Wightman) (інколи вживають Уайтмана), з одного боку, є найбільш математично обґрунтованою теорією, а з іншого—найменш пов'язаною з фізичною реальністю, оскільки не містить у собі поняття елементарної частинки і не встановлює зв'язків з експериментально спостережуваними величинами. Тим не менше починаємо короткий огляд аксіоматичних теорій саме з аксіоматики Вайтмана, через те, що формальні і математичні аспекти цієї теорії дають можливість обґрунтувати перехід до евклідової квантової теорії поля. Як і у попередніх розділах, сформулюємо аксіоми для дійсних скалярних полів. Це обмеження не є істотним з точки зору формулювання загальних принципів.

Повний опис аксіоматичної теорії Вайтмана викладений у монографії [88] (див. також [39]).

27.1. Аксіоми Вайтмана для нейтрального скалярного поля

У розділі IV була сформульована система аксіом, яка дає можливість побудувати квантову теорію полів, виходячи з класичних уявлень і узагальнюючи класичну та квантову нерелятивістську механіку. Система аксіом Вайтмана є частиною постулатів **ПК1–ПК9** (п.14.3). Це мінімальне число аксіом, які визначають квантову теорію поля.

A1. Існування релятивістсько-інваріантного стану

1. Простір станів є сепарабельним гільбертовим простором $\mathscr{H}$. Кожному фізичному стану відповідає одиничний *пучок*

$$\Psi := \left\{ e^{i\varphi}\Phi \,\middle|\, \varphi \in \mathbb{R}, \Phi \in \mathscr{H}, \|\Phi\|_{\mathscr{H}} = 1 \right\}.$$

2. Релятивістський закон перетворення векторів у просторі $\mathscr{H}$ задається неперервним унітарним представленням власної ортохронної групи Пуанкаре:
$$(a, \Lambda) \longrightarrow U(a, \Lambda).$$

3. Оператор, що відповідає чистій трансляції ($\Lambda \equiv \mathbb{1}$) $U(a, \mathbb{1}) = \exp\{iP^\mu a_\mu\}$, де $P = (P^\mu)_{\mu=0}^3$ – необмежений самоспряжений оператор 4-вектора енергії імпульсу. Його спектр складається з ізольованої точки $p = (0, 0, 0, 0)$ і точок, що розташовуються у конусі $\overline{V}_m^+ := \{p \,|\, p^2 = p_\mu p^\mu \geqslant m^2,\ p^0 > 0\}$, який лежить у конусі майбутнього (1.7)(*спектральна умова*, див. **ПК5**).

4. Власне значення $p = (0, 0, 0, 0)$ відповідає єдиному (з точністю до фазового множника $e^{i\varphi}$) власному вектору Φ_0, який є інваріантним відносно перетворень $U(a, \Lambda)$:
$$U(a, \Lambda)\Phi_0 = \Phi_0 \tag{27.1}$$
і називається вакуумним станом.

A2. Існування релятивістсько-інваріантного квантового поля

1. Над простором основних функцій $f \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$ існує лінійний операторнозначний функціонал φ, такий, що $\varphi(f) =< f, \varphi >$ є лінійним замкненим (у даному випадку самоспряженим) оператором у просторі $\mathscr{H}$ із всюдищільною (див. п.19.2.1) областю визначення $\mathscr{D}(\varphi)$, причому
$$U(a, \Lambda)\mathscr{D}(\varphi) \subset \mathscr{D}(\varphi), \quad \varphi(f)\mathscr{D}(\varphi) \subset \mathscr{D}(\varphi), \quad \Phi_0 \in \mathscr{D}(\varphi)$$
і вакуумний вектор Φ_0 є циклічним вектором у $\mathscr{H}$ (див. означення в п.19.2.3).

2. Оператори поля $\varphi(f)$ задовольняють такі умови релятивістської інваріантності:
$$U(a, \Lambda)\varphi(f)U^{-1}(a, \Lambda)\Phi = \varphi(f_{\Lambda,a})\Phi \tag{27.2}$$
для будь-якого $\Phi \in \mathscr{D}(\varphi)$. Тут $f_{\Lambda.a}(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$.

3. Поля $\varphi(f)$ задовольняють умову *локальної комутативності*. Тобто, якщо носії основних функцій f і g розділені просторовоподібним інтервалом:
$$f(x)g(y) = 0 \quad \text{для точок } x, y, \quad \text{для яких } (x - y)^2 < 0,$$
то
$$[\varphi(f), \varphi(g)]_-\Phi = 0, \quad \Phi \in \mathscr{D}(\varphi).$$

Систему аксіом **A1**–**A2** називають ще аксіомами Гордінга–Вайтмана [200].

Аксіоми **A1**–**A2** є фактично визначенням того, що розуміють під квантовою теорією поля. Тобто, якщо побудувати простір $\mathscr{H}$ і оператори, що фігурують в умовах **A1**–**A2**, це буде означати, що побудований деякий приклад теорії, яку можна вважати квантовою теорією поля. Але цей приклад може бути *тривіальним*. Таким, наприклад, є скалярне поле вигляду $\varphi(x) = \text{const} \cdot \mathbf{I}$, де $\mathbf{I}$– одиничний оператор у просторі $\mathscr{H}$. Іншим прикладом є вільне поле, визначене в § 15 і 19. Хоч вільне поле не є тривіальним із математичної точки зору та фактично обґрунтовує несуперечливість системи аксіом **A1**–**A2**, але не цікаве з точки зору фізики, оскільки є ідеалізацією реальної фізичної системи. Тому, для того, щоб побудоване поле або система полів були нетривіальними як з точки зору математики, так і фізики, потрібні ще якісь критерії чи додаткові припущення. Таким додатковим критерієм може бути, наприклад, існування *асимптотичних станів* теорії розсіяння і їх *повнота*. Таку умову часто записують у вигляді

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{in} = \mathscr{H}_{out}, \tag{27.3}$$

де $\mathscr{H}_{in}$ і $\mathscr{H}_{out}$ – гільбертові простори станів до акту розсіяння частинок і після розсіяння. Звичайно, для перевірки умови (27.3) треба мати якийсь конструктивний метод обчислення (або визначення) таких станів. Існує декілька підходів до цієї проблеми. Радимо читачу звернутися до монографії [39, гл. VI], де детально обговорюється ця проблема в рамках теорії асимптотичних полів Хаага–Рюеля.

27.2. Функції Вайтмана та їх властивості

Введемо, поки що формально, такі функції:

$$w_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Phi_0), \tag{27.4}$$

де $\varphi(x)$ – гейзенбергове скалярне поле, а Φ_0– вакуумний стан. Існування $\varphi(x)$ як операторно значного функціонала над простором основних функцій $\mathscr{S}(\mathbb{M})$ і вакуумного вектора $\Phi_0 \in \mathscr{H}$ є наслідком аксіом **A1** і **A2**. Для того, щоб надати змісту виразу (27.4), треба спершу розглянути полілінійний функціонал

$$w_n(f_1, \ldots, f_n) := (\Phi_0, \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n)\Phi_0),$$

від аргументів $f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$, $j = 1, \ldots, n$. Внаслідок аксіом **A1**, 4 і **A2**, 1 він є добре визначеним на $\mathscr{S}(\mathbb{M})^{\otimes n}$, а згідно з теоремою Шварца про ядро (див., наприклад, [88], гл. 2) існує єдина узагальнена функція повільного росту над $\mathscr{S}(\mathbb{M})^{\otimes n}$. Вираз (27.4) визначає таку функцію.

Коротко сформулюємо основні властивості функцій (27.4), які є наслідком аксіом **A1-2**.

W0. *Помірний ріст*

Узагальнені функції $w_n(x_1,\dots,x_n)$ є елементами простору $\mathscr{S}'(\mathbb{M}^{\otimes n})$.

W1. *Релятивістський закон перетворення*

$$w_n(f_{1;\Lambda,a},\dots,f_{n;\Lambda,a}) = w_n(f_1,\dots,f_n). \tag{27.5}$$

Нагадаємо, що $f_{i;\Lambda,a}(x) = f_i(\Lambda^{-1}(x-a))$. Формула (27.5) мовою функцій (27.4) має такий вигляд:

$$w_n(x_1,\dots,x_n) = w_n(\Lambda x_1 + a,\dots,\Lambda x_n + a). \tag{27.6}$$

W2. *Спектральна умова*

Для кожної функції w_n існує узагальнена функція помірного росту (див., наприклад, [22]) $W_{n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, що залежить від різницевих координат

$$\xi_j = x_{j+1} - x_j, \quad j = 1,2,\dots,n-1, \tag{27.7}$$

така, що

$$w_n(x_1,\dots,x_n) = W_{n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}), \tag{27.8}$$

причому фур'є-перетворення цих функцій пов'язані співвідношенням (див. задачу 27.2)

$$\widetilde{w}_n(p_1,\dots,p_n) =$$

$$= (2\pi)^4\delta(p_1+\dots+p_n)\widetilde{W}_{n-1}(p_1, p_1+p_2,\cdots, p_1+\dots+p_{n-1}), \tag{27.9}$$

а функції $\widetilde{W}_{n-1}$ задовольняють умову

$$\widetilde{W}_{n-1}(q_1,\dots,q_{n-1}) = 0,$$

якщо хоча б одне q_i не належить спектру оператора енергії-імпульсу.

W3. *Умова ермітовості*

$$w_n(x_1,\dots,x_n) = \overline{w_n(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)}. \tag{27.10}$$

W4. *Умова локальної комутативності*

$$w_n(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n) =$$

$$= w_n(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},x_k,x_{k+2},\dots,x_n), \tag{27.11}$$

якщо $(x_k - x_{k+1})^2 < 0$.

W5. *Умова додатної визначеності*

Для будь-якої скінченної послідовності $\widehat{f} = \{f_j\}_{j=1}^N$ основних функцій $f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{M}^{4j})$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}\widehat{w}(\widehat{f};\widehat{f}) &:= \sum_{j,k=0}^{N} w_{j+k}(\overline{f}_j \otimes f_k) = \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int\cdots\int \overline{f_j(x_1,\ldots,x_j)} w_{j+k}(x_j,x_{j-1},\ldots,x_1,y_1,\ldots,y_k) \times \\ &\times \quad f_k(y_1,\ldots,y_k)dx_1\cdots dx_j dy_1\cdots dy_k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{27.12}$$

W6. *Властивість розпадання на пучки.*

Якщо $a \in \mathbb{M}^4$ є просторовоподібний вектор, тобто $a^2 < 0$, то

$$\begin{aligned} w - \lim_{\lambda\to\infty} w_n(x_1,\ldots,x_j,x_{j+1}+\lambda a,\ldots,x_n+\lambda a) = \\ = w_j(x_1,\ldots,x_j)w_{n-j}(x_{j+1},\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{27.13}$$

Співвідношення (27.6)–(27.13) треба розуміти як операції з узагальненими функціями у просторі $\mathscr{S}'(\mathbb{M}^{4n})$.

Тут наведені лише властивості функцій Вайтмана для дійсних скалярних полів. Загальну ситуацію розглянуто в монографії [88, § 3]. Там можна знайти і доведення властивостей **W1**–**W6**. (для скалярного поля доведення див. у задачах 27.1–27.4).

27.3. Теорема реконструкції: відновлення квантової теорії поля за функціями Вайтмана

Властивості **W1**–**W6** є наслідком аксіом **A1**–**A2**. У даному пункті покажемо, що справедливе і обернене твердження: існування послідовності узагальнених функцій помірного росту, що задовільняють властивості **W1**–**W6** гарантують існування простору станів і локального гайзенбергового поля, що задовольняють аксіоми **A1**–**A2**. Це є наслідком так званої *теореми реконструкції*.

Теорема 27.1. [88, теорема 3–7].

Нехай $\{w_n\}_{n=1}^\infty$—послідовність узагальнених функцій помірного росту (тобто функціоналів над послідовністю просторів основних функцій $\{\mathscr{S}(\mathbb{M}^{4n})\}_{n=1}^\infty$), які задовольняють умови **W1**–**W6**. *Тоді існує сепарабельний гільбертів простір $\mathscr{H}$, неперервне унітарне представлення $U(a,\Lambda)$ власної ортохронної групи Пуанкаре в $\mathscr{H}$, єдиний вакуумний вектор Φ_0 (або єдиний пучок $\Psi_0 = e^{i\varphi}\Phi_0$), інваріантний відносно $U(a,\Lambda)$, і самоспряжений оператор $\varphi(f)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{M}^4)$—такі, що*

$$w_n(x_1,\ldots,x_n) = (\Phi_0, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\Phi_n).$$

Повне доведення цієї теореми можна знайти в монографії [88, § 3 – 4]. Звернемо увагу лише на окремі положення.

Для побудови простору станів $\mathscr{H}$ спочатку виходять із лінійного простору E – нескінченних послідовностей комплексних функцій:

$$\widehat{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots),$$

де $f_0 \in \mathbb{C}$, а $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{M}^{4k})$. Далі в E будують скалярний добуток. Для будь-яких $\widehat{f}, \widehat{g} \in E$

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) = \widehat{w}(\widehat{f}; \widehat{g}) = \sum_{j,k=0}^{\infty} w_{j+k}(\overline{f}_j \otimes g_k),$$

де $\widehat{w}(\widehat{f}; \widehat{g})$ задається формулою (27.12) з g_k замість f_k і $N = \infty$. Умова **W5** забезпечує невід'ємність норми $\|\widehat{f}\|^2 = (\widehat{f}, \widehat{f})$.

До простору $\mathscr{H}$ треба включити такі послідовності $\widehat{f}$, для яких

$$\|\widehat{f}\| < \infty$$

і поповнити E за цією нормою. Поповнення лінійного простору E приводить до повного сепарабельного простору $\mathscr{H}$.

Лінійне, унітарне перетворення $U(a, \Lambda)$ задається формулою

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\widehat{f} &= \widehat{f}_{\Lambda,a} := (f_0, f_{1;\Lambda,a}, \ldots, f_{k;\Lambda,a}, \ldots), \\ f_{k;\Lambda,a} &= f_k(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_k - a)). \end{aligned} \tag{27.14}$$

Вакуумний вектор можна визначити послідовністю

$$\Phi_0 = (1, 0, \ldots). \tag{27.15}$$

Формули (27.14), (27.15) забезпечують умову інваріантності (27.1).

Зауваження 27.1. *На перший погляд може скластися враження, що вакуумний вектор* (27.15) *збігається з вакуумним вектором* Ω_0 *для вільного скалярного поля (див. ф-лу* (19.30)*). Але вектор* Ω_0 *є вектором простору Фока* $\mathscr{F}$*, а вектор* $\Phi_0 \in \mathscr{H}$*. Якщо побудувати унітарний оператор, що встановлює унітарну еквівалентність просторів* $\mathscr{H}$ *і* $\mathscr{F}$*, то унітарний образ вектора* Φ_0 *у просторі Фока мав би зовсім інший вигляд і був би вектором з нескінченним числом нерівних нулю компонент.*

Для кожної основної функції $h \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$ визначимо лінійний оператор

$$\begin{aligned} (\varphi(h)\widehat{f})_0 &= 0, \\ (\varphi(h)\widehat{f})_k &= h \otimes \widehat{f}_{k-1}, \quad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{27.16}$$

Легко перевірити також (див. задачу 27.5), що множина

$$\mathscr{D}_0 := \left\{ \widehat{f} \in \mathscr{H} \,|\, \exists\, n \geqslant 0, \quad \text{таке, що} \;\; f_k \equiv 0 \;\; \text{при } k > n \right\} \tag{27.17}$$

є всюдищільною в $\mathscr{H}$ і

$$\mathscr{D}(\varphi(h)) \supset \mathscr{D}_0, \quad \varphi(h)\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_0.$$

Крім того (задача 27.6), для будь-якого дійсного $h \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$ оператор $\varphi(h)$ є симетричним в $\mathscr{H}$, тобто для будь-яких $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathscr{D}_0$ виконується рівність

$$(\varphi(h)\widehat{f}, \widehat{g}) = (\widehat{f}, \varphi(h)\widehat{g}). \tag{27.18}$$

Легко також перевірити (задача 27.7) трансформаційні властивості поля $\varphi(h)$:

$$U(a,\Lambda)\varphi(h)U(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(h_{\Lambda,a}). \tag{27.19}$$

Єдиність вакуумного стану Φ_0 є наслідком властивості **W6** (див. доведення в [88, § 3 – 4]. І, нарешті, для перевірки спектральної аксіоми **A1**, 3 пропонуємо звернутись до монографії [39, гл. III, § 4].

§ 28. Про інші аксіоматичні підходи

28.1. Теорія розсіяння Хаага–Рюеля (ТРХР)

При квантуванні вільних полів поняття частинки, що пов'язане з цим полем, виникало цілком природно, і квантову теорію вільного поля цілком заслужено можна вважати теорією невзаємодіючих елементарних частинок. Цього, на жаль, не можна поки що сказати про гейзенбергове взаємодіюче поле. Виникає таке ж питання і в рамках аксіоматичного підходу. На рівні інтуїції зрозуміло, що при $x^0 \to \pm\infty$ гейзенбергове поле $\varphi(x)$ повинно діяти на вектори станів як вільне поле (це зовсім не означає, що це асимптотичне поле збігається з оператором вільного поля, тобто поля у відсутності взаємодії). Скажімо, діючи на вакуум, потрібно отримати одночастинковий стан, що відповідає заданим квантовим числам (спіну, заряду, маси тощо).

Відповідь на ці питання в межах аксіоматичної теорії Вайтмана частково дає ТРХР. Для детального ознайомлення з цією теорією радимо звернутись, наприклад, до монографій [39, Гл. VI], [11, гл. 4, § 1]. У цьому пункті наведемо лише основні теореми і деякі висновки, що дають можливість зрозуміти загальну картину побудови асимптотичних полів і станів, які можна пов'язати з реальними взаємодіючими частинками.

Аксіома **A2** визначає існування операторно значного функціонала φ над простором основних функцій $\mathscr{S}(\mathbb{M})$, тобто для кожного $f \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$ лінійного оператора $\varphi(f)$ із всюдищільною областю визначення $\mathscr{D}(\varphi) \subseteq \mathscr{H}$. Але для побудови асимптотичних за часом (при $x^0 \to \pm\infty$) операторів поля треба визначити оператор

$$\varphi(x^0, \mathbf{g}) = \int \varphi(x)\mathbf{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \mathbf{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \tag{28.1}$$

у просторі $\mathscr{H}$, що не є наслідком аксіоми **A2**,1. Тому для побудови асимптотичного поля спершу будують деяке допоміжне поле A таким чином, що його перетворення Фур'є $\widetilde{A}$ пов'язане з фур'є-перетворенням $\widetilde{\varphi}$ поля φ співвідношенням

$$\widetilde{A}(p) = h(p^2)\widetilde{\varphi}(p), \tag{28.2}$$

де $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ і задовольняє такі умови:

$$h(m^2) = 1, \quad h(p^2) = 0 \ \text{ при } \ |p^2 - m^2| > m^2. \tag{28.3}$$

Так побудоване поле є гладеньким за змінною x^0, тобто, якщо його "згладити" за просторовою змінною, тобто подати у вигляді

$$A(x^0, \mathbf{g}) = \int A(x)\mathbf{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \mathbf{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3), \tag{28.4}$$

то $A(x^0, \mathbf{g})$ буде лінійним оператором у просторі $\mathscr{H}$ із областю визначення $\mathscr{D}(\varphi)$. Це випливає із елементарних розрахунків (задача 28.1). Дійсно, нове поле $A(x^0, \mathbf{g})$ легко виразити через поле φ:

$$A(x^0, \mathbf{g}) = \int f(y^0 - x^0, \mathbf{y})\varphi(y)dy, \tag{28.5}$$

де

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{p})h(p^2)e^{-ip\cdot y}dp. \tag{28.6}$$

Із побудови функції h і того факту, що $\widetilde{\mathbf{g}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, виходить, що $\widetilde{\mathbf{g}}h \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$. Отже, і функція $f(y^0 - x^0, \mathbf{y}) \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$ при кожному фіксованому x^0. Тоді з аксіоми **A2**,1 випливає, що $A(x^0, \mathbf{g})$ є добре визначеним оператором у $\mathscr{H}$, оскільки збігається з $\varphi(f)$ при спеціальному виборі f, що визначається формулою (28.6).

Нагадаємо, що таку властивість (гладкість за x^0) мають також і вільні поля.

Із формули (28.5) легко пересвідчитись, що поле $A(x^0, \mathbf{g})$ є нелокальним за змінною x^0. Воно задовольняє усі аксіоми, що й поле φ, крім умови локальності.

Введемо тепер поняття *гладенького* розв'язку рівняння Клейна–Гордона–Фока. Це такий розв'язок рівняння (4.6), який задовольняє умови:

$$f(0, \mathbf{x}) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \quad \text{і} \quad f'_{x^0}(0, \mathbf{x}) \equiv \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^0}\right|_{x^0=0} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3). \tag{28.7}$$

За допомогою побудованого вище поля A побудуємо оператор

$$A_f(x^0) = i\int f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} A(x)d\mathbf{x}. \tag{28.8}$$

Якщо f – гладенький розв'язок рівняння Клейна–Гордона, то $A_f(x^0)$ – оператор, визначений на всюдищільній області $\mathscr{D}(\varphi)$ (задача 28.1).

Сформулюємо тепер основний результат теорії Хаага–Рюеля.

Теорема 28.1. *Нехай*

$$\Phi(x^0) = \Phi_n(x^0; (f)_n) := A_{f_1}(x^0) A_{f_2}(x^0) \cdots A_{f_n}(x^0) \Phi_0,$$

де $f_1, \ldots, f_n$ *– гладенькі розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока. Тоді існують граничні вектори* $\Phi_n^{out} := \Phi_n^{out}(f_1, \ldots, f_n)$ *і* $\Phi_n^{in} := \Phi_n^{in}(f_1, \ldots, f_n)$ *такі, що при* $x^0 \to \pm\infty$ *відносно сильної збіжності у просторі* $\mathscr{H}$

$$\lim_{x^0 \to -\infty} \|\Phi_n(x^0) - \Phi_n^{in}\| = 0, \quad \lim_{x^0 \to +\infty} \|\Phi_n(x^0) - \Phi_n^{out}\| = 0.$$

Ці границі не залежать (у рамках власної ортохронної групи Лоренца) від системи координат, в якій визначені оператори (28.1) .

Позначимо через $\mathscr{H}_{in}$ і $\mathscr{H}_{out}$ гільбертові простори, що натягуються на системи векторів $\{\Phi_n^{out}\}_{n=0}^{\infty}$ і $\{\Phi_n^{out}\}_{n=0}^{\infty}$ (тобто $\mathscr{H}_{in}$ і $\mathscr{H}_{out}$ є замиканням (відносно збіжності за нормою) лінійних комбінацій векторів Φ_n^{in} і Φ_n^{out}). Визначимо на векторах Φ_n^{in} і Φ_n^{out} лінійні операції

$$\begin{aligned} &\varphi^{in}(f)\Phi_n^{in}(f_1, \ldots, f_n) = \Phi_{n+1}^{in}(f, f_1, \ldots, f_n), \\ &\varphi^{out}(f)\Phi_n^{out}(f_1, \ldots, f_n) = \Phi_{n+1}^{out}(f, f_1, \ldots, f_n). \end{aligned} \tag{28.9}$$

Теорема 28.2. *Оператори, що визначаються як лінійні розширення операцій (28.9), задають два вільні дійсні скалярні поля* $\varphi^{in}(x)$ *і* $\varphi^{out}(x)$ *як операторно значні функціонали вигляду*

$$\varphi^{in}(f) = i \int \overline{f(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \varphi^{in}(x) d\mathbf{x},$$

$$\varphi^{out}(f) = i \int \overline{f(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \varphi^{out}(x) d\mathbf{x}.$$

Поля φ^{in} *і* φ^{out} *задовольняють співвідношення*

$$U(a, \Lambda)\varphi^{in}(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi^{in}(\Lambda x + a),$$

$$U(a, \Lambda)\varphi^{out}(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi^{out}(\Lambda x + a),$$

і (див. (18.28))

$$\widehat{\Theta}\varphi^{in}(x)\widehat{\Theta} = \varphi^{out}(-x), \quad \widehat{\Theta} = \widehat{T}\widehat{C}\widehat{P}. \tag{28.10}$$

Щоб довести теорему 28.1 і теорему 28.2, треба доповнити аксіоми Вайтмана **A1**–**A2** *аксіомою повноти*

$$\mathscr{H}_{in} = \mathscr{H}, \tag{28.11}$$

а вже з (28.11) і (28.10) випливає рівність (27.3), оскільки внаслідок (28.10) маємо

$$\widehat{\Theta}\mathscr{H}_{in} = \mathscr{H}_{out}, \quad \widehat{\Theta}\mathscr{H} = \mathscr{H}.$$

Крім того, треба зробити два додаткові припущення, що стосуються спектра оператора енергії-імпульсу і одночастинкового гільбертового простору $\mathscr{H}_1$:

1. *Припущення перше.*

   Крім ізольованої точки $p = (0, 0, 0, 0)$, що відповідає вакуумному вектору, спектр оператора енергії-імпульсу містить у собі ізольовану точку $\{p|p_0 > 0,\ p^2 = m^2\}$, що відповідає одночастинковому стану частинки з масою (це у випадку одного поля) і неперервного спектра, що знаходиться у конусі $\overline{V}^+_{2m}$.

2. *Припущення друге.*

   Звуження представлення $U(a, \Lambda))$ на $\mathscr{H}_1$ є незвідне і відповідає спіну 0 та масі m.

Аксіоми **A1**–**A2** разом з аксіомою повноти (28.11), а також цими двома припущеннями дають можливість довести теореми 28.1, 28.2 і тим самим забезпечити інтерпретацію аксіоматичної теорії Вайтмана в термінах частинок. Крім того, рівність (27.3) забезпечує існування унітарного оператора S, який однозначно визначається умовами

$$\varphi^{out}(x) = S^{-1}\varphi^{in}(x)S \tag{28.12}$$

і

$$S\Phi_0 = \Phi_0, \tag{28.13}$$

де S-оператор і є оператором розсіяння, який був (хоч і на формальному рівні) детально вивчений у попередніх розділах. Умова лоренц-коваріантності полів φ^{in} і φ^{out}, разом із (28.12), приводить до інваріантності S-оператора відносно перетворень $U(a, \Lambda)$:

$$U(a, \Lambda)SU^{-1}(a, \Lambda) = S.$$

Зауваження 28.1. *Побудувати математично строгу ТРХР в якомусь одному просторі станів, мабуть, взагалі неможливо. Але її можна розглядати з точки зору абстрактної теорії розсіяння у парі гільбертових просторів. Такий підхід був запропонований ще у праці Т. Като* [157] *і в подальшому розвивався в роботах багатьох математиків (див., наприклад,* [42] *і посилання, які там містяться).*

Зауважимо також, що у попередніх працях розвивався підхід, що встановлює зв'язок між ТРХР і теорією збурень,який був запропонований Л.Д. Фаддєєвим [93] *і застосовувався в деяких конкретних моделях (див., наприклад,* [1]*) (а також монографію* [101]*).*

28.2. Аксіоматика Леманна–Симанзика–Циммермана (ЛСЦ)

ТРХР, яка коротко була описана у попередньому пункті, фактично встановлює факт існування оператора розсіяння і дає змогу інтерпретувати аксіоматичну теорію Вайтмана у термінах частинок. Але для повної завершеності теорії необхідно встановити зв'язок зі спостережуваними величинами. У такому відношенні аксіоматична теорія ЛСЦ (див. [162], [163]) більше відповідає цим вимогам. Вона виникла майже одночасно з формулюванням Вайтмана [199].

Аналізуючи теорію збурень, Леманн, Симанзик і Циммерман знайшли редукційну формулу, яка пов'язує матричні елементи S-оператора з вакуумними середніми від T-добутку гейзенбергових полів (функцій Гріна):

$$\begin{aligned}(\Phi_n^{out},\Phi_m^{in}) &= (\Phi_n^{out}(f_1,\dots,f_n),\Phi_m^{in}(g_1,\dots,g_m)) = \\ &= (-i)^{m+n}\int G^c_{m+n}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\overline{f_1(x_1)}\cdots \\ &\quad \cdots\overline{f_n(x_n)}g(y_1)\dots g(y_m)dx_1\dots dy_m, \end{aligned} \tag{28.14}$$

де Φ_{in}^{in} і Φ_n^{out} інтуїтивно визначаються так само, як і у теоремі 28.1, а причинна функція Гріна G^c_{m+n} має такий вигляд:

$$G^c_N(x_1,\dots,x_N)=\Big[\prod_{j=1}^N(\Box_{x_j}-m^2)\Big]G_N(x_1,\dots,x_N),$$

$$G_N(x_1,\dots,x_N)=(\Phi_0,T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N))\Phi_0).$$

Редукційна формула (28.14) є основною формулою для практичних обчислень фізичних процесів. Для більшої наочності запишемо її в імпульсному просторі, беручи формально у формулі (28.14) замість функцій $f_i(x_i)$ і $g_j(y_j)$ хвильові пакети, що відповідають вільним out-частинкам із імпульсами $\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n$ і вільним in-частинкам із імпульсами $\mathbf{p}_{n+1},\dots,\mathbf{p}_N$, причому ці пакети не перекриваються :

$$\mathbf{p}_i(m^2+\mathbf{p}_i^2)^{-1/2}\neq\mathbf{p}_j(m^2+\mathbf{p}_j^2)^{-1/2}\quad\text{при } i\neq j.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(\Phi_n^{out}(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n), &\quad \Phi^{in}_{N-n}(\mathbf{p}_{n+1},\dots,\mathbf{p}_N)) = \\ &= (-i\sqrt{2\pi})^N\prod_{k=1}^N(p_k^2-m^2)\times \\ &\times\widetilde{G}_N(p_1,\dots,p_n,-p_{n+1},\dots,-p_N)\Big|_{p_i^0=(\mathbf{p}_i^2+m^2)^{1/2},i=1,\dots,N}\end{aligned} \tag{28.15}$$

На перший погляд, кожний співмножник у добутку при $p_k^0=(\mathbf{p}_k^2+m^2)^{1/2}$ дорівнює нулю, але перетворення Фур'є функцій Гріна $\widetilde{G}_N$ мають структуру

такого добутку:

$$\widetilde{G}_N(p_1,\dots,p_N)=\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{(2\pi)^4 i(m^2-p_k^2-i\varepsilon)}\right)\overline{G}(p_1,\dots,p_N).$$

У цьому можна переконатися, якщо формально розглянути ряд теорії збурень для функцій Гріна.

Отже, відповідні множники, що перетворюються в нуль, на масовій поверхні ($p^2=m^2$) скорочуються.

Формула (28.15) вказує на те, що амплітуда розсіяння (ліва частина формули (28.15)) допускає продовження за масову поверхню за допомогою запізнювальних функцій Гріна, в термінах яких можна виразити спектральні умови, локальність і асимптотичну повноту. Функції Гріна (для впорядкованих часових змінних вони співпадають з функціями Вайтмана) допускають також аналітичне продовження у комплексну область своїх змінних. Точніше, вони є граничними значеннями деяких аналітичних функцій, властивості яких можна вивчати, спираючись на загальні теореми теорії функцій багатьох комплексних змінних. Щоб строго обґрунтувати формулу (28.15), аксіоматика ЛСЦ вимагає таких додаткових припущень порівняно з теорією Вайтмана:

АЛСЦ1. *Асимптотична повнота*

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_{in}=\mathscr{H}_{out}.$$

АЛСЦ2. *Асимптотична умова ЛСЦ*

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\Phi,A_f(t)\Psi)=(\Phi,\varphi^{\overset{out}{in}}(f)\Psi),$$

де $A_f(t)$ визначено за допомогою (28.2) – (28.8), а $\Phi,\Psi\in\mathscr{D}(\varphi)$.

АЛСЦ3. *Існування узагальнених запізнювальних функцій*

Ці функції виражаються в термінах багатократних комутаторів:

$$r_i(x_0,\dots,x_n)=\sum_{\pi}{}'\prod_{j=0}^{n-1}\theta(x^0_{\pi(j)}-x^0_{\pi(j+1)})\times \\ \times\left(\Phi_0,[\dots[\varphi(x_{\pi(0)}),\varphi(x_{\pi(1)})],\varphi(x_{\pi(2)})]\dots,\varphi(x_{\pi(n)})\Phi_0\right),$$

де сума за π розповсюджується відносно всіх перестановок індексів $\{0,1,2,\dots,n\}$, для яких $\pi(0)=i$.

Функції $r_i(x_0,\dots,x_n)$ є узагальненими функціями повільного росту.

Крім того, в рамках аксіом ЛСЦ встановлюється зв'язок між асимптотичними полями і гейзенберговим полем $\varphi(x)$. Якщо визначити за полем φ струм

$$j(x)=(\Box-m^2)\varphi(x),$$

тоді справедливі так звані рівняння Янга–Фельдмана:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi^{in}(x) + \int D^{ret}(x-y;m)j(y)dy = \\ &= \varphi^{out}(x) + \int D^{adv}(x-y;m)j(y)dy. \end{aligned} \tag{28.16}$$

Доведення формул (28.14) та (28.16) можна знайти, наприклад, у [39], [11], [10].

28.3. Аксіоматичний підхід Боголюбова–Медвєдєва–Поліванова (БМП)

Аксіоматичний підхід БМП, мабуть, найближчий до ідеї Гейзенберга. Основним об'єктом є S-матриця, а локальні величини (поля, струми тощо) визначаються як варіаційні похідні від S-оператора, який спершу розглядається як функціонал від класичних добавок до асимптотичних полів. Отже, в основі підходу лежить оператор-функціонал вигляду

$$\begin{aligned} S(\eta) &= \sum_{\mathbf{N}} \sum_{(\boldsymbol{\alpha})_{\mathbf{N}}} \int\limits_{\mathbb{M}^{4|\mathbf{N}|}} F_{\mathbf{N};(\boldsymbol{\alpha})_{\mathbf{N}}}(\mathbf{x})_{\mathbf{N}} \times \\ &\times \ :\left(\chi^{(1)}_{\alpha^{(1)}_1} + \eta^{(1)}_{\alpha^{(1)}_1}(x^{(1)}_1)\right)\cdots\left(\chi^{(k)}_{\alpha^{(k)}_{N_k}}(x^{(k)}_{N_k}) + \eta^{(k)}_{\alpha^{(k)}_{N_k}}(x^{(k)}_{N_k})\right):, \end{aligned} \tag{28.17}$$

де $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_k)$, $|\mathbf{N}| = N_1 + \cdots + N_k$,

$$(\mathbf{x})_{\mathbf{N}} = \left(x^{(1)}_1, \ldots, x^{(1)}_{N_1}; x^{(2)}_1, \ldots, x^{(2)}_{N_2}; \ldots; x^{(k)}_1, \ldots, x^{(k)}_{N_k}\right),$$

χ_α є квантовими асимптотичними полями, що розглядаються у заданій теорії (всього k-видів таких полів), а η_α – класичні добавки (функціональні аргументи S-оператора). Зауважимо: якщо поля χ_α є бозе-полями, то η_α є звичайними функціями, а якщо χ_α – фермі-поля, то η_α – грасманові змінні (див. п.26.5), тобто вони антикомутують між собою і з полями χ_α. Зрозуміло, що S-оператор визначається формулою

$$S = S(\eta)|_{\eta\equiv 0}.$$

Операторно значний функціонал $S(\eta)$ називають S-матрицею, розширеною за масову поверхню. Про різні варіанти таких розширень можна прочитати в [10, гл. 14].

Визначимо також варіаційні похідні від S за квантовими полями χ_α формальною формулою

$$\frac{\delta^N S}{\delta\chi^{(i_1)}_{\alpha^{(i_1)}_1}(x^{(i_1)}_1)\cdots\delta\chi^{(i_N)}_{\alpha^{(i_N)}_N}(x^{(i_N)}_N)} := \left.\frac{\delta^N S(\eta)}{\delta\eta^{(i_1)}_{\alpha^{(i_1)}_1}(x^{(i_1)}_1)\cdots\delta\eta^{(i_N)}_{\alpha^{(i_N)}_N}(x^{(i_N)}_N)}\right|_{\eta\equiv 0}. \tag{28.18}$$

Зауважимо, що для фермі-полів ψ_α похідні є антикомутативні, тобто

$$\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_{\alpha_1}\delta\psi_{\alpha_2}} = -\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_{\alpha_2}\delta\psi_{\alpha_1}}.$$

Враховуючи (28.18), визначимо так звані *радіаційні оператори*, які є основними локальними об'єктами у підході БМП:

$$H_N(x_1,\ldots,x_N) = H^{(i)_N}_{(\alpha)_N}(x)_N := \frac{\delta^N S}{\delta\chi^{i_1}_{\alpha_1}(x_1)\cdots\delta\chi^{i_N}_{\alpha_N}(x_N)}S^*, \tag{28.19}$$

де $S^* = S^{-1}$, χ^i_α— це ін-поля.

На прикладі взаємодії (21.3) покажемо, як визначити за допомогою операторів (28.19) операторно значну узагальнену функцію, що відповідає скалярному полю. Для цього введемо операторно значну узагальнену функцію, що відповідає струму

$$j(x) = i\frac{\delta S}{\delta\varphi^{out}(x)}S^* = -iS^*\frac{\delta S}{\delta\varphi^{in}(x)}. \tag{28.20}$$

Зауважимо, що визначення (28.20) не залежить від вигляду взаємодії (див., наприклад, [10, гл. 14]). Якщо взаємодія містить у собі поля декількох видів частинок, то отримаємо вирази для операторів струму для кожного з цих видів. Тепер для визначення оператора поля треба скористатись одним із рівнянь Янга–Фельдмана (28.16)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi^{out}(x) + i\int dy D^{adv}(x-y;m)\frac{\delta S}{\delta\varphi^{out}(y)}S^* = \\ &= \varphi^{in}(x) - i\int dy D^{ret}(x-y;m)S^*\frac{\delta S}{\delta\varphi^{in}(y)}.\end{aligned} \tag{28.21}$$

Мовою формальних операцій вираз для гейзенбергового поля можна подати у вигляді (див. [10, гл. 14.2]):

$$\varphi(x) = S^*T(S\varphi^{in}(x)) = T(\varphi^{out}(x)S)S^*. \tag{28.22}$$

Обговоримо коротко основні вимоги (аксіоми), які повинні задовольняти оператор S і радіаційні оператори (28.19) в рамках підходу БМП.

S1. Існування простору станів

Простором асимптотичних станів є оснащений гільбертів простір $\mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_-$, у якому реалізуються представлення власної неоднорідної групи Лоренца та груп внутрішніх симетрій.

Трійку $(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}, \mathscr{H}_-)$ слід розглядати як розширення Гільбертового простору $\mathscr{H}$ узагальненими розв'язками (вигляду плоскої хвилі) з $\mathscr{H}_-$, які є функціоналами над гладкими функціями $\mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H}$.

Необхідність такого розширення обумовлена умовою асимптотичної повноти, яку сформулюємо разом із постулатом спектральності.

S2. Спектральність і асимптотична повнота

Існує єдиний інваріантний вакуумний стан Φ_0 *і сукупність узагальнених фізичних станів* $\Phi_n(\mathbf{k}_n) \in \mathscr{H}_-$*, що відповідають додатнім масам і енергіям, та які утворюють повну систему векторів в* $\mathscr{H}_-$*.*

У підході БМП цей постулат використовують при розкладі матричного елемента добутку двох операторів A і B за повною системою проміжних станів:

$$\begin{aligned}(\Phi, AB\Psi) &= (\Phi, A\Phi_0)(\Phi_0, B\Psi) + \\ &+ \sum_n \int d\mathbf{k}_n (\Phi, A\Phi_n(\mathbf{k}_n))(\Phi_n(\mathbf{k}_n), B\Psi),\end{aligned}$$

де $\mathbf{k}_n$ – сумарний імпульс проміжного n-го стану, а n — сукупність усіх інших квантових чисел.

S3. Стабільність вакууму та одночастинкового стану

$$S\Phi_0 = \Phi_0, \quad S\Phi_1 = \Phi_1. \tag{28.23}$$

S4. Унітарність S-матриці

$$SS^* = S^*S = 1. \tag{28.24}$$

Зауваження 28.1. *Розклад* (28.17) *операторно значного функціонала* $S(\eta)$ *можна розглядати як процедуру розширення* S*-матриці за масову поверхню. Це означає, що у розкладі* (28.17) *асимптотичне поле разом зі своєю класичною добавкою, тобто* $\chi_\alpha(x) + \eta_\alpha(x)$*, можна розглядати як окреме поле* $\widetilde{\chi}_\alpha(x)$*, що вже не задовольняє вільне рівняння Клейна- Гордона–Фока. Та й сама процедура взяття варіаційної похідної від* $S(\eta)$ *вимагає екстраполяції* S*-оператора за масову поверхню. Детальніше про це можна прочитати в праці* [10, гл. 14]*. Однак процедура розширення* S*-оператора за масову поверхню не є однозначною. Таку неоднозначність можна усунути, накладаючи на функціонал* $S(\eta)$ *такі самі вимоги, як і на саму* S*-матрицю.*

Будемо вважати, що умови (28.23), (28.24) виконуються також і для оператора $S(\eta)$. Крім того, для практичних обчислень у підході БМП важливими є формули, що виражають комутатори операторів народження і знищення вільних асимптотичних полів із S-оператором. Такі комутатори легко обчислити, використовуючи розклад (28.17) і формули вигляду (22.74). Можна порахувати (див., наприклад, [13, §45.3]), що вони виражаються через варіаційні похідні від S–оператора за асимптотичними полями. У зв'язку з цим важливою вимогою є збереження вигляду таких комутаційних співвідношень і для розширеної S-матриці. І нарешті, останні дві вимоги пов'язані з радіаційними операторами, введеними формулою (28.19).

S5. Клас узагальнених функцій

Середні за вакуумом від радіаційних операторів (28.19) є узагальненими функціями помірного росту, тобто належать до простору $\mathscr{S}'(\mathbb{M}^{4N})$*.*

Треба зауважити, що ця математична аксіома насправді має досить глибокий фізичний зміст. Вона фактично означає, що припускається поліноміальна обмеженість матричних елементів S-оператора за імпульсними змінними. Така вимога не є узгодженою з теорією збурень для S-матриці, оскільки, скажімо, для неперенормованих взаємодій (див. розділ V) після застосування R-операції фейнманівської амплітуди будуть містити у собі поліноми за імпульсними змінними будь-якого високого порядку. Отже, ця аксіома обмежує клас взаємодій(див. [11, гл. 4, п.3.5]).

S6. Мікропричинність S-оператора

Якщо $x \lesssim y$ (тобто $x^0 < y^0$ і $(x-y)^2 < 0$), то справедлива формула

$$\frac{\delta}{\delta\chi_\alpha(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\chi_\beta(y)}S^*\right) = 0. \tag{28.25}$$

Формулу (28.25) треба розуміти як визначення (28.18). Більш строго можна записати:

$$\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\left(\frac{\delta S(\eta)}{\delta\eta_\beta(y)}S^*(\eta)\right) = 0 \tag{28.26}$$

при

$$x \lesssim y.$$

Аксіоми **S1**–**S6** дають можливість застосувати методи, які не спираються на теорію збурень для S-матриці, й отримати важливі практичні формули (так звані *дисперсійні співвідношення*) для фізичних амплітуд розсіяння. Особливе значення такі формули мають у теорії сильних взаємодій, де теорія збурень недопустима навіть на формальному рівні. Детально про вивід дисперсійних співвідношень можна прочитати у монографії [13, гл. IX].

§ 29. Евклідова теорія поля

Виникнення евклідової теорії поля (ЕТП) можна умовно розбити на два періоди. Перший період пов'язаний із виникненням евклідового підходу для усунення технічних проблем, що виникають при вивченні внесків фейнманівських діаграм, а другий стосується виникнення поняття *евклідового поля* як математичного об'єкта, який може бути пов'язаний із реальними фізичними полями.

Вперше в 1949 році Дайсон [30] запропонував формальну процедуру аналітичного продовження фейнманівських амплітуд в область уявних енергій $p^0 = -ip^4$, $p^4 \in \mathbb{R}^1$ для того, щоб уникнути полюсів у виразах для фейнманівських пропагаторів:

$$\frac{Z(p^0,\bar{p})}{(2\pi)^4 i(m^2-(p^0)^2+\mathbf{p}^2-i\varepsilon)} \to \frac{Z(ip^4,\bar{p})}{(2\pi)^4 i(m^2+(p^4)^2+\mathbf{p}^2)}. \tag{29.1}$$

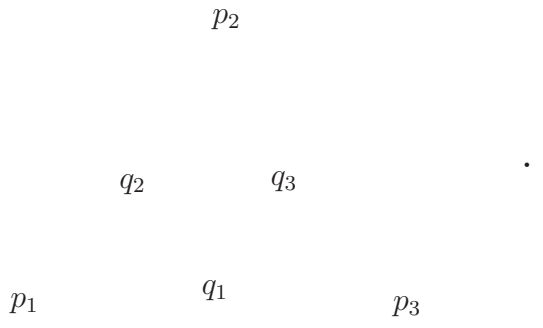
Потім Вік [20] розвинув цю ідею, запропонувавши поворот контура на 90° у комплексній площині змінної p^0 (див. п.29.1). Незалежно близькі ідеї розвивались у працях Швінгера [103] і Наканіші [170].

Новий поштовх для розвитку цих ідей дали Швінгер [184] і Накано [171]. Вони запропонували сформулювати теорію поля в термінах полів в евклідовій області, які будуються аналогічно до звичайних полів як операторно значних функціоналів. Пізніше Симанзик [189] зрозумів, що цим формальним об'єктам можна надати значення узагальнених випадкових процесів. Він також заклав основні принципи майбутньої евклідової аксіоматики.

На початку 70-х років Нельсон [172,173] розвинув ідеї Симанзика, вказавши шлях повернення назад в область Мінковського, тобто спосіб реконструкції квантового поля за евклідовим полем, яке задовольняє деякі властивості. У середині 70-х років Остервальдер і Шрадер [59,60] сформулювали систему аксіом для функцій Гріна в евклідовій області (функцій Швінгера) і довели можливість їх аналітичного продовження до функцій Вайтмана. Тим самим на рівні аксіоматичної теорії була доведена еквівалентність евклідового підходу і підходу Вайтмана. У той самий час у працях Д.Я. Петрини, С.С. Іванова і автора розвивався підхід до евклідової теорії матриці розсіяння (див. детальніше [68]). Тут коротко зупинимось на основних моментах ЕТП.

29.1. Аналітичне продовження амплітуд Фейнмана

Розглянемо спершу приклад діаграми Фейнмана 3-го порядку для взаємодії $\lambda\varphi^3(x)$:



(29.2)

Користуючись правилами Фейнмана для матричних елементів S-матриці (22.93)–(22.95), запишемо внесок цієї діаграми у вираз для коефіцієнтної функції(тобто, не враховуючи внесків, що відповідають зовнішнім лініям) в імпульсному просторі, виконавши інтегрування змінними q_2, q_3 ($q_1 = q$)

$$\widetilde{I}_3^{(3)}(p_1,p_2,p_3) = -\lambda^3\delta(p_1+p_3-p_2)\times \\ \times\int\frac{dq^0 d\mathbf{q}}{(m^2-q^2-i\varepsilon)[m^2-(q-p_1)^2-i\varepsilon][m^2-(q+p_3)^2-i\varepsilon]}. \quad (29.3)$$

Інтеграл (29.3) є збіжним при великих значеннях імпульсів (індекс розбіжності діаграми (29.2) $\omega(G) = -2$). Розглянемо інтеграл (29.3) як інтеграл за комплексною змінній q^0, а підінтегральний вираз – як функцію внутрішньої комплексної змінною q^0 і зовнішніх комплексних змінних p_1^0 і p_2^0, не пов'язуючи внесок

$\widetilde{I}_3^{(3)}$ з матричним елементом S-матриці і розглядаючи змінні p_i^0, $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, 3$ як незалежні. Тобто амплітуду $\widetilde{I}_3^{(3)}$ будемо розглядати поза масовими поверхнями $p_j^2 = m^2$, $j = 1, 2, 3$. Контур інтегрування у комплексній площині q^0 проходить по прямій $\mathrm{Im}\ q^0 = 0$.

Легко бачити, що підінтегральна функція як функція комплексної змінної q^0 є аналітичною функцією (голоморфною функцією) за q^0 у всій комплексній площині, за винятком полюсів, що визначаються функціями

$$\begin{aligned} q_{1,2}^0 &= \pm\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \mp i\varepsilon, \\ q_{3,4}^0 &= p_1^0 \pm \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1)^2 + m^2} \mp i\varepsilon, \\ q_{5,6}^0 &= -p_3^0 \pm \sqrt{(\mathbf{q} + \mathbf{p}_3)^2 + m^2} \mp i\varepsilon. \end{aligned} \tag{29.4}$$

Припустимо спершу, що значення змінних p_1^0 і p_3^0 є малими порівняно з відповідними радикалами у формулах (29.4). Тоді полюси будуть лежати у другому і четвертому квадрантах комплексної площини q^0 і перебувати на відстані ε від осі $\mathrm{Im}\ q^0 = 0$. Тоді перший і третій квадранти будуть областями аналітичності, і можна повернути контур інтегрування на 90° у напрямку проти годинникової стрілки (рис. 29.1):

Imk^0

90°

Rek^0

Рис. 29.1

Виконуючи в інтегралі (29.3) заміну

$$q^0 = iq^4 \tag{29.5}$$

і продовжуючи функцію $\widetilde{I}_3^{(3)}$ за змінними p_j^0 на уявні осі $p_j^0 = ip_j^4$, отримуємо

вираз

$$\widetilde{I}_3^{(3)}(p_1,p_2,p_3) = -\lambda^3\delta(p_1+p_3-p_2)\times \\ \times \int \frac{d^4q}{(q^2+m^2)[(q-p_1)^2+m^2][(q+p_3)^2+m^2]}. \qquad (29.6)$$

Тут $p_j=(p_j^1,p_j^2,p_j^3,p_j^4)\in\mathbb{R}^4$, $q^2=(q^1)^2+\cdots+(q^4)^2$, $d^4q=dq^1\cdots dq^4$.

Крім того, в (29.6) зроблено формальну заміну

$$\delta(p_1^0+p_3^0-p_2^0)\to -i\delta(p_1^4+p_3^4-p_2^4), \qquad (29.7)$$

яка еквівалентна аналітичному продовженню амплітуди (29.6) в комплексну область за змінними p_j^0 у слабкому змісті(тобто як узагальнену функцію). Тобто, перш ніж виконати таке продовження, треба проінтегрувати узагальнену функцію з деякою основною аналітичною функцією, повернути контур інтегрування і зробити заміну (29.5). У випадку, коли значення p_1^0 і p_3^0 не є малими, треба робити поворот контура у площині k^0 і аналітичне продовження $p_j^0\to ip_j^4$ одночасно, щоб уникнути перетину контура з полюсами.

Аналогічну процедуру можна виконати у кожному порядку теорії збурень. Доведення цього факту легко виконати методом математичної індукції, якщо виразити суму внесків усіх діаграм n-го порядку через внески всіх діаграм $(n-1)$-го порядку за допомогою рівнянь резольвентного типу (23.20):

$$F^{(k)}=-\lambda BF^{(k-1)},$$

де $F^{(k)}=\{F_N^{(k)}\}_{N=1}^{\infty}$ (див. доведення в [68]). Якщо діаграми є розбіжними, то спершу треба ввести проміжну регуляризацію (наприклад, за Паулі–Вілларсом).

Зауваження 29.1. *Аналогічно до описаної вище процедури можна виконати аналітичне продовження амплітуд Фейнмана у координатному просторі, якщо аргументи амплітуди $F_N^{(k)}(x_1,\dots,x_N)$ задовольняють умову*

$$(x_i-x_j)^2\neq,0\quad i\neq j,$$

тобто не лежать на поверхні світового конуса.

У цьому випадку аналітичне продовження треба виконати за часовими змінними в область чисто уявних часів

$$x_j^0\to ix_j^4,\quad x_j^4\in\mathbb{R}^1.$$

Легко переконатися, що результатом аналітичного продовження вільної 2-точкової функції Гріна $\frac{1}{i}D^c(x-y)$ в евклідову область є функція

$$G_0(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2+m^2}, \\ k\cdot(x-y)=k^1(x^1-y^1)+\cdots+k^4(x^4-y^4), \qquad (29.8) \\ d^4k=dk^1\cdots dk^4,\ \ k^2=(k^1)^2+\cdots+(k^4)^2.$$

29.2. Оператори вільних евклідових полів

29.2.1. Дійсне скалярне поле

Постулат локальної комутативності **ПК6** стверджує, що бозе-оператори скалярного поля $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$ повинні комутувати, якщо

$$(x-y)^2 < 0. \tag{29.9}$$

В евклідовій області, тобто при $x^0 = ix^4$, $y^0 = iy^4$, x^4, $y^4 \in \mathbb{R}^1$ співвідношення (29.9) виконується автоматично. Отже, з інтуїтивних міркувань аналоги операторів поля в евклідовій області повинні комутувати при всіх значеннях x, $y \in \mathbb{R}^4$. Позначимо це поле через $a^E(x) \equiv a(x)$. Отже, $a(x)$ і $a(y)$ повинні задовольняти умову

$$[a(x), a(y)]_- = 0. \tag{29.10}$$

Якщо будувати евклідів аналог вільних полів, то легко зрозуміти, що

$$\begin{aligned} &a(x) = a^+ + a^-(x), \\ &[a^-(x), a^+(y)]_- = G_0(x-y), \end{aligned} \tag{29.11}$$

де G_0 визначена формулою (29.8). Їх фур'є-перетворення мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &a^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k \frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{k^2+m^2}} a^\pm(k), \\ &[a^-(k), a^+(p)]_- = \delta(k-p), \end{aligned} \tag{29.12}$$

де $k\cdot x = k^1x^1 + \cdots + k^4x^4$, $k^2 = (k^1)^2 + \cdots + (k^4)^2$.

Оператори $a^\pm(k)$ є насправді операторно значними узагальненими функціями, тобто для кожної основної функції $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ вирази

$$a^\pm(f) = \int d^4k f(k) a^\pm(k) \tag{29.13}$$

визначають взаємно спряжені оператори в *евклідовому просторі Фока* $\mathscr{F}_B^E$ із всюдищільною областю визначення, тобто

$$(a^\pm(f))^* = a^\mp(f), \quad \mathscr{D}(a(f)) \subseteq \mathscr{F}_B^E. \tag{29.14}$$

Простір $\mathscr{F}_B^E$ будується аналогічно простору Фока (див. § 19, детальніше див. [68]), а представлення комутаційних співвідношень (29.10)–(29.12) будується у просторі $\mathscr{F}_B^E$ аналогічно до представлення операторів вільного скалярного поля (див. п.19.2). Легко підрахувати, що

$$(\Omega_0^E, a(x)a(y)\Omega_0^E) = G_0(x-y), \tag{29.15}$$

де Ω_0^E – вакуумний вектор у $\mathscr{F}_B^E$. Він має таку ж структуру, як і відповідний вакуумний вектор Ω_0 у просторі Фока (19.30).

Нижче покажемо, що оператори $a(x)$ можна побудувати, виходячи з означення вільного поля в момент часу $x^0 = 0$ ($\varphi(0, \mathbf{x})$) і вільної еволюції (21.16).

Інше визначення вільного евклідового поля дали Симанзик [189], Нельсон [172,173], який фактично розвинув ідеї Симанзика. Вони визначили вільне евклідове поле як узагальнений гауссівський процес ϕ, індексований функціями $f \in L^2(\mathbb{R}^4)$. Це означає, що на гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R}^4)$ існує гауссова міра (див., наприклад, [5]) μ_0, така, що для f, $g \in L^2(\mathbb{R}^4)$

$$\int d\mu_0(\phi)\phi(f)\phi(g) = (f, G_0 g) = \int f(x)G_0(x-y)f(y)d^4x d^4y.$$

Але така інтерпретація евклідових полів зручна лише для бозонних полів. У випадку фермі-систем більш прозорим є звичайний операторний підхід.

29.2.2. Евклідові фермі-поля

У випадку ферміонних полів структура функцій Гріна (зокрема 2-точкової функції у просторі Мінковського) визначається не тільки залежністю від квадрата імпульсу $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$, а й властивостями матриць Дірака γ^μ.

В евклідовій області метрика визначається символом Кронекера $\delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Очевидно, що з $\delta_{\mu\nu}$ повинні бути пов'язані деякі нові ермітові матриці α_μ, для яких

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{29.16}$$

Вперше систему таких матриць запропонував Швінгер [184]. У випадку 4-вимірного простору виберемо

$$\alpha_k = \gamma_0\gamma_k, \quad k = 1, 2, 3, \ \alpha_4 = i\gamma_0\gamma_5 l_3, \quad l_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \gamma_0, \tag{29.17}$$

якщо матриці γ_μ вибрати у представленні (5.10).

При вивченні ферміонних моделей у 2-вимірному просторі-часі можна вибрати матриці

$$\alpha_1 = \gamma_0\gamma_1, \quad \alpha_2 = i\gamma_1, \quad \alpha_3 = \gamma_0. \tag{29.17$'$}$$

2-точкова функція Гріна ферміонних полів має вигляд

$$\frac{1}{i}S^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{\widehat{p} + m}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}e^{-ip\cdot x}dp,$$

де $\widehat{p} = p^0\gamma^0 - p^k\gamma^k$, а всі інші величини – такі самі, як і в скалярному випадку. Визначимо евклідову функцію Гріна формулою

$$S^E(x-y) := e^{-\frac{1}{4}\pi i\alpha_4}\frac{1}{i}S^c(i(x^4 - y^4), \mathbf{x} - \mathbf{y})\gamma^0 e^{-\frac{1}{4}\pi i\alpha_4}. \tag{29.18}$$

Враховуючи властивості (29.16), остаточно маємо (задача 29.3)

$$S^E(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ip(x-y)}\frac{\alpha\cdot p+\alpha_5 m}{p^2+m^2}d^4p, \tag{29.19}$$

де

$$\alpha\cdot p=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3+\alpha_4p_4,\quad p_\mu=p^\mu.$$

Для того, щоб увести оператори евклідових фермі-полів, зручно зробити перетворення вигляду Фолді–Вотхойзена (див. [102, гл. 4, §6]):

$$e^{iS(k)}(\alpha\cdot k+m\alpha_5)e^{-iS(k)}=\alpha_5\sqrt{k^2+m^2}, \tag{29.20}$$

де

$$S(k)=-\frac{i}{2m}\alpha_5\alpha\cdot k\frac{m}{|k|}\mathrm{arctg}\,\frac{|k|}{m},$$

звідки

$$\frac{\alpha\cdot k+m\alpha_5}{k^2+m^2}=\frac{e^{-iS(k)}\alpha_5e^{iS(k)}}{\sqrt{k^2+m^2}}.$$

Визначимо тепер оператори вільного евклідового фермі-поля таким чином:

$$\begin{aligned}\psi^E_\alpha(x) &= \psi^{E,+}_\alpha(x)+\psi^{E,-}_\alpha(x)=\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\beta=1}^4\int e^{-ik\cdot x}\frac{(e^{-iS(k)}\sqrt{\alpha_5})_{\alpha\beta}}{\sqrt[4]{k^2+m^2}}(b^+_\beta(k)+b^-_\beta(k))dk,\end{aligned} \tag{29.21}$$

$$\begin{aligned}\overline{\psi}^E_\alpha(x) &= \overline{\psi}^{E,+}_\alpha(x)-\overline{\psi}^{E,-}_\alpha(x)=\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\beta=1}^4\int e^{ik\cdot x}\left(\overset{*}{b}{}^+_\beta(k)-\overset{*}{b}{}^-_\beta(k)\right)\frac{(\sqrt{\alpha_5}e^{iS(k)})_{\beta\alpha}}{\sqrt[4]{k^2+m^2}}dk.\end{aligned} \tag{29.22}$$

Введені оператори задовольняють такі антикомутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}&\left[b^\pm_\alpha(k),\overset{*}{b}{}^\mp_\beta\right]_+=\delta_{\alpha\beta}\delta(k-p),\\ &\left[\psi^{E,\pm}_\alpha(x),\overline{\psi}^{E,\mp}_\beta(y)\right]_+=S^E(x-y),\\ &\left[\psi^E_\alpha(x),\overset{*}{\psi}{}^E_\beta\right]_+=\left[\overline{\psi}^E_\alpha(x),\overset{*}{\overline{\psi}}{}^E_\beta(y)\right]_+=2\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ik(x-y)}}{\sqrt{k^2+m^2}}dk,\\ &\left[\psi^E_\alpha(x),\psi^E_\beta(y)\right]_+=\left[\overline{\psi}^E_\alpha(x),\overline{\psi}^E_\beta(y)\right]_+=\left[\psi^E_\alpha(x),\overline{\psi}^E_\beta(y)\right]_+=0.\end{aligned} \tag{29.23}$$

Оператори (29.21), (29.22) були вперше введені в праці [180], а також у деякому іншому вигляді в [175]. Представлення комутаційних співвідношень (29.23) в евклідовому просторі Фока визначається аналогічно до представлень вільних фермі-полів (див. [68, п.11.2].

29.3. Евклідові функції Гріна вільного скалярного поля

Формулювання теорії в евклідовій області значно розширює застосування строгих математичних методів, що дає можливість вийти за рамки теорії збурень. Це, звичайно, не означає, що можна обійти традиційні проблеми, пов'язаний з об'ємними і ультрафіолетовими розбіжностями, про які говорилося в § 21. Але, якщо ввести відповідні "*обрізання*" (тобто ввести функцію інтенсивності взаємодії (21.27), а інтегрування за імпульсними змінними обмежити зверху: $|\mathbf{p}_i| \leqslant \varkappa$, $0 < \varkappa < \infty$), тоді можна строго визначити вирази для функцій Гріна взаємодіючих полів. Щоб у цьому переконатися, побудуємо спершу вільну евклідову функцію Гріна і оператори вільного евклідового поля, починаючи з виразу для вільного скалярного поля, що задовольняє рівняння Клейна–Гордона–Фока. Визначимо спершу для кожної дійсної функції $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ оператор

$$\varphi_0(0, f) = \int \varphi_0(0, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{29.24}$$

де $\varphi_0(0, \mathbf{x})$ – оператор вільного скалярного поля (15.2) при $x^0 = 0$. Розглянемо вільну еволюцію цього оператора, яка відповідає евклідовому часу $x^0 = it$, $t > 0$ (див. ф-лу (21.16)):

$$\widehat{\varphi}_0(t, f) = e^{-tH_0} \varphi_0(0, f) e^{tH_0}, \tag{29.25}$$

де

$$H_0 = \int d\mathbf{k}\, k^0 \varphi_0^+(\mathbf{k}) \varphi_0^-(\mathbf{k}), \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

є вільний гамільтоніан дійсного скалярного поля (див. вираз (15.16) для комплексного скалярного поля). Легко переконатися (задача 29.6), що дія оператора (29.25) на вектор $F \in \mathscr{D}_0^{\mathrm{loc}} \subseteq \mathscr{F}_B$ (див. (19.27)) буде такою самою, як і оператора

$$\widehat{\varphi}_0(t, f) = \int \widehat{\varphi}_0(t, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{29.26}$$

$$\widehat{\varphi}_0(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [e^{-k^0 t} \varphi_0^+(\mathbf{k}) + e^{k^0 t} \varphi_0^-(-\mathbf{k})]. \tag{29.27}$$

Формально оператор $\varphi_0(t, \mathbf{x})$ збігається з виразом (15.2) при $x^0 = it$. Введемо для операторів (29.26), (29.27) антихронологічний добуток за формулою

$$T^*(\widehat{\varphi}_0(t_1, \mathbf{x}_1) \widehat{\varphi}_0(t_2, \mathbf{x}_2)) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_0(t_1, \mathbf{x}_1) \widehat{\varphi}_0(t_2, \mathbf{x}_2), & t_1 \leqslant t_2, \\ \widehat{\varphi}_0(t_2, \mathbf{x}_2) \widehat{\varphi}_0(t_1, \mathbf{x}_1), & t_2 \leqslant t_1. \end{cases}$$

Тоді легко порахувати (задача 29.7), що

$$\big(\Omega_0, T^*(\widehat{\varphi}_0(x_1^4, \mathbf{x}_1) \widehat{\varphi}_0(x_2^4, \mathbf{x}_2)) \Omega_0\big) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - |x^4| \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2 + m^2}, \tag{29.28}$$

де $\mathbf{x} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $x^4 = x_1^4 - x_2^4$. Порівнюючи (29.15) з (29.28), маємо

$$(\Omega_0, T^*(\widehat{\varphi}_0(x_1)\widehat{\varphi}_0(x_2))\Omega_0) = (\Omega_0^E, a(x_1)a(x_2)\Omega_0^E)$$

або в термінах операторів (29.26), (29.27)–

$$(\Omega_0, T^*(\widehat{\varphi}_0(x_1^4, f_1)\widehat{\varphi}_0(x_2^4, f_2))\Omega_0) = (\Omega_0^E, a(x_1^4, f_1)a(x_2^4, f)\Omega_0^E). \tag{29.29}$$

Користуючись теоремою Віка для T^*-добутку, яка формулюється аналогічно до відповідної теореми для T-добутку для операторів $\varphi_0(x)$, формула (29.29) легко поширюється на випадок поліномів $P_n(\varphi_0)$ степеня n:

$$\begin{aligned}(\Omega_0, T^*(P_{n_1}(\widehat{\varphi}_0(x_1^4, f_1)) \cdots P_{n_k}(\widehat{\varphi}_0(x_k^4, f_k))\Omega_0) = \\ = (\Omega_0^E, P_{n_1}(a(x_1^4, f_1)) \cdots P_{n_k}(a(x_k^4, f_k))\Omega_0^E).\end{aligned} \tag{29.30}$$

І, нарешті, рівність (29.30) узагальнюється на всі обмежені функції $F_k(\cdot)$ від операторів $\widehat{\varphi}_0$ або a:

$$\begin{aligned}(\Omega_0, T^*(F_1(\widehat{\varphi}_0(x_1^4, f_1)) \cdots F_k(\widehat{\varphi}_0(x_k^4, f_k))\Omega_0) = \\ = (\Omega_0^E, F_1(a(x_1^4, f_1)) \cdots F_k(a(x_k^4, f_k))\Omega_0^E).\end{aligned} \tag{29.31}$$

Це є наслідком того, що оператори бозе–полів утворюють кільце [6], слабке замикання якого містить у собі усі обмежені функції від цих полів.

29.4. Евклідові функції Гріна взаємодіючих полів

Щоб побудувати функції Гріна в евклідовій області, не спираючись на теорію збурень за константою взаємодії λ, визначимо регуляризований гамільтоніан взаємодії $H_I^{\varkappa}(\mathbf{g})$ формулами (21.10), (21.21), (21.22), але з уведеними об'ємним і ультрафіолетовим обрізанням:

$$H_I^{\varkappa}(\mathbf{g}) = \int d\mathbf{x}\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \varphi_0^{\varkappa}(0, \mathbf{x})^4 :=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_1 \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_4 \frac{\mathbf{g}(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_4) \prod\limits_{j=1}^{4} \chi_{\varkappa}(\mathbf{k}_j)}{4 \cdot \prod\limits_{j=1}^{4} (2\pi)^{3/2} \sqrt[4]{\mathbf{k}_j^2 + m^2}} : \varphi_0(\mathbf{k}_1) \cdots \varphi_0(\mathbf{k}_4) :, \tag{29.32}$$

де

$$\varphi_0(\mathbf{k}) = \varphi_0^+(\mathbf{k}) + \varphi_0^-(-\mathbf{k}), \tag{29.33}$$

$$\chi_{\varkappa}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{k}| \leqslant \varkappa - \delta, \\ \\ 0, & |\mathbf{k}| \geqslant \varkappa, \end{cases} \tag{29.34}$$

а для $\varkappa - \delta \leqslant |\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{k}|$ функція $\chi_{\varkappa} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$.

Тоді регуляризоване поле, що відповідає оператору (29.27), матиме вигляд

$$\widehat{\varphi}_0^{\varkappa}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{\chi_{\varkappa}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\mathbf{k}^2+m^2}} \left[e^{-t\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \varphi^+(\mathbf{k}) + e^{t\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \varphi^-(\mathbf{k}) \right]. \quad (29.35)$$

І, нарешті, повний гамільтоніан

$$H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g}) = H_0 + \lambda H_I^{\varkappa}(\mathbf{g}). \quad (29.36)$$

Оператори H_0, $H_I^{\varkappa}(\mathbf{g})$ і $H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})$ є добре визначеними операторами у просторі Фока $\mathscr{F}_B$. Більше того, оператор $H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})$ є суттєво самоспряженим (див. [133]) і обмеженим знизу (задача 29.8) внаслідок тотожності (21.5), яка вже не містить нескінченних констант завдяки ультрафіолетовому обрізанню. Нижня границя спектра оператора $H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})$ є ізольованим власним значенням кратності один (див. доведення в [134]). Це означає, що існує єдиний вектор $\Phi_0 = \Phi_0(\varkappa, \mathbf{g}) \in \mathscr{F}_B$– такий, що

$$H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})\Phi_0 = E_{\lambda}(\varkappa, g)\Phi_0, \quad \|\Phi_0\| = 1,$$

а

$$E_{\lambda}(\varkappa, g) = \inf\{\text{spectrum } H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})\}.$$

Отже, замість оператора $H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})$ зручніше розглядати оператор

$$\widehat{H}_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g}) = H_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g}) - E_{\lambda}(\varkappa, \mathbf{g}),$$

спектр якого невід'ємний і містить у собі $\{0\}$ як ізольовану точку спектра, що відповідає фізичному вакууму Φ_0. Спираючись на аргументи роботи [149], легко обчислити важливу границю

$$s - \lim_{t\to+\infty} e^{-t\widehat{H}_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})} = P_0, \quad (29.37)$$

де P_0 – проектор на власний підпростір, що відповідає власному значенню $E = 0$. Крім того,

$$(\Phi_0, \Omega_0) \neq 0. \quad (29.38)$$

За допомогою проектора P_0 вектор Φ_0 можна виразити через "*голий*" вакуумний вектор Ω_0 (19.30), тобто

$$\Phi_0 = \frac{1}{c} P_0\Omega_0, \quad c = \|P_0\Omega_0\|. \quad (29.39)$$

Аналогічно до (29.25) розглянемо повну еволюцію (див. (21.11)) оператора (29.24), яка відповідає уявному часу $x^0 = it$, $t > 0$

$$\widehat{\varphi}^{\varkappa}(t,f) = e^{-t\widehat{H}_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})} \varphi_0(0,f) e^{t\widehat{H}_{\lambda}^{\varkappa}(\mathbf{g})}. \quad (29.40)$$

Тоді за аналогією до (29.28) природно визначити функції Гріна полів (29.40) таким чином:

$$G_N^E(x_1,\dots,x_N;\varkappa,\mathbf{g}) := (\Phi_0, T^*(\widehat{\varphi}^{\varkappa}(x_1)\cdots\widehat{\varphi}^{\varkappa}(x_N))\Phi_0), \quad (29.41)$$

де $\widehat{\varphi}^{\varkappa}(x) = \widehat{\varphi}^{\varkappa}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ ($x^4 \equiv t$) пов'язані з операторами (29.40) співвідношенням (29.26).

Наступним кроком виразимо праву частину (29.41) через оператори вільних евклідових полів (29.11). Це, фактично, буде означати перехід до представлення взаємодії на мові евклідових полів або точніше представлення виразу (24.1) виразом (24.7) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$.

Запишемо для цього розклад оператора

$$e^{-tH^{\varkappa}_{\lambda}(\mathbf{g})} = e^{-t(H_0 + \lambda H^{\varkappa}_{\lambda}(\mathbf{g}))}$$

в ряд за λ, скориставшись теоремою про розклад напівгруп у ряд теорії збурень (див. [100], Гл. XIII):

$$\begin{aligned}
e^{-tH^{\varkappa}_{\lambda}(\mathbf{g})} &= s - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-\lambda)^n \int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \times \\
&\times \; e^{-\tau_n H_0} H^{\varkappa}_I(\mathbf{g}) e^{-(\tau_{n-1}-\tau_n)H_0} \cdots H^{\varkappa}_I(\mathbf{g}) e^{-(t-\tau_1)H_0} = \\
&= s - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-\lambda)^n \int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n H^{\varkappa}_I(\tau_n, \mathbf{g}) \cdots H^{\varkappa}_I(\tau_1, \mathbf{g}) e^{-tH_0} = \\
&= s - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-\lambda)^n}{n!} T^* \bigg(\int_0^t d\tau \, H^{\varkappa}_I(\tau, \mathbf{g}) \bigg)^n e^{-tH_0} = \\
&= s - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-\lambda)^n}{n!} e^{-tH_0} T^* \bigg(\int_0^t d\tau \, H^{\varkappa}_I(\tau - t, \mathbf{g}) \bigg)^n, \qquad (29.42)
\end{aligned}$$

де

$$H^{\varkappa}_I(\tau, \mathbf{g}) = e^{-\tau H_0} H^{\varkappa}_I(\mathbf{g}) e^{\tau H_0} = \int d\mathbf{x}\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) : \widehat{\varphi}^{\varkappa}_0(\tau, \mathbf{x})^4 : . \qquad (29.43)$$

Зауваження 29.2. *У даному випадку* (29.42) *є формальним розкладом. Для того, щоб викладки були абсолютно строгими, треба зробити проміжну регуляризацію оператора $H^{\varkappa}_I(\mathbf{g})$, замінивши його оператором $H^{\varkappa}_I(\mathbf{g}, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, в якому замість полів $\varphi^{\varkappa}_0(0, f)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ ввести обмежені оператори*

$$\varphi^{\varkappa}_{\varepsilon}(0, f) := \varphi^{\varkappa}_0(0, f) e^{-\varepsilon \varphi^{\varkappa}_0(0,f)^2}, \quad \varepsilon > 0. \qquad (29.44)$$

Тоді розклад (29.42) *буде збіжним у сильному змісті ($s - \lim$), а проміжну регуляризацію треба зняти ($\varepsilon \to 0$) у кінцевому виразі для функції Гріна G^E_N після переходу до евклідових полів. Щоб не робити процедуру надто громіздкою, опустимо ці викладки і для детального доведення порадимо звернутися до монографії*[68, § 16].

Проробимо необхідні викладки для 2-точкової функції Гріна ($N = 2$).

Нехай для $x_1^4 = t_1 < t_2 = x_2^4$ і $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, $k = 1, 2$

$$G_2^E(t_1, f_1; t_2, f_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx_2 G_2^E(x_1, x_2) f_1(x_1) f_2(x_2).$$

Тоді з (29.41) і (29.40) маємо

$$\begin{aligned}
G_2^E \quad (\quad & t_1, f_1; t_2, f_2) = \Big(\Phi_0, e^{-t_1 \widehat{H}_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \varphi_0(0, f_1) e^{-(t_2 - t_1)\widehat{H}_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \times \\
& \times \quad \varphi_0(0, f_2) e^{t_2 \widehat{H}_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \Phi_0 \Big) = s - \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{S_0(t)} \Big(\Omega_0, e^{-(t+t_1) H_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \times \\
& \times \quad \varphi_0(0, f_1) e^{-(t_2 - t_1) H_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \varphi_0(0, f_2) e^{-(t - t_2) H_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \Omega_0 \Big) = \\
= \quad & \lim_{t \to +\infty} \lim_{N_1, N_2, N_3 \to \infty} \sum_{n_1, n_2, n_3 = 0}^{N_1, N_2, N_3} \frac{(-\lambda)^{n_1 + n_2 + n_3}}{n_1! n_2! n_3!} \frac{1}{S_0(t)} \Big(\Omega_0, e^{-tH_0} \times \\
& \times \quad T^* \Big(\int\limits_0^{t+t_1} d\tau H_I^\varkappa(\tau - t, \mathbf{g}) \Big)^{n_1} \widehat{\varphi}_0(t_1, f_1) T^* \Big(\int\limits_0^{t_2 - t_1} d\tau H_I^\varkappa(\tau + t_1, \mathbf{g}) \Big)^{n_2} \times \\
& \times \quad \widehat{\varphi}_0(t_2, f_2) T^* \Big(\int\limits_0^{t - t_2} d\tau H_I^\varkappa(\tau + t_2, \mathbf{g}) \Big)^{n_3} \Omega_0 \Big) = \\
= \quad & \lim_{t \to \infty} \frac{1}{S_0(t)} \Big(\Omega_0, T^* \Big[e^{-\lambda \int\limits_{-t}^{t_1} d\tau H_I^\varkappa(\tau, \mathbf{g})} \widehat{\varphi}_0(t_1, f_1) e^{-\lambda \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau H_I^\varkappa(\tau, \mathbf{g})} \times \\
& \times \quad \widehat{\varphi}_0(t_2, f_2) e^{-\lambda \int\limits_{t_2}^{t} d\tau H_I^\varkappa(\tau, \mathbf{g})} \Big] \Omega_0 \Big) = \\
= \quad & \lim_{t \to \infty} \frac{1}{S_0(t)} \Big(\Omega_0^E, a(t_1, f_1) a(t_2, f_2) e^{-\lambda H_I^\varkappa(g, a)} \Omega_0^E \Big), \qquad (29.45)
\end{aligned}$$

де

$$H_I^\varkappa(g, a) = \int\limits_{-t}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) : a(\tau, \mathbf{x})^4 := \int\limits_{\mathbb{R}^4} d^4x\, g(x) : a^\varkappa(x)^4 :,$$

$$g(x) = \chi_{[-t,t]}(x^4) \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \chi_{[-t,t]}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [-t, t], \\ 0, & \tau \notin [-t, t], \end{cases} \qquad (29.46)$$

$$S_0(t) = \Big(\Omega_0, e^{-2tH_\lambda^\varkappa(\mathbf{g})} \Omega_0 \Big) = \Big(\Omega_0^E, e^{-\lambda H_I^\varkappa(g,a)} \Omega_0^E \Big),$$

а

$$a^\varkappa(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\chi_\varkappa(\mathbf{k}) e^{ix \cdot k}}{\sqrt{k^2 + m}} a(k)\, d^4k.$$

У другій рівності (29.45) було використано формулу

$$\left(\Phi_0,(\dots)\Phi_0\right) \;=\; \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^{-tH^{\varkappa}_{\lambda}(\mathbf{g})}\Omega_0,(\dots)e^{-tH^{\varkappa}_{\lambda}(\mathbf{g})}\Omega_0\right)}{\left(\Omega_0,e^{-2tH^{\varkappa}_{\lambda}(\mathbf{g})}\Omega_0\right)},$$

яка є наслідком (29.37)–(29.39). У третій рівності—розклад (29.42), у четвертій—після заміни змінних було переписано суми у вигляді експонент і, нарешті, в п'ятій було застосовано формулу (29.31). Нагадаємо, що при цьому вважалося, що оператор $H^{\varkappa}_{I}(\tau,\mathbf{g})$ апроксимований послідовністю обмежених операторів $H^{\varkappa}_{I}(\tau,\mathbf{g},\varepsilon)$ (див. зауваження 29.2).

Такі самі виклади можна проробити і для N–точкової функції Гріна. Якщо не виконувати граничного переходу $t\to+\infty$, то N-точкова функція Гріна в евклідовій області змінних буде мати такий вигляд:

$$G^E_N(x_1,\dots,x_N;\varkappa,g)=\tfrac{1}{S_0(g,\varkappa)}\left(\Omega^E_0,a(x_1)\cdots a(x_N)e^{-\lambda\int g(x):a^{\varkappa}(x)^4:d^4x}\;\Omega^E_0\right),\qquad S_0(g,\varkappa)\equiv S_0(t). \tag{29.47}$$

Отже, фактично доведено, що в слабкому змісті у виразі (29.45) для евклідової N–точкової функції Гріна можна зняти *часове обрізання*, тобто

$$w-\lim_{t\to+\infty}G^E_N(x_1,\dots,x_N;\varkappa,g)\;=\;G^E_N(x_1,\dots,x_N;\varkappa,\mathbf{g}), \tag{29.48}$$

де функція включення взаємодії g задана формулою (29.46). Вперше цей результат був отриманий в праці [135].

Аналогічні формули легко отримати і для функцій Гріна ферміонних полів (задача 29.9).

Зауваження 29.3. *Для функцій Гріна, що відповідає бозе-полям* (29.25), (29.26) *граничний перехід* $\varkappa\to\infty$ *можна виконати за умови, що розмірність простору часу* $d=s+1=2$ *(див., наприклад,* [68] *і посилання у списку літератури).*

§ 30. Евклідова аксіоматика

Перехід до уявних часів, який був описаний у попередніх параграфах цього розділу, виявився дуже дієвим методом для вивчення модельних систем релятивістської квантової теорії поля. Він дає можливість, фактично, вперше застосувати строгі математичні методи і вийти за рамки теорії збурень. Разом із тим цей вихід став можливий лише для регуляризованих (при наявності ультрафіолетових обрізань) теорій або ж теорій, у яких розмірність простору-часу $d\leqslant 3$. Отже, поки що немає впевненості, що дійсно маємо справу з евклідовою

теорією поля, а не з евклідовим формулюванням релятивістської теорії квантованих полів. Для того, щоб обґрунтувати розвинутий вище підхід, треба мати схему (на рівні абстрактної теореми), яка б дала можливість чітко сформулювати умови, що забезпечують повернення в псевдоевклідову область, тобто гарантують еквівалентність евклідової і релятивістської теорій поля. Таку еквівалентність буде сформульовано на мові аксіом Остервальдера – Шрадера (див. [59,60] для функцій Швінгера (евклідових функцій Гріна) і теореми реконструкції, яка забезпечує існування функцій Вайтмана (див. § 27), що задовольняють властивості **W1**–**W6**. Тоді з теореми 27.1 випливатиме існування простору станів і локального гейзенбергового поля, що задовольняє аксіоми **A1**–**A2**. Перш ніж формулювати аксіоми Остервальдера – Шрадера, коротко обговоримо аналітичні властивості функцій Вайтмана, які визначено в п.26.2.

30.1. Аналітичне продовження узагальнених функцій Вайтмана

Введемо деякі нові означення областей у просторі $\mathbb{MC}^{\otimes n} = \overbrace{\mathbb{MC}\otimes \qquad \otimes\mathbb{MC}}^{n-\text{раз}}$ (див. п.1.4). Область

$$T_n^+ := \left\{(z_1,\ldots,z_n)\in(\mathbb{MC})^{\otimes n}\middle|\,\mathrm{Im}\,(z_{j+1}-z_j)\in V_+,\quad j=\overline{1,n-1}\right\} \tag{30.1}$$

будемо називати *трубою майбутнього*. Відповідно T_n^- — трубою минулого (див. (1.7)). Так само, як і в (1.7), $\overline{T_n^{\pm}}$ будуть означати замкнуті множини. Визначимо також *розширену трубу майбутнього* формулою

$$T_n^{\mathrm{ext}} := \bigcup_{\Lambda\in\mathscr{L}_+(\mathbb{C})} \Lambda T_n^+. \tag{30.2}$$

З означення (30.1) видно, що T_n^+ не містить у собі ні однієї дійсної точки $(x_1,\ldots,x_n)\in(\mathbb{M})^{\otimes n}$.

Але в розширеній трубі T_n^{ext} такі точки є, вони називаються *точками Йоста*. Цю назву вони отримали через теорему, яку вперше довів Йост [151].

Теорема 30.1. *Точка $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{M}^{\otimes n}\cap T_n^{\mathrm{ext}}$ тоді, і тільки тоді, коли випуклий конус $C(x_1,\ldots,x_n)$, породжений точками $x_1,\ldots,x_n$, містить у собі лише просторовоподібні точки.*

Зауваження. Випуклий конус $C(x_1,\ldots,x_n)$ визначається як множина точок $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$, де $\lambda_k\geqslant 0$, але $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k>0$ (доведення див. в [39], гл. IV, § 5).

Множину всіх точок Йоста будемо позначати J. Потрібн ввести ще означення *симетризованої розширеної труби майбутнього*

$$\widetilde{T}_n^{\mathrm{ext}} := \bigcup_{\pi\in S_n} T_{n;\pi}^{\mathrm{ext}}, \tag{30.3}$$

де $T^{\rm ext}_{n;\pi}$– розширена труба майбутнього (30.2) за змінними $(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$ для будь-якої перестановки $\pi\in S_n$ змінних $x_1,\dots,x_n$.

Основним завданням є встановлення максимальної області аналітичності функції Вайтмана у просторі $(\mathbb{MC})^{\otimes n}$. Зробимо це за допомогою 3-х кроків.

1. *Аналітичне продовження в трубу майбутнього T^+_n.*

Це продовження забезпечує така теорема (див. [39], гл. IV, § 2).

Теорема 30.2. *Узагальнені функції Вайтмана $w_n(x_1,\dots,x_n)$ є граничними значеннями аналітичних функцій $w_n(z_1,\dots,z_n)$, голоморфних в трубі майбутнього T^+_n. Функції Вайтмана інваріантні відносно перетворень власних ортотропних неоднорідних перетворень Лоренца.*

Твердження теореми є наслідком деяких загальних теорем із теорії перетворення Лапласа для функцій багатьох змінних, а також спектральної умови **W2** (див. п.26.2).

2. *Аналітичне продовження в розширену трубу майбутнього $T^{\rm ext}_n$.*

Це аналітичне продовження ґрунтується на відомій теоремі Баргмана–Холла–Вайтмана, яка була вперше опублікована в праці [143].

Теорема 30.3. *Якщо функція $f(z_1,\dots,z_n)$ є голоморфною (аналітичною) в трубі майбутнього T^+_n (30.1) і є інваріантною відносно неоднорідних власних ортохронних перетворень Лоренца , то вона допускає аналітичне продовження в розширену трубу $T^{\rm ext}_n$(див. (30.2)) і є інваріантною відносно $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ (див. (1.22), (1.23)).*

Доведення (див. [88, гл. 3], [11, гл. 5]) спирається на умову **W1** (п.26.2).

3. *Аналітичне продовження в симетризовану розширену трубу майбутнього $\widetilde{T}^{\rm ext}_n$. (див. (30.3))*

Якщо аналітичну функцію $w_n(z_1,\dots,z_n)$ обмежити на точки Йоста $(x_1,\dots,x_n)$, то

$$w_n(x_1,\dots,x_n)=w_n(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}):=w^\pi_n(x_1,\dots,x_n) \tag{30.4}$$

для будь-якого $\pi\in S_n$. Рівність (30.4) є справедливою внаслідок теореми 30.1 і умови **W4** (див. ф-лу (27.11)). Внаслідок теореми 30.3, аналітичне продовження w^π_n в трубу $T_{n;\pi}$ фактично задає аналітичне продовження w^π_n у трубу $T^{\rm ext}_{n;\pi}$. Це означає, що рівність (30.4) можна аналітично продовжити в область $\widetilde{T}^{\rm ext}_n$. Отже, справедлива теорема [39, гл. IV, § 5].

Теорема 30.4. *Існують аналітичні функції $w_n(z_1,\dots,z_n)$, голоморфні в області $\widetilde{T}^{\rm ext}_n$ і симетричні за змінними $z_1,\dots,z_n$, а їх граничні значення в область $\mathbb{M}^{\otimes n}$ відтворюють усі узагальнені функції Вайтмана $w^\pi_n(x_1,\dots,x_n)$.*

30.2. Евклідові функції Гріна. Аксіоми Остервальда–Шрадера

У п.п. 29.1,29.3 було визначено поняття *евклідової області*, яку можна визначити як область комплексного простору Мінковського $\mathbb{MC}=\mathbb{MC}^4$ (див. п.1.4).

Цю область можна визначити формулою

$$\mathscr{E}^4 = \mathscr{E} := \left\{ z \in \mathbb{MC} \middle| z^0 = it, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Відповідну область у просторі $\mathbb{MC}^{\otimes n}$ позначимо $\mathscr{E}^{\otimes n}$. Визначимо також *позадіагональну евклідову область* $\mathscr{E}_n$ формулою

$$\mathscr{E}_n := \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathscr{E}^{\otimes n} \middle| z_i \neq z_j, \text{ коли } i \neq j \right\}.$$

Справедлива (майже очевидна) така лема.

Лема 30.1. *Область $\mathscr{E}_n$ лежить в симетризованій розширеній трубі майбутнього $\widetilde{T}_n^{\text{ext}}$.*

Для доведення леми досить показати, що для будь-якої евклідової точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathscr{E}_n$ можна знайти хоча б одну точку Йоста $x = (x_1, \ldots, x_n) \in J$ і перетворення $\Lambda \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ – такі, що (задача 30.1)

$$z = \Lambda x \quad (z_j = \Lambda x_j, \quad j = \overline{1, n}).$$

Тоді твердження леми буде випливати з означень (30.2) і (30.3) та того факту, що точки Йоста лежать в T_n^{ext} (теорема 30.1). Лема 30.1 дає можливість визначити евклідові функції Гріна.

Означення 30.1. Обмеження аналітичної функції $w_n(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфної в T_n^{ext}, на область $\mathscr{E}_n$ будемо називати *n-точковою евклідовою функцією Гріна* або *функцією Швінгера*

$$G_n^E(x_1, \ldots, x_n) = w_n(\mathbf{x}_1, ix_1^4, \ldots, \mathbf{x}_n, ix_n^4), \tag{30.5}$$

де $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4) \in \mathbb{R}^4$.

Із визначення 30.1 випливає, що і узагальнені функції Вайтмана $w_n(x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{M}^4$, і функції Швінгера $G_n^E(x_1, \ldots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}^4$ є граничними значеннями однієї аналітичної функції $w_n(z_1, \ldots, z_n)$ відповідно, коли $(z_1, \ldots, z_n) \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{M}^{4n}$ і коли $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathscr{E}_n$. Побудовані таким чином функції Швінгера задовольняють умови:

EO. ***Помірний ріст***

Узагальнені функції $G_n^E(x_1, \ldots, x_n)$ $(G_0 = 1)$ є елементами простору ${}^0\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$. Простір основних функцій визначається формулою

$${}^0\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}) := \left\{ f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}) \right\} \middle| f^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{коли} \quad x_i = x_j, \quad i \neq j; k \geq 0 \Big\}.$$

Тут $f^{(k)}$—похідна функції f порядку k.

E1. ***Евклідова інваріантність***

$$G_n^E(x_1, \ldots, x_n) = G_n^E(Rx_1 + a, \ldots, Rx_n + a), \quad R \in SO_4, \tag{30.6}$$

де SO_4–група евклідових поворотів у просторі $\mathbb{R}^4$.

E2. ***Додатна визначеність***

Нехай $\mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{4n})$ простір основних функцій із $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, носій яких (разом з похідними) лежить в області

$$\big\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{4n}\big|0<x_1^4<x_2^4<\dots<x_n^4\big\}.$$

Визначимо для $f\in\mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{4n})$ операцію θ

$$(\theta f)(x_1,\dots,x_n)=f(\theta x_1,\dots,\theta x_n),$$

$$\theta x_j=(x_j^1,x_j^2,x_j^3,-x_j^4).$$

Тоді для $f_0\in\mathbb{C}$ і $f_k\in\mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{4k})$, $k=1,2,\dots$

$$\sum_{n,m\geqslant 0}G^E_{n+m}(\overline{\theta f_n}\otimes f_m)\geqslant 0. \tag{30.7}$$

E3. ***Симетричність***

$$G^E_n(x_1,\dots,x_n)=G^E_n\big(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}\big),\quad \pi\in S_n.$$

E4. ***Кластерна властивість***

Для довільних n, $m\in\mathbb{N}$, $f\in\mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{4n})$, $g\in\mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{4n})$ і $a=(\mathbf{a},0)\in\mathbb{R}^4$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\big[G^E_{n+m}(\overline{\theta f_n}\otimes g_{m;\lambda a})-G^E_n(\overline{\theta f})G^E_m(g)\big]=0, \tag{30.8}$$

де $g_{m;\lambda a}(x_1,\dots,x_m)=g_m(x_1+\lambda a,\dots,x_m+\lambda a)$.

Властивості **E0**–**E4** можна довести, спираючись на аксіоми Вайтмана **W0**–**W6** (задачі 30.2–30.6). Аналогічно до (27.8) можна визначити функції, що залежать від різниці аргументів $\xi_j=x_{j+1}-x_j$:

$$G^E_n(x_1,\dots,x_n)=S_{n-1}(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}). \tag{30.9}$$

Ці функції можна представити у вигляді перетворення Лапласа функцій W_{n-1}, визначених формулою (27.9):

$$S_n(\xi_1,\dots,\xi_n)=\int e^{-\sum_{k=1}^n(\xi_k^4q_k^4+i\boldsymbol{\xi}_k\cdot\mathbf{q}_k)}\widetilde{W}_n(q_1,\dots,q_n)d^{4n}q. \tag{30.10}$$

Сукупність властивостей **E0**–**E4** називають *аксіомами Остервальдера–Шрадера*. Вперше вони були запропоновані в праці [60] (див. також [59]).

Але цікавим є питання: чи є умови **E0**–**E4** достатніми для відновлення функцій Вайтмана, що задовольняють умови **W0**–**W6**?

Позитивна відповідь на це питання дала б змогу відновити за евклідовими функціями релятивістську теорію поля у просторі Мінковського.

Це питання ми розглянемо у наступному підрозділі.

30.3. Реконструкція теорії Вайтмана

Таким чином, почавши з аксіом Гордінгера–Вайтмана **A1**–**A2** (п.27.1), які визначають релятивістську квантову теорію поля, спершу був зроблений перехід до іншої аксіоматики (аксіоматики Вайтмана), а потім до аксіом Остервальдера–Шрадера для евклідових функцій Гріна. Останні є найбільш зручними об'єктами з математичної точки зору, а розрахунки за теорією збурень різних фізичних характеристик, виконаних за допомогою евклідової теорії, можна знову записати у фізичній області за допомогою аналітичного продовження. Таке повернення від евклідового світу до фізичного бажано мати не лише на рівні теорії збурень. Для цього і потрібна теорема, яка б встановлювала еквівалентність аксіом **E0**–**E4** і аксіом **A1**–**A2**. Тобто ланцюжок

$$(\mathbf{A1}-\mathbf{A2})\Rightarrow(\mathbf{W0}-\mathbf{W6})\Rightarrow(\mathbf{E0}-\mathbf{E4}) \tag{30.11}$$

треба зробити справедливим у протилежному напрямку. Перший крок у цьому напрямку робить теорема 27.1, яка дає можливість за функціями Вайтмана, які задовольняють умови **W0**–**W6**, відновити поле і простір станів системи, які задовольняють аксіоми **A1**–**A2**. У праці Остервальдера і Шрадера за 1973 рік була запропонована теорема реконструкцій функцій Вайтмана за функціями Швінгера. Але дещо пізніше Шрадер і Саймон знайшли помилку в доведенні однієї технічної леми. Суть цієї помилки полягала в тому, що умова **E0** виявилася заслабкою, щоб визначити відповідні функції Вайтмана за допомогою перетворення Лапласа. Точніше, умови **E0** досить для того, щоб забезпечити існування перетворення Лапласа на кожній комплексній змінній окремо, але не за сукупністю всіх змінних. Пізніше у працях [59] і [60] було по-новому сформульовано аксіому **E0**. Для цього треба ввести деякі додаткові простори основних і узагальнених функцій. Для функції $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n}_+)$, де $\mathbb{R}^{4n}_+:=\left\{x\in\mathbb{R}^{4n}\middle| x_j^4>0\right.$ для всіх $\left.j=1,\dots,n\right\}$, визначимо перетворення Лапласа

$$\widetilde{\varphi}(p_1,\dots,p_n)=\frac{1}{(2\pi)^{4n}}\int e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}(p_j^4x_j^4+i\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{x}_j)}\varphi(x_1,\dots,x_n)d^{4n}x,$$

де $p_j^4>0$, $j=\overline{1,n}$, а $\check{\mathscr{S}}(\overline{\mathbb{R}^{4n}_+})$ – простір Шварца зі звичайною системою напівнорм. Тоді, нехай виконується така умова:

E0′ ***Підсилений помірний ріст***

Узагальнені функції

$$G_n^E\in{}^0\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n}),$$

а узагальнені функції (30.9)

$$S_{n-1}\in{}^0\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4(n-1)}).$$

Виявляється, що таке підсилення дає змогу сформулювати теорему.

Теорема реконструкції (**E0′**–**E4**) $\Leftrightarrow$ (**W0**–**W6**).

Умови **EO′, E1–E4** *для евклідових функцій Гріна еквівалентні аксіомам Вайтмана* **W0–W6** *для узагальнених функцій Вайтмана.*

Не будемо наводити детальне доведення, а лише сформулюємо деякі основні моменти. Перш за все зауважимо, що умова **E0′** дає можливість визначити (за функціями G_n^E) деяку узагальнену функцію $\widetilde{w}_{n-1}(p_1,\ldots,p_{n-1})$ з простору $\mathscr{S}'(\mathbb{R}_+^{4(n-1)})$– таку, що

$$\begin{aligned} &G_n^E(x_1,\ldots,x_n) = S_{n-1}(x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1}) = \\ &= \int \widetilde{w}_{n-1}(p_1,\ldots,p_{n-1}) e^{-\sum_{j=1}^{n-1}[p_j^4(x_{j+1}^4-x_j^4)-i\mathbf{p}_j\cdot\mathbf{x}_j]} d^{4(n-1)}p. \end{aligned} \tag{30.12}$$

Це дає змогу визначити узагальнені функції Вайтмана формулою

$$w_n(x_1,\ldots,x_n) = \int \widetilde{w}_{n-1}(p_1,\ldots,p_{n-1}) e^{\,i\sum\limits_{j=1}^{n-1} p_j(x_{j+1}-x_j)}\, d^{4(n-1)}p. \tag{30.13}$$

Зручна формула обернення для перетворення Лапласа була також запропонована в роботі [37]. Тоді властивість **W0** є наслідком визначення (30.13) (задача 30.7). Інваріантність **W1** випливає з (30.12) і (30.13) (задача 30.8). Оскільки носій $\widetilde{w}_n$ лежить у просторі $\mathbb{R}_+^{4n}$, і вона є лоренц-інваріантною, то $\operatorname{supp}\widetilde{w}_n \subset \overline{V}_+^n$, що забезпечує **W2** (задача 30.9). Умова **W3** забезпечується умовою **E3** і визначеннями (30.12), (30.13) (задача 30.10). Умова локальності **W4** є наслідком симетричності **E3** і теореми Йоста [39, гл. IV] (задача 30.10). Додатна визначеність **W5** випливає з аналогічної умови **E2** (задача 30.11). І, нарешті, властивість **W6** є наслідком **E4**. Отже, ланцюжок (30.11) можна повернути в оберненому напрямку:

$$(\mathbf{E0'}-\mathbf{E4}) \Rightarrow (\mathbf{W0}-\mathbf{W6}) \Rightarrow (\mathbf{A1}-\mathbf{A2}). \tag{30.14}$$

Зауваження 30.1. *Слід також звернути увагу на працю Ю.М. Зінов'єва [206], в якій запропонований інший варіант аксіоми спектральності, що дає можливість встановити еквівалентність (30.14)*

Зауваження 30.2. *Система аксіом* ***E0′–E4*** *може бути модифікована на випадок інших полів. Випадок довільних спінорних полів може бути розглянутий аналогічно (див. зауваження 6) в [60]).*

Задачі до розділу VI

Задача 27.1. Встановити релятивістський закон перетворення функцій Вайтмана (27.6).

Задача 27.2. Довести, що фур'є-перетворення функцій w_n і W_{n-1} (див. визначення (27.7), (27.8)) пов'язані співвідношенням (27.9).

Задача 27.3. Довести умови **W3**–**W5**(ф-ли (27.6)–(27.12)) для функцій Вайтмана скалярного поля.

Задача 27.4. Довести властивість розпадання на пучки (27.13).

Задача 27.5. Довести, що множина $\mathscr{D}_0$ усіх фінітних послідовностей $\hat{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_N, 0, \ldots)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ є всюдищільною в $\mathscr{H}$.

Задача 27.6. Довести, що для $h \in \mathscr{S}(\mathbb{M}^4)$ і $\operatorname{Im} h = 0$ оператор $\varphi(h)$ є симетричним оператором у просторі $\mathscr{H}$, тобто задовольняє рівність (27.18).

Задача 27.7. Перевірити властивість (27.19).

Задача 28.1. Показати, що оператор, визначений формулами (28.2)–(28.4) є оператором у просторі $\mathscr{H}$ з областю визначення $\mathscr{D}(\varphi)$, якщо $\varphi(f)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{M})$ визначений на $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{H}$.

Задача 28.2. Довести теорему 28.1.

Задача 28.3. Довести теорему 28.2.

Задача 28.4. Обґрунтувати вираз для струму (28.20).

Задача 28.5. Довести, що гейзенбергове поле можна подати у вигляді формального виразу (28.22).

Задача 29.1. Побудувати евклідів простір Фока.

Задача 29.2. Довести симетричність "*згладжених*" евклідових операторів $a(f)$ скалярного поля.

Задача 29.3. Показати, що аналітичне продовження ферміонної функції Гріна $\frac{1}{i}S^c(x-y)$ разом з перетворенням (29.18) приводить до виразу (29.19).

Задача 29.4. Довести формулу (29.20).

Задача 29.5. Довести, що оператори (29.21),(29.22) задовольняють переставні співвідношення (29.23).

Задача 29.6. Показати, що на множині $\mathscr{D}_0^{loc}$ оператор (29.25) діє так само, як і оператор (29.26), (29.27).

Задача 29.7. Довести формулу (29.28).

Задача 29.8. Довести, що регуляризований оператор енергії $H_\lambda^\varkappa$ (див. (19.24), (29.32)–(29.36)) є обмеженим знизу константою: $-9(\Omega_0, \varphi_0^\varkappa(0,\mathbf{x})^2\Omega_0)^2$.

Задача 29.9. Записати вигляд функції Гріна $G^E_{m,2n}$ через оператори евклідових полів для взаємодії Юкави $\mathscr{L}_{\text{int}} = \bar{\psi}\psi\varphi$.

Задача 30.1. Показати, що для довільного $z = (is, \mathbf{z})$, s, $z^k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$ можна підібрати точку Йоста $x = (0, x^1, x^2, x^3)$, $x^k \in \mathbb{R}$ таким чином, що, наприклад, для $\Lambda \in \mathscr{L}_+(\mathbb{C})$ вигляду

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \cos\varphi, \quad \Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = 1, \quad \Lambda^2_1 = \Lambda^1_2 = \sin\varphi,$$

$$\Lambda_1^3 = \Lambda_3^1 = \Lambda_1^4 = \Lambda_1^4 = \Lambda_2^3 = \Lambda_2^3 = \Lambda_3^4 = \Lambda_4^3 = 0,$$

$z = \Lambda x$. Знайти вектор x.

Задача 30.2. Довести, що функції G_n^E, визначені формулою (30.5), є узагальненими функціями помірного росту.

Задача 30.3. Довести інваріантність (30.6) функцій G_n^E.

Задача 30.4. Довести формулу (30.7).

Задача 30.5. Довести симетричність функцій G_n^E.

Задача 30.6. Довести кластерну властивість (30.8) функцій G_n^E.

Задача 30.7. Довести, що функції Вайтмана, визначені формулою (30.13), задовольняють умову **W0**.

Задача 30.8. Довести, що функції Вайтмана, визначені формулою (30.13), задовольняють умову **W1**.

Задача 30.9. Довести, що функції Вайтмана, визначені формулою (30.13), задовольняють умову **W2**.

Задача 30.10. Довести, що функції Вайтмана, визначені формулою (30.13), задовольняють умову **W3**.

Задача 30.11. Довести, що функції Вайтмана, визначені формулою (30.13), задовольняють умову **W4**.

Розділ VII. Квантова теорія калібрувальних полів

§ 31. Квантова електродинаміка (КЕД)

Якщо дотримуватись історичного аспекту в побудові квантової взаємодії між зарядженими частинками (електронами, позитронами, протонами та ін.), то, мабуть, треба виходити з класичних рівнянь Максвелла (7.2). Тоді, враховуючи явний вигляд 4-вектора струму $J^\mu(x) = (\rho(x), \mathbf{J}(x))$ (див. (5.115)) і переписуючи ці рівняння в термінах 4-потенціалу $A_\mu(x)$ за допомогою формул (7.4), (7.5), отримуємо рівняння

$$\Box A_\mu(x) + \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x). \tag{31.1}$$

Це рівняння треба розглядати разом із рівнянням (5.91), яке описує рух зарядженої частинки у полі, що визначається 4-векторним потенціалом $A_\mu(x)$, а також спряженим рівнянням (5.92) (або рівнянням (5.93), що описує рух античастинки у полі $A_\mu(x)$). Але в розділі III було розглянуто таку саму систему рівнянь, виходячи з вимоги локальної калібрувальної інваріантності рівнянь Дірака і лагранжіана (9.6). Така вимога, яка була зведена до основного принципу теорії з необхідністю, вимагає розгляду лагранжіана (9.9) і відповідної системи рівнянь (9.11). Зауважимо, що система (9.11), взагалі кажучи, може мати безліч розв'язків, серед яких і розв'язок $B_\mu(x) = A_\mu(x)$, тобто розв'язок, що відповідає електромагнітному полю. Відповідний лагранжіан ще раз перепишемо у вигляді

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_\psi(x) + \mathscr{L}_A(x) + \mathscr{L}_I(x), \tag{31.2}$$

де $\mathscr{L}_\psi$ і $\mathscr{L}_A$ визначені відповідно формулами (5.114), (7.18), а $\mathscr{L}_I(x)$ відповідає за взаємодію цих полів:

$$\mathscr{L}_I(x) = -A_\mu(x)J^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\widehat{A}(x)\psi(x). \tag{31.3}$$

Перейдемо тепер до квантового випадку, тобто виконаємо квантування полів $\psi(x)$ і $A_\mu(x)$. Що стосується системи (9.11), то її треба розглядати як співвідношення між операторно значними узагальненими функціями $\psi(x)$ і $A_\mu(x)$, у якому треба виконати першу регуляризацію, пов'язану з визначенням добутку

полів в одній і тій самій точці:

$$
\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma^\mu : A_\mu(x)\psi(x) :,\\
&i\partial_\mu\bar\psi(x)\gamma^\mu + m\bar\psi(x) = e : \bar\psi(x)\gamma^\mu A_\mu(x) :,\\
&\Box A_\mu(x) + \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = -J_\mu(x) = e : \bar\psi(x)\gamma_\mu\psi(x) : .
\end{aligned}
\tag{31.4}
$$

Визначення нормального добутку для взаємодіючих полів треба розуміти як регуляризацію, яка визначена в п.21.1 (див. ф-ли (21.5), (21.6).)

Так само, як і у випадку дійсного скалярного поля, що самовзаємодіє за допомогою лагранжіана (21.3) (див. рівняння (21.4)), ця регуляризація не усуває математичних труднощів, які пов'язані з визначенням оператора енергії (повного гамільтоніана). Більше того, проблеми стають не тільки складнішими у технічному аспекті, а навіть на формальному рівні строгості число проблем збільшується у зв'язку з калібрувальною інваріантністю системи (31.4). Почнемо з квантування електромагнітного поля і визначення гамільтоніана системи взаємодіючих полів.

31.1. Квантування взаємодіючого електромагнітного поля

У даному пункті коротко ознайомимося з деякими підходами до квантування електромагнітного поля і проблемами, що виникають у кожному з цих підходів. На сьогодні не існує методу, який би вирішував усі проблеми, або хоч формально був узгоджений із вимогою калібрувальної інваріантності і основними постулатами квантової теорії. Так само, як і у випадку вільного поля, почнемо з узагальнення формалізму Гупти–Блейлера на випадок взаємодіючого поля.

31.1.1. Формалізм Гупти–Блейлера для взаємодіючого електромагнітного поля

Нагадаємо, що основна ідея полягала у заміні умови Лоренца (7.8), яка не сумісна з комутаційними співвідношеннями (17.25), більш слабкою умовою (17.33). Очевидно, що у випадку взаємодіючого поля також не можна вимагати виконання умови Лоренца, бо це суперечитиме можливості неперервного переходу до вільного поля при усуненні взаємодії. З іншого боку, умову (17.33) не було важко реалізувати, оскільки оператор вільного електромагнітного поля розбивається на два доданки: оператор народження A^+_μ і оператор знищення A^-_μ, а у випадку його взаємодії з іншими полями $A_\mu(x)$ залежить від величини струму J_μ, що породжується полями матерії і задовольняє рівняння

$$\Box A_\mu(x) - \partial_\mu\partial^\nu A_\nu(x) = J_\mu(x). \tag{31.5}$$

У цьому випадку застосовують штучний "*трюк*". Розглядають так зване псевдомаксвелівське (pseudo-Maxwell) рівняння

$$\Box A_\mu(x) - \lambda\partial_\mu\partial^\nu A_\nu(x) = J_\mu(x) \tag{31.6}$$

при $\lambda \neq 1$. Якщо б умова Лоренца (7.8) виконувалась, то рівняння (31.5) і (31.6) були б еквівалентні. Введемо допоміжний оператор

$$L(x) = \partial^\mu A_\mu(x). \tag{31.7}$$

Якщо тепер будемо вимагати збереження струму (рівняння неперервності)

$$\partial^\mu J_\mu(x) = 0,$$

то, подіявши на рівняння (31.6) оператором ∂_μ і просумувавши за μ, отримаємо рівняння

$$(1 - \lambda)\Box L(x) = 0.$$

Це означає, що поле $L(x)$ задовольняє вільне хвильове рівняння при $\lambda \neq 1$, і $L(x)$ можна записати у вигляді (7.15)

$$L(x) = L^+(x) + L^-(x).$$

Тому так само, як і у випадку вільного електромагнітного поля, у просторі станів $\mathscr{H}$ можна визначити множину (див. (17.36))

$$\mathscr{P} := \big\{\Phi \in \mathscr{H} \big| L^-(x)\Phi \equiv 0\big\}.$$

На цій множині рівняння (31.5) і (31.6) будуть еквівалентні у слабкому змісті, тобто як середні значення, оскільки для Φ, $\Psi \in \mathscr{P}$

$$(\Phi, L(x)\Psi) \equiv 0.$$

Побудова простору станів $\mathscr{H}$ і множини $\mathscr{D}$ є, звичайно, більш складною, оскільки лінійну оболонку всюдищільних векторів у просторі $\mathscr{H}$ треба будувати за допомогою поліномів від операторів A_μ, ψ і $\bar{\psi}$. Більш детальний аналіз цієї побудови, а також аналіз проблем, які виникають внаслідок її реалізації, можна знайти в праці [169] (див. також [186, ch. 6, 12]).

31.1.2. Квантування взаємодіючого електромагнітного поля в кулонівській калібровці

У підпункті 17.2.3 вже фактично було проквантовано електромагнітне поле канонічним методом за умови, що між канонічними змінними поля $A_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ існував зв'язок (7.54), який фіксував калібровку (кулонівська калібровка). Відмінність від випадку вільного електромагнітного поля полягає у тому, що оператор $A_0(x)$ вже не можна вибрати тотожнім нулем, через те що він пов'язаний із розподілом зарядів у системі взаємодіючих (за допомогою електромагнітного потенціалу) частинок матерії (тобто електронів і позитронів). Цей зв'язок виражається формулою (7.56), в якій $\varphi(\mathbf{x})$ можна покласти тотожно нулю. Тоді

узагальнений імпульс, що є згідно з (7.21) канонічно спряженою змінною до узагальненої координати $A_i(x)$, матиме вигляд

$$\pi^i_A(x) = -\left(\frac{\partial A^i(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0(x)}{\partial x_i}\right) = \partial_0 A_i(x) - \partial_i A_0(x). \tag{31.8}$$

Це дещо змінює вигляд вторинного зв'язку (17.44):

$$\varphi_2(A, \pi_A) \equiv \partial_i \pi^i_A(\mathbf{x}) + \Delta A_0(\mathbf{x}) = \partial_i \pi^i_A(\mathbf{x}) - J_0(\mathbf{x}) = 0, \tag{31.9}$$

оскільки внаслідок (31.8), (7.54) і (7.55) маємо

$$\partial_i \pi^i_A(\mathbf{x}) \;=\; J_0(\mathbf{x}).$$

Густина заряду $J_0(x)$ є функцією полів матерії $\bar\psi$ та ψ і не залежить від канонічних змінних $A_i(x)$, $\pi^i_A(x)$. Це означає, що всі формули (17.45)–(17.47) залишаються такими самими, а канонічні комутаційні співвідношення полів $A_i(x)$ та імпульсів виражаються формулами (17.48). Треба також зауважити, що внаслідок того, що $\pi^i_A(x)$ залежить від $A_0(x)$, яке виражається через поля ψ і $\bar\psi$, канонічні змінні електромагнітного поля $\pi^i_A(x)$ не будуть комутувати з полями матерії.

Наступним кроком у побудові квантованих полів є побудова повного гамільтоніана. Згідно із загальним принципом канонічного формалізму (3.8) маємо

$$\mathscr{H}(x) =: \pi_\psi(x)\partial_0\psi(x) : + : \pi^j_A(x)\partial_0 A_j(x) : - : \mathscr{L}(x) :, \tag{31.10}$$

де $\pi_\psi(x)$, $\pi^i_A(x)$ і $\mathscr{L}(x)$ виглядають відповідно як (5.129), (31.8) і (9.9).

Враховуючи зв'язок (7.55), (7.56) з $\varphi \equiv 0$ і вираз для оператора струму (5.115), вираз для оператора енергії можна записати так:

$$H = P^0 = \int d\mathbf{x}\mathscr{H}(x) = H_0 + H_I, \tag{31.11}$$

де

$$H_0 = H_{0,\psi} + H_{0,A}, \tag{31.12}$$

$$H_{0,\psi} = \int d\mathbf{x} :\overset{*}{\psi}(x)\big(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m\big)\psi(x) :, \tag{31.13}$$

$$H_{0,A} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\big[: (\partial_0 \boldsymbol{A})^2 : + : (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(x))^2 : \big] \tag{31.14}$$

– оператори енергій вільних полів, а

$$H_I = H_{I,\boldsymbol{A}} + H_{I,A_0}, \tag{31.15}$$

$$H_{I,\boldsymbol{A}} = \int d\mathbf{x} : \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A} :, \tag{31.16}$$

$$H_{I,A_0} = H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\int d\mathbf{y}\frac{:J^0(x)J^0(y):}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \tag{31.17}$$

$$J^\mu(x) = -e:\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x):. \tag{31.18}$$

Тоді так само, як і у випадку скалярного поля (див. ф-лу (21.11)), поля $\psi(x)$, $\bar\psi(x)$ і $A_\mu(x)$, що задовольняють рівняння (31.4), будуються за допомогою формальних співвідношень

$$F_i(x) = e^{ix^0H}F_i(0,\mathbf{x})e^{-ix^0H}, \quad i=1,2,3, \tag{31.19}$$

де $F_1=\psi$, $F_2=\bar\psi$, $F_3=A_\mu$ (задача 31.2), а поля $F_i(0,\mathbf{x})$ задовольняють перестановні співвідношення (16.1) та (17.48).

Зауваження 31.1. *Загальні математичні проблеми, що виникають при обґрунтуванні формули* (31.19) *мають такий самий характер, як і поля* (21.11) *(див. п.*21.2*). Технічні ж проблеми значно ускладнюються, перш за все, внаслідок виникнення більш сингулярних інтегралів вигляду* (21.32)*. Детальний аналіз цих проблем можна знайти в* [68]*. Крім того, такі ж проблеми з'являються і при побудові матриці розсіяння.*

На завершення розглянемо питання побудови фотонного пропагатора, що буде відповідати внутрішнім лініям діаграм Фейнмана, правила побудови яких будуть сформульовані у підрозділі 31.2.

31.1.3. Фотонний пропагатор і умови калібрування

У п.22.4 на прикладі самовзаємодії скалярного поля стало зрозуміло, що пропагатором, який відповідає внутрішній лінії діаграм Фейнмана, є функція Гріна диференціального оператора, що визначає ліву частину класичного рівняння для вільного поля. У § 7 було видно, що для електромагнітного поля таке рівняння може мати різну форму, залежно від вибору калібровки. Наприклад, рівняння (7.6) записано у калібрувально інваріантному вигляді, а рівняння (7.9) є еквівалентним рівнянню (7.6) за умови, що виконується умова Лоренца (7.8). Спробуємо спершу знайти функцію Гріна оператора, що відповідає калібрувально інваріантному рівнянню (7.6). Тоді відповідна функція Гріна $G^A_{\mu\nu}(x)$ повинна задовольняти рівняння

$$\partial^\alpha\partial_\alpha G^A_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu\partial^\sigma G^A_{\sigma\nu}(x) = -g_{\mu\nu}\delta(x).$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді перетворення Фур'є

$$G^A_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, e^{-ik\cdot x}\widetilde G^A_{\mu\nu}(k).$$

Таким чином, відповідне рівняння для $\widetilde G^A_{\mu\nu}(k)$ має вигляд

$$(\delta_{\mu\sigma}k^2 - k_\mu k^\sigma)\widetilde G^A_{\sigma\nu}(k) = g_{\mu\nu}. \tag{31.20}$$

Рівняння (31.20) перепишемо у матричній формі

$$\widetilde{\Pi}^0(k)G^A(k) = G, \tag{31.21}$$

де матриця G визначається матричним тензором $g_{\mu\nu}$ (див. (1.2)), а матричний елемент матриці $\Pi = \Pi(k)$ має вигляд

$$\widetilde{\Pi}^0_{\mu\nu} = k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu g_{\nu\nu}k_\nu.$$

Легко підрахувати (задача 31.3), що

$$\det\widetilde{\Pi}^0 = 0.$$

Це означає, що матриця $\widetilde{\Pi}^0(k)$ не має оберненої, а, отже, не можна розв'язати рівняння (31.20), (31.21) відносно функції $G^A(k)$.

Щоб подолати цю проблему, треба зафіксувати калібровку. Найбільш зручно це зробити, додавши до лагранжіана $\mathscr{L}_A(x)$ калібрувально-неінваріантний член

$$\Delta\mathscr{L}_L(x) = -\frac{1}{2\alpha}L(x)^2 = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu(x))^2, \tag{31.22}$$

де параметр α є довільним і може бути спрямованим до нескінченності після підрахунків. Але через калібрувальну інваріантність теорії фізичні результати не повинні залежати від α, а отже, параметр α можна залишити скінченним, надаючи йому того чи іншого значення, залежно від задачі. Тоді перші два рівняння руху (31.4) для нового лагранжіан

$$\mathscr{L}'(x) = \mathscr{L}(x) + \Delta\mathscr{L}_L(x)$$

не зміняться, а третє рівняння набуде вигляду

$$\Box A_\mu(x) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu(x)) = -J_\mu(x).$$

У цьому випадку функція Гріна задовольняє рівняння

$$-\partial^\beta\partial_\beta G^A_{\mu\nu}(x) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial_\mu\partial^\sigma G^A_{\sigma\nu}(x) = g_{\mu\nu}\delta(x)$$

або для фур'є-перетворення $\widetilde{G}^A_{\mu\nu}(k)$ маємо

$$\left(\delta_{\mu\sigma}k^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha}k_\mu k^\sigma\right)\widetilde{G}^A_{\sigma\nu}(k) = -g_{\mu\nu}. \tag{31.23}$$

Легко переконатися: при $k \not\equiv 0$ і $\alpha \neq 0, \infty$ детермінант матриці, що визначає ліву частину рівняння, не дорівнює нулю, а розв'язком рівняння (31.23) є матриця з матричними елементами

$$\widetilde{G}^A_{\mu\nu}(k) := \widetilde{D}^c_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(\alpha-1)\right]. \tag{31.24}$$

Повторюючи тепер усі міркування п.20.1, вираз для причинної функції Гріна електромагнітного поля буде мати вигляд

$$D^c_{\mu\nu}(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(\alpha-1)\right). \tag{31.25}$$

Тут α є довільним числом, від якого не повинні залежати величини фізичних спостережуваних, і можна забути умови, які накладено на α.

Величині $\alpha = 1$ відповідає пропагатор Фейнмана $ig_{\mu\nu}D^c_0(x-y)$ (див. (20.15)), який є функцією Гріна оператора д'Аламбера. Дуже часто при розрахунках використовують так звану калібровку Ландау ($\alpha = 0$), а в теорії калібрувальних полів Янга–Міллса *аксіальну калібровку*. Основні види калібровок будуть описані нижче.

31.2. S-матриця в КЕД

31.2.1. Теорія збурень. Діаграми Фейнмана

Формальний вираз для S-оператора (22.36)–(22.39) у випадку КЕД набуває такого вигляду:

$$S = T\,\exp\left[ie\int\limits_{\mathbb{M}} :\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x): dx\right]. \tag{31.26}$$

Розкладаючи в ряд експоненту у виразі (31.26) і користуючись теоремою Віка для T-добутку (див. п.20.4.2), можна переписати коефіцієнти розкладу S_n у вигляді суми нормальних добутків полів $\bar\psi$, ψ і A_μ з усіма можливими спарюваннями. Цей запис одразу дає можливість сформулювати правила відповідності між аналітичними виразами і їх графічними зображеннями – діаграмами Фейнмана. Очевидно, що у випадку КЕД внутрішні лінії будуть двох видів.

Перший вид буде відповідати спарюванню двох операторів електромагнітного поля (див. (20.49)). Позначимо відповідне спарення (як результат спарювання) в діаграмі Фейнмана хвилястою лінією:

$$iD^c_{\mu\nu}(x-y) \quad\Longleftrightarrow\quad (\mu,x) \qquad\qquad (\nu,y) \quad . \tag{31.27}$$

Другий тип буде відповідати спарюванню двох операторів електронно-позитронного поля. Будемо позначати це спарення суцільною лінією з визначеним напрямком:

$$\tfrac{1}{i}S^c(x-y) \quad\Longleftrightarrow\quad x \qquad\qquad y \quad . \tag{31.28}$$

При цьому оператору $A_\mu(x)$ буде відповідати хвиляста зовнішня лінія, що починається (або закінчується) в точці x:

$$A_\mu(x) \quad\Longleftrightarrow\quad {}^{x} \qquad\qquad , \tag{31.29}$$

а оператору $\psi(x)$ відповідатиме суцільна лінія з напрямком у точку x:

$$\psi(x) \qquad \Longleftrightarrow \quad x \qquad . \tag{31.30}$$

Оператору $\bar{\psi}(y)$ буде відповідати суцільна лінія з напрямком від точки y:

$$\overline{\psi}(y) \qquad \Longleftrightarrow \quad y \qquad . \tag{31.31}$$

І, нарешті, вершині, у якій зустрічаються всі три лінії (31.29)–(31.31), зіставляється множник $e\gamma^\mu$ або разом із (31.29)–(31.31):

$$e : \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) : \quad \Longleftrightarrow \qquad \begin{matrix} & \\ & \\ x & \end{matrix} \qquad . \tag{31.32}$$

Отже, для запису аналітичного виразу, що відповідає заданій діаграмі Фейнмана, треба користуватися правилами (31.27)–(31.32) і починати запис з ферміонної лінії, що виходить із діаграми, рухаючись у протилежному напрямку.

Аналогічно до випадку із взаємодією (21.3) розраховуються і матричні елементи S-оператора між початковим Φ_s і кінцевим Φ_f станами (див. п.22.4.3).

У цьому випадку правила відповідності для матричних елементів в імпульсному просторі і відповідними лініями в діаграмах Фейнмана будуть такими:

1) руху електрона, що має імпульс $\mathbf{p}$ у початковому стані, відповідає фактор

$$(2\pi)^{-3/2}v^{\nu,-}(\mathbf{p}) \qquad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{p} \qquad ; \tag{31.33}$$

2) рух позитрона з імпульсом $\mathbf{p}$ і спіном ν у початковому стані – фактор

$$(2\pi)^{-3/2}\overline{v}^{\nu,-}(\mathbf{p}) \qquad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{p} \qquad ; \tag{31.34}$$

3) руху електрона з імпульсом $\mathbf{p}$ і спіном ν у кінцевому стані– фактор

$$(2\pi)^{-3/2}\overline{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}) \qquad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{p} \qquad ; \tag{31.35}$$

4) руху позитрона з імпульсом $\mathbf{p}$ і спіном ν у кінцевому стані – фактор

$$(2\pi)^{-3/2}v^{\nu,+}(\mathbf{p}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{p} \quad ; \tag{31.36}$$

5) руху фотона з поляризацією e^{ν}_{μ} і імпульсом $\mathbf{k}$ у початковому або кінцевому стані – фактор

$$\frac{e^{\nu}_{\mu}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{k} \quad ; \qquad \mathbf{k} \tag{31.37}$$

6) руху віртуального електрона від точки y до точки x – фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{m+\widehat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}dp \qquad \Longleftrightarrow \qquad p, e^- \quad ; \tag{31.38}$$

7) руху віртуального позитрона від точки x до точки y – фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{m+\widehat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}dp \qquad \Longleftrightarrow \qquad p, e^+ \quad ; \tag{31.38$'$}$$

8) руху віртуального фотона з x в y або з y в x з 4-імпульсом k – фактор

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \left[g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(\alpha-1)\right]\frac{dk}{k^2+i\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow_{\mu} \qquad k \qquad \nu \quad ; \qquad k \tag{31.39}$$

9) а вершині діаграми, в якій відбуваються процеси взаємодії (віртуального перетворення) частинок з 4-імпульсами p_1, p_2 і k, відповідає фактор

$$ie\gamma^{\mu}(2\pi)^4\delta(p_2-p_1-k) \Longleftrightarrow \qquad \begin{matrix} & p_1 \\ & \\ & k \\ & \\ p_2 & \end{matrix} \quad . \tag{31.40}$$

Зауважимо, що використаний термін *віртуальні частинки* означає, що для віртуальних частинок не виконується звичайне релятивістське співвідношення (4.4) між енергією p^0 і імпульсом $\mathbf{p}$, тобто $p^2 \neq m^2$.

Крім правил 1)–9) для запису матричних елементів необхідно також визначити числовий множник і знак, що стоїть перед аналітичним виразом внесків для даного процесу. Найкращим способом визначення цих факторів є теорема Віка. Більш детальний аналіз (обґрунтування) обчислення матричних елементів за правилами Фейнмана (31.33)–(31.40) можна знайти у монографії [13, § 20,21].

31.2.2. Коефіцієнтні функції S-матриці в термінах операторів народження і знищення ліній фейнманівських діаграм

У випадку КЕД розклад S-оператора за нормальними добутками вільних полів матиме вигляд

$$\begin{aligned} S &= \sum_{N,M=0}^{\infty} \frac{1}{(N!)^2 M!} \sum_{(\alpha)_N,(\alpha')_N,(\mu)_M} \int (dx)^N (dx')^N (dy)^M \times \\ &\times F_{2N,M}\big((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_N;(\mu,y)_M\big) : \bar\psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\bar\psi_{\alpha_N}(x_N) \times \\ &\times \psi_{\alpha'_1}(x'_1)\cdots\psi_{\alpha'_N}(x'_N) A_{\mu_1}(y_1)\cdots A_{\mu_M}(y_M) : . \end{aligned} \tag{31.41}$$

Зауважимо, що векторні індекси $\mu_1,\ldots,\mu_N$ в означенні $F_{2N,M}$ слід вважати верхніми (контрваріантними). Крім того, рівне число операторів $\bar\psi$ і ψ у розкладі (31.41) обумовлено умовою інваріантності оператора S відносно операції зарядового спряження (22.58). Для того, щоб записати вираз (31.26) через коефіцієнтні функції $F = \{F_{2N,M}\}_{N,M=0}^{\infty}$, визначимо (так само, як і в п.23.1) операції, що відповідають перетворенню коефіцієнтних функцій оператора (31.41) в коефіцієнтні функції операторів

$$: \bar\psi(x)S : , \quad : \overbracket{\bar\psi(x)S} : , \quad : \psi(x)S : , \quad : \overbracket{\psi(x)S} : , \quad : A_\mu(x)S : , \quad : \overbracket{A_\mu(x)S} : \ . \tag{31.42}$$

Пропонуємо (задача 31.4) повторити виклади п.23.1, враховуючи, що під знаком нормального добутку оператори ψ і $\bar\psi$ антикомутують із операторами ферміполів. Позначимо відповідні операції через $\bar\phi^+(x)$, $-\bar\phi^-(x)$, $\phi^+(x)$, $\phi^-(x)$, $a^+_\mu(x)$ і $a^-_\mu(x)$. Треба зауважити, що знак "$-$"виділено перед операцією, що відповідає оператору $: \overbracket{\bar\psi(x)S} :$, оскільки в записі цієї операції за допомогою функції $S^c(x-y)$ треба врахувати, що

$$\overbracket{\bar\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = -\overbracket{\psi_\beta(y)\bar\psi_\alpha(x)} = -\frac{1}{i} S^c_{\beta\alpha}(y-x).$$

При розрахунках треба розглянути розклад ВВФ вигляду (31.41), не враховуючи умову інваріантності відносно операції зарядового спряження, тобто розклад за коефіцієнтними функціями $F_{N,N',M}$, де N і N' – відповідне число

полів $\bar\psi$ і ψ у розкладі вигляду (31.41), але $N \neq N'$, тобто сума в (31.41) виконується і за N, і за N'. Тоді отримаємо вирази для ВВФ-лів (31.42)(див. список позначень, що скорочують запис):

$$(\bar\phi^+_\alpha(x)F)_{N,N',M}((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M) = \tag{31.43}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\delta_{\alpha\alpha_j}\delta(x-x_j)F_{N-1,N',M}\big((\alpha,x)_N\backslash\{\alpha_j,x_j\};(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M\big),$$

$$(\bar\phi^-_\alpha(x)F)_{N,N',M}((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M) = \tag{31.44}$$

$$= (-1)^N\int dx' F_{N,N'+1,M}\big((\alpha,x)_N;(\alpha',x'),(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M\big)\frac{1}{i}S^c_{\alpha'\alpha}(x'-x),$$

$$(\phi^+_\alpha(x)F)_{N,N',M}((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M) = \tag{31.45}$$

$$= \sum_{j=1}^{N'}(-1)^{N+j-1}\delta_{\alpha\alpha'_j}\delta(x-x'_j)F_{N,N'-1,M}\big((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'}\backslash\{\alpha'_j,x'_j\};(\mu,y)_M\big),$$

$$(\phi^-_\alpha(x)F)_{N,N',M}((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M) = \tag{31.46}$$

$$= \int dx'\frac{1}{i}S^c_{\alpha\alpha'}(x-x')F_{N+1,N',M}\big((\alpha',x'),(\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M\big),$$

$$(a^+_\mu(x)F)_{N,N',M}((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M) = \tag{31.47}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\delta_{\mu\mu_j}\delta(x-y_j)F_{N,N',M-1}\big((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_N\backslash\{\mu_j,y_j\}\big),$$

$$(a^-_\mu(x)F)_{N,N',M}((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu,y)_M) = \tag{31.48}$$

$$= \int dy' iD_{\mu\mu'}(x-y')F_{N,N',M+1}\big((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_{N'};(\mu',y'),(\mu,y)_M\big).$$

Легко пересвідчитись (задача (31.5)) у справедливості таких переставних співвідношень:

$$[\bar\phi^+_\alpha(x),\phi^-_{\alpha'}(x')]_+ = [\bar\phi^-_\alpha(x),\phi^+_{\alpha'}(x')]_+ = \frac{1}{i}S^c_{\alpha\alpha'}(x-x'), \tag{31.49}$$

$$[a^-_\mu(x),a^+_{\mu'}(x')]_- = iD_{\mu\mu'}(x-x'). \tag{31.50}$$

Усі інші комутатори або антикомутатори перетворюються в нуль. Із сказаного вище легко також встановити, що операторам $T(\bar\psi(x)S)$, $T(\psi(x)S)$ і $T(A_\mu(x)S)$, де T – операція T-добутку, відповідають відповідно формальні оператори

$$\begin{aligned}\bar\phi(x) &= \bar\phi^+(x) - \bar\phi^-(x),\\ \phi(x) &= \phi^+(x) + \phi^-(x),\\ a_\mu(x) &= a^+_\mu(x) + a^-_\mu(x),\end{aligned} \tag{31.51}$$

для яких (враховуючи (31.49), (31.50)) справедливі співвідношення

$$\begin{aligned}[\bar{\phi}_\alpha(x), \phi_{\alpha'}(x')]_+ &= 0,\\ [a_\mu(x), \phi_{\mu'}(x')]_- &= 0.\end{aligned} \tag{31.52}$$

Зауважимо також, що в евклідовій області формальним операторам (31.51), (31.52) відповідають вільні евклідові фермі-поля, які визначено у розділі VI формулами (29.21), (29.22).

Для того, щоб записати вираз (31.26) через коефіцієнтні функції, продиференціюємо (31.26) за e. Тоді

$$\frac{dS}{de} = iT\Big(\int\limits_{\mathbb{M}^4} : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) : S\,dx\Big). \tag{31.53}$$

Застосувавши метод, викладений у п.23.1, перепишемо це рівняння в термінах дії операцій (31.43)–(31.48) на послідовність коефіцієнтних функцій $F = \{F_{2N,M}\}_{N,M=0}^{\infty}$ оператора S:

$$\frac{dF}{de} = AF, \quad F\big|_{e=0} = \Omega_0 = (1, 0, 0, \ldots), \tag{31.54}$$

де

$$A = i\int : \bar{\phi}(x)\gamma^\mu\phi(x)a_\mu(x) : dx, \tag{31.55}$$

а формальний розв'язок рівняння (31.54)

$$F = e^{eA}\Omega_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}A^n\Omega \tag{31.56}$$

збігається із рядом теорії збурень для коефіцієнтних функцій матриці розсіяння.

Аналогічно можна записати систему рівнянь *резольвентного типу*, ітерації яких відтворюють ряд теорії збурень, що не враховує вакуумних внесків (див. п.23.2). Детальніше про ці рівняння можна дізнатися з монографії [68].

31.2.3. Теорема Фаррі

При обчисленні матричних елементів за допомогою діаграм Фейнмана важливим технічним моментом є теорема Фаррі, яка дає можливість не враховувати діаграм, що містять ферміонні замкнуті цикли з непарним числом вершин. Сформулюємо це твердження у вигляді теореми.

Теорема Фаррі. [126] *Внески діаграм Фейнмана для S-оператора, що містять у собі замкнуті ферміонні цикли з непарним числом вершин, тотожно перетворюються в нуль.*

Перш ніж довести цей факт, зауважимо, що внесок такої діаграми в розклад S-оператора за теорією збурень (22.36), (22.37) буде відповідати члену в

$$S_n(x)_n = (ie)^n \int T\Big(: \bar\psi(x_1)\widehat{A}(x_1)\psi(x_1) : \ldots : \bar\psi(x_n)\widehat{A}(x_n)\psi(x_n) : \Big)(dx)_n,$$

в якому всі фермі-оператори (після застосування теореми Віка) для T-добутку спарені один з одним таким чином, що утворюють замкнутий цикл, тобто

$$\overbrace{\psi(x_1)\bar\psi(x_2)}\,\overbrace{\psi(x_2)\psi(x_3)}\cdots\,\overbrace{\psi(x_{n-1})\bar\psi(x_n)}\,\overbrace{\psi(x_n)\bar\psi(x_1)}.$$

Тоді, враховуючи, що

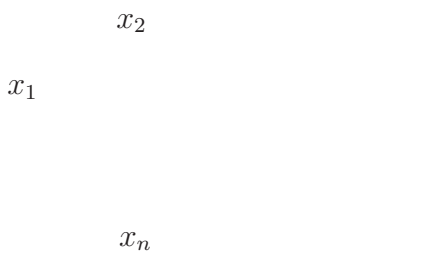
$$\overbrace{\bar\psi(x_1)\psi(x_n)} = -\overbrace{\psi(x_n)\bar\psi(x_1)} = -\frac{1}{i}S(x_n - x_1), \tag{31.57}$$

відповідний внесок в S-оператор виглядатиме так:

$$S_n^{\text{ц}} = -(ie)^n \int \mathrm{Tr}\Big[: \widehat{A}(x_1)\frac{1}{i}S^c(x_1 - x_2)\widehat{A}(x_2)\ldots\widehat{A}(x_n)\frac{1}{i}S^c(x_n - x_1) : \Big](dx)_n. \tag{31.58}$$

Знак сліду $\mathrm{Tr}[\cdots]$ стосується матриць γ^μ, що входять у визначення операторів $\widehat{A}(x)$ (див. (9.9) або (31.3)) і матриці-функції $\dfrac{1}{i}S^c(x)$ (20.13) (означення $\widehat{p}$ див. в (5.85)).

Діаграма Фейнмана, що відповідає аналітичному виразу (31.58), матиме вигляд



(31.58′)

Скористаємося властивостями сліду, який залишається таким самим при циклічній перестановці матриць. Тоді

$$\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, [C^{-1}AC] \tag{31.59}$$

для будь-якої матриці C, що має обернену.

Нехай матриця C збігається з оператором зарядового спряження (5.94), (5.99). Тоді, застосовуючи (31.59) до виразу (31.58) і враховуючи властивості (тут T—знак транспортування матриць)

$$C^{-1}\widehat{A}(x)C = -\widehat{A}(x)^T,$$

$$C^{-1}S^c(x)C^{-1} = S^c(-x)^T,$$

які є наслідками властивості (5.95), представлення (20.13) і означення (5.85), отримуємо для (31.58) вираз

$$S_n^{\text{ц}} = (-1)^{n+1}(ie)^n \int \mathrm{Tr}\Big[: \widehat{A}(x_1)\frac{1}{i}S^c(x_1-x_n)\widehat{A}(x_n)\frac{1}{i}S^c(x_n-x_{n-1})\widehat{A}(x_{n-1})\dots$$

$$\dots\widehat{A}(x_3)\frac{1}{i}S^c(x_3-x_2)\widehat{A}(x_2)\frac{1}{i}S^c(x_2-x_1)\Big](dx)_n, \tag{31.60}$$

де використано властивості

$$A_1^T A_2^T \cdots A_{N-1}^T A_N^T = (A_N A_{N-1}\cdots A_2 A_1)^T$$

і

$$\mathrm{Tr}\, B^T = \mathrm{Tr}\, B.$$

Виконаємо в (31.60) заміну змінних $x_n \to x_2$, $x_{n-1} \to x_3, \dots, x_2 \to x_n$. Тоді отримаємо рівність

$$S_n^{\text{ц}} = (-1)^n S_n^{\text{ц}},$$

звідки випливає, що при непарному n, $S_n^{\text{ц}} \equiv 0$.

□

Зауваження 31.1. *Із доведення зрозуміло, що теорема залишається справедливою у випадку, коли деяке число операторів електромагнітного поля A_μ спарене між собою.*

Зауваження 31.2. *Теорема Фаррі набуває дещо іншого змісту при розрахунку матричних елементів S-матриці для конкретних процесів, тобто при застосуванні правил* (31.33)–(31.40). *У цьому випадку на діаграмі вигляду (31.58′) треба вказати напрям руху частинок (тобто імпульсів) і врахувати вид частинки, тобто заряд, таким чином, щоб у кожній вершині не порушувався закон збереження заряду. Тому, використовуючи правила Фейнмана* (31.33)–(31.40), *легко переконатися, що внесок діаграми вигляду (31.58′) з непарним n вже не буде перетворюватися тотожно в нуль. Але разом із такою діаграмою треба врахувати ще діаграму, у якої кожну віртуальну частинку треба замінити на віртуальну античастинку, що еквівалентно протилежному обходу циклічного контура і відповідному запису аналітичного виразу. Виявляється, що цей аналітичний вираз збігається за абсолютною величиною з попереднім і є протилежним за знаком, а отже, в сумі вони компенсують один одного (задача* 31.6 *).*

31.2.4. Умова калібрувальної інваріантності для коефіцієнтних функцій S-оператора

Матриця розсіяння повинна бути інваріантною відносно калібрувальних перетворень

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x) = e^{ie\chi(x)}\psi_\alpha(x), \tag{31.61а}$$

$$\bar\psi_\beta(x) \to \bar\psi'_\beta(x) = e^{-ie\chi(x)}\bar\psi_\beta(x), \tag{31.61б}$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x), \tag{31.61в}$$

оскільки таким є повний лагранжіан (31.2).

Інваріантність S-оператора відносно перетворень (31.61а)–(31.61в) легко перевірити, якщо скористатись його представленням (31.26) у вигляді ряду теорії збурень. Дійсно, інваріантність відносно перетворень (31.61а), (31.61б) очевидна, а інваріантність відносно заміни (31.61в) буде наслідком рівнянь (31.4), якщо припустити, що $\chi(x)$ спадає на безмежності, і проінтегрувати вираз $\int : \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) : \partial_\mu\chi(x)$ частинами (задача 31.7). Щоб отримати умови на функції $F_{2N,M}$, треба спершу записати перетворений оператор S' через поля $\bar\psi'$, і A' у вигляді (31.46).

Внаслідок того, що поля $\bar\psi(x)$ і $\psi(x)$ беруться в одній і тій самій точці x, маємо

$$S' = T\exp\left[ie\int\limits_{\mathbb{M}^4} : \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)A'_\mu(x) : dx\right].$$

Розкладемо тепер експоненту в ряд і застосуємо теорему Віка. Після пересумування всіх внесків при однакових нормальних добутках полів отримаємо вираз

$$\begin{aligned} S' \;=\; & \sum_{N,M=0}^{\infty}\frac{1}{(N!)^2M!}\sum_{(\alpha)_N(\alpha')_N(\mu)_M}\int\limits_{\mathbb{M}^{4(2N+M)}}(dx)^N(dx')^N(dy)^M\times \\ & \times\; F'_{2N,M}\big((\alpha,x)_N;(\alpha',x')_N;(\mu,y)_M\big) : \bar\psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\bar\psi_{\alpha_N}(x_N)\times \\ & \times\; \psi_{\alpha'_1}(x'_1)\cdots\psi_{\alpha'_N}(x'_N)A'_{\mu_1}(y_1)\cdots A'_{\mu_M}(y_M) :, \end{aligned} \tag{31.62}$$

де $F'_{2N,M}$ відрізняється від $F_{2N,M}$ тим, що ряд теорії збурень функцій $F'_{2N,M}$ будується за допомогою функцій

$$iD'^{,c}_{\mu\nu}(x-y) = \overline{A'_\mu(x)A'_\nu(y)},$$

які відрізняються від $iD^c_{\mu\nu}(x-y)$ на член $\partial_\mu\chi(x)\partial_\nu\chi(y)$. Але умова інваріантності

$$S' = S \tag{31.63}$$

вимагає, щоб принаймні

$$F'_{2N,0} = F_{2N,0}. \tag{31.64}$$

Це випливає з порівняння у розкладах (31.41) і (31.62) доданків, що не містять у собі операторів $A'_\mu(y)$. Умова (31.64) означає, що коефіцієнтні функції і матричні елементи не будуть залежати від вибору калібровки фотонного пропагатора. Щоб забезпечити виконання рівняння (31.63), крім умови (31.64), яку треба поширити на всі коефіцієнтні функції

$$F'_{2N,M} = F_{2N,M},$$

треба накласти умову

$$\frac{\partial}{\partial y_j^{\mu_j}} F_{2N,M}(\ldots;\ldots;\ldots,\mu_j,y_j,\ldots) = 0, \quad j = 1,\ldots,M. \tag{31.65}$$

Нагадаємо, що за індексу μ_j виконується сумування від 0 до 3. В імпульсному просторі умова (31.65) має вигляд

$$(k_j)_{\mu_j} \widetilde{F}_{2N,M}(\ldots;\ldots;\ldots,\mu_j,y_j,\ldots) = 0 \tag{31.66}$$

і є фактично умовою поперечності функцій $\widetilde{F}_{2N,M}$, $M \geqslant 2$.

31.3. Рівняння для функцій Гріна і коефіцієнтних функцій S-матриці

31.3.1. Рівняння Швінгера

В п.24.2 були отримані рівняння для функцій Гріна скалярних полів, що відповідають самовзаємодії (21.3). Аналогічно з рівнянь (31.4) легко отримати рівняння для функцій Гріна, що визначаються виразом

$$G_{2N,M}((\alpha,x)_N;(\beta,x')_N;(\mu,y)_M) = \tag{31.67}$$

$$= \Big(\Phi_0, T\big(\psi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\psi_{\alpha_N}(x_N)\overline{\psi}_{\beta_1}(x'_1)\cdots\overline{\psi}_{\beta_N}(x'_N)A_{\mu_1}(y_1)\cdots A_{\mu_M}(y_M)\big)\Phi_0\Big).$$

Перше з цих рівнянь має вигляд (задача 31.8)

$$\big(i\gamma^\mu_{\alpha_1\alpha}\partial_{\mu,x_1} - m\big)G_{2N,M}\big((\alpha,x)_N\,|_{\alpha_1=\alpha};(\beta,x')_N;(\mu,y)_M\big) = \tag{31.68}$$

$$= -e\gamma^\mu_{\alpha_1\alpha}G_{2N,M+1}\big((\alpha,x)_N\,|_{\alpha_1=\alpha};(\beta,x')_N;(\mu,x_1),(\mu,y)_M\big) +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(-1)^{N-j}i\delta(x_1-x'_j)\delta_{\alpha_1\beta_j}G_{2N-2,M}\big((\alpha,x)_N\setminus(\alpha_1,x_1);(\beta,x')_N\setminus(\beta_j,x'_j);(\mu,y)_M\big),$$

де використані позначення (див. також список позначень, що скорочують запис)

$$(\alpha,x)_N\,|_{\alpha_1=\alpha} := (\alpha,x_1),(\alpha_2,x_2),\ldots,(\alpha_N,x_N).$$

В інтегральній формі рівняння (31.68) мають такий вигляд ($N \neq 0$):

$$G_{2N,M}\big((\alpha,x)_N;(\beta,x');(\mu,y)_M\big) = \tag{31.69}$$

$$= \int dx \frac{1}{i} S^c_{\alpha_1\alpha}(x_1-x)(ie)\gamma^\mu_{\alpha\alpha'} G_{2N,M+1}\big((\alpha,x)_N\mid_{\alpha_1=\alpha'};(\beta,x')_N;(\mu,x),(\mu,y)_M\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(-1)^{N-j}\frac{1}{i}S^c_{\alpha_1\beta_j}(x_1-x'_j)G_{2N-2,M}\big((\alpha,x)_N\setminus(\alpha_1,x_1);(\beta,x')_N\setminus(\beta_j,x'_j);(\mu,y)_M\big).$$

Зовсім аналогічно (пропонуємо це зробити самостійно, задача 31.9) легко отримати подібне співвідношення для функцій $G_{2N,M}$, виходячи з останнього рівняння (31.4).

У лоренцовій калібровці воно має такий вигляд ($M \geqslant 1$):

$$G_{2N,M}\big((\alpha,x)_N;(\beta,x')_N;(\mu,y)_M\big) = \int dy\; ig^{\mu_1\mu} D^c_0(y_1-y)\times \tag{31.70}$$

$$\times(-1)^{N+1}(ie)\gamma^\mu_{\beta\alpha}G_{2N+2,M-1}\big((\alpha,y),(\alpha,x)_N;(\beta,y),(\beta,x')_N;(\mu,y)_M\setminus(\mu_1,y_1)\big)+$$

$$+(1-\delta_{1M})\sum_{j=2}^{M} ig^{\mu_1\mu_j}D^c_0(y_1-y_j)G_{2N,M-2}\big((\alpha,x)_N;(\beta,x')_N;(\mu,y)_M\setminus\{(\mu_1,y_1),(\mu_j,y_j)\}\big).$$

Зауважимо, що контрчлен, який відповідає підстановці в означення функції Гріна виразу $\gamma^\mu_{\beta\alpha}\overline{\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(x)}$, дорівнює нулю внаслідок теореми Фаррі.

Рівняння, що відповідає другому рівнянню системи (31.4) є фактично спряженим до (31.68) або (31.69), якщо врахувати, що

$$G_{2N,M}\big((x)_N;(x')_N;(y)_M\big) = (\otimes\gamma^0)^N G_{2N,M}\big((x')_N;(x)_N;(y)_M\big)^*(\otimes\gamma^0)^N,$$

де функції (31.67) записано в матричному вигляді за кожною з $(2N)$-змінних.

Рівняння (31.69), (31.70) є фактично нескінченною системою співвідношень між функціями Гріна довільного числа аргументів. Для визначення аналітичних виразів для функцій Гріна треба мати замкнуті інтегральні рівняння хоча б для "*основних*" функцій Гріна. Умовно такими "*основними*" функціями в КЕД вважаються повні функції Гріна, що відповідають розповсюдженню електрона (позитрона) $G_{2,0}((\alpha,x),\,(\beta,x'))$, фотона $G_{0,2}((\mu,y_1),\,(\mu_2,y_2))$ і його випромінюванню (поглинанню) $G_{2,1}\big((\alpha,x),\,(\beta,x'),\,(\mu,y)\big)$. Аналіз цих рівнянь розглянемо нижче.

31.3.2. Система рівнянь для власне енергетичних і вершинної частин функцій Гріна

У пункті 24.6 були описані, так звані, сильнозв'язні функції Гріна, тобто такі, що відповідають сумі вкладів усіх сильнозв'язних діаграм Фейнмана. У випадку КЕД існують дві сильнозв'язні 2-точкові функції Гріна.

Перша відповідає взаємодії електронів або позитронів з вакуумом і називається *масовим оператором*. Його позначають через $\widetilde{\Sigma}(p)$. Аналогічно до (24.44)–(24.48) він пов'язаний із повною 2-точковою електронно-позитронною функцією Гріна рівнянням Дайсона, яке в імпульсному представленні буде мати вигляд

$$\widetilde{G}_{2;0}(p) = \widetilde{G}^0_{2;0}(p) + \widetilde{G}^0_{2;0}(p)\frac{1}{i}\widetilde{\Sigma}(p)\widetilde{G}_{2,0}(p), \tag{31.71}$$

де

$$\widetilde{G}^0_{2;0}(p) = \frac{1}{i}\widetilde{S}^c(p) = \frac{m+\hat{p}}{i(m^2-p^2-i\varepsilon)} = \frac{1}{i(m-\hat{p}-i\varepsilon)}^1,$$

а його розв'язок набуває вигляду

$$\widetilde{G}_{2;0}(p) = \frac{1}{i(m-\hat{p}+\widetilde{\Sigma}(p)-i\varepsilon)}. \tag{31.72}$$

Друга відповідає взаємодії фотонів із вакуумом і називається *поляризаційним оператором*. Його позначають через $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(k)$. Відповідне рівняння Дайсона для фотонної функції Гріна має вигляд

$$\widetilde{G}_{0;2}(k)_{\mu\nu} = \widetilde{G}^0_{0;2}(k)_{\mu\nu} + \widetilde{G}^0_{0,2}(k)_{\mu\mu'}i\widetilde{\Pi}^{\mu'\nu'}(k)G_{0,2}(k)_{\nu'\nu}, \tag{31.73}$$

де

$$\widetilde{G}^0_{0;2}(k)_{\mu\nu} = i\widetilde{D}^{c,\text{ел}}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{i(k^2+i\varepsilon)}\left(g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(\alpha-1)\right) \tag{31.74}$$

вільна 2-точкова функція Гріна електромагнітного поля в α-калібровці (див. (31.25)).

Співвідношення (31.71) і (31.73) можна отримати з тих самих міркувань, що і співвідношення (24.47) (задача 31.10). Поляризаційний оператор $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(k)$ збігається з 2-точковою сильнозв'язною частиною коефіцієнтної функції $\widetilde{F}^{\mu\nu}_{0,2}$ і тому повинен задовольняти умову поперечності (31.66). Це означає, що

$$\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = (g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)\pi(k^2). \tag{31.75}$$

З аналізу виразу для $\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)$ у другому порядку теорії збурень (див. [13, § 24]) видно, що він задовольняє умову (31.73), якщо відкинути константу, що залежить від M^2, тобто перший член. Легко переконатися (задача 31.11), що повна функція Гріна $\widetilde{G}_{0,2}(k)_{\mu\nu}$ зберігає структуру

$$\widetilde{G}_{0,2}(k)_{\mu\nu} = \widetilde{G}^{tr}_{0,2}(k)_{\mu\nu} + \widetilde{G}^{l}_{0,2}(k)_{\mu\nu}, \tag{31.76}$$

де

$$\widetilde{G}^{tr}_{0,2}(k)_{\mu\nu} = -\frac{id(k^2)}{k^2+i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - -- \tag{31.77}$$

---

[1] Для будь-якої невиродженої матриці A тут і далі $\frac{1}{A} := A^{-1}$.

це поперечна (*transversal*) частина, а

$$\widetilde{G}^{l}_{0,2}(k)_{\mu\nu} = -\frac{i\alpha}{k^2+i\varepsilon}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - -- \tag{31.78}$$

це поздовжня (*longitudinal*) частина повної функції Гріна $\widetilde{G}_{0,2}$.

Тоді рівняння Дайсона (31.73) для функцій $d(k^2)$ набуває вигляду

$$d(k^2) = 1 + \pi(k^2)d(k^2). \tag{31.79}$$

Для перетворення Фур'є повної фотонної функції Гріна маємо формулу

$$\widetilde{G}_{0,2}(k)_{\mu\nu} = \frac{i}{\widetilde{\pi}(k^2) - k^2 - i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - \\ -\frac{i\alpha}{k^2+i\varepsilon}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \widetilde{\pi}(k^2) = k^2\pi(k^2). \tag{31.80}$$

Отже, електромагнітна взаємодія впливає лише на поперечну частину фотонної функції Гріна, в той самий час, коли її поздовжня частина залишається такою ж, як і у вільній теорії.

З рівнянь (31.69) і (31.70), застосовуючи техніку підрозділів 24.6 і 24.7, легко отримати рівняння для довільних зв'язних і сильнозв'язних функцій Гріна. Так само, як і рівняння (31.69), (31.70), вони встановлюють зв'язок між різними сильнозв'язними функціями Гріна. Для доведення перенормованості КЕД важливим є рівняння, що встановлює зв'язок 2-точкових функцій $\widetilde{\Sigma}(p)$ і $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(k)$ із сильнозв'язною вершинною функцією $\widetilde{\Gamma}^{\mu}_{2,1}(p, p-k)$. Цей зв'язок можна також отримати безпосередньо з аналізу діаграм Фейнмана (див., наприклад, [3, п.20.3]). Пропонуємо провести ці нескладні виклади, а тут запишемо їх остаточний вигляд:

$$\widetilde{\Sigma}(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int \gamma^\mu \widetilde{G}_{2,0}(p-k)\widetilde{G}_{0,2}(k)_{\mu\nu}\widetilde{\Gamma}^\nu(p, p-k)dk, \tag{31.81}$$

$$\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\int \gamma_\mu \widetilde{G}_{2,0}(p)\widetilde{\Gamma}_\nu(p, p-k)\widetilde{G}_{2,0}(p-k)dp, \tag{31.82}$$

де $\widetilde{G}_{2,0}$ і $\widetilde{G}_{0,2}$ – повні 2-х точкові функції Гріна, а *вершинна функція* визначається через сильнозв'язну вершинну частину співвідношенням

$$\widetilde{\Gamma}^{\mu}_{2,1}(p_1, p_2) := ie(2\pi)^4\widetilde{\Gamma}^\mu(p_1, p_2) := ie(2\pi)^4(\gamma^\mu + \Lambda^\mu(p_1, p_2)). \tag{31.83}$$

Якщо записати рівняння для $\widetilde{\Gamma}^{\mu}_{2,1}$, то це рівняння буде пов'язувати вже $\widetilde{\Gamma}^\mu$, $\widetilde{G}_{2,0}$ і $\widetilde{\Gamma}_{4,0}(p, k, q)$ (див., наприклад, [15, § 144]). Отже, система рівнянь для $\widetilde{\Sigma}(p)$, $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu(k)}$ і $\widetilde{\Gamma}^\nu(p, p-k)$ не є замкнутою. Замкнуту систему також можна виписати, якщо, виходячи з графічних міркувань, записати інтегральне співвідношення для функції $\widetilde{\Gamma}^\mu(p, k)$ у вигляді нескінченного ряду лише скелетних вершинних діаграм, внутрішнім лініям яких відповідають повній функції Гріна $\widetilde{G}_{2,0}(p)$ або $\widetilde{G}_{0,2}(k)$, а вершинам – повні сильнозв'язні вершинні функції $\widetilde{\Gamma}^\mu(p, k)$. Графічно це виглядає так:

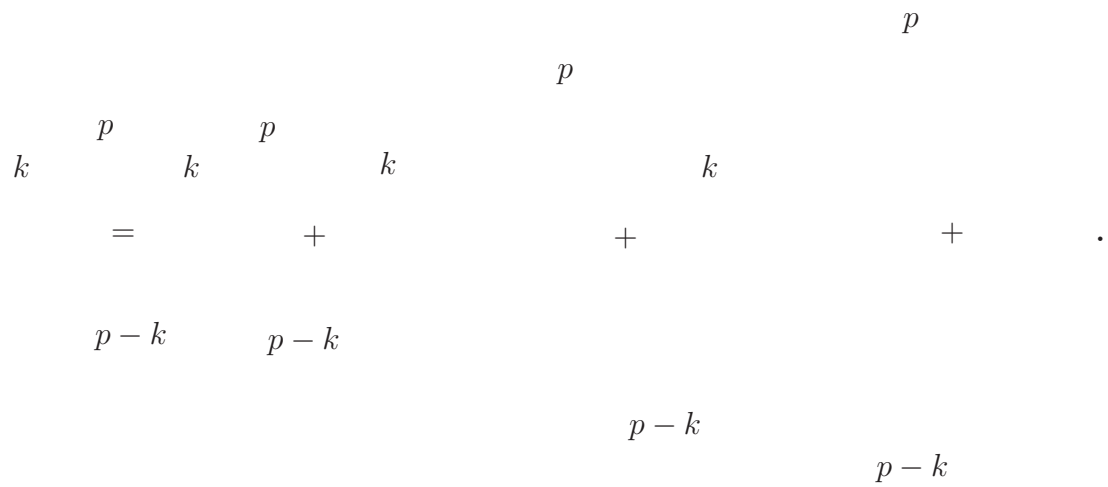


Рис. 31.1

Графічне зображення на рис. 31.1 відповідає нелінійному інтегральному рівнянню з нескінченним числом доданків:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{\mu}(p,k) &= \gamma^{\mu} + \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int dq \widetilde{\Gamma}^{\nu}(p,p-q)\widetilde{G}_{2,0}(q)\widetilde{\Gamma}^{\mu}(q,k)\times \\ &\times \widetilde{G}_{2,0}(q-k)\widetilde{\Gamma}^{\lambda}(q-k,q-p)\widetilde{G}_{0;2}(p-q)_{\nu\lambda} + \cdots\end{aligned} \tag{31.84}$$

Система рівнянь (31.81), (31.82) і (31.84) є замкнутою, але рівняння (31.84) не є аналітично визначеним, оскільки має нескінченне число членів, нелінійність яких зростає до нескінченності. Будемо використовувати цю систему лише для аналізу розбіжностей функцій $\widetilde{G}_{2,0}$, $\widetilde{G}_{0;2}$ і $\widetilde{\Gamma}^{\mu}$.

У частинному випадку, коли аргументи функції $\widetilde{\Gamma}_{\mu}$ збігаються, зв'язок між вершинним оператором $\widetilde{\Gamma}_{\mu}$ і повною функцією Гріна $\widetilde{G}_{2,0}$ встановлює *тотожність Уорда* [204] (див., також, [102, гл. 16, § 5], [3, п.20.3]):

$$i\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\widetilde{G}_{2,0}(p)^{-1} = \widetilde{\Gamma}_{\mu}(p,p). \tag{31.85}$$

Це співвідношення легко перевірити за теорією збурень (приведемо його точне доведення у підрозділі 31.5.3). Враховуючи (31.72) і (31.83), тотожність Уорда інколи записують у вигляді

$$-\frac{\partial\widetilde{\Sigma}(p)}{\partial p^{\mu}} = \Lambda_{\mu}(p,p). \tag{31.86}$$

31.4. Розбіжності в КЕД і методи їх усунення

З аналізу взаємодій квантової теорії поля у п.25.2 випливає, що КЕД належить до перенормовних теорій, оскільки згідно з формулою (25.30) максимальний

індекс вершини будь-якої діаграми Фейнмана в КЕД дорівнює

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2}d - 2,$$

тобто при $d \leqslant 4$ $\omega_i^{\max} \leqslant 0$. Отже, для реального фізичного простору максимальний індекс вершини $\omega_i^{\max} = 0$. Спробуємо детальніше проаналізувати розбіжності, що виникають утеорії збурень, і встановити вигляд контрчленів для їх усунення.

31.4.1. Примітивно розбіжні діаграми та їх регуляризація

Для визначення кількості і вигляду примітивно розбіжних діаграм скористаємося формулою (25.32). Врахуємо, що для КЕД $\omega_i^{\max} = 0$, і позначимо число зовнішніх ферміонних ліній через N_e, а число зовнішніх фотонних ліній – N_γ. Тоді, враховуючи, що $r_e = 1$, а $r_\gamma = 0$, формула (25.32) набуде вигляду ($d = 4$)

$$\omega(G) = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e. \tag{31.87}$$

Із формули (31.87) випливає, що число примітивно розбіжних діаграм з $\omega(G) \geqslant 0$ буде скінченним. Переберемо усі можливі випадки:

1. $N_e = N_\gamma = 0$, $\omega(G) = 4$.

   Такою діаграмою є одна діаграма другого порядку

.

Рис. 31.2

   Будь-яка діаграма вищого порядку $n > 2$ з $N_e = N_\gamma = 0$ вже не є примітивно-розбіжною згідно з означенням, сформульованим у п.25.1, оскільки містить у собі в якості підблока діаграму, що зображена на рис. 31.2.

2. $N_e = 0$, $N_\gamma = 1$, $\omega(G) = 3$:

.

Рис. 31.3

З одного боку ця діаграма хоч і є розбіжною, але не є примітивно-розбіжною, оскільки, послідовно розриваючи одну з внутрішніх ліній, знову отримаємо розбіжні діаграми. Але, з іншого боку, після застосування регуляризації Паулі–Вілларса (або інших видів регуляризації) внесок від цієї діаграми перетворюється в нуль унаслідок теореми Фаррі (див. п.31.2.3).

3. $N_e = 2$, $N_\gamma = 0$, $\omega(G) = 1$:

.

Рис. 31.4

4. $N_e = 0$, $N_\gamma = 2$, $\omega(G) = 2$:

.

Рис. 31.5

5. $N_e = 0$, $N_\gamma = 3$, $\omega(G) = 1$:

.

.

Рис. 31.6

внески від даних діаграм, так само, як і діаграм, що зображені на рис. 31.3, перетворюються в нуль внаслідок теореми Фаррі.

6. $N_e = 2$, $N_\gamma = 1$, $\omega(G) = 0$:

.

Рис. 31.7

7. $N_e = 0$, $N_\gamma = 4$, $\omega(G) = 0$:

.

Рис. 31.8

Що стосується першого випадку (рис. 31.2), то, так само, як і для скалярної самовзаємодії (21.3), внески всіх вакуумних діаграм можна виділити у вигляді фазового множника у визначенні S-оператора (див. формули (22.53), (22.54) *зауваження 23.2*) і не враховувати при обчисленні матричних елементів. Залишилось проаналізувати розбіжні діаграми, що відповідають власне енергетичним частинам електронів і фотонів (діаграма на рис. 31.4 і рис. 31.5), вершинну діаграму (рис. 31.7) і діаграму на рис. 31.8. Аналіз розбіжностей цих діаграм детально викладений у монографії [13, § 24]. Наведемо тут їх остаточний вигляд після виділення розбіжної і збіжної частин методом проміжної регуляризації Паулі–Вілларса. Вираз, що відповідає власне енергетичній (рис. 31.4) електронно-позитронній функції, має вигляд

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2,0}(p;M) = \frac{e^2}{8\pi^2}\int\limits_0^1 d\xi(2m - \widehat{p}\xi)\ln\left[\xi\frac{M^2 - \xi p^2}{m^2}\right] + \Sigma'_M(p), \tag{31.88}$$

де $\Sigma'_M(p)$ – збіжна (при $M \to \infty$) частина функції $\widetilde{\Gamma}^{(2)}_2(p, M)$. Її границя має вигляд

$$\lim_{M\to\infty}\Sigma'_M(p) = \Sigma'(p) = \frac{e^2}{8\pi^2}\int\limits_0^1 d\xi(2m - \widehat{p}\xi)\ln\left[\frac{m^2 - i\varepsilon}{m^2 - \xi p^2 - i\varepsilon}\right].$$

Причому розбиття (31.88) побудоване таким чином, щоб для $\Sigma'(p)$ виконувались умови

$$\Sigma'(0) = \left.\frac{\partial\Sigma'(p)}{\partial p^\mu}\right|_{p=0} = 0.$$

Це означає, що регуляризовану частину функції $\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2,0}(p)$ можна визначити як залишковий член її розкладу в ряд Маклорена до порядку $n=\omega(G)=1$:

$$\widetilde{\Gamma}^{R,(2)}_{2,0}(p)=\lim_{M\to\infty}\left(\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2,0}(p,M)-\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2,0}(0,M)-\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^{(2)}}{\partial p^{\mu}}\bigg|_{p=0}p^{\mu}\right)=\lim_{M\to\infty}\Sigma'_{M}(p)$$

з точністю до полінома першої степені за $\widehat{p}$:

$$c_1(\widehat{p}-m)+c_2m.$$

Зовсім аналогічно (див. [13, п.24.3, п.24.4]) знаходимо розбиття для вкладу діаграми на Мал. 31.4, що відповідає власне енергетичній фотонній функції ($\omega(G)=2$). Приведемо асимптотичне значення цього внеску при великому значенні M:

$$\widetilde{\Gamma}^{(2),\mu\nu}_{0,2}(k,M)=\frac{e^2}{8\pi^2}g^{\mu\nu}(M^2-m^2)-\frac{e^2}{4\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}\cdot\frac{1}{3}(k^{\mu}k^{\nu}-g^{\mu\nu}k^2)+\widetilde{\Pi}^{(2);\mu\nu}(k),\quad(31.89)$$

де

$$\widetilde{\Pi}^{(2);\mu\nu}(k)=\frac{e^2}{2\pi^2}(k^{\mu}k^{\nu}-g^{\mu\nu}k^2)\int\limits_0^1 d\xi\,\xi(1-\xi)\ln\left[\frac{m^2-\xi(1-\xi)k^2}{m^2-i\varepsilon}\right].$$

Як і у випадку розбиття для $\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2,0}(p,M)$, розбиття (31.89) побудоване таким чином, щоб

$$\widetilde{\Pi}^{(2);\mu\nu}(0)=\frac{\partial\widetilde{\Pi}^{(2);\mu\nu}(k)}{\partial k^{\alpha}}\bigg|_{k=0}k^{\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Pi}^{(2);\mu\nu}(k)}{\partial k^{\alpha}\partial k^{\beta}}\bigg|_{k=0}k^{\alpha}k^{\beta}=0.$$

Це знову дає можливість визначити регуляризовану частину як залишковий член розкладу $\widetilde{\Gamma}^{(2),\mu\nu}_{0,2}(k,M)$ в ряд Маклорена до порядку $n=\omega(G)=2$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{R,(2),\mu\nu}_{0,2}(k) &= \lim_{M\to\infty}\left(\widetilde{\Gamma}^{(2),\mu\nu}_{0,2}(k,M)-\widetilde{\Gamma}^{(2),\mu\nu}_{0,2}(0,M)-\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^{(2),\mu\nu}_{0,2}(k,M)}{\partial k^{\alpha}}\bigg|_{k=0}k^{\alpha}-\right.\\ &- \left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Gamma}^{(2),\mu\nu}(k,M)}{\partial k^{\alpha}\partial k^{\beta}}\bigg|_{k=0}k^{\alpha}k^{\beta}\right)=\lim_{M\to\infty}\Pi^{\mu\nu}_{M}(k)=\Pi^{\mu\nu}(k).\end{aligned}$$

І, нарешті, для вершинної функції, що відповідає внеску діаграми на рис. 31.7 і визначена в (31.83), маємо

$$\widetilde{\Gamma}^{(3),\mu}(p,k;M)=\frac{e^2}{16\pi^2}\gamma^{\mu}\left(\ln\frac{M^2}{m^2}-2\right)+\Gamma'^{\mu}_{M}(p,k),$$

а з урахуванням того, що $n=\omega(G)=0$,

$$\widetilde{\Gamma}^{R,(3),\mu}(p,k)=\lim_{M\to\infty}\left[\widetilde{\Gamma}^{(3),\mu}(p,k;M)-\widetilde{\Gamma}^{(3),\mu}(0,0;M)\right]=\lim_{M\to\infty}\Gamma'^{\mu}_{M}(p,k).$$

Не наводимо тут вираз для Γ'^{μ}_{M}, оскільки він є дуже громіздким.

Залишилось розглянути внесок діаграми, зображеної на рис. 31.8. Він відповідає внеску в процес розсіяння світла на світлі, тобто фотон-фотонним взаємодіям. Насправді цей внесок не є розбіжним. Це було доведено в роботах Фейнмана [93,94], Карнулуса і Неймана [156], а також Уорда [203], враховуючи умову калібрувальної інваріантності теорії (див. відповідні міркування в монографіях [102, гл. 16], і [3, п.23.3]).

Отже, всі розбіжності примітивно-розбіжних діаграм можна усунути, розкладаючи відповідні внески в ряд Маклорена до порядку $n = \omega(G)$ і визначаючи перенормовану амплітуду як відповідний залишковий член. Легко також записати відповідні квазілокальні оператори в координатному просторі для побудови контрчленів у виразі повного лагранжіана. Для цього треба переписати вираз (31.88) у вигляді

$$\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2.0}(p;M) = \frac{1}{i}\widetilde{\Sigma}_0(M^2;m) + (m-\widehat{p})\widetilde{\Sigma}_1(M^2,m) + \Sigma''_M(p),$$

що фактично визначає розклад $\widetilde{\Gamma}^{(2)}_{2,0}(p,M)$ в ряд Тейлора в точці $\widehat{p} = m$. Крім того, умова калібрувальної інваріантності дає можливість виключити перший доданок у виразі (31.89). Усунення розбіжностей у вищих порядках теорії збурень виконується на основі загальних методів, які були описані в п.23.3 і п.25.4. Після пересумування контрчлен набуває вигляду

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}(x) &= (Z_\psi - 1) : \bar\psi(x)(i\widehat{\partial} - m)\psi(x) : -\delta m : \bar\psi(x)\psi(x) : - \\ &- \frac{1}{4}(Z_A - 1) : F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) : + e(Z_e - 1) : \bar\psi(x)\widehat{A}(x)\psi(x) : .\end{aligned}$$

Константи Z_ψ, Z_A, δm і Z_e вибираються таким чином, щоб m і e були спостережуваними величинами маси і заряду електрона.

31.4.2. Перенормування маси і заряду електрона (позитрона)

Експериментальний процес вимірювання маси і заряду та маси електронів обов'язково пов'язаний із взаємодією цих частинок із електромагнітним полем. Тому їх спостережувані значення відрізняються від маси і заряду "*вільних*" частинок. Позначимо ці значення параметрів m_0 і e_0 на відміну від їх реальних величин m і e. Так само, як і у випадку взаємодії (21.3) (див. п.п.25.3,25.4), покладаючи в лагранжіані спершу замість полів ψ, A_μ та параметрів m і e їх неперенормовані значення ψ^0, A^0_μ, m_0, e_0 і переходячи до реальних значень поля, маси і заряду за формулами

$$\psi^0(x) = Z_2^{1/2}\psi(x), \quad A^0_\mu(x) = Z_3^{1/2}A_\mu(x), \tag{31.90}$$

$$e_0 = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e, \quad m_0 = m + \delta m \tag{31.91}$$

отримуємо рівність

$$\mathscr{L}^0(x,\psi^0,A^0,m_0,e_0)=\mathscr{L}^0(x;\psi,A,m,e)+\Delta\mathscr{L}(x).$$

У формулах (31.90), (31.91) вибрані більш прийняті позначення констант

$$Z_1\equiv Z_e,\quad Z_2\equiv Z_\psi,\quad Z_3\equiv Z_A.$$

У п.25.4 показано, що перетворення (31.90),(31.91) еквівалентні до перенормувань повних 2-точкових функцій Гріна $\widetilde{G}_{2,0}(p;m_0,e_0)$, $\widetilde{G}^{\mu\nu}_{0;2}(p;m_0,e_0)$ і сильнозв'язної вершинної функції $\widetilde{\Gamma}^\mu(p,p-k;m_0,e_0)$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G}_{2,0}(p;m_0,e_0)=Z_2(e)\widetilde{G}^r_{2,0}(p;m,e),\\
&\widetilde{G}^{\mu\nu}_{0,2}(p;m_0,e_0)=Z_3(e)\widetilde{G}^{r;\mu\nu}_{0,2}(p;m,e),\\
&\widetilde{\Gamma}_\mu(p,p-k;m_0,e_0)=Z_1^{-1}(e)\widetilde{\Gamma}^r_\mu(p,p-k;m,e).
\end{aligned}\tag{31.92}$$

Будемо вимагати, щоб перенормовані функції також задовольняли тотожність Уорда (31.85). Це приводить до рівності$Z_1=Z_2$.

Перенормовані функції $\widetilde{G}^r_{2,0}$, $\widetilde{G}^r_{0,2}$ і $\widetilde{\Gamma}^r_\mu$ треба визначити таким чином, щоб усі рівняння (31.71) (або (31.72)), (31.73) (або (31.80)), (31.81)–(31.84) зберегли свій вигляд. Введемо нові регуляризовані функції $\widetilde{\Sigma}^r(p)$, $\widetilde{\pi}^r(k^2)$ і $\Lambda^r_\mu(p,k)$ співвідношеннями

$$Z_2^{-1}\widetilde{\Sigma}^r(p)=\widetilde{\Sigma}(p;m,e)-\widetilde{\Sigma}(m)-(\widehat{p}-m)\widetilde{\Sigma}'(m),\tag{31.93}$$

$$Z_3^{-1}\widetilde{\pi}^r(k^2)=\widetilde{\pi}(k^2;m,e)-\widetilde{\pi}(0)-k^2\widetilde{\pi}''(0),\tag{31.94}$$

$$Z_1^{-1}\widetilde{\Lambda}^r_\mu(p,k)=\Lambda_\mu(p,k;m,e)-\Lambda^0_\mu,\tag{31.95}$$

де в (31.93) і (31.94) віднімаються перші два члени розкладу в ряд Тейлора в точках $\widehat{p}=m$ і $k=0$ відповідно, а в (31.95)– значення $\Lambda_\mu(p,k;m,e)$ в точці $p=p_0:=(m,0,0,0)$ і $k=0$. Константи Z_1, Z_2 і Z_3 вибираємо таким чином, щоб

$$\begin{aligned}
&Z_2^{-1}=1-\Sigma'(m),\quad Z_3^{-1}=1-\pi''(0),\quad Z_1^{-1}=1+\Lambda^0(m^2),\\
&\Lambda^0_\mu=\gamma_\mu\Lambda^0(m^2),\quad \delta m=-\widetilde{\Sigma}(m).
\end{aligned}$$

При такому виборі констант з (31.72), (31.80) і (31.83) знаходимо, що

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Sigma}^r_{2,0}(p;m,e)&=\frac{1}{i\big(m-\hat{p}+\widetilde{\Sigma}^r(p)-i\varepsilon\big)},\\
\widetilde{G}^r_{0,2;\mu\nu}(k;m,e)&=\frac{i}{\widetilde{\pi}^r-k^2-i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)-\frac{i\lambda}{k^2+i\varepsilon}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\varepsilon},\\
\widetilde{\Gamma}^r_\mu(p,k;m;e)&=\gamma_\mu+\Lambda^r_\mu(p,k;m;e).
\end{aligned}$$

Залишається показати, що величини $\widetilde{\Sigma}^r$, $\widetilde{\pi}^r$ і Λ^r_μ, визначені рівняннями (31.93)–(31.95), не містять у собі розбіжностей.

Почнемо з функції Λ^r_μ, яка визначається рівняннями (31.83), (31.84) з $e = e_0$ і $m = m_0$. Отже,

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p,k;m_0,e_0) &= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\int dq\ \widetilde{\Gamma}_\nu(p,p-q;m_0,e_0)\widetilde{G}_{2,0}(q;m_0,e_0)\widetilde{\Gamma}_\mu(q,k;m_0,e_0)\times\\ &\times\ \widetilde{G}_{2,0}(q-k;m_0,e_0)\widetilde{\Gamma}_\lambda(q-k,q-p;m_0,e_0)\times\\ &\times\ \widetilde{G}^{\nu\lambda}_{0,2}(p-q;m_0,e_0)+\cdots. \end{aligned}\tag{31.96}$$

Підставимо в праву частину рівняння (31.96) сильнозв'язні функції Гріна $\widetilde{G}_{2,0}$, $\widetilde{G}_{0,2}$ і $\widetilde{\Gamma}_\mu$, виражені через регулярні функції $\widetilde{G}^r_{2,0}$, $\widetilde{G}^r_{0,2}$ і $\widetilde{\Gamma}^r_\mu$ рівняннями (31.92). Тоді, враховуючи (31.91), будемо мати

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p,k;m,e) &= Z_1^{-1}\Bigg[\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int dq\ \widetilde{\Gamma}^r_\nu(p,p-q;m,e)\widetilde{G}^r_{2,0}(q;m,e)\times\\ &\times\ \widetilde{\Gamma}^r_\mu(q,k;m,e)\widetilde{G}^r_{2,0}(q-k;m,e)\widetilde{\Gamma}^r_\lambda(q-k,q-p;m,e)\times\\ &\times\ \widetilde{G}^{r;\nu\lambda}_{0,2}(p-q;m,e)+\cdots\Bigg]. \end{aligned}\tag{31.97}$$

Запишемо (31.97) у вигляді

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p,k;m,e) &= Z_1^{-1}\big[\mathscr{I}_3(p,k;m,e,\widetilde{G}^r_{2.0},\widetilde{G}^r_{0,2},\widetilde{\Gamma}^r_\mu)+\\ &+\ \mathscr{I}_5(p,k;m,e,\widetilde{G}^r_{2,0},\widetilde{G}^r_{0,2},\widetilde{\Gamma}^r_\mu)+\cdots\big]. \end{aligned}\tag{31.98}$$

Під інтегралами виразів $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{I}_5,\ldots$ стоять регуляризовані функції. Отже, розбіжності можуть з'явитися лише внаслідок інтегрування за dq (кожний із інтегралів $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{I}_5,\ldots$, буде мати тільки один інтеграл за 4-імпульсом $dq = dq^0 d\mathbf{q}$). Аналіз теорії збурень показує, що асимптотика регуляризованих функцій $\widetilde{G}^r_{2,0}$, $\widetilde{G}^r_{0,2}$ і $\widetilde{\Gamma}^r_\mu$ при великих значеннях імпульсів не гірша від вільних функцій Гріна. Тому інтеграли за dq будуть розбігатися логарифмічно. Отже, для їх регуляризації досить одного віднімання, тобто різниці

$$\mathscr{I}_i(p,k;\ldots)-\mathscr{I}_i(p_0,0;\ldots),\quad i=3,5,\ldots$$

можна записати у вигляді одного збіжного інтеграла. Таким чином, порівнюючи (31.95) з $\Lambda_\mu(p,k;m,e)-\Lambda^0_\mu$, яке обчислюється за допомогою (31.98), можна покласти

$$\Lambda^r_\mu(p,k;e,m) := \sum_i\big[\mathscr{I}_i(p,k;\ldots)-\mathscr{I}_i(p_0,0;\ldots)\big],\tag{31.99}$$

$$\Lambda^0_\mu := Z_1^{-1}\sum_i \mathscr{I}_i(p_0,0;\ldots).\tag{31.100}$$

Аналогічні аргументи можна привести і до представлення величин $\widetilde{\Sigma}^r(p)$ і $\widetilde{\pi}^r(k^2)$ відповідними різницями інтегралів (31.81) і (31.82)(задача 31.12).

Звичайно, приведені аргументи не є строгим доведенням скінченності величин $\widetilde{\Sigma}^r$, $\widetilde{\pi}^r$ і Λ^r_μ, але це можна перевірити у кожному порядку теорії збурень. Щоб побудувати теорію збурень для довільних функцій Гріна, треба записати внески відповідних скелетних діаграм, зіставляючи з вершинами і внутрішніми лініями відповідно регуляризовані функції $\widetilde{\Gamma}^r_\mu$, $\widetilde{G}^r_{2,0}$ і $\widetilde{G}^r_{0,2}$.

31.5. Спектральні представлення 2-точкових функцій Гріна

У пункті 24.7 було описано загальну схему побудови спектрального представлення Челлена—Леманна для 2-точкової функції Гріна дійсного скалярного поля, виходячи з загальних положень квантування полів. Ця схема залишається справедливою і для полів, що пов'язані між собою електромагнітною взаємодією. Тому зупинимося лише на деяких нюансах, що притаманні саме КЕД.

Почнемо з 2-точкової фотонної функції Гріна. У підпункті 31.3.2 було встановлено, що структура цієї функції визначається розбиттям (31.76)–(31.78) або (31.80), тобто внаслідок взаємодії фотонів з електромагнітним полем змінюється лише поперечна частина цієї функції. Тоді спектральне представлення треба записати лише для поперечної частини $G^{\rm tr}_{0,2}$. Отже, очевидно, що

$$\frac{d(k^2)}{k^2+i\varepsilon} = \int\limits_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho(\mu^2)}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}. \tag{31.101}$$

Будемо знову вважати, що в спектрі є щілина, пов'язана з 1-фотонним стабільним станом. Таким чином,

$$\rho(\mu^2) = Z_3\delta(\mu^2) + \sigma(\mu^2). \tag{31.102}$$

З тих самих міркувань, що і для функції скалярного поля, легко встановити, що постійна Z_3 задовольняє умови (24.88), (24.89).

Вигляд спектральної функції $\sigma(\cdot)$ та константи Z_3 можна обчислити з точністю до другого порядку теорії збурень, використовуючи формулу (31.89)) (див. детально [13, п.32.1]). Порівнюючи (31.89) з (31.75), маємо для $\pi(k^2)$

$$\pi(k^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2} + \frac{e^2}{4\pi^2}I(k^2), \tag{31.103}$$

$$I(k^2) = 2\int_0^1 d\xi(1-\xi)\xi\,\ln\left[\frac{m^2-\xi(1-\xi)k^2}{m^2}\right]. \tag{31.104}$$

Виконаємо в (31.104) заміну змінних $\xi = \frac{1}{2}(1-x)$ і проінтегруємо частинами. Тоді

$$I(k^2) = -\frac{1}{3}k^2\int\limits_0^1 \frac{x^2(3-x^2)}{4m^2-k^2(1-x^2)}dx,$$

який після заміни $1-x^2=\dfrac{4m^2}{\mu^2}$ набуде вигляду

$$I(k^2)=-\frac{1}{3}k^2\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{(1+2m^2/\mu^2)\sqrt{1-4m^2/\mu^2}}{\mu^2(\mu^2-k^2-i\varepsilon)}d\mu^2. \tag{31.105}$$

Враховуючи (31.79) і (31.103), знаходимо, що у другому порядку за теорією збурень (див. (31.101))

$$d^{(2)}(k^2)=1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{e^2}{4\pi^2}I(k^2), \tag{31.106}$$

і порівнюючи (31.105), (31.106) з (31.101), (31.102), знаходимо явний вираз для спектральної функції $\sigma(\cdot)$ у другому порядку за теорією збурень

$$\sigma^{(2)}(\mu^2)=\frac{e^2}{14\pi^2\mu^2}\left(1+\frac{2m^2}{\mu^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{\mu^2}}\theta(\mu^2-4m^2)$$

та константи Z_3

$$Z_3^{(2)}=1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2},$$

яка у другому порядку за теорією збурень є розбіжною при $M\to\infty$.

Запишемо для повноти остаточний вигляд спектрального представлення для поперечної частини 2-точкової фотонної функції Гріна

$$G^{\rm tr}_{0,2}(\lambda,x;\nu,y)=Z_3D^{c,{\rm tr}}_{\lambda\nu}(x-y;0)+\int\limits_0^{\infty}d\mu^2\sigma(\mu^2)D^{c,{\rm tr}}_{\lambda\nu}(x-y;\mu),$$

де

$$D^{c,{\rm tr}}_{\lambda\nu}(x-y;\mu)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{\mu^2-k^2-i\varepsilon}\left(g_{\lambda\nu}-\frac{k_\lambda k_\nu}{k^2}\right).$$

І на завершення отримаємо спектральне представлення для електронно-позитронної функції Гріна (в позначеннях (31.67)):

$$G_{2,0}(\alpha,x;\beta,y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\ e^{-ip\cdot(x-y)}\widetilde{G}_{2,0}(p)_{\alpha\beta}.$$

Почнемо з 2-точкової функції Вайтмана, яку запишемо у матричному вигляді

$$W_{2,0}(x,y)=(\Phi_0,\psi(x)\overline{\psi}(y)\Phi_0).$$

Повторюючи міркування, викладені в п.24.7, отримуємо аналогічно до (24.81) і (24.84):

$$W_{2,0}(x,y)=w(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\ \theta(p^2)\theta(p^0)\rho(p)e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{31.107}$$

де матриця $\rho(p)$ визначена розкладом

$$\theta(p^2)\theta(p^0)\rho_{\alpha\beta}(p) = (2\pi)^3 \sum_n \sum_{\alpha_{(n)}} (\Phi_0, \psi_\alpha(0)\Phi_{p,\alpha_{(n)}})(\Phi_{p,\alpha_{(n)}}, \overline{\psi}_\beta(0)\Phi_0),$$

а $\Phi_{(p_{(n)},\alpha_{(n)})}$, $\Phi_{(0,0)} = \Phi_0$ – повний набір станів, що задовольняють (24.77) з P^μ, що відповідає КЕД. Матрична структура $\rho(p)$ може бути визначена за допомогою розкладу матриці $\rho(p)$ за повною системою лінійно незалежних матриць Γ_i, визначених у формулі (5.9), тобто

$$\rho(p) = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i \rho_i(p).$$

Розпишемо цей розклад для матриці-функції $w(x)$, враховуючи структуру (5.9) матриць Γ_i:

$$w(x) = \mathbb{1} \cdot W^S(x) + i\gamma^\mu W^V_\mu(x) + \sigma^{\mu\nu} W^T_{\mu\nu}(x) + \gamma^5 W^P(x) + D^\mu W^A_\mu(x), \quad (31.108)$$

де відповідно буквами S, V, T, P, A позначені скалярна, векторна, тензорна, псевдоскалярна і аксіально-векторна частини матриці-функції $W_{2,0}$. Щоб у цьому переконатися, треба скористатися законами перетворення полів ψ і $\bar{\psi}$ відносно однорідних перетворень Лоренца (див. (14.13)) з $a = 0$, а також властивістю (5.22) і встановити відповідні властивості при лоренцових перетвореннях для коефіцієнтів розкладу (31.108).

Наступною дією (див. задачу 31.13) легко показати, що

$$W^T = W^P = W^A \equiv 0.$$

Отже, остаточно (31.108) перепишеться у вигляді

$$W_{2,0}(x) = \mathbb{1} \cdot W^S(x) + i\gamma^\mu W^V_\mu(x),$$

а властивості при лоренцових перетвореннях величин W^S і W^V виглядають як

$$W^S(x) = W^S(\Lambda x), \quad (31.109)$$

$$W^V_\mu(x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu W_\nu(\Lambda x). \quad (31.110)$$

Рівність (31.109) означає, що

$$W^S(x) = w^S(x^2), \quad x^2 = x^{0^2} - \mathbf{x}^2,$$

а рівність (30.110) означає, що W^V_μ має вигляд 4-градієнта від лоренц-інваріантної функції (див. (4.7′)), тобто

$$W^V_\mu(x) = \partial_\mu w^V(x^2).$$

Тоді представлення (31.107) можемо переписати у вигляді

$$W_{2,0}(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int dp\;\theta(p^2)\theta(p^0)\big[\mathbb{1}\cdot\widetilde{w}^S(p^2)+\widehat{p}\widetilde{w}^V(p^2)\big]e^{-ip\cdot(x-y)}.$$

Застосуємо знову представлення (24.82) і означення (15.7), (16.6)–(16.9). Внаслідок чого отримаємо

$$W_{2,0}(x,y)=\int\limits_0^\infty d\mu^2\left[\rho_1(\mu^2)\frac{1}{i}S^-(x-y;\mu)+\rho_2(\mu^2)\mathbb{1}\cdot\frac{1}{i}D^-(x-y;\mu^2)\right],\quad(31.111)$$

де

$$\begin{aligned}\rho_1(\mu^2)&=\widetilde{w}^V(\mu^2),\\ \rho_2(\mu^2)&=\widetilde{w}^S(\mu^2)-\mu\widetilde{w}^V(\mu^2).\end{aligned}\qquad(31.112)$$

Перейдемо тепер до представлення для 2-точкової електронно-позитронної функції Гріна

$$\begin{aligned}G_{2,0}(x,y)\;&=\;\big(\Phi_0,T(\psi(x)\overline{\psi}(y))\Phi_0\big)=\\ &=\;\theta(x^0-y^0)\big(\Phi_0,\psi(x)\overline{\psi}(y)\Phi_0\big)-\theta(y^0-x^0)\big(\Phi_0,\overline{\psi}^T(y)\psi^T(x)\Phi_0\big).\end{aligned}\qquad(31.113)$$

Тут використовується значок транспортування T для спіноров ψ і $\overline{\psi}$, щоб зберегти матричну структуру обох доданків. Нагадаємо, що множення спіноров $\psi\bar{\psi}$ є матрицею, а $\overline{\psi}\psi$ – скаляром, оскільки ψ є стовпчик, а $\overline{\psi}$—стрічкою. Якщо середнє (31.113) записувати для компонент полів ψ і $\overline{\psi}$, то значок T можна не вживати, оскільки $\psi^T_\alpha=\psi_\alpha$, $\overline{\psi}^T_\beta=\overline{\psi}_\beta$.

Вакуумне середнє першого доданку представляється правою частиною формули (31.111). Для того, щоб записати аналогічне представлення для вакуумного середнього другого доданку, скористаємося правилами перетворення операторів ψ і $\overline{\psi}$ відносно операції зарядового спряження (18.5), (18.6) та інваріантності вакууму відносно цих перетворень (18.9). Тому, враховуючи (5.95), остаточно отримуємо представлення (задача 31.14)

$$G_{2,0}(x,y)=\int\limits_0^\infty d\mu^2\left[\rho_1(\mu^2)\frac{1}{i}S^c(x-y;\mu)+\rho_2(\mu^2)\mathbb{1}\cdot\frac{1}{i}D^c(x-y;\mu^2)\right].\quad(31.114)$$

Аналогічно до (24.86) виділимо точку спектра, що відповідає стабільному 1-частинковому (електронному) стану. Для цього зробимо в представленні (31.114) такі заміни:

$$\begin{aligned}\rho_1(\mu^2)&=Z_2\delta(\mu^2-m^2)+\sigma_+(\mu^2)+\sigma_-(\mu^2),\\ \rho_2(\mu^2)&=-2\mu\sigma_-(\mu^2).\end{aligned}$$

Остаточний вигляд спектрального представлення для електронно-позитронної 2-точкової функції Гріна запишемо для її фур'є-перетворення

$$\widetilde{G}_{2,0}(p) = \frac{Z_2(\widehat{p}+m)}{i(m^2-p^2-i\varepsilon)} + \\ + \int\limits_m^\infty d\mu^2 \frac{\widehat{p}+\mu}{i(\mu^2-p^2-i\varepsilon)}\sigma_+(\mu^2) + \int\limits_m^\infty d\mu^2 \frac{\widehat{p}-\mu}{i(\mu^2-p^2-i\varepsilon)}\sigma_-(\mu^2).$$

Для того, щоб отримати обмеження на Z_2 і спектральні функції $\sigma_\pm(\mu^2)$, запишемо спектральне представлення для середнього за вакуумом від антикомутатора полів ψ і $\overline{\psi}$. Фактично це представлення можна отримати з формул (31.113), (31.114), замінюючи в правій частині (31.113), а також в означеннях функцій S^c і D^c функцію $\theta(x^0-y^0)$ на 1, а функцію $\theta(y^0-x^0)$ на -1. Тоді відповідне представлення набуде такого вигляду:

$$\big(\Phi_0, [\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+\Phi_0\big) = \int\limits_0^\infty d\mu^2 \Big[\rho_1(\mu^2)\frac{1}{i}S(x-y;\mu) + \\ + \rho_2(\mu^2)\mathbb{1}\cdot\frac{1}{i}D(x-y;\mu^2)\Big], \qquad (31.115)$$

де $S(x-y;\mu)$ і $D(x-y;\mu^2)$ – переставні функції, визначені формулами (15.8) і (16.8), (16.9). Встановлюючи в (31.115) $x^0=y^0$ і враховуючи (14.20) для скалярного поля та (14.44) для спінорних полів, отримуємо рівність

$$\mathbb{1} = \int\limits_0^\infty d\mu^2\rho_1(\mu^2) = Z_2 + \int\limits_m^\infty d\mu^2[\sigma_+(\mu^2)+\sigma_-(\mu^2)]. \qquad (31.116)$$

Рівняння (31.116) обмежує значення константи нормування і забезпечує перенормовність спектральних функцій $\sigma_\pm$.

§ 32. Квантування калібрувальних полів

На прикладі квантової електродинаміки, яка є інваріантною відносно найпростішої калібрувальної групи $G=U(1)$, в п.31.1 було показано, що квантування електромагнітного поля наштовхується на значні труднощі, які перш за все пов'язані з тим, що стандартний канонічний метод квантування полів не може одночасно забезпечити умови коваріантності (релятивістської інваріантності) і калібрувальної інваріантності теорії. Наприклад, для побудови фотонного пропагатора (див. п.31.1.3) необхідно фіксувати калібровку додаючи до нього доданок (31.22), тобто порушувати калібрувальну інваріантність лагранжіана. У випадку КЕД такої процедури виявилось досить, щоб правильно визначити

фотонний пропагатор для довільної калібровки (див. (31.25)) і побудувати коваріантну теорію збурень для матриці розсіяння (або для функцій Гріна) за лагранжіаном взаємодії стандартним чином (див. п.31.2.1). Основна проблема при спробі застосувати таку саму схему до побудови пропагатора, що відповідає калібрувальному полю W_μ^a, полягає у тому, що навіть модифікований за допомогою неінваріантного члена вигляду (31.22) лагранжіан вільного поля Янга–Міллса

$$\mathscr{L}_{\text{ям}}(x) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu W^a_\mu)(\partial^{\mu'} W^a_{\mu'}) \tag{32.1}$$

з $F^a_{\mu\nu}$, заданими формулами (10.11), не приводить до простого пропагатора вигляду (31.25).

Причиною є те, що лагранжіан (32.1), крім звичайних квадратичних за W^a_μ членів, містить члени вигляду $g(\partial_\mu W^a_\nu)W^b_\alpha W^c_\beta$ або $g^2(W^a_\mu)^2(W^b_\nu)^2$, $a \neq b \neq c$. Це означає, що поля W^a_μ обов'язково взаємодіють між собою з константою взаємодії g (параметр відповідної групи калібрувальних перетворень). Якщо покласти $g = 0$, то лагранжіан (32.1) буде описувати $N^2 - 1$ (якщо калібрувальна інваріантність описується групою $SU(N)$) незалежних, тотожних безмасових полів, фактично тотожних електромагнітному. Тому пропагатор у цьому випадку буде збігатися з виразом (31.25) для кожного з цих полів. Тоді природно було б для побудови повного пропагатора для полів W^a_μ використати теорію збурень за параметром g. Але, як помітив Фейнман [122], такий підхід приводить до порушення унітарності S-оператора. Це порушення створюють діаграми, що зображені на рис. 32.1:



Рис. 32.1

Він також помітив, що можна усунути цю проблему, якщо відняти від внесків таких діаграм внески топологічно подібних діаграм, що описують взаємодію поля W^a_μ з деякою фіктивною частинкою. Але було незрозуміло, як влаштувати цю взаємодію, щоб зберегти всі вимоги до теорії і врахувати аналогічні віднімання у вищих порядках теоріях збурень. Розв'язок цієї проблеми був знайдений незалежно в 1967 році Де Віттом [114–116] і В.М. Поповим та Л.Д. Фаддєєвим [118]. Виявляється, що найбільш придатним методом квантування неабелевих калібрувальних полів є метод континуального інтегрування. Він зберігає коваріантність теорії і приводить до правильних результатів. У § 26 детально було описано цей підхід і показано, як він діє у квантовій нерелятивістській механіці, у теорії самовзаємодіючого скалярного поля та в теорії юкавської

взаємодії (11.35). Перш ніж перейти до квантування поля Янга–Міллса, коротко зупинимось на основних ідеях методу Фаддєєва–Попова і продемонструємо його дію у найпростішому випадку КЕД. Але, щоб не виникало думки, що ці нові методи зовсім не пов'язані з попередньою схемою квантування, почнемо з вигляду континуального інтеграла для КЕД у кулонівській калібровці, яку детально описано в п.п.31.12,31.13.

32.1. Континуальний інтеграл для функцій Гріна у КЕД (кулонівська калібровка)

В п.26.3 коротко був описаний метод канонічного квантування механічної системи за допомогою континуального інтеграла при наявності в системі додаткових зв'язків. У випадку КЕД аналогами таких зв'язків є умови, які можна накладати на 4-вектор потенціалу $A_\mu(x)$ (див. детальніше підпункти 17.2.3 і 31.1.2). Кулонівська калібровка дає можливість найбільш прозоро сформулювати процедуру канонічного квантування і при цьому зберегти інваріантність відносно групи просторових поворотів і, як буде показано за допомогою методу континуального інтеграла, дасть можливість встановити красивий зв'язок з іншими калібровками. Отже, нагадаємо, що первинним зв'язком є

$$\varphi_1(\mathbf{A}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0, \tag{32.2}$$

а вторинний зв'язок (див. (31.9))–

$$\varphi_2(\pi_A) \equiv \chi_1(\pi_A) \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_A^{\perp}(x) = 0, \tag{32.3}$$

де

$$\boldsymbol{\pi}_A^{\perp}(x) := \boldsymbol{\pi}_A(x) + \nabla A^0 = \partial_0 \mathbf{A}.$$

Тоді, згідно з (26.67), (26.68), а також враховуючи зауваження 26.2, вираз для твірного функціонала функцій Гріна полів $\bar\psi$, ψ, A, набуде вигляду

$$\begin{aligned} G[\bar\eta,\eta,j] &= G[0,0,0]^{-1} \int \mathscr{D}\boldsymbol{\pi}\mathscr{D}\mathbf{A}\mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}\psi e^{i\mathcal{A}(\bar\psi,\psi,\mathbf{A};j)} \times \\ &\times e^{i\int dx[\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)]} \prod_{x\in\mathbb{M}} \delta(\nabla\cdot\mathbf{A}(x))\delta(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)), \end{aligned} \tag{32.4}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\bar\psi,\psi,\mathbf{A};j) &= \int\limits_{\mathbb{M}} dx : \Big[\boldsymbol{\pi}(x)\partial_0\mathbf{A}(x) - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\pi}(x)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{A}(x))^2 - \\ &- \big(\mathbf{J}(x)+\mathbf{j}(x)\big)\cdot\mathbf{A}(x) + \mathscr{L}_\psi(x)\Big] : - \int dx^0 H_{\mathrm{Coul}}(x^0;j), \end{aligned} \tag{32.5}$$

$$H_{\rm Coul}(x^0;j)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{x}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{y}\frac{:(J^0(x)+j^0(x))(J^0(y)+j^0(y)):}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},\qquad(32.6)$$

а $\mathscr{L}_\psi(x)$ – лагранжіан вільного спінорного поля. Крім того, запис міри інтегрування в (32.4) треба розуміти як добуток за всіма компонентами векторів $\pi,\mathbf{A}$ і спінорів $\overline{\psi},\psi$. Записуючи інтеграл (32.4), канонічним імпульсом вибрано не оператор $\boldsymbol{\pi}_A$ (див. (31.8)), а оператор $\boldsymbol{\pi}^\perp_A(x)=\boldsymbol{\pi}_A(x)+\boldsymbol{\nabla}A_0(x)$, а відповідну змінну інтегрування в (32.4) позначили $\boldsymbol{\pi}(x)$. Тому зв'язок (31.9) записаний в інтегралі (32.4) в більш простій формі.

Змінну інтегрування $\mathbf{A}(x)$ позначено тією самою літерою, що і оператор векторного потенціалу $\mathbf{A}(x)$. Треба також пояснити, чому аргумент твірного функціонала $G[\bar\eta,\eta,j]$ класичне джерело $j^\mu(x)$ (а точніше $j^0(x)$) увійшло білінійним чином (див. (32.6)). Справа у тому, що класичні зовнішні джерела слід вводити до лагранжіана так:

$$\mathscr{L}(x)\to\mathscr{L}(x;\bar\eta,\eta,j)=\mathscr{L}(x)+\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)+A_\mu(x)j^\mu(x).$$

Тоді, згідно з виглядом $\mathscr{L}(x)$ (див. (31.2), (31.3)), функція буде завжди адитивним додатком до струму $J^\mu(x)$, а отже, при квантуванні в кулонівській калібровці (див. п.31.1.2 ф-ли (31.10)–(31.18)) $j^0(x)$ увійде в означення $H_{\rm Coul}$ білінійно.

І, нарешті, в інтегралі (32.4) зник $\det\|\{\varphi_1,\chi_1\}\|$ (див. (26.68)), оскільки дужка Пуассона

$$\{\varphi_1,\chi_1\}(x)=\int dy\frac{\delta\varphi_1(x)}{\delta A_k(y)}\frac{\delta\chi_1(x)}{\delta(\pi^\perp_A)^k(y)}=\int dy(\partial_k\delta(x-y))^2$$

не залежить від змінних інтегрування, а безмежна константа $\det\|\{\varphi_1,\chi_1\}\|$ скорочується з аналогічною константою, яка входить у нормувальний множник $G[0,0,0]$. Зробимо в (32.4) декілька перетворень. Перш за все виділимо квадрат у перших двох доданках (32.5) і, враховуючи першу δ-функцію $\prod\limits_x\delta(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x))$, запишемо інтеграл за змінною $\boldsymbol{\pi}$ у вигляді

$$\int\mathscr{D}\boldsymbol{\pi}e^{-\frac{i}{2}\int dx(\ \boldsymbol{\pi}(x)-\partial_0\mathbf{A}(x))^2}\prod_x\delta[\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\ \boldsymbol{\pi}(x)-\partial_0\mathbf{A}(x))].\qquad(32.7)$$

Тому, враховуючи, що вся залежність від $\boldsymbol{\pi}$ зосереджена лише в (32.7) і що він фактично не залежить від $\mathbf{A}(x)$, його можна скоротити з аналогічним інтегралом у множнику $G[0,0,0]^{-1}$. Тепер скористаємося формулою (26.7) з $C(x,y)=i\delta(x^0-y^0)(4\pi)^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}$ і відповідно $C^{-1}(x,y)=i\Delta_{\mathbf{x}}\delta(x-y)$ та $z(x)=i(J^0(x)+j^0(x))$. Тоді експоненту від кулонівської частини гамільтоніана можна подати у вигляді

$$e^{-\frac{i}{2}\int dx^0H_{\rm Coul}(x^0)}=e^{-\frac{1}{2}{\rm Tr}\ln C}\int\mathscr{D}A^0e^{i\int dx:[\frac{1}{2}(\ \boldsymbol{\nabla}A^0(x))^2+A^0(x)(J^0(x)+j^0(x))]:}.\qquad(32.8)$$

(Вважається, що інтегрування виконується за функціями, які зникають на нескінченності).

Підставимо (32.8) в інтеграл (32.4), врахуємо, що

$$\int dx : \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \mathbf{A}(x))^2 + \frac{1}{2}(\ \boldsymbol{\nabla} A_0(x))^2 - \frac{1}{2}(\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(x))^2\right] :=$$

$$= \int dx \left[-\frac{1}{4} : F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) : \right].$$

Таким чином, остаточно отримаємо вираз

$$G[\bar\eta, \eta, j] = G[0,0,0]^{-1} \int \mathscr{D}A \mathscr{D}\bar\psi \mathscr{D}\psi e^{i[\mathcal{A}(\bar\psi,\psi,A) + \bar\psi\eta + \bar\eta\psi + Aj]} \widetilde{\delta}(\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}), \tag{32.9}$$

де

$$\mathcal{A}(\bar\psi, \psi, A) + \bar\psi\eta + \bar\eta\psi + Aj = \int\limits_{\mathbb{M}^4} dx : \Big[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \mathscr{L}_\psi(x) +$$

$$+ A_\mu(x) J^\mu(x) + \bar\psi(x)\eta(x) + \bar\eta(x)\psi(x) + A_\mu(x) j^\mu(x)\Big] :, \tag{32.10}$$

а

$$\widetilde{\delta}(\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) = \prod_x \delta(\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(x)). \tag{32.11}$$

В інтегралі (32.9) залишилась нековаріантною δ-функція, що фіксує кулонівську калібровку.

Із виразу (32.10) легко отримати пропагатори (2-точкові вільні функції Гріна), які треба зіставляти з внутрішніми лініями діаграм Фейнмана в теорії збурень за константою e.

Наприклад, покладаючи $e = 0$, а також $j \equiv 0$, легко обчислити гауссовий інтеграл за грасмановими змінними $\bar\psi$ і ψ (див. (26.87)). Тоді відповідна функція Гріна

$$\frac{1}{i} S^c(x-y) = (-i)^2 \frac{\delta^2 G[\bar\eta, \eta, 0]}{\delta\eta(y)\delta\bar\eta(x)}\bigg|_{\bar\eta\equiv\eta\equiv 0} = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dp\ e^{ip(x-y)} \frac{\hat p + m}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}.$$

Аналогічно, хоч і дещо складніше (задача 32.1), знаходиться пропагатор фотонної лінії (для цього треба скористатись представленням δ-функції (26.19) і формулами вигляду (26.7)). Тоді отримаємо

$$\frac{1}{i} D^{c,\text{ел, Coul}}_{\mu\nu}(x-y) = (-i)^2 \frac{\delta^2 G[0,0,j]}{\delta j^\mu(x)\delta j^\nu(y)}\bigg|_{j\equiv 0} = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int dk \widetilde{D}_{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)}, \tag{32.12}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{D}_{00}(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}, \quad \widetilde{D}_{0i}(k) = \widetilde{D}_{i0}(k) = 0, \\ &\widetilde{D}_{ij}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right). \end{aligned} \tag{32.13}$$

Зауваження 32.1. *Кулонівська калібровка не зручна тим, що зв'язки* (32.2), (32.3) *призводять до присутності в інтегралі (32.9) не лоренц-коваріантної δ-функції* (32.11), *і як результат отримуємо нековаріантну 2-точкову функцію Гріна* (32.12), (32.13). *Цей недолік буде усунено за допомогою методу, який буде описано нижче.*

32.2. Коваріантні калібровки: метод Попова–Фаддєєва–Де Вітта

У попередньому підпункті було показано, що за допомогою техніки континуального інтегрування функції Гріна можна записати у вигляді інтеграла від $\exp[i\mathcal{A}(\bar\psi,\psi,A)]$, де $\mathcal{A}(\bar\psi,\psi,A)$ є повністю коваріантний, калібрувально інваріантний вираз дії, який не залежить від конкретного вибору калібровки. Конкретний вид калібровки фіксується лише наявністю в інтегралі відповідної δ-функції. Цей факт був встановлений для кулонівської калібровки. Але в 1967 році Фаддєєвим і Поповим [118] і незалежно Де Віттом [114–116] була запропонована схема, яка давала можливість дуже просто переходити від однієї калібровки до іншої. Коротко прокоментуємо основну ідею методу роботи [118] (див. також [72]).

Нехай $S_\omega(x)$ – елемент калібрувальної групи G_x (див. п.2.4), який розглядається як функція на $\mathbb{M}$. Систему полів ψ, A_μ або W^a_μ у випадку теорії Янга–Міллса, на яких реалізується представлення групи G_x, позначимо однією буквою $B = B(x)$. Нехай B^ω є результатом дії елемента $S_\omega(x)$ групи на поле B (див. (2.29), (2.30)). Для кожного $x \in \mathbb{M}$ величина $\omega(x)$ є параметром, який повністю визначає елемент S_ω. Сукупність полів B^ω, де B—фіксоване, а S_ω пробігає калібрувальну групу G, називається *орбітою калібрувальної групи.*

Отриманий у пункті 32.1 вираз для твірного функціонала функцій Гріна виражається континуальним інтегралом (32.9) від калібрувально неінваріантних факторів, які містять у собі зовнішні джерела $\bar\eta$, η і j—як функціональні аргументи функціонала $G[\bar\eta,\eta,j]$ та δ-функції, які фіксують калібровку. Це є природним, оскільки самі функції Гріна повинні змінювати свій вигляд залежно від виду калібровки, але міра

$$d\mu[B] := e^{i\mathcal{A}(B)}\mathscr{D}B \equiv e^{i\int\mathscr{L}(x)dx}\prod_x dB(x) \tag{32.14}$$

є інваріантною відносно перетворень калібрувальної групи G:

$$d\mu[B^\omega] = d\mu[B]. \tag{32.15}$$

У випадку, коли повний лагранжіан залежить від усіх полів ψ^i_α, A_μ, W^a_μ, де $\alpha = \overline{1,4}$– спінорні індекси, $\mu = \overline{0,3}$ – векторні індекси і (i,a) – індекси, які пов'язані з фундаментальним представленням групи $SU(N)$ ($i = \overline{1,N}$, $a = \overline{1,N^2-1}$), міра $\mathscr{D}B$ має вигляд

$$\mathscr{D}B = \prod_{\alpha,\mu,i,a}\mathscr{D}\overline{\psi}_\alpha\mathscr{D}\psi_\alpha\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}W^a_\mu, \tag{32.16}$$

а кожний із диференціалів під знаком добутку має вигляд (26.75).

Інваріантність міри (32.14) є наслідком калібрувальної інваріантності повного лагранжіана $\mathscr{L}$ і міри (32.16). Останнє твердження нетривіальне. Дійсно, інваріантність міри $\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi$ відносно перетворень (2.30)(або (2.18), (2.19)) є наслідком того, що якобіан перетворення (2.30) дорівнює $\det S = 1$. Інваріантність міри $\mathscr{D}A_\mu$ відносно градієнтних перетворень (2.29) також є очевидною, оскільки для кожного $x \in \mathbb{M}$ перетворення (2.29) є трансляцією на деяку фіксовану константу $\omega(x) = g(x)$. Для доведення інваріантності міри $\mathscr{D}W$ треба скористатись законом перетворення калібрувальних полів (2.32). Якобіан такого перетворення (дла кожного x і μ)

$$J_\mu^\omega \;=\; \det\, \|\frac{\partial W_\mu^{\omega;a}}{\partial W_\mu^b}\| \;=\; \det\, \Omega(x) \;=\; 1 \tag{32.17}$$

внаслідок (2.36)–(2.39).

Звичайно, ця міра не може бути скінченною, оскільки її інваріантність відносно перетворень $B \to B^\omega$ приводить до того, що інтеграл від довільного калібрувально інваріантного функціонала $F(B)$ $(F(B^\omega) = F(B))$ за мірою $d\mu[B]$ буде пропорційний "*об'єму орбіти*", тобто

$$\int F(B)d\mu[B] \sim \int \mathscr{D}\omega, \tag{32.18}$$

де $\mathscr{D}\omega$ визначена такою самою формулою вигляду (26.8) і є інваріантною мірою на групі G. Зрозуміло, що останній інтеграл є розбіжним. Ситуацію можна пояснити на прикладі звичайної лебегової міри на площині XOY, збуреної трансляційно інваріантною функцією:

$$d\mu_\rho(x,y) = \rho(x-y)dx\,dy, \quad \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^1). \tag{32.19}$$

Тоді для будь-якої функції $F \in L^1_\rho(\mathbb{R}^1)$ (ρ – вага)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} F(x-y)d\mu_\rho(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(z)\rho(z)dz \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy. \tag{32.20}$$

Тут калібрувальною групою є група трансляцій.

Основна ідея квантування Фаддєєва–Попова полягає у тому, що континуальний інтеграл від функціонала $F(B)$ за змінними B треба розглядати як інтеграл за класами полів, які утворюються за допомогою калібрувального перетворення.

Наприклад, у КЕД в один клас із полем $A_\mu(x)$ об'єднуються всі поля $A_\mu + \partial_\mu\omega(x)$. Фактично внаслідок калібрувальної інваріантності дія $\mathcal{A}(B)$ і міра (32.14) зосереджені на класах полів. Тому треба інтеграл за всіма можливими полями замінити інтегралом по деякій поверхні (у просторі всіх полів B), яка однократно перетинається з орбітами калібрувальної групи, й інтегралом по

орбіті. Фактично це означає, що треба знайти процедуру виділення множника (32.18), тобто об'єму орбіти.

У прикладі (32.19), (32.20) треба проінтегрувати по "поверхні" (лінії) $x-y=z$ і виділити інтегрування по орбіті, яка є просто прямою $\mathbb{R}^1$. Міра інтегрування по поверхні вже буде залежати від виду поверхні, але всі фізичні результати не повинні залежати від вибору поверхні. Описана ідея була реалізована таким чином. Нехай

$$\varphi(B)=0$$

є деякою поверхнею, такою, що рівняння

$$\varphi(B^\omega)=0$$

має єдиний розв'язок відносно ω (або S_ω) при будь-якому B.

Визначимо функціонал $\Delta_\varphi[B]$ умовою

$$\Delta_\varphi[B]\int\widetilde{\delta}\big(\varphi(B^\omega)\big)\mathscr{D}\omega=1. \tag{32.21}$$

Легко переконатися, що функціонал $\Delta_\varphi[B]$ є калібрувально інваріантний. Дійсно, запишемо (32.21) з деяким B^λ замість B (відповідне $S_\lambda\in G$). Тоді

$$\begin{aligned}1 \;=\; \Delta_\varphi[B^\lambda]\int\widetilde{\delta}(\varphi(B^{\omega+\lambda}))\mathscr{D}\omega=\Delta_\varphi[B^\lambda]\int\widetilde{\delta}\big(\varphi(B^{\omega+\lambda})\big)\mathscr{D}(\omega+\lambda)=\\ =\Delta_\varphi[B^\lambda]\int\widetilde{\delta}\big(\varphi(B^{\omega})\big)\mathscr{D}\omega \;=\; \frac{\Delta_\varphi[B^\lambda]}{\Delta_\varphi[B]}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta_\varphi[B^\lambda]=\Delta_\varphi[B]. \tag{32.22}$$

Як правило, нас будуть цікавити континуальні інтеграли, що відповідають середнім значенням деяких калібрувально інваріантних функціоналів $F[B]$ за мірою $d\mu[B]$, тобто

$$<F>_\mu=\frac{\int F[B]d\mu[B]}{\int d\mu[B]}. \tag{32.23}$$

Для того, щоб виділити в чисельнику і знаменнику виразу (32.23) множник вигляду (32.18), вставимо в ці інтеграли одиницю (ліву частину (32.21)). Переставивши інтеграли за $\mathscr{D}\omega$ і $d\mu[B]$, зробимо в інтегралі за $d\mu[B]$ заміну $B\to B^{-\omega}$, внаслідок якої

$$\widetilde{\delta}(\varphi(B^\omega))\to\widetilde{\delta}(\varphi(B))$$

і внаслідок (32.15), (32.22) та інваріантності функціонала $F[B]$ в чисельнику і знаменнику виділиться інтеграл $\int\mathscr{D}\omega$, а середнє (32.23) набуде вигляду

$$<F>_\mu=\frac{\int F[B]\Delta_\varphi[B]\widetilde{\delta}(\varphi(B))d\mu[B]}{\int\Delta_\varphi[B]\widetilde{\delta}(\varphi(B))d\mu[B]}. \tag{32.24}$$

Основним моментом у запропонованій конструкції є незалежність величини $< F >_\mu$ від поверхні $\varphi(B) = 0$. Щоб це показати, вставимо під знак інтегралів у формулі (32.24) іншу "одиницю":

$$1 = \Delta_\chi[B] \int \widetilde{\delta}(\chi(B^\omega))\mathscr{D}\omega,$$

де $\chi(B) = 0$ — рівняння іншої поверхні, яка однократно перетинається з орбітами групи G, тобто рівняння $\chi(B^\omega) = 0$ має єдиний розв'язок відносно ω при будь якому B. Змінивши порядок інтегрування за $d\mu[B]$ і $\mathscr{D}\omega$ і виконавши в інтегралі за $d\mu[B]$ заміну $B \to B^\omega$, скористаємося інваріантністю функціоналів $F[B]$, $\Delta_\chi[B]$, $\Delta_\psi[B]$ і міри $\mathscr{D}\omega$ та, знову змінивши порядок інтегрування, отримаємо вираз

$$< F >_\mu = \frac{\int F[B]\Delta_\chi[B]\widetilde{\delta}(\chi(B))d\mu[B]}{\int \Delta_\chi[B]\widetilde{\delta}(\chi(B))d\mu[B]}. \tag{32.25}$$

Зауваження 32.2. *Запропонований метод дає можливість переходити і до більш загального вигляду інтеграла, ніж* (32.24). *Якщо, наприклад, розглянути у формулі* (32.21) *замість функціоналу* $\widetilde{\delta}(\varphi(B^\omega))$ *деякий інший калібрувально неінваріантний функціонал* $\Phi[B]$ *так, щоб інтеграл* (32.21) *існував, і визначити відповідний калібрувально інваріантний функціонал формулою*

$$\Delta_\Phi[B] \int \Phi[B^\omega]\mathscr{D}\mu_\omega = 1, \tag{32.26}$$

тоді та сама процедура приведе до інтеграл вигляду

$$< F >_\mu = \frac{\int F[B]\Delta_\Phi[B]\Phi[B]d\mu[B]}{\int \Delta_\Phi[B]\Phi[B]d\mu[B]}. \tag{32.27}$$

Отже, такий метод дає можливість переходити в континуальному інтегралі від однієї поверхні до іншої, тобто від однієї калібровки до іншої.

Це означає, що для всіх калібрувально інваріантних функціоналів $F[B]$, які відповідають спостережуваним фізичним величинам, інтеграл (32.24) не буде залежати від вибору калібровки, а для калібрувально неінваріантних величин формула (32.24) дає можливість отримати відповідний вираз у тій чи іншій калібровці, змінюючи вигляд поверхні $\varphi(B) = 0$.

32.3. Коваріантне квантування електромагнітної взаємодії

У пункті 32.1 записано вираз (32.4) для твірного функціонала функцій Гріна в гамільтоновій формі і фіксованій кулонівській калібровці, виходячи з формалізму, який був описаний у п.п.26.2,26.3. Представлення (32.4) у вигляді континуального інтеграла дає можливість послідовно звести його до майже коваріантного вигляду (32.9). За методом Попова–Фаддєєва нековаріантною залишається лише поверхня інтегрування, що відповідає кулонівській калібровці:

$$\varphi_1(\mathbf{A}) = \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(x) = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}(x) = 0.$$

Цей вираз дає можливість побудувати теорію збурень для функцій Гріна. Для цього треба формально розкласти експоненту $\exp\left[ie\int dx\ :\ \bar\psi(x)\widehat{A}(x)\psi(x)\ :\ \right]$ у виразі (32.9) в ряд за константою взаємодії e і застосувати для кожного з інтегралів за мірами $\mathscr{D}A$ та $\mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}\psi$ формули вигляду (26.14) для моментів з $C(x,y)=\frac{1}{i}D^{\text{с,ел, Coul}}_{\mu\nu}(x-y)$ за змінною A і аналогічної формули за грасмановими змінними $\bar\psi$ і ψ, яку можна отримати з представлення (26.88). Але така процедура досить громіздка і дає нековаріантний вираз. Для того, щоб отримати коваріантну теорію збурень, треба використати рівняння поверхні, яке є інваріантним відносно перетворень Лоренца. Такою поверхнею є умова Лоренца (7.8):

$$\partial^\mu A_\mu(x)=0.$$

Аналогічні розрахунки приводять до функції (задача 32.2)

$$\frac{1}{i}D^{\text{tr}}_{\mu\nu}(x-y)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int dk\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \tag{32.28}$$

Для того, щоб отримати функцію (31.25), треба у формулі (32.27) вибрати $\Phi[B]$ $(B=A_\mu)$ у вигляді

$$\Phi[A]=e^{-\frac{i}{2\alpha}\int(\partial^\mu A_\mu(x))^2dx}. \tag{32.29}$$

Тоді легко переконатися, що функціонал $\Delta_\Phi[A]$ насправді не буде залежати від A (задача 32.3), його можна винести за знак інтеграла і скоротити з аналогічним функціоналом у знаменнику (32.27). Попередню процедуру треба проробити у виразі для твірного функціоналу (32.9) з $\Phi[A]$ замість $\widetilde{\delta}(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$ (при $e=0$ і $\bar\eta=\eta\equiv 0$). Внаслідок чого після інтегрування отримаємо

$$\exp\left[\frac{1}{2}\int j^\mu(x)D^{el}_{\mu\nu}(x-y)j^\nu(y)dx\,dy\right]$$

з $D^{el}_{\mu\nu}(x-y)$, яке збігається з виразом (31.25) (задача 32.4).

Отримані три різні схеми побудови теорії збурень. Але всі вони ведуть до одних і тих самих фізичних наслідків.

32.3.1. Зв'язок між різними калібровками

Представлення (32.9)–(32.11) дає можливість пов'язати вирази для функцій Гріна у різних калібровках. Запишемо в позначеннях попереднього пункту вираз (32.9) для кулонівської калібровки:

$$G^{\text{Coul}}[\phi]=\frac{\int d\mu[B]e^{B\cdot\phi}\widetilde{\delta}(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})}{\int d\mu[B]\widetilde{\delta}(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})}, \tag{32.30}$$

де

$$B\cdot\phi=\int dx\big[\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)+j^\mu(x)A_\mu(x)\big].$$

За Фаддєєвим–Поповим для кожного значення поля $A_\mu(x)$ визначимо функціонал $\Delta[A]$ рівністю

$$\Delta[A]\int\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu(x)+\Box\lambda(x))d\lambda(x)=1. \tag{32.31}$$

Користуючись формулами (26.22), (26.23), легко переконатися, що інтеграл в лівій частині (32.31) не залежить від $A_\mu(x)$, так само як і функціонал $\Delta[A]$. Підставимо одиницю (32.31) під інтеграли чисельника та знаменника (32.30), поміняємо порядок інтегрування і зробимо в цих інтегралах заміну

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to e^{ie\lambda(x)}\psi(x),\\ &\bar\psi(x)\to e^{-ie\lambda(x)}\bar\psi(x),\\ &A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x).\end{aligned} \tag{32.32}$$

Після такої заміни δ-функція $\delta(\partial^\mu A_\mu(x)+\Box\lambda(x))$ перетвориться в $\delta(\partial^\mu A_\mu(x))$, а δ-функція $\delta(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(x))$ — у $\delta(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(x)+\Delta\lambda(x))$. Після цього знову поміняємо порядок інтегрування і застосуємо формулу (26.23), знімаючи інтеграл за $\mathscr{D}\lambda$. Тоді згідно з (26.23) замість $\lambda(x)$ треба підставити функцію

$$\widetilde\lambda(x;\mathbf{A})=\int(-\Delta)^{-1}(x,y)\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(y)dy=\frac{1}{4\pi}\int\left(\partial_x^k\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right)A_k(x^0,\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

яка є розв'язком рівняння (див. (26.22))

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(x)+\Delta\lambda(x)=0.$$

Після скорочення на $\Delta[A]$, яке фактично від A не залежить, отримаємо вираз (враховуючи інваріантність міри $d\mu[B]$ відносно перетворень (32.32)):

$$G^{\mathrm{Coul}}[\phi]=\frac{\int d\mu[B]e^{\widetilde B\cdot\phi}\prod\limits_x\delta(\partial^\mu A_\mu(x))}{\int d\mu[B]\prod\limits_x\delta(\partial^\mu A_\mu(x))}, \tag{32.33}$$

де

$$\begin{aligned}\widetilde B\cdot\phi\ \ =\ \ &\int dx\Big[\bar\eta(x)\psi(x)e^{ie\widetilde\lambda(x;\mathbf{A})}+\bar\psi(x)\eta(x)e^{-ie\widetilde\lambda(x;\mathbf{A})}\\ &+j^\mu(x)(A_\mu(x)+\partial_\mu\widetilde\lambda(x;\mathbf{A}))\Big].\end{aligned} \tag{32.34}$$

З формул (32.33), (32.34) легко отримати зв'язок функцій Гріна в кулонівській калібровці з функціями Гріна в лоренцовій калібровці.

32.3.2. Тотожність Уорда

Представлення функцій Гріна континуальним інтегралом дає можливість дуже легко вивести тотожність Уорда (31.85). Запишемо вираз для 2-точкової електронної функції Гріна в довільній калібровці

$$\varphi(A) = 0,$$

$$G_{2;0}(x-y)_{\alpha\beta} = -i\frac{\int d\mu[B]\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)\widetilde\delta(\varphi(A))}{\int d\mu[B]\widetilde\delta(\varphi(A))}. \tag{32.35}$$

Нагадаємо, що позначення B і $d\mu[B]$ тотожні (32.14). Виконаємо в інтегралі чисельника (32.35) заміну змінних

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi(x)e^{ie\lambda(x)},\\ \bar\psi(x) &\to \bar\psi(x)e^{-ie\lambda(x)}.\end{aligned} \tag{32.36}$$

Внаслідок такої заміни

$$\mathscr{L}_\psi(x) \to \mathscr{L}_\psi(x) - e : \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) : \partial_\mu\lambda(x),$$

і разом з експонентами від полів (32.36) міра $d\mu[B]$ в чисельнику домножиться на експоненту

$$\exp\left[ie\lambda(x) - ie\lambda(y) - ie\int : \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) : \partial_\mu\lambda(x)dx\right].$$

Після цього до обох частин (32.35) застосуємо оператор варіаційного диференціювання $\delta/\delta\lambda(z)$ і покладемо $\lambda \equiv 0$. Тоді згідно з означеннями (26.91)–(26.93) отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}\delta(x-z)G_{2,0}\big((\alpha,x),(\beta,y)\big) \;-\; &\delta(y-z)G_{2,0}\big((\alpha,x),(\beta,y)\big) =\\ &= \gamma^\mu_{\delta'\delta}\partial_{z;\mu}G_{4,0}\big((\delta,z),(\alpha,x),(\delta,z),(\beta,y)\big).\end{aligned} \tag{32.37}$$

Праву частину можна виразити через функцію Гріна $G_{2,1}$. Скористаємося для цього рівнянням Швінгера (31.70), яке запишемо в диференціальній формі

$$\Box_z G_{2.1}\big((\alpha,x);(\beta,y);(\mu,z)\big) = eg^{\mu\mu'}\gamma^{\mu'}_{\delta'\delta}G_{4,0}\big((\delta,z),(\alpha,x);(\delta',z),(\beta,y)\big). \tag{32.38}$$

Подіємо на (32.38) оператором ∂^μ_z, просумуємо за μ і підставимо в (32.37) ліву частину (32.38). В отриманій рівності перейдемо до сильнозв'язних частин згідно з п.24.6. Отримаємо співвідношення (запишемо у матричній формі):

$$\begin{aligned}G^{-1}_{2,0}(x-y)\delta(z-y) \;-\; &\delta(x-z)G^{-1}_{2,0}(z-y) =\\ &= \frac{1}{e}\int dz'\partial^\mu\Box_z G_{0,2}\big((\mu,z),(\nu,z')\big)\Gamma^\nu_{2,1}(x,y,z').\end{aligned}$$

Тоді, враховуючи, що внаслідок градієнтної інваріантності ($k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$)(див. (31.75) з рівнянь (31.73), (31.74) можна отримати співвідношення

$$\partial_z^\mu G_{0,2}\big((\mu,z),(\nu,z')\big) = \partial_{z,\nu} D_0^c(z-z'),$$

з якого випливає тотожність Уорда

$$G_{2,0}^{-1}(x-y)\delta(z-y) - \delta(y-z)G_{2,0}^{-1}(z-y) = \frac{1}{e}\partial_{\nu,z}\Gamma_{2,1}^{\nu}(x,y,z) \tag{32.39}$$

або в імпульсному просторі

$$G_{2,0}^{-1}(p) - G_{2,0}^{-1}(q) = (p-q)_\nu \Gamma^\nu(p,q). \tag{32.40}$$

32.4. Квантування полів Янга–Міллса, що взаємодіють з полями матерії

Розглянемо неабелеву калібрувальну групу перетворень $SU(N)$ (див. п.10.3). Відповідне поле $W_\mu(x)$ є функцією на $\mathbb{M}$ зі значеннями в алгебрі Лі групи $SU(N)$. Його можна представити через поля W_μ^a, що відповідають обмінним бозонам, і генератори групи $SU(N)$ формулою

$$W_\mu = W_\mu^a T^a.$$

Згідно з калібрувальним принципом (див. п.9.3) будемо розглядати повний лагранжіан взаємодії у вигляді

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_\psi(x) + \mathscr{L}_{\text{ям}}(x), \tag{32.41}$$

де

$$\mathscr{L}_\psi(x) = \mathscr{L}_0(\psi, D_\mu\psi) - -- \tag{32.42}$$

це лагранжіан вільного поля Дірака, в якому звичайні похідні ∂_μ треба замінити на коваріантні похідні

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a, \tag{32.43}$$

а

$$\mathscr{L}_{\text{ям}}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x), \tag{32.44}$$

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\mu^c. \tag{32.45}$$

Лагранжіан (32.41) є інваріантним відносно калібрувальних перетворень (див. § 10):

$$\psi(x) \to \psi^\omega(x) = S_\omega(x)\psi(x) = e^{ig\omega_a(x)T^a}\psi(x), \tag{32.46}$$

$$\bar\psi(x) \to \bar\psi^\omega(x) = \bar\psi(x)S_\omega^{-1}(x) = \bar\psi(x)e^{-ig\omega_a(x)T^a}, \tag{32.47}$$

$$W_\mu(x) \to W_\mu^\omega(x) = S_\omega(x)W_\mu(x)S_\omega^{-1}(x) + \frac{i}{g}S_\omega(x)\partial_\mu S_\omega^{-1}(x). \tag{32.48}$$

У §2 (п.2.4) було показано, що останнє перетворення (32.48) можна записати безпосередньо для калібрувальних полів W_μ^a (див. (2.32)–(2.40):

$$W_\mu^a(x) \to (W^\omega)_\mu^a(x) = \Omega^{ab}(x)W_\mu^b(x) + \partial_\mu\omega^a(x), \tag{32.49}$$

де матриця $\Omega(x) = \exp[ig\widetilde{\omega}(x)]$, а $\widetilde{\omega}$ визначена формулою (2.37).

Це перетворення використаємо нижче в інфінітезимальній формі, тобто для нескінченно малих функцій-параметрів $\omega^a(x)$:

$$W_\mu^a(x) \to (W^\omega)_\mu^a(x) = W_\mu^a(x) + \partial_\mu\omega^a(x) + gf^{abc}W_\mu^b(x)\omega^c(x). \tag{32.50}$$

Щоб побудувати теорію збурень для функцій Гріна або для матриці розсіяння, застосуємо методи пункту 32.2. Тоді для функціонала $F[B] \equiv F[\bar\psi, \psi, W]$, інваріантного відносно калібрувальних перетворень (32.46)–(32.49), і середніх (32.23) або (32.27), калібрувально інваріантна міра $d\mu[B]$ матиме вигляд

$$d\mu[\bar\psi, \psi, W] = e^{i\int \mathscr{L}(x)dx}\mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}W, \quad \mathscr{D}W = \prod_a\prod_\mu\prod_x dW_\mu^a(x),$$

що є наслідком (32.17).

Аналогами зв'язків (або в термінології п.32.2 поверхонь інтегрування у фазовому просторі полів) є функціонали $\Phi[B]$ в (32.29) (або $\widetilde{\delta}(\varphi(B))$ в (32.24)), які фіксують калібровку. За аналогією до електромагнітної взаємодії розглядаються такі функціонали:

1) *кулонівська калібровка*

$$\Phi_1[B] \equiv \Phi_1[W] = \widetilde{\delta}(\partial^k W_k) \equiv \prod_x\prod_a \delta(\partial^k W_k^a(x)); \tag{32.51}$$

2) *коваріантна калібровка Лоренца*

$$\Phi_2[B] \equiv \Phi_2[W] = \widetilde{\delta}(\partial^\mu W_\mu) \equiv \prod_x\prod_a \delta(\partial^\mu W_\mu^a(x)); \tag{32.52}$$

3) *часова (temporal) калібровка*

$$\Phi_3[B] \equiv \Phi_3[W] = \widetilde{\delta}(W_0) \equiv \prod_x\prod_a \delta(W_0^a(x)); \tag{32.53}$$

4) *аксіальна калібровка*

$$\Phi_4[B] \equiv \Phi_4[W] = \widetilde{\delta}(W_3) \equiv \prod_x\prod_a \delta(W_3^a(x)); \tag{32.54}$$

5) *α-калібровка загального вигляду*

$$\Phi_5[B] \equiv \Phi_5[W] = e^{-\frac{i}{2\alpha}\int \partial^\mu W^a_\mu(x)\partial^\nu W^a_\nu(x)dx}, \tag{32.55}$$

яка при $\alpha = 1$ задає діагональну калібровку Фейнмана (див. (31.25)).

На відміну від електромагнітного поля важливим нетривіальним функціоналом є $\Delta_\Phi[B] \equiv \Delta_\Phi[W]$, визначений рівністю (32.26). У випадку абелевої групи перетворень $\Delta_\Phi[B]$ не залежав від поля B і скорочувався із таким самим функціоналом у знаменнику. Для розрахунку функціоналів $\Delta_\Phi[W]$ треба зробити зауваження. У прикладах (32.51)–(32.54) інтегрування в (32.27) буде виконуватись по поверхнях

$$\varphi_i(W^a(x)) = 0, \quad i = 1,2,3,4, \quad a = \overline{1, N^2-1}, \quad x \in \mathbb{M}, \tag{32.56}$$

що відповідають аргументам δ-функцій в (32.51)–(32.54). Це означає, що внесок у відповідний континуальний інтеграл будуть робити лише ті змінні W^a, які лежать на цій поверхні. Тоді в означенні функціоналів $\Delta_{\varphi_i}[B]$ формулою (32.21) можна проводити інтегрування не за усіма елементами B^ω класу B, а лише зо інфінітезимальними перетвореннями. Це дає змогу при обчисленні функціонала користуватися формулою (32.50) для відповідних $(W^\omega)^a_\mu(x)$ і умовами (32.56). Отже, для $\Delta_{\varphi_i}[W]$ отримаємо вираз

$$\Delta_{\varphi_i}[W]^{-1} = \int\limits_{\Omega_{\text{inf}}} \widetilde{\delta}(\varphi_i(W^\omega))\mathscr{D}\omega, \tag{32.57}$$

де Ω_{inf} – множина інфінітезімальних калібрувальних перетворень. Переходячи в інтегралі (32.57) до нових змінних

$$\widetilde{\omega}^a_i(x) = \varphi_i\big((W^\omega)^a(x)\big)$$

знаходимо, що

$$\Delta_{\varphi_i}[W] = \det\, M_{\varphi_i},$$

де

$$\big(M_{\varphi_i}(x,y)\big)^{ab} = \frac{\delta\varphi_i\big((W^\omega)^a(x)\big)}{\delta\omega^b(y)}. \tag{32.58}$$

Внаслідок того, що інтегрування виконується лише по поверхні Ω_{inf}, матриця (32.58) не залежить від $\omega_a(x)$, оскільки у виразі $W^\omega(x)$ враховуються лише лінійні за $\omega_a(x)$ члени. Легко обчислити (задача 32.5) матричні елементи матриці-оператора M_{φ_i} (нагадаємо, що M_{φ_i} є матрицею тільки за дискретними змінними a, b і інтегральним оператором з ядром (32.58)):

1) *для кулонівської калібровки*

$$\big(M_{\varphi_1}(x,y)\big)^{ab} = \big(\delta^{ab}\partial^k\partial_k - gf^{abc}W^c_k(x)\partial^k\big)\delta(x-y); \tag{32.59}$$

2) *для коваріантної калібровки Лоренца*

$$\big(M_{\varphi_2}(x,y)\big)^{ab} = \big(-\delta^{ab}\Box - g f^{abc} W^c_\mu(x)\partial^\mu\big)\delta(x-y); \tag{32.60}$$

3) *для часової калібровки*

$$\big(M_{\varphi_3}(x,y)\big)^{ab} = \delta^{ab}\partial_0\delta(x-y); \tag{32.61}$$

4) *для аксіальної калібровки*

$$\big(M_{\varphi_4}(x,y)\big)^{ab} = \delta^{ab}\partial_3\delta(x-y). \tag{32.62}$$

Легко помітити, що у випадках **3**) і **4**) матриці M_{φ_i}, $i = 3, 4$ не залежать від полів W^a_μ, і тому відповідні $\Delta_{\varphi_i}[W]$ є константами (хоч і безмежними), й так само, як і у випадку електромагнітної взаємодії, вони скорочуються з відповідними константами в знаменнику виразу (32.27). Отже, проблеми з квантуванням полів W^a_μ у цьому випадку не буде, але відповідні 2-точкові функції Гріна (при $g = 0$) не будуть лоренц коваріантними.

Розглянемо тепер α-калібровку **5**). У даному випадку застосуємо майже такий самий прийом, який розглядався у підпункті 32.3.1 при переході від однієї калібровки до іншої. Почнемо з виразу (32.27) в узагальненій калібровці Лоренца:

$$\partial^\mu W^a_\mu(x) = \varphi^a(x),$$

де $\varphi^a(x) \in \Omega_{\inf}$. Тоді відповідний $\Delta_\varphi[W]$, що визначається формулою

$$\Delta_\varphi[W]^{-1} = \int\limits_{\Omega_{\inf}} \prod_a \prod_x \delta(\partial^\mu (W^\omega)^a_\mu(x) - \varphi^a(x)) d\omega^a$$

розраховується аналогічно до $\Delta_{\varphi_2}[W]$ і тотожний йому :

$$\Delta_\varphi[W] = \Delta_{\varphi_2}[W] = \det\, M_{\varphi_2}.$$

Запишемо вираз (32.27) для цього випадку у вигляді

$$< F >_\mu \int \Delta_\phi[W]\widetilde{\delta}(\partial^\mu W_\mu - \varphi) d\mu[B] = \int F[B]\Delta_\phi[W]\widetilde{\delta}(\partial^a W_\mu - \varphi) d\mu[B]. \tag{32.63}$$

Оскільки $< F >_\mu$ від φ не залежить, домножимо обидві частини (32.63) на функціонал

$$\exp\left[-i\frac{1}{2\alpha}\sum_a \int \varphi^a(x)^2 dx\right]$$

і проінтегруємо за мірою $\mathscr{D}\varphi$.

Внаслідок чого отримаємо для $< F >_\mu$ вираз

$$< F >_\mu = \frac{1}{N} \int F[B] \det M_{\varphi_2} e^{-i\frac{1}{2\alpha}\sum\limits_a \int (\partial^\mu W^a_\mu(x))^2 dx} d\mu[B]; \tag{32.64}$$

нормувальний множник N дорівнює інтегралу при $F[B] \equiv 1$.

Так само, як і у випадку електромагнітної взаємодії (див. п.32.3), якщо замість $F[B]$ підставити не калібрувально інваріантний функціонал

$$F[B] = \exp\left[i \int W^a_\mu(x) j^\mu_a(x) dx\right],$$

і покласти $g = 0$, то можна обчислити вираз для 2-точкової функції Гріна W-бозонів (задача 32.6):

$$\begin{gathered} \frac{1}{i} D^{c,YM}_{\mu\nu}(x-y)^{ab} \equiv \frac{1}{i} D^{ab}_{\mu\nu}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk\, e^{-ik(x-y)} D^{ab}_{\mu\nu}(k), \\ D^{ab}_{\mu\nu}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\varepsilon}\left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\varepsilon}(1-\alpha)\right]. \end{gathered} \tag{32.65}$$

Наступним завданням є побудова коваріантної теорії збурень для функцій Гріна або матриці розсіяння.

32.5. Дýхи Фаддєєва–Попова. Діаграмна техніка

Отже, якщо $g = 0$, то для кожного виду калібровки легко отримати 2-точкові функції Гріна, які будуть повністю збігатися з відповідними функціями в моделі КЕД. При спробі розвинути звичайну теорію збурень за g шляхом розкладу в ряд експоненти наштовхуються на труднощі, які пов'язані з наявністю у виразі (32.64) множника $\det M_{\varphi_2}$. У праці [118] було запропоновано скористатися континуальним аналогом формули (26.86), ввівши деякі нові поля $\phi_a(x)$ і $\overset{*}{\phi}_a(x) \equiv \bar{\phi}_a(x)$, що відповідають фіктивним (духовим) "*скалярним ферміонам*". Отже, вважаючи $\phi_a(x)$ і $\bar{\phi}_a(x)$ континуальними грасмановими змінними, можна записати представлення $\det M_{\varphi_i}$ у вигляді

$$\det M_{\varphi_j} = \int e^{i\int \bar{\phi}_a(x) M^{ab}_{\varphi_j}(x-y)\phi_b(y)} \mathscr{D}\bar{\phi}\mathscr{D}\phi.$$

Розглянемо лоренц-коваріантний випадок $j = 2$: $M_{\varphi_2} \equiv M$.

Мовою лагранжіану це означає, що до повного лагранжіана $\mathscr{L}(x)$ треба ще додати член

$$\mathscr{L}_{\text{фп}}(x) = \partial^\mu \bar{\phi}_a(x) \partial_\mu \phi_a(x) + g \partial^\mu \bar{\phi}_a(x) f^{abc} \phi_b(x) W^c_\mu(x). \tag{32.66}$$

Цей лагранжіан відповідає розповсюдженню безмасових, "безспінових ферміонів" і їх взаємодії з калібрувальними полями W^a_μ. Перш ніж записати правила

Фейнмана для побудови ряду теорії збурень для функцій Гріна або матричних елементів S-матриці, запишемо вираз для повної дії, що відповідає системі взаємодіючих полів матерії $\psi^{(k)}$ за допомогою калібрувальної групи $SU(N)$, тобто $k = 1, 2, \ldots, N$; $a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$.

Отже, повна дія, що входить в континуальний інтеграл твірного функціонала для функцій Гріна

$$G[\bar\eta, \eta, j] = G[0]^{-1} \int e^{i(\bar\eta\cdot\psi + \bar\psi\cdot\eta + j^\mu_a \cdot W^a_\mu)} e^{i\mathcal{A}[\bar\psi,\psi,W,\phi]} \mathscr{D}\bar\psi \mathscr{D}\psi \mathscr{D}W \mathscr{D}\phi \tag{32.67}$$

з фіксованою α-калібровкою, будується за допомогою лагранжіана (32.41)–(32.45), члена, що фіксує калібровку

$$\Delta\mathscr{L}_W = -\frac{1}{2\alpha} : \partial^\mu W^a_\mu(x) \partial^\nu W^a_\nu(x) : \tag{32.68}$$

та лагранжіана духів (32.66).

Запишемо повну дію з урахуванням граничних умов (спадання на безмежності) на змінні ψ, W, ϕ у вигляді (задача 32.7)

$$\begin{aligned}
i\mathcal{A}\,[\psi, W, \phi] &= i\mathcal{A}_0[\psi, W, \phi] + i\mathcal{A}_I[\psi, W, \phi], && (32.69)\\
i\mathcal{A}_0[\psi, W, \phi] &= i\mathcal{A}_0[\psi] + i\mathcal{A}_0[W] + i\mathcal{A}_0[\phi], && (32.70)\\
i\mathcal{A}_I[\psi, W, \phi] &= i\mathcal{A}_I[\psi; W] + i\mathcal{A}_I[W; W] + i\mathcal{A}_I[W; \phi], && (32.71)\\
i\mathcal{A}_0\,[\psi] &= i \int dx\, \bar\psi^{(k)}_\alpha(x)(i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta})\psi^{(k)}_\beta(x), && (32.72)\\
i\mathcal{A}_0\,[W] &= -\frac{i}{2} \int dx\, W^a_\mu(x) \left(g^{\mu\nu}\Box + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu \right) W^a_\nu(x), && (32.73)\\
i\mathcal{A}_0\,[\phi] &= i \int dx\, \bar\phi_a(x)\Box\phi_a(x), && (32.74)\\
i\mathcal{A}_I[\psi; W] &= ig \int dx\, \bar\psi^{(j)}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta} T^a_{jk} \psi^{(k)}_\beta(x) W^a_\mu(x), && (32.75)\\
i\mathcal{A}_I[W; W] &= i \int dx \Big[g f^{abc} g^{\lambda\nu} : (\partial^\mu W^a_\lambda)(x) W^b_\mu(x) W^c_\nu(x) : - \\
&- \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} g^{\lambda\nu} g^{\mu\rho} : W^b_\lambda(x) W^c_\mu(x) W^d_\nu(x) W^e_\rho(x) : \Big], && (32.76)\\
i\mathcal{A}_I[W; \phi] &= igf^{abc} \int dx (\partial^\mu \bar\phi_a)(x) \phi_b(x) W^c_\mu(x). && (32.77)
\end{aligned}$$

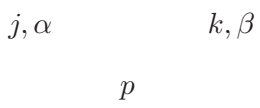
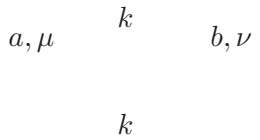
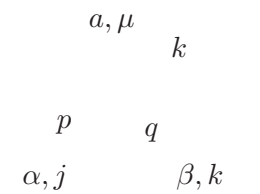
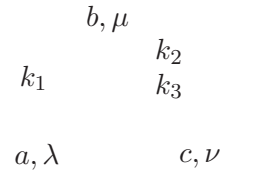
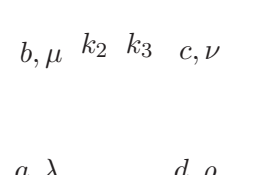
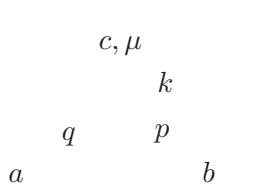
Поданий запис дає можливість дуже просто встановити правила відповідності (правила Фейнмана) між аналітичними і графічними виразами. Внутрішнім лініям відповідають пропагатори Фейнмана, які є функціями Гріна диференціальних операторів-матриць, що стоять між відповідними змінними ψ, W, ϕ у виразах (32.72)–(32.74). Вершинам діаграм будуть відповідати матриці або структурні константи, що стоять перед відповідними полями (див. (32.75)–(32.77)). Зовнішнім лініям відповідні поля або їх похідні (див. (32.75)–(32.77)).

Подамо ці правила у вигляді Таблиці 32.1, записавши їх в імпульсному просторі і зробивши операцію антисиметризації коефіцієнта при добутку векторних полів у виразі (32.76)(перший доданок) та операцію симетризації коефіцієнта у виразі (32.76)(другий доданок) для того, щоб відповідна антисиметричність і симетричність цих коефіцієнтів була явно виражена. До цих правил треба додати, що кожній замкнутій петлі пунктирних ліній (тобто ліній, що відповідають "духам"), відповідає множник (-1). Зауважимо також, що у розкладах відсутні діаграми з зовнішніми пунктирними лініями, тобто вони входять у діаграми лише через замкнуті петлі.

У таблиці 32.1 введені такі позначення:

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}^{(3)}_{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2,k_3) &= (2\pi)^4\delta(k_1+k_2+k_3)\frac{1}{3!}\big[(k_1-k_2)_\nu g_{\lambda\mu}+ \\
&+ (k_2-k_3)_\lambda g_{\mu\nu}+(k_3-k_1)_\mu g_{\lambda\nu}\big], \qquad (32.78)\\
\widetilde{V}^{(4);abcd}_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\dots,k_4) &= (2\pi)^4\delta(k_1+\dots+k_4)\frac{1}{4!}\big[f^{eab}f^{ecd}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}-g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})+ \\
&+ f^{ecb}f^{ead}(g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}-g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda})+ \\
&+ f^{eac}f^{ebd}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}-g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}\big]. \qquad (32.79)
\end{aligned}$$

Таблиця 32.1

№ п/п	**Назва внеску**	**Графічний вираз**	**Аналітичний вираз**
1.	Пропагатор фермі-частинок		$\frac{\delta_{jk}}{(2\pi)^4 i}\int \frac{(m+\hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2-p^2-i\varepsilon}dp$
2.	Пропагатор векторних бозонів		$\frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4 i}\int \frac{dk}{k^2+i\varepsilon}\left[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\varepsilon}\right]$
3.	Пропагатор “ду́хів”		$-\frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4 i}\int \frac{dp}{p^2+i\varepsilon}$
4.	Кварк-глюонна вершина (32.75)		$ig\gamma^\mu_{\alpha\beta}T^a_{jk}(2\pi)^4\delta(q+k-p)$
5.	3-глюонна вершина (32.76) — 1-й доданок		$-gf^{abc}\widetilde{V}^{(3)}_{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2,k_3)$
6.	4-глюонна вершина (32.76) — 2-й доданок		$-ig^2\widetilde{V}^{(4);abcd}_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3k_4)$
7.	Глюон-духова вершина		$-g(2\pi)^4\delta(p+k-q)q_\mu f^{abc}$

32.6. БРСТ–інваріантність

На прикладі КЕД видно, що калібрувальна інваріантність з одного боку є методом для подолання багатьох проблем при квантуванні калібрувальних полів, але з іншого – вона обмежує вибір контрчленів при усуненні розбіжностей. Фіксуючи калібровку, тим самим "*ховаємо*" початкову калібрувальну інваріантність теорії і ще більше обмежуємо вигляд контрчленів.

Метод Фаддєєва–Попова, який коротко викладено вище, зберігає лоренц-коваріантність теорії, але фіксує калібровку і фактично фіксує вигляд контрчленів, які необхідно внести в лагранжіан, щоб забезпечити перенормовність теорії. Як побачимо нижче, при даному виборі калібровки (α-калібровка) цей метод ще не порушує перенормовність теорії, але у більш загальній ситуації питання залишається відкритим.

Виявляється (!) існує нова симетрія (навіть при фіксованій α-калібровці), відносно якої континуальні інтеграли, за допомогою яких записуємо функції Гріна, залишаються інваріантними. Таку симетрію відкрили Беччі, Роут і Стора [107] та незалежно І.В.Тютін [194]. Вона будується за допомогою деякого параметра θ (однакового для всіх $x \in \mathbb{M}$), який є грасмановою змінною, тобто

$$\theta^2 = 0 \tag{32.80}$$

і який антикомутує з полями "дýхів" $\phi^a, \overline{\phi}^a$ та полями матерії $\psi, \overline{\psi}$. Щоб зберегти калібрувальну інваріантність лагранжіана (32.41)–(32.45) при побудові нової симетрії, виберемо у формулах (32.46)–(32.49)

$$\omega^a(x) = \theta\phi^a(x). \tag{32.81}$$

Такий вибір локальних параметрів забезпечує збіг інфінітезимальних і повних калібрувальних перетворень (32.46)–(32.49) внаслідок співвідношення (32.80). Але, крім лагранжіана (32.41)–(32.45), теорія Фаддєєва–Попова містить у собі ще два доданки – це лагранжіан (32.66) і член (32.68), який фіксує калібровку, тбто деякий додатковий ефективний лагранжіан

$$\mathscr{L}_{\text{еф}}(x) \;=\; \mathscr{L}_{\text{фп}}(x) \;+\; \Delta\mathscr{L}_W(x). \tag{32.82}$$

Отже, повний лагранжіан теорії взаємодіючих полів матерії і полів Янга—Міллса матиме вигляд

$$\mathscr{L}_{\psi;W}(x) = \mathscr{L}_{\psi}(x) + \mathscr{L}_{\text{ям}}(x) + \mathscr{L}_{\text{еф}}(x), \tag{32.83}$$

а відповідна дія

$$\mathcal{A}_{\psi;W} = \mathcal{A}_{\psi} + \mathcal{A}_{\text{ям}} + \mathcal{A}_{\text{еф}}. \tag{32.84}$$

Умова (32.80) дає можливість записати довільні БРСТ–перетворення в інфінітезимальній формі

$$B \to B^\theta = B\mathbb{1}_\theta + \delta_\theta B, \quad \delta_\theta B = \theta\delta B, \quad B \in \{\psi_\alpha, \overline{\psi}_\beta, W^a_\mu, \phi^b, \overline{\phi}^c\}, \tag{32.85}$$

де

$$\delta\psi_\alpha(x) \;=\; ig\phi^a(x)T^a\psi_\alpha(x), \tag{32.86}$$

$$\delta\overline{\psi}_\beta(x) \;=\; -ig\overline{\psi}_\beta(x)\phi^a(x)T^a, \tag{32.87}$$

$$\delta W^a_\mu(x) \;=\; \partial_\mu\phi^a(x) + gf^{abc}\phi^b(x)W^c_\mu(x), \tag{32.88}$$

$$\delta\phi^a(x) \;=\; -\frac{1}{2}gf^{abc}\phi^b(x)\phi^c(x), \tag{32.89}$$

$$\delta\overline{\phi}^a(x) \;=\; -\frac{1}{\alpha}\partial^\mu W^a_\mu(x). \tag{32.90}$$

У формулі (32.85) $\mathbb{1}_\theta$ – одиничний оператор у представленні, де реалізується грасманова змінна θ. Перші два доданки лагранжіана (32.83) є інваріантними відносно перетворень (32.85) з δB, які визначені в (32.86)–(32.88):

$$\mathscr{L}_\psi(x) + \mathscr{L}_{\text{ям}}(x) \;=\; \mathscr{L}^\theta_\psi(x) + \mathscr{L}^\theta_{\text{ям}}(x).$$

Це є наслідком загальної калібрувальної інваріантності теорії з локальними параметрами групи у вигляді (32.81). Ефективний лагранжіан $\mathscr{L}_{\text{еф}}(x)$ при перетвореннях (32.85) з δB, що визначена в (32.88)–(32.90), перетворюється так:

$$\mathscr{L}_{\text{еф}}(x) \to \mathscr{L}^\theta_{\text{еф}}(x) \;=\; \mathscr{L}_{\text{еф}}(x) - \frac{1}{\alpha}\theta\partial^\mu J_\mu(\phi, W), \tag{32.91}$$

де

$$J_\mu(\phi, W) \;=\; \big(\partial_\mu\phi^a(x) + gf^{abc}\phi^b(x)W^c_\mu(x)\big)\partial^\nu W^a_\nu(x). \tag{32.92}$$

Пропонуємо самостійно (задача 32.8) проробити досить громіздки викладки і переконатися у справедливості формули (32.91). Із формули (32.91) випливає, що сам лагранжіан $\mathscr{L}_{\text{еф}}(x)$ не є інваріантним відносно БРСТ-перетворень (32.85)–(32.90), але вигляд доданка ((32.92), який виникає внаслідок такого перетворення дає можливість стверджувати, що інваріантною є відповідна дія

$$\mathcal{A}_{\text{еф}} \to \mathcal{A}^\theta_{\text{еф}} \;=\; \mathcal{A}_{\text{еф}}$$

при умові, що всі поля зникають на межі інтегрування. Отже, в цілому теорія є інваріантною відносно БРСТ-симетрії.

Перетворення (32.86)–(32.89) полів $\psi_\alpha, \overline{\psi}_\beta, W^a_\mu, \phi^b$ є *нільпотентним* . Це означає, що якщо ввести операцію Q, що діє на поле $B \in \{\psi_\alpha, \overline{\psi}_\beta, W^a_\mu, \phi^b\}$ (як на функціональну змінну в інтегралі для дії) за формулою

$$QB := \delta B, \tag{32.93}$$

то

$$Q^2 B = 0. \tag{32.94}$$

Доведення цієї властивості легко встановити прямими обчисленнями, враховуючи антикомутативні властивості полів матерії і духів, а також внаслідок тотожності Якобі для структурних констант (див. також [17, п.15.7]). Для того, щоб властивість (32.94) була справедлива для всіх полів (включаючи поле $\overline{\phi}^a$), треба дещо змінити вигляд ефективного лагранжіана. Для цього треба переписати експоненту від α-калібрувального члена (32.68) у вигляді фур'є-перетворення

$$e^{-i\frac{1}{2\alpha}\int :\partial^\mu W^a_\mu(x)\partial^\nu W^a_\nu(x):dx} = C\int e^{\frac{i\alpha}{2}\int h_a(x)h_a(x)dx} e^{i\int h_a(x)\partial^\mu W^a_\mu(x)}\mathscr{D}h, \tag{32.95}$$

де C– стала нормування.

Тоді у виразі для ефективного лагранжіана треба замінити член (32.68) на суму членів, що стоять в експонентах правої частини рівняння (32.95) без уявної одиниці i. БРСТ–симетрія нової дії буде тепер виконуватись для перетворень (32.86)–(32.89), нового перетворення поля $\overline{\phi}^a$

$$\delta\overline{\phi}_a = h_a \tag{32.96}$$

і додаткового перетворення поля h_a

$$\delta h_a = 0. \tag{32.97}$$

Перетворення (32.86)–(32.89), (32.96), 32.97) відносяться до *суперсиметричних* перетворень. Так, наприклад (навіть при $g = 0$), перетворення (32.88) перетворює калібрувальний бозон у духи, (32.89) знищує 1-частинковий стан духів, а (32.96) перетворює 1-частинковий стан антидухів у квант поля h_a. Оператор, що відповідає *суперзаряду* є $\widehat{Q}$. При БРСТ–квантуванні комутатор чи антикомутатор оператора суперзаряду $\widehat{Q}$ з відповідними полями буде задаватись дією перетворення Q (32.93) на ці поля. Нільпотентний оператор $\widehat{Q}$ відіграє важливу роль у визначенні фізично допустимих станів Ψ в Гільбертовому просторі станів. Вони визначаються таким чином, що всі фізично допустимі стани належать *ядру* оператора $\widehat{Q}$, тобто

$$\widehat{Q}\Psi = 0. \tag{32.98}$$

Ця умова забезпечує відсутність духових станів у множині фізично допустимих станів. Крім того, оператор $\widehat{Q}$ встановлює відповідність між нефізичними поляризаційними станами калібрувальних бозонів і духами.

З одного боку вимога БРСТ–інваріантності теорії є більш глибокою, оскільки дає значно ширші можливості у виборі контрчленів для усунення розбіжностей, але з іншого – перетворення (32.85)–(32.89) є нелінійними, і стає зовсім нетривіальним встановити відповідні перетворення для функцій Гріна. Пропонуємо звернутися до монографії Вайнберга ([17], розд. 15,17), в якій досить детально викладені основи БРСТ-симетрії та її узагальнення, а також наведене доведення перенормовності найбільш загальної неабелевої калібрувальної теорії (див. також [65]).

§ 33. Основні моделі взаємодій квантованих полів

Найбільш розвинену теорію – електромагнітну – було описано в §31. У даному параграфі коротко зупинимось на моделях, які побудовані на основі теорії калібрувальних полів та їх взаємодії з полями матерії, тобто ферміонними полями, що відповідають масовим частинкам спіну $s = 1/2$. Це перш за все КХД, яка вивчає взаємодію адронів в рамках теорії сильних взаємодій і модель електрослабкої взаємодії. Квантову теорію цих моделей можна будувати на основі формалізму, викладеного в § 32. Особливої уваги потребує проблема усунення ультрафіолетових розбіжностей. Труднощі, які виникають при застосуванні описаних вище методів, будуть залежати від вибору конкретної моделі, тобто лагранжіану. Базовим лагранжіаном, з якого будуються модельні лагранжіани взаємодій, є калібрувально інваріантний лагранжіан (32.41) – (32.45). Він описує взаємодію калібрувальних безмасових полів W^a_μ з полями матерії ψ. Для конкретних моделей виникає ряд додаткових проблем, які пов'язані з тим, що окремі обмінні бозони W^a_μ мають ненульову масу. Введення масового члена порушує калібрувальну інваріантність і вносить додаткові проблеми в процедуру усунення розбіжностей. Проблеми з описом масивних бозонів ми коротко обговорювали в § 11 на рівні класичної теорії і повернемося до цього питання нижче. підрозділах.

33.1. Перенормування калібрувальних теорій

У п.32.4 було розглянуто питання, як треба модифікувати лагранжіан (32.41)–(32.45), щоб побудувати коваріантну теорію збурень для S-матриці і функцій Гріна. Вигляд цього модифікованого лагранжіана міститься у виразі дії (32.69)–(32.77):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\psi, W, \phi] &= \int dx : \widetilde{\mathscr{L}}(x) :, && (33.1)\\
\widetilde{\mathscr{L}} &= \widetilde{\mathscr{L}_0} + \widetilde{\mathscr{L}_I}, \\
\widetilde{\mathscr{L}_0} &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}W^a_\mu\left(g^{\mu\nu}\Box - \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu\right)W^a_\nu + \overline{\phi}_a\Box\phi_a, && (33.2)\\
\widetilde{\mathscr{L}_I} &= g\overline{\psi}\gamma^\mu T^a\psi W^a_\mu + gf^{abc}g^{\lambda\nu}\partial^\mu W^a_\lambda W^b_\mu W^c_\nu - \\
&- \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ade}g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}W^b_\lambda W^c_\mu W^d_\nu W^e_\rho + gf^{abc}\partial^\mu\overline{\phi}_a\phi_b W^c_\mu. && (33.3)
\end{aligned}$$

Внески діаграм Фейнмана будуються за допомогою трьох видів пропагаторів, які є функціями Гріна операторів, що стоять у виразі $\widetilde{\mathscr{L}}$ між полями $\overline{\psi}$ та ψ, W^a_μ та W^a_ν, $\overline{\phi}_a$ та ϕ_a, і вершин чотирьох видів, що відповідають кожному з доданків лагранжіана взаємодії (33.3) (див. табл. 32.1 і ф-ли (32.78), (32.79)). Згідно з формулами (25.30), (25.31) максимальні індекси кожної з вершин (при $d = 4$)

$$\omega_1^{\max} = \omega_2^{\max} = \omega_3^{\max} = \omega_4^{\max} = 0. \qquad (33.4)$$

Отже, теорія є перенормовною за допомогою скінченного числа контрчленів, які визначаються примітивно-розбіжними діаграмами і деякими додатковими співвідношеннями. Щоб визначити кількість і вигляд примітивно-розбіжних діаграм, запишемо формулу (25.32) через кількість ферміонних зовнішніх ліній L_ψ, глюонних зовнішніх ліній L_W і зовнішніх ліній, що відповідають духовим частинкам L_ϕ:

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}L_\psi - L_W - L_\phi. \tag{33.5}$$

Формула (33.5) записана з урахуванням (33.4) при $d = 4$. Отже, розбіжні діаграми (примітивно-розбіжні) відповідають таким трійкам: $(L_\psi, L_W, L_\phi) = (0,0,0),\ (2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2),\ (2,1,0),\ (0,1,2),\ (0,3,0),\ (0,4,0),\ (0,0,4),\ (0,2,2)$. Але число діаграм буде більше, оскільки їх можна побудувати за допомогою різного виду вершин. Наведемо тут їх вигляд, але не будемо робити досить складні і громіздкі обчислення відповідних інтегралів і виділення розбіжних доданків. Обчислення внесків від деяких конкретних діаграм можна знайти в монографіях [86], [106], [23].

Для обчислення перенормованого внеску у власне енергетичну функцію калібрувальних бозонів $(0,2,0)$ треба застосувати методи, які були описані у § 25 і п.31.4, до внесків діаграм на рис. 33.1 ($\omega(G) = 2$):

a, μ b, ν , a, μ b, ν ,

$a)$ $b)$

a, μ b, ν .

$c)$

Рис. 33.1

Розбіжні вклади цих діаграм можна компенсувати контрчленами, що мають такий вигляд:

$$-\frac{1}{2}\Delta Z_W^{(2)} : W_\mu(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)W_\nu^a : -\frac{1}{2\alpha}\Delta Z_\alpha^{(2)} : W_\mu^a\partial^\mu\partial^\nu W_\nu^a :, \tag{33.6}$$

де $\Delta Z_W^{(2)} = \Delta Z_{W,a}^{(2)} + \Delta Z_{W,\delta}^{(2)} + \Delta Z_{W,b}^{(2)}$, а вклад в $\Delta Z_\lambda^{(2)}$ дає тільки діаграма на рис. 33.1, а).

Для перенормування Фермі-полів і відповідних мас частинок матерії треба розглянути вклад діаграми на Мал. 33.2 ($\omega(G) = 1$), $(2, 0, 0)$.

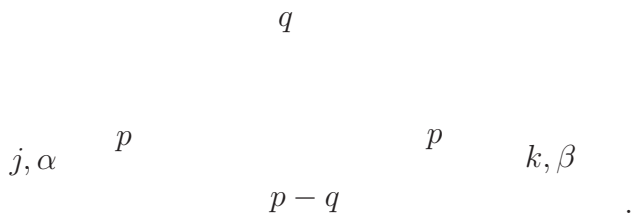


Рис. 33.2

Відповідний вклад в контрчлен лагранжіану буде мати вигляд

$$\Delta Z_{\psi}^{(2)} \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - \delta\widetilde{m}^{(2)}\overline{\psi}\psi. \tag{33.7}$$

Перенормірovки вимагають, також, і поля "духів" $\phi_a(x)$. Відповідний контрчлен пов'язаний з вкладом від діаграми на рис. 33.3 ($\omega(G) = 2$), $(0, 0, 2)$

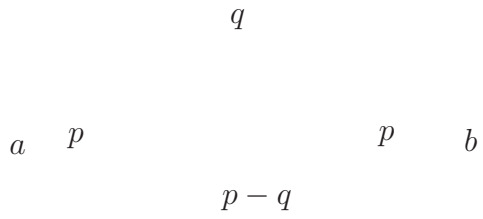


Рис. 33.3

і виглядає як

$$\Delta Z_{\phi}^{(2)} \phi_a \Box \phi_a. \tag{33.8}$$

Вершинні діаграми теж є розбіжними. До вершинних діаграм ми відносимо діаграми з трьома і чотирма зовнішніми лініями. Розбіжні діаграми з трьома зовнішніми лініями, в свою чергу, діляться на три групи. Перша група, це діаграми, що відповідають глюонній вершині $(0, 3, 0)$, $\omega(G) = 1$, зображені на рис. 33.4

b, ν b, ν

, ,

a, μ а c, ρ a, μ б c, ρ

b, ν b, ν

, .

a, μ в c, ρ a, μ г c, ρ

Рис. 33.4

Внесок у відповідний контрчлен має вигляд

$$\Delta Z_1^{(3)} g f^{abc} g^{\lambda\nu} : \partial^\mu W_\lambda^a W_\mu^b W_\nu^c :,$$
$$\Delta Z_1^{(3)} = \Delta Z_{1,a}^{(3)} + \Delta Z_{1,\text{б}}^{(3)} + \Delta Z_{1,\text{в}}^{(3)} + \Delta Z_{1,\text{г}}^{(3)}. \tag{33.9}$$

Друга група – діаграми, що відповідають глюон-духовій вершині (рис. 33.5), $(0, 1, 2), (\omega(G) = 1)$:

c, μ c, μ

, .

a b a b

а б

Рис. 33.5

Відповідним контрчленом є

$$\Delta Z_2^{(3)} g f^{abc} \partial^\mu \overline{\phi}_a \phi_b W_\mu^c, \quad \Delta Z_2^{(3)} = \Delta Z_{2,a} + \Delta Z_{2,б}. \tag{33.10}$$

Третя група – діаграми, що відповідають кварк-глюонній вершині ($\omega(G) = 0$), (рис. 33.6), (2,1,0):

c, μ c, μ

, .

α, j β, k α, j β, k

а б

Рис. 33.6

Контрчленом є

$$\Delta Z_3^{(3)} g \overline{\psi} \gamma^\mu T^a \psi W_\mu^a, \quad \Delta Z_3^{(3)} = \Delta Z_{3,a} + \Delta Z_{3,б}. \tag{33.11}$$

І, нарешті, діаграми з чотирма зовнішніми лініями з $\omega(G) = 0$ є діаграмами 4-го порядку за g. Ті, що належать до 4-глюонної вершини, зображені на рис. 33.7 (0,4,0):

b,μ c,ν b,μ c,ν b,μ c,ν

, , ,

a,λ d,ρ a,λ d,ρ a,λ d,ρ

а б в

b,μ c,ν b,μ c,ν

, .

a,λ d,ρ a,λ d,ρ

г д

Рис. 33.7

Відповідний контрчлен має вигляд

$$-\frac{1}{4}\Delta Z_4^{(4)} g^2 f^{abc} f^{ade} g^{\lambda\nu} g^{\mu\rho} W_\lambda^b W_\mu^c W_\nu^d W_\rho^e. \tag{33.12}$$

Дві діаграми, що відносяться до дух-духової вершини і глюон-духової 4-вершини (рис. 33.8) (0,0,4) і (0,2,2):

b c b,μ c,ν

,

a d a d

а б

Рис. 33.8

теж є розбіжними ($\omega(G) = 0$), але внаслідок того, що в реальних взаємодіях духові частинки не спостерігаються, такі діаграми будуть зустрічатись лише

у вищих порядках теорії збурень і будуть робити внесок у контрчлени ΔZ_W і ΔZ_ϕ. Так само, як і у випадку КЕД, вакуумні діаграми (0,0,0) не розглядаються, оскільки їх можна позбутися формальним пересумуванням та перенормуванням вакуумного стану. Після пересумування в усіх порядках теорії збурень отримується остаточний вигляд контрчленів, які задаються виразами (33.6)–(33.12) з константами (Z_W-1), $(Z_\alpha-1)$, $(Z_\psi-1)$, $\delta\tilde{m}$, $(Z_\phi-1)$, (Z_k-1), $k=\overline{1,4}$, а повний лагранжіан матиме вигляд

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{L}} &+ \Delta\widetilde{\mathscr{L}} = Z_\psi\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}Z_W W^a_\mu(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)W^a_\nu - \\ &+ Z_\phi\overline{\phi}_a\Box\phi_a - \frac{1}{2\alpha}Z_\alpha W^a_\mu\partial^\mu\partial^\nu W^a_\nu + Z_1 g f^{abc}g^{\lambda\nu}\partial^\mu W^a_\lambda W^b_\mu W^c_\nu + \\ &+ Z_2 g f^{abc}\partial^\mu\overline{\phi}_a\phi_b W^c_\mu + Z_3 g\overline{\psi}\gamma^\mu T^a\psi W^a_\mu - \\ &- \frac{1}{4}Z_4 g^2 f^{abc}f^{ade}g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}W^b_\lambda W^c_\mu W^d_\nu W^e_\rho. \qquad (33.13)\end{aligned}$$

Для того, щоб отримати лагранжіан (33.13) з неперенормованого лагранжіана

$$\widetilde{\mathscr{L}^0} = \widetilde{\mathscr{L}}(\psi^0, (W^0)^a_\mu, \phi^0; m_0, \lambda_0, g_0), \qquad (33.14)$$

треба покласти

$$\begin{aligned}\psi^0 &= Z_\psi^{1/2}\psi, &(33.15)\\ (W^0)^\mu_a &= Z_W^{1/2}W^\mu_a, &(33.16)\\ \overline{\phi}^0 &= Z_\phi^{1/2}\overline{\phi}, &(33.17)\\ \phi^0 &= Z_\phi^{1/2}\phi, &(33.18)\\ \lambda_0^{-1} &= (1+Z_\lambda)Z_W^{-1}\lambda^{-1}, &(33.19)\\ m_0 &= m+\delta m, \quad \delta m = Z_\psi^{-1}\delta\widetilde{m}, &(33.20)\\ g_0 &= Z_1 Z_W^{-3/2}g, &(33.21)\\ g_0 &= Z_2 Z_\phi^{-1}Z_W^{-1/2}g, &(33.22)\\ g_0 &= Z_3 Z_\psi^{-1}Z_W^{-1/2}g, &(33.23)\\ g_0^2 &= Z_4 Z_W^{-2}g^2. &(33.24)\end{aligned}$$

Рівності (33.21)–(33.24) повинні забезпечити перенормування однієї й тієї ж константи взаємодії g_0. Отже, щоб забезпечити калібрувально-інваріантне перенормування лагранжіана $\widetilde{\mathscr{L}^0}$, необхідно, щоб виконувалися рівності

$$Z_1 Z_W^{-3/2} = Z_2 Z_\phi^{-1}Z_W^{1/2} = Z_3 Z_\psi^{-1}Z_W^{-1/2} = Z_4^{1/2}Z_W^{-1}, \qquad (33.25)$$

які зменшують число незалежних констант, оскільки з (33.25) маємо

$$Z_W = Z_1^2 Z_4^{-1}, \quad Z_\phi = Z_1 Z_2 Z_4^{-1}, \quad Z_\psi = Z_1 Z_3 Z_4^{-1}. \qquad (33.26)$$

Але справедливість рівностей (33.25) не є очевидним фактом і фактично означає перенормовність калібрувально інваріантної теорії, що описується лагранжіаном $\widetilde{\mathscr{L}}$. Інколи кажуть, що система контрчленів має калібрувально-інваріантну структуру:

$$\frac{Z_1}{Z_W} = \frac{Z_2}{Z_\phi} = \frac{Z_3}{Z_\psi} = \frac{Z_4}{Z_1}. \tag{33.27}$$

Співвідношення (33.27) називають також *тотожностями Славнова–Тейлора* [83], [190]. Вони гарантують універсальність перенормованої константи взаємодії g. Їх можна перевірити безпосереднім обчисленням внесків діаграм Фейнмана, зображених на рис. 33.1–33.7, тобто у нижчих порядках теорії збурень (у так званому *однопетльовому наближенні*). Для цього треба скористатись калібрувально-інваріантною проміжною регуляризацією (наприклад, за допомогою введення довільної розмірності(див. п.25.7) або регуляризацією Паулі–Вілларса (п.25.1)) і виділити розбіжні (при знятті проміжної регуляризації) члени, які і будуть входити в константи Z.

У загальному випадку (тобто поза рамками теорії збурень) не можна отримати аналітичних виразів для констант Z, але можна знайти співвідношення між ними (тобто фактично довести справедливість (33.27)), використовуючи так звані *узагальнені тотожності Уорда–Такахаші*.

У підпункті 32.3.2 було введене таке співвідношення у випадку абелевої теорії КЕД—це тотожність Уорда (32.39), (32.40). У випадку неабелевої калібрувально-інваріантної теорії відповідними аналогами є співвідношення між функціями Гріна, які були започатковані ще в працях [114–116], пізніше отримані незалежно Тейлором [190] і Славновим [83] та носять назву тотожностей Славнова–Тейлора або узагальнених співвідношень Уорда–Такахаші.

Не будемо тут наводити цих співвідношень і рекомендуємо звернутись, наприклад, до монографії [86, гл. IV, § 6].

З точки зору практичного використання теорії перенормувань калібрувально-інваріантних неабелевих теорій залишається чинною схема, яка була детально розглянута у пунктах 25.1–25.6 на прикладі φ^4 взаємодії і в підпунктах 31.4.1, 31.4.2 для КЕД. На завершення наведемо цю схему для взаємодії (33.1)–(33.3). Для її реалізації треба виконати такі три дії.

1. Використовуючи R-операцію, виділити розбіжності (попередньо ввівши проміжну регуляризацію) в таких сильнозв'язних частинах відповідних функцій Гріна:

а) $\widetilde{\Pi}^{ab}_{\mu\nu}(k)$ — глюонний власне енергетичний оператор (рис. 33.1);

б) $\widetilde{\Pi}_{ab}(k)$ — власне енергетичний оператор духів (рис. 33.3);

в) $\widetilde{\Sigma}(p)$ — власне енергетичний оператор кварків (рис. 33.2);

г) $\widetilde{\Lambda}^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,k,q)$ — 3-глюонний вершинний оператор (рис. 33.4);

г) $\widetilde{\Lambda}^{abc}_{\mu}(p,k,q)$ — глюон-духовий вершинний оператор (рис. 33.5);

д) $\widetilde{\Lambda}^{a;jk}_{\mu}(p,k,q)$ — кварк-глюонний вершинний оператор (рис. 33.6);

е) $\widetilde{\Lambda}^{abcd}_{\lambda\mu\nu\rho}(p,k,q,l)$ — 4-глюонний вершинний оператор (рис. 33.7)

($\widetilde{\Sigma}(p)$ і $\widetilde{\Lambda}^{abc}_{\mu}(p,k,q)$ є 4×4-матрицями, а всі інші є звичайними функціями).

Вибором точки віднімання визначити перенормовані оператори $(\widetilde{\Pi}^r)^{ab}_{\mu\nu}(k),\ldots,$ $(\widetilde{\Lambda}^r)^{abcd}_{\mu\nu\rho\lambda}(p,k,q)$ за аналогією до відповідних виразів КЕД (див. ф-ли (31.92)–(31.95)).

Зауваження 33.1. *Так само, як і у випадку КЕД, власне енергетичний оператор глюонів повинен задовольняти умову поперечності (31.66), тобто мати вигляд*

$$\widetilde{\Pi}^{ab}_{\mu\nu}(k)=\delta_{ab}(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\pi(k^2). \tag{33.28}$$

Рівняння (33.28) є наслідком однієї з тотожностей Уорда–Такахаші. Аналогічне співвідношення повинно виконуватись і для перенормованого оператора $(\widetilde{\Pi}^r)^{ab}_{\mu\nu}(k)$.

Нагадаємо, що побудова операторів $(\widetilde{\Pi}^r)^{ab}_{\mu\nu}(k),\ldots,$ $(\widetilde{\Lambda}^r)^{abcd}_{\mu\nu\rho\lambda}(p,k,q)$ в нижчих порядках теорії збурень (тобто в однопетльовому наближенні) означає просте віднімання перших членів розкладу в ряд Тейлора відповідних внесків діаграм Фейнмана, зображених на рис. 33.1–33.7, а у вищих порядках – застосування R-операції.

2. За перенормованими операторами $(\widetilde{\Pi}^r)^{ab}_{\mu\nu}(k),\ldots,$ $(\widetilde{\Lambda}^r)^{abcd}_{\mu\nu\rho\lambda}(p,k,q)$ побудуємо повні перенормовані функції Гріна:

$$i(\widetilde{D}^r)^{ab}_{\mu\nu}(k)=\frac{i\delta^{ab}}{\tilde\pi^r(k^2)-k^2-i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\varepsilon}\right)-\frac{i\lambda}{k^2+i\varepsilon}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\varepsilon}\delta^{ab},$$
$$\tilde\pi^r(k^2)=k^2\pi^r(k^2), \tag{33.29}$$

що відповідає глюонному пропагатору в діаграмах Фейнмана;

$$\frac{1}{i}\widetilde{S}^r_q(p)=\frac{1}{i\Big(m-\hat p+\tilde\Sigma^r(p)-i\varepsilon\Big)}, \tag{33.30}$$

що відповідає повному перенормованому пропагатору кварка або антикварка маси m;

$$\frac{1}{i}\widetilde{S}^r_\phi(q)_{ab}=\frac{\delta_{ab}}{i[\tilde\pi^r_\phi(q^2)-q^2-i\varepsilon]},\quad \widetilde{\Pi}^r_{ab}(q)=\delta_{ab}\tilde\pi^r(q^2), \tag{33.31}$$

що відповідає повному перенормованому пропагатору духової частинки;

$$(\widetilde{\Gamma}^r)^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,k,q)=f^{abc}V^{(3)}_{\mu\nu\rho}(p,k,q)+(\widetilde{\Lambda}^r)^{abc}_{\mu\nu\rho}(p,k,q), \tag{33.32}$$

де $V^{(3)}_{\mu\nu\rho}$ визначений у (32.78), а вираз (33.32) відповідає повному перенормованому оператору 3-глюонної вершини;

$$(\widetilde{\Gamma}^r)^{abcd}_{\lambda\mu\nu\rho}(p,k,q,l) = \widetilde{V}^{(4);abcd}_{\lambda\mu\nu\rho}(p,k,q,l) + (\widetilde{\Lambda}^r)^{abcd}_{\lambda\mu\nu\rho}(p,k,q,l), \tag{33.33}$$

де $\widetilde{V}^{(4)}$ визначений у (32.79), і цей вираз відповідає повному перенормованому оператору 4-глюонної вершини;

$$(\widetilde{\Gamma}^r)^{abc}_{\mu}(p,k,q) = (2\pi)^4\delta(p+k-q)q_\mu f^{abc} + (\widetilde{\Lambda}^r)^{abc}_{\mu}(p,k,q), \tag{33.34}$$

що відповідає повній перенормованій глюон-духовій вершині;
і, нарешті,

$$(\widetilde{\Gamma}^r)^{a}_{\mu}(p,k,q) = (2\pi)^4\delta(p+k-q)\gamma^\mu T^a + (\widetilde{\Lambda}^r)^{a}_{\mu}(p,k,q), \tag{33.35}$$

що відповідає повній перенормованій кварк-глюонній вершині.

Так само, як і співвідношення (31.92) в КЕД, перенормовані пропагатори і вершинні оператори пов'язані з відповідними неперенормованими величинами мультиплікативного перенормованого на константи Z, які задовольняють рівняння (33.27).

3. Для запису внесків в амплітуди реальних фізичних процесів треба враховувати відповідні скелетні діаграми, в яких кожній внутрішній лінії і кожній вершині співставити повні перенормовані пропагатори та вершини (33.29)–(33.35), а порядок теорії збурень буде визначати перенормована константа взаємодії

$$g = Z_1^2 Z_4^{-3/2} g_0. \tag{33.36}$$

33.2. Про маси глюонів і спонтанне порушення симетрії

33.2.1. Зв'язок радіуса взаємодії та маси обмінних бозонів

Побудована теорія калібрувальних полів має досить значні труднощі при спробі застосувати її до конкретних моделей взаємодій елементарних частинок. Звичайно, взірцем такого застосування є електромагнітна взаємодія, але близька до неї слабка взаємодія вже не може бути описана в межах теорії неабелевих калібрувальних полів, в рамках формалізму, який тут був описаний.

Причина цих труднощів полягає у тому, що, на відміну від електромагнітної взаємодії, вони мають дуже малий радіус. В рамках нерелятивістського наближення взаємодію між двома частинками можна описати за допомогою рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t;x_1,x_2) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1+\Delta_2) + V(|x_1-x_2|)\right]\Psi(t;x_1,x_2), \tag{33.37}$$

де $V(|x_1-x_2|)$ – потенціал взаємодії між частинками. Короткодія означає швидке спадання потенціалу при $|x_1-x_2|\to\infty$. Виявляється, що поведінку потенціалу можна встановити в нижчих порядках теорії збурень.

Якщо взаємодія між частинками маси m відбувається за допомогою деяких обмінних частинок маси μ, то

$$V(|x_1 - x_2|) \sim \frac{e^{-\mu|x_1-x_2|}}{|x_1 - x_2|}. \tag{33.38}$$

У випадку квантової електродинаміки обмінною частинкою служить фотон з $\mu = 0$. Тому взаємодія є дальнодіючою (кулонівською), що спадає за законом Кулона.

Щоб пересвідчитись у справедливості (33.38), розглянемо, наприклад, взаємодію частинок в рамках локальної моделі Юкави (11.35). Отже, основним припущенням є умова, щоб амплітуда розсіяння, обчислена за допомогою рівняння Шредінгера (33.37), збігалася з амплітудою розсіяння S-матриці моделі Юкави в нерелятивістській області енергій. Нехай частинки з імпульсами $\mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}'_1$ до розсіяння отримали імпульси $\mathbf{p}_2$ і $\mathbf{p}'_2$ після розсіяння. Тоді, наприклад, у системі центра мас ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}'_1$) розсіяння з стану $\Psi_{\mathbf{k}_1}$ із відносним імпульсом $\mathbf{k}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)$ в стан $\Psi_{\mathbf{k}_2}$ з відносним імпульсом $\mathbf{k}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2)$ визначається матричним елементом S-матриці, який зручно записати через T-оператор (див., наприклад, [90], гл. 8, § 4):

$$(\psi_{\mathbf{k}_0}, S\Psi_{\mathbf{k}_1}) = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - 2\pi i\delta(E_2 - E_1)(\Psi_{\mathbf{k}_2}, T\Psi_{\mathbf{k}_1}), \tag{33.39}$$

де $E_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}_i^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}_i'^2}{m} = \frac{\mathbf{k}_i^2}{m}$, а матричний елемент T-оператора задовольняє відоме рівняння Ліпмана–Швінгера

$$(\Psi_{\mathbf{k}_2}, T\Psi_{\mathbf{k}_1}) = (\Psi_{k_2}, V\Psi_{k_1}) - \int d\mathbf{k}(\Psi_{\mathbf{k}_2}, V\Psi_{\mathbf{k}})\frac{(\Psi_{\mathbf{k}}, T\Psi_{\mathbf{k}_1})}{E(\mathbf{k}) - E_1(\mathbf{k}_1)}, \tag{33.40}$$

де V – оператор взаємодії, що в рівнянні Шредінгера відповідає потенціалу $V(|x_1 - x_2|)$, а в теорії S-матриці – лагранжіану взаємодії (11.35). Розглянемо рівняння (33.40) у першому порядку теорії збурень за $(\Psi_{\mathbf{k}_2}V\Psi_{\mathbf{k}})$, тобто перший член борнівського ряду (*борнівське наближення*).

Тоді інтегральний член можна відкинути. Отже,

$$(\Psi_{\mathbf{k}_2}, V\Psi_{\mathbf{k}_1}) \approx (\Psi_{\mathbf{k}_2}, T\Psi_{\mathbf{k}_1}). \tag{33.41}$$

Обмежимося другим порядком за константою взаємодії g для обчислення матричного елемента S-матриці (33.39). Внесок у праву частину (33.41) буде робити діаграма на рис. 33.9:

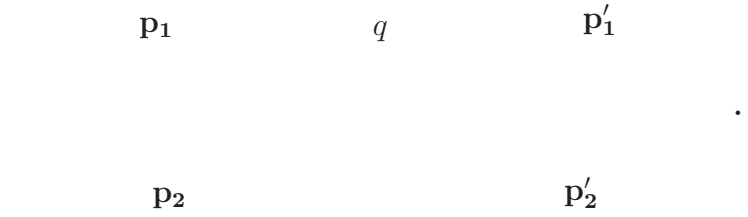


Рис. 33.9

Згідно з правилами (31.33)–(31.35) для зовнішніх ферміонних ліній і, враховуючи, що хвилястій лінії відповідає пропагатор обмінного бозона, який у випадку взаємодії (11.35) є скалярною частинкою, отримуємо відповідний аналітичний вираз

$$g^2\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}_2)v^{\mu,-}(\mathbf{p}_1)\int dq\frac{(2\pi)^4\delta(p_1+q_1-p_2)(2\pi)^4\delta(p_1'-p_2'-q)}{(2\pi)^4 i(q^2-\mu^2-i\varepsilon)}\bar{v}^{\nu',+}(\mathbf{p}_2')v^{\mu',-}(\mathbf{p}_1'). \tag{33.42}$$

У нерелятивістському наближенні ($|\mathbf{p}_i|\ll m$)

$$p_i^0=\sqrt{\mathbf{p}_i^2+m^2}\approx m\left(1+\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}\right)=m(1+E_i(\mathbf{p}_i)). \tag{33.43}$$

Тоді, враховуючи явний вигляд спінорів (див. п.5.32), легко порахувати, що вираз (33.42) має вигляд (у системі центра мас і в наближенні $p_i^0\approx m$)

$$\frac{i(2\pi)^4g^2}{m}\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\delta(E_2-E_1)\frac{1}{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)^2+\mu^2}. \tag{33.44}$$

Порівнюючи (33.39), (33.41) і (33.44), знаходимо, що

$$(\Psi_{\mathbf{k}_2},V\Psi_{\mathbf{k}_1})\approx(2\pi)^3\frac{g^2}{m}\frac{\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)}{(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)^2+\mu^2}. \tag{33.45}$$

Таким чином, для ефективного потенціалу взаємодії між частинками в координатному просторі отримаємо співвідношення

$$V(|x_1-x_2|)\approx\frac{g^2}{m}\frac{e^{-\mu|x_1-x_2|}}{|x_1-x_2|}, \tag{33.46}$$

що узгоджується з уявленнями про характер взаємодії.

33.2.2. Чи перенормовні теорії з відмінною від нуля масою обмінних бозонів?

Отже, при побудові моделей, що описуються калібрувальними полями, взаємодія яких має короткодіючий характер, треба припустити, що обмінні бозони (глюони) мають масу. Це припущення підтверджується експериментальними даними процесів зі слабкими взаємодіями. Це вимагає введення в повний лагранжіан взаємодії масового члена вигляду (11.1), який порушує калібрувальну інваріантність. Але порушення калібрувальної інваріантності ще не є найгіршою ознакою моделі, в лагранжиані якої буде фігурувати масовий член (11.1). Більш серйозною проблемою є те, що теорія стає неперенормованою. Цей факт обумовлений тим, що в теорії збурень замість пропагатора

$$\frac{1}{i}\widetilde{D}_{\mu\nu}^{c;ab}(k;0)=\frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4 i}\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)}\left[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] \tag{33.47}$$

виникає пропагатор, що відповідає векторним масивним бозонам (див. (20.14))

$$\frac{1}{i}\widetilde{D}^{c;ab}_{\mu\nu}(k;m_W)=\frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4 i}\frac{g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/m_W^2}{m_W^2-k^2-i\varepsilon}. \tag{33.48}$$

Отже, ступінь полінома чисельника пропагатора $r_l=2$, і тоді максимальний індекс вершини (див. (25.30), (25.31))

$$\omega_i^{\max}>0, \tag{33.49}$$

що призводить до неперенормованості теорії (див. п.25.2).

Звичайно, доданок, пропорційний $k_\mu k_\nu/m_W^2$, входить у поздовжню частину пропагатора і, можливо, (! ?) не буде спричиняти серйозних проблем (як це відбувається в КЕД), але цей факт не є очевидний і, мабуть, невірний.

33.2.3. Спонтанне порушення U(1) симетрії

Механізм спонтанного порушення калібрувальної симетрії коротко був описаний на класичному рівні в підпунктах 11.1–11.3, які рекомендуємо прочитати ще раз. Не будемо повторювати основні ідеї цього механізму і внесемо лише деякі поправки, які стосуються того, що розглядається квантова теорія, а отже, поля ϕ, H, G, W є операторно значними функціоналами. Основна ідея полягає у тому, що всесвіт заповнений деяким скалярним полем $\phi(x)$, вакуумне середнє якого

$$(\Phi_0,\phi(x)\Phi_0)=u_0\neq 0. \tag{33.50}$$

Внаслідок умови трансляційної інваріантності вакууму $u_0=\text{const}$. Звичайно, якщо скористатись формулою (24.7), то значення u_0 легко переписати у вигляді

$$u_0=\frac{1}{S_0}(\Omega_0,T(\phi_0(x)S)\Omega_0), \tag{33.51}$$

де ϕ_0 – поле $\phi(x)$ у представленні взаємодії.

Якщо підставити в (33.51) S-оператор теорії (11.2), представлений рядом теорії збурень, то відповідний ряд для u_0

$$u_0=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_0^{(n)} \tag{33.52}$$

буде тотожно перетворюватися в нуль, оскільки $u_0^{(n)}\equiv 0$ для всіх n. Отже, ефект спонтанного порушення симетрії є непертурбаційним ефектом. Він призводить до появи в лагранжіанах (11.17), (11.31) масових членів (11.18), (11.33). Лагранжіани (11.17) і (11.31) втратили явну калібрувальну інваріантність у термінах нових полів $H(x)$ і $W_\mu(x)$, але внаслідок того, що початковий лагранжіан (11.12) мав таку інваріантність, теорія повинна залишитись калібрувально інваріантною, тому й з'явився термін *спонтанне порушення інваріантності*.

Мабуть, правильніше вести мову про втрату явної калібрувальної інваріантності і говорити, що калібрувальна інваріантність лагранжіанів (11.17) і (11.31) є *прихованою*. Повернемося тепер до питання перенормовності теорії.

Розглянемо спершу випадок $U(1)$ симетрії (див. п.11.2). Теорія, що відповідає лагранжіану (11.12), є перенормовною, оскільки це є фактично скалярна електродинаміка. Якщо до лагранжіану (11.12) додати лагранжіан матерії, замінюючи при цьому звичайні похідні на коваріантні, тобто лагранжіан

$$\mathscr{L}_M(x) = \bar{\psi}(x)(iD^\mu\gamma_\mu - m)\psi(x)), \tag{33.53}$$

то це теж не зіпсує перенормовності теорії. Але після перетворень (11.13)–(11.16) перенормовність теорії з лагранжіаном (11.17) вже не буде очевидною внаслідок аргументів, які наведені вище. Нагадаємо, що для побудови фотонного пропагатора, що відповідає теорії (11.12) (або (11.12) + (33.53)), було зафіксовано калібровку, додаючи до повного лагранжиану член (31.22).

Щоб отримати відповідний пропагатор у випадку з порушеною симетрією, скористаємося членом, що фіксує калібровку, запропонованим т'Хофтом [114–116]:

$$\Delta\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu B^\mu(x) - \alpha g u_0 G(x))^2, \tag{33.54}$$

де $u_0 = -\mu^2/\lambda$, а G – поле голдстоунівського бозона (див. (11.7)). Тоді лагранжіан (11.12) разом із членом, що фіксує калібровку (33.54) і виражений через поля B_μ, що входять у визначення коваріантних похідних (11.10) та поля $\varphi(x) = H(x)$, і $G(x)$, що входять у визначення (11.7), буде мати остаточний вигляд

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(x) \;+\; \Delta\mathscr{L}(x) &= \frac{1}{2}\big[: \partial_\mu H(x)\partial^\mu H(x) : -2\lambda u_0^2 : H(x)^2 : \big] + \\
&+ \frac{1}{2}\big[: \partial_\mu G(x)\partial^\mu G(x) : - : \alpha m_B^2 G(x)^2 : \big] - \\
&- \frac{1}{2} : \big[(\partial_\mu B_\nu(x))(\partial^\mu B^\nu(x)) - m_B^2 B_\mu(x)B^\mu(x) - \frac{\alpha-1}{\alpha}(\partial_\mu B^\mu(x))^2\big] : + \\
&+ g : B^\mu(x)(H(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu G(x)) : + g^2 u_0 : B_\mu(x)B^\mu(x)H(x) : + \\
&+ \frac{1}{2}g^2 : B_\mu(x)B^\mu(x)(H(x)^2 + G(x)^2) : - \lambda u_0 : H(x)(H(x)^2 + G(x)^2) : - \\
&- \frac{1}{4}\lambda : (H(x)^2 + G(x)^2)^2 : + \frac{\mu^4}{4\lambda} + g u_0 \partial_\mu(B^\mu(x)G(x)).
\end{aligned} \tag{33.55}$$

Перші три доданки визначають характер пропагаторів Фейнмана. Перший доданок відповідає полю Хіґса $H(x)$, в результаті самодії якого генерується частинка маси $m_H = (2\lambda u_0^2)^{1/2}$. Другий доданок відповідає голдстоунівському бозону, який в результаті калібрувального члена $\Delta\mathscr{L}(x)$ отримав масу $(\alpha m_B^2)^{1/2}$. Він не відповідає ніякій фізично реальній частинці і тому після підрахунків може бути усунутий із теорії, покладаючи $\alpha = +\infty$. І, нарешті, третій доданок

буде відповідати калібрувальному бозону B_μ з $m_B^2 = g^2(u_0^2 + v_0^2)$. Так само, як і у підпункті 31.1.3 легко обчислити пропагатор, що відповідає полю $B_\mu(x)$.

В імпульсному просторі він має вигляд (задача 33.1):

$$\widetilde{G}_{\mu\nu}(p) = \frac{i}{m_B^2 - p^2 - i\varepsilon}\left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \alpha m_B^2}\right). \tag{33.56}$$

Отже, з (33.56) видно, що при $\alpha < \infty$ поведінка пропагатора $\widetilde{G}_{\mu\nu}(p)$ при великих p^2 забезпечує перенормованість теорії.

Треба зауважити: якщо розглядати поле $B_\mu(x)$ як електромагнітне поле, то m_B треба розглядати як масу фотона, яка генерується внаслідок взаємодії цього поля з хіґсівським полем.

33.2.4. Спонтанне порушення локальної $SU(N)$ симетрії

У попередньому підпункті на прикладі скалярної електродинаміки видно, що за рахунок спонтанного порушення симетрії вакууму калібрувальний бозон здобуває масу, поглинаючи голдстоунівський бозон. При цьому зберігається перенормованість теорії. Дуже коротко наведемо аргументи, що демонструють збереження цього механізму у більш загальній ситуації для теорії з неабелівською калібрувальною інваріантністю. На класичному рівні це було зроблено у підпункті 11.3 у випадку локальної симетрії.

У загальному випадку будемо вважати, що поле Хіґса $\boldsymbol{\phi}(x)$ складається з N комплексних скалярних полів

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix}. \tag{33.57}$$

Модельний гамільтоніан самовзаємодіючого хіґсівського поля матиме вигляд (11.20). Вимога локальної $SU(N)$ інваріантності приводить до лагранжіана (11.23) з

$$\widehat{D}_\mu = \mathbb{1}\cdot\partial_\mu + ig\ T^a W_\mu^a, \quad a = \overline{1, N^2 - 1} \tag{33.58}$$

і

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \tag{33.59}$$

де T^a – генератори відповідної алгебри Лі, а f^{abc} – її структурні константи (див. (2.20)). Внаслідок порушення симетрії вакууму Φ_0 середнє

$$(\Phi_0, \boldsymbol{\phi}(x)\Phi_0) = \boldsymbol{\phi}_0 \neq 0. \tag{33.60}$$

Тоді треба розглянути збурення цього поля

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\phi}(x) - \boldsymbol{\phi}_0. \tag{33.61}$$

Значення $\boldsymbol{\phi}_0$ відповідає мінімуму потенціалу $u(\boldsymbol{\phi})$, який у багатокомпонентному випадку буде вироджений, і утворює гіперповерхню вигляду (11.21). Так само, як і у випадку $SU(2)$ (див. ф-ли (11.25)–(11.29)), $\boldsymbol{\phi}_0$ зручно вибрати у вигляді

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad u_0^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} > 0, \tag{33.62}$$

а поле $\boldsymbol{\phi}(x)$ записати у вигляді збурення

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{G^a(x)T^a}{u_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_0 + H(x) \end{pmatrix}. \tag{33.63}$$

Вибір вакуумного стану у вигляді (33.62) дає можливість зробити важливий висновок. Якщо розглянути підгрупу $SU(N-1)$ групи $SU(N)$, то вона має $(N-1)^2 - 1$ генераторів, дія яких визначається на перші $(N-1)$ компонент вектора (33.57). Отже, при дії цих генераторів на вакуумний вектор $\boldsymbol{\phi}_0$ отримаємо нуль. Тому при побудові збуреного поля (33.63) в експоненті можна враховувати лише дію $n = (N^2-1) - [(N-1)^2 - 1] = 2N-1$ операторів, які вектор $\boldsymbol{\phi}_0$ не перетворюють в нуль. Відповідно підстановка вектора (33.63) в лагранжіан хіґсівського поля (11.2) призведе до того, що тільки поле $H(x)$ здобуде масу $m_H = 2\lambda u_0^2$, а решта $2N-1$ полів $G^a(x)$ залишаться безмасовими. Насправді ці не зовсім строгі спостереження є наслідком відомої *теореми Голдстоуна* [136] (див. також [23, гл. 11]).

Нижче так само, як і у попередніх випадках, скористаємось калібрувальною інваріантністю лагранжіана (11.23) з відповідними $\widehat{D}_\mu$ і $F^a_{\mu\nu}$ у вигляді (33.58), (33.59) і виберемо фіксовану калібровку в (32.46)–(32.48) з

$$\omega_a(x) = -\frac{1}{u_0 g} G_a(x), \quad a = \overline{1, 2N-1}. \tag{33.64}$$

Тоді поля, перетворені калібрувальними перетвореннями (32.46)–(32.48) з $\omega_a(x)$ (33.64) матимуть вигляд

$$\boldsymbol{\phi}^\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_0 + H(x) \end{pmatrix} \tag{33.65}$$

і

$$W^\omega_\mu = (W^\omega)^a_\mu T^a = S_\omega(x) W^a_\mu T^a S^{-1}_\omega + \frac{i}{g} S_\omega(x) \partial_\mu S^{-1}_\omega. \tag{33.66}$$

Щоб визначити спектр мас, які утворилися внаслідок порушення симетрії, треба записати лагранжіан (11.23) у термінах полів-збурень $H(x)$ і G_a. У зв'язку зі сказаним вище будемо мати лише $2N-1$ голдстоунівських бозонів. Тому число калібрувальних полів W^a_μ, які поглинуть ці голдстоунівські бозони і здобудуть відповідні маси, буде рівно $2N-1$. Останні $N(N-2)$ калібрувальні бозони будуть безмасовими.

Конкретний вираз для мас $m_{W^a} = m_a$ можна отримати після запису лагранжіана $\mathscr{L}(\boldsymbol{\phi}^\omega, W^\omega)$ через поля $H(x)$, $G_a(x)$, W^a_μ. Тоді коефіцієнти при $H(x)^2$, $G_a(x)^2$ і $W^a_\mu W^\mu_a$ (нема сумування за a) і дадуть відповідні маси (дивись відповідні міркування в [23, гл. 11]).

Калібровка (33.64) є дуже зручною для опису механізму поглинання калібрувальними полями голдстоунівських бозонів і здобування ними відповідних мас. Але, так само, як і у випадку $U(1)$ симетрії, вона приводить до пропагатора, що відповідає векторному масивному полю (33.48), що приводить до "неперенормовності теорії". Звичайно, ця "неперенормовність" не є дійсною і врешті всі розбіжності повинні скоротитися, але простежити за цим явищем неможливо. Тому, як і у попередньому підпункті, можна підібрати контрчлен $\Delta\mathscr{L}_{gf}(x)$, що фіксує калібровку.

Аналогом (32.68) у цьому випадку буде лагранжіан

$$\Delta\mathscr{L}_{gf}(x) = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu W^a_\mu - i\alpha g\boldsymbol{\varphi}^+ T^a\boldsymbol{\phi}_a)(\partial^\mu W^a_\mu - i\alpha g\boldsymbol{\varphi}^+ T^a\boldsymbol{\phi}_a). \tag{33.67}$$

Такий контрчлен дає змогу визначити пропагатор Фейнмана виразом (33.56) для тих калібрувальних бозонів, які здобули масу. Але при квантуванні калібрувального поля у цьому випадку треба змінювати відповідний лагранжіан дýхів Фаддєєва–Попова.

Він буде мати вигляд (див. [106, § 13.6])

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{ФП}} &= (\partial_\mu\overline{\phi}_a)(\partial^\mu\phi_a) + gf^{abc}(\partial_\mu\overline{\phi}_a)\phi_b W^\mu_c - \\ &- \alpha\overline{\phi}_a(M^2_W)^{ab}\phi_b - \alpha g^2\overline{\phi}_a\phi_b\boldsymbol{\varphi}T^bT^a\boldsymbol{\phi}_0,\end{aligned} \tag{33.68}$$

де $(M^2_W)^{ab} = g^2\boldsymbol{\phi}^+_0 T^a T^b\boldsymbol{\phi}_0$ – масова матриця.

33.3. Моделі взаємодій елементарних частинок

Теорія, яку було викладено в попередніх параграфах цього розділу є математичним підґрунтям у побудові моделей, за допомогою яких можна обчислити характеристики конкретних фізичних процесів і порівняти їх із результатами експериментів. Побудова самих моделей є дуже складним і довготривалим процесом, який вимагає накопичення великої кількості експериментальних даних, аналізу теоретичних, феноменологічних підходів та їх узагальнення в одну теоретичну модель.

В основі кожної моделі лежить лагранжіан, який задає динаміку усіх можливих процесів в межах вибраного типу взаємодії. У § 12 коротко було описано вигляд лагранжіанів, що відповідають сильним, слабким, електрослабким взаємодіям, і можливий варіант їх *Великого об'єднання*. У даному пункті коротко зупинимось на головних проблемах, які вносить квантова теорія саме в специфіку кожної моделі (загальна проблематика розглядалася вище). Також буде запропоновано список літератури, де ці питання описуються на оглядовому рівні.

33.3.1. Сильна взаємодія. Модель КХД

Успіхи КЕД, які полягають у загадково точній відповідності теоретичних розрахунків і експерименту, прийнято пов'язувати з досить малим значенням постійної тонкої структури

$$\alpha = \frac{E_2}{E_1} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \tag{33.69}$$

де E_2 є енергією двох електронів, що перебувають на одиничній відстані, а E_1 — енергія спокою електрона.

Ця константа є безрозмірною і не залежить від вибору системи одиниць. В області невеликих енергій α є дійсно постійною величиною і може бути встановленою експериментально (див., наприклад, [98, гл. 1, § 5]). Величина α є параметром розкладу амплітуд розсіяння в ряд теорії збурень. Внаслідок того, що $\alpha \ll 1$, можна припустити, що після усунення розбіжностей і якогось магічного скорочення між внесками діаграм (оскільки їх кількість із ростом порядку теорії збурень зростає у КЕД як $(n!)^{3/2}$) отримаємо збіжний ряд або принаймні асимптотичний, і тоді мале значення α забезпечить такий збіг з експериментом. Такий самий експеримент щодо вимірювання аналогічної константи (або точніше величини) при взаємодії протонів і π-мезонів показав, що відповідне $\alpha_H \gg 1$. Ця обставина зразу позбавляє надії на успішне застосування методу теорії збурень при розрахунку процесів у рамках сильних взаємодій. У зв'язку з цим виникла ідея складної будови протона та π-мезона (а значить і усіх частинок), яка, можливо, ґрунтується на аналогії з хімічними зв'язками в молекулах. Дійсно, атоми окремих речовин як електронейтральні досить слабко взаємодіють між собою, поки їх електронні орбіти не перекриваються, і зв'язок стає дуже сильним, коли ці ж атоми об'єднуються в одну молекулу. Тому характер взаємодії між кварками шляхом обміну глюонами повинен задаватися деякою величиною α_s, яка може бути виражена аналогічною формулою

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi\hbar c}, \tag{33.70}$$

де g – "*кольоровий*" заряд кварка. Поняття "кольорової" взаємодії виникло, коли був експериментально відкритий π^+p-резонанс Δ^{++} з електричним зарядом

$Q_{\Delta^{++}} = 2e$. Це означало, що він повинен складатися з трьох u-кварків (uuu). Але u-кварки – це фермі-частинки, що суперечить принципу Паулі. Вихід був знайдений за допомогою припущення, що кожний кварк має додаткове квантове число, яке було назване "*кольоровим*" *зарядом* або просто "*кольором*". Не будемо тут детально обговорювати "кольорову" структуру адронів і рекомендуємо прочитати першу главу книжки [98], де також дано чітке обґрунтування малого значення величини α_s на коротких відстанях між кварками і її зростання при віддаленні кварків один від одного. Це явище отримало назву *асимптотичної свободи*, що означає ослаблення взаємодії при асимптотичному наближенні кварків.

Асимптотичну свободу було відкрито Гроссом, Вілчеком [139] та Політцером [179] у 1973 році. Їхні розрахунки пояснили досить дивний експеримент 1968 року (див., наприклад, [109]) з глибоко непружного електрон-нуклонного розсіяння, в якому було виявлено ефект послаблення сильних взаємодій при високих енергіях.

Асимптотичну свободу можна пояснити так званим явищем *"конфайнменту"* (це неможливість вильоту "кольорової" частинки). Тому на даному етапі енергетичних можливостей прискорювачів кварки і глюони у вільному стані ще не були спостережені. Але деякі непрямі експерименти однозначно вказують на їх існування. Цікавим є також те, що глюони є "кольоровими", а отже, на відміну від нейтральних фотонів у КЕД, взаємодіють між собою, що фактично узгоджується з вільними рівняннями полів Янга–Міллса (10.18), які містять у собі член, що відповідає за взаємодію глюонів різного виду. Таким чином, для розрахунків фізичних процесів у рамках сильного зв'язку базовим лагранжіаном є калібрувально інваріантний лагранжіан (12.3). Крім того, у квантовій теорії треба зафіксувати калібровку поля $W^a_\mu \equiv G^a_\mu$ за допомогою контрчлена (33.67) і для забезпечення унітарності теорії дописати лагранжіан "дýхів" Фаддєєва–Попова (33.68).

І, нарешті, щоб усунути ультрафіолетові розбіжності при розрахунку за теорією збурень, треба дописати контрчлен $\Delta\mathscr{L}_{ren}$, тобто такий самий лагранжіан з відповідними константами перенормування. Отже, остаточний вигляд повного лагранжіана КХД матиме вигляд

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{КХД}} = \mathscr{L}_{\text{КХД}} + \Delta\mathscr{L}_{gf} + \mathscr{L} + \Delta\mathscr{L}_{ren}. \tag{33.71}$$

Про деякі застосування КХД до опису конкретних фізичних процесів можна прочитати в монографіях [23, часть III], [98, гл. 10–11].

Зауваження 33.2. *У лагранжіан (33.71) ми не включили $\mathscr{L}_{Higg}$. Це пояснюється тим, що взаємодія зі скалярним полем вносить позитивну константу в підрахунок ефективної константи сильної взаємодії і може порушити асимптотичну свободу. Отже, калібрувальні бозони, що відповідають за процеси сильної взаємодії, вибираються безмасовими, Це узгоджується з теорією спонтанного порушення $SU(3)$ симетрії (див. зауваження в кінці п.11.3), в*

якій три калібрувальні бозони є безмасові, а п'ять калібрувальних бозонів, що поглинули голдстоунівські бозони, є масивними.

33.3.2. Слабкі та електрослабкі взаємодії

З експериментів β-розпаду ядер було встановлено, що феноменологічна константа зв'язку (див. (12.9))

$$G \approx \frac{10^{-5}}{m_N^2}, \tag{33.72}$$

де для зручності її приводять до квадрата маси нуклона, оскільки розмірність $[G] = (\text{маса})^{-2}$.

Отже, мале значення G дає надію на добру збіжність рядів теорії збурень. Внаслідок аргументів, які наведемо нижче (див., також, [23, гл. 10, п.10.3]), феноменологічна константа G пов'язана з константою в $SU(2)$-інваріантному лагранжіані (12.16) співвідношенням (12.12) і є малою через велику масу калібрувального бозона W, який відповідає за слабку взаємодію. Легко бачити, що феноменологічний гамільтоніан (12.9) відповідає 4-ферміонній взаємодії. Це означає, що у квантовій теорії структура відповідних фейнманівських діаграм буде мати вершини, в яких входять чотири ферміонні лінії з $r_c = 1$ (див., п.25.2). Отже, $\omega_i^{\max} = 2$, і теорія, побудована на лагранжіані (12.9), буде неперенормовною. У кінці п.12.2 було розглянуто лагранжіан слабких взаємодій у вигляді (12.16). Така модель вже буде перенормовною теорією, і для усунення ультрафіолетових розбіжностей треба застосувати методи попередніх розділів (див. п.33.1).

На завершення розгляду слабких взаємодій зауважимо, що феноменологічний лагранжіан Глешоу, Іллiопулоса і Майані (12.9) виникає в більш послідовній схемі калібрувальних полів як деяке наближення при малих значеннях імпульсу бозона. Дійсно, запишемо повний лагранжіан у вигляді

$$\mathscr{L}_w = \mathscr{L}_0(l, q|\{\partial_\mu\}) + \mathscr{L}_{YM} + \frac{1}{2} M_W^2 W_\mu^a W_a^\mu + \mathscr{L}_{W;\text{вз}}. \tag{33.73}$$

Тоді в термінах твірних функціоналів для функцій Гріна, записаних у формі континуального інтеграла (32.67), отримаємо вираз

$$\begin{aligned} G[\eta, \bar\eta, j] &= G[0]^{-1} \int \mathscr{D}\bar\psi \mathscr{D}\psi \mathscr{D}W e^{i(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta + j_a^\mu W_\mu^a)} \times \\ &\times \quad e^{i\int \mathscr{L}_0(l,q|\{\partial_\mu\})dx - \frac{i}{2}\int dx W_\mu^a [g^{\mu\nu}(\Box - M_W^2) + \partial^\mu\partial^\nu] W_\nu^a + \frac{ig}{2}\int J_a^\mu(x) W_\mu^a(x) dx}, \end{aligned} \tag{33.74}$$

де під $\mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}\psi$ треба розуміти інтегрування за всіма полями кварків і лептонів.

Треба, звичайно, зауважити, що знехтувано самовзаємодією полів W_μ^a, а також введено масовий член як результат взаємодії з хіґсівським полем.

Легко переконатися, що інтеграл (33.74) за змінними W_μ^a є гауссовим ,і можна проінтегрувати $\mathscr{D}W$. Внаслідок отримаємо

$$G[\eta, \bar\eta, j] = G[0]^{-1} \int \mathscr{D}\bar\psi \mathscr{D}\psi e^{i\int \mathscr{L}_0(l,q|\{\partial_\mu\}) + i(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta) + iA_{\text{фен}}[J+j]}, \tag{33.75}$$

де

$$A_{\text{фен}}[J+j]=\frac{g^2}{8}\int dx\,dy\left[J_a^\mu(x)+\frac{2}{g}j_a^\mu\right]\frac{1}{i}D^c_{\mu\nu}(x-y;M_W)\left[J_a^\nu(y)+\frac{2}{g}j_a^\nu(y)\right], \tag{33.76}$$

а

$$D^c_{\mu\nu}(x-y;M_W)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\frac{(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M_W^2)}{M_W^2-k^2}e^{ik\cdot(x-y)}. \tag{33.77}$$

Якщо припустити, що інтегрування виконується лише по області $k^2\ll M_W^2$, то

$$D^c_{\mu\nu}(x-y;M_W)\sim\frac{1}{M_W^2}\delta(x-y),$$

і тоді при умові (12.12)

$$A_{\text{фен}}[J]=i\int dx\mathscr{L}^{(\text{фен})}_{\omega,b_3}(x), \tag{33.78}$$

де $\mathscr{L}^{(\text{фен})}_{\omega;b_3}(x)$ тотожний із (12.9).

Для побудови об'єднаної електрослабкої взаємодії треба врахувати низку важливих моментів, які коротко описані в п.12.3. Таким чином класичний лагранжіан електрослабкої взаємодії набув вигляду (12.18). Він відповідає перенормовній теорії і може бути проаналізований в рамках підходу, що викладений у п.33.1. Такий аналіз можна знайти в працях зарубіжних авторів [17, п.21.3], [106, п.14.1].

Задачі до розділу VII

Задача 31.1. Записати повний гамільтоніан КЕД у термінах канонічних змінних.

Задача 31.2. Довести, що поля $\psi(x)$, $\bar\psi(x)$ і $A_\mu(x)$, що визначаються співвідношеннями (31.19), (31.11), (31.10) і задовольняють одночасові комутаційні співвідношення (16.1), (17.48), є розв'язками рівнянь (31.4).

Задача 31.3. Обчислити визначник матриці

$$\widetilde{\Pi}^0_{\mu\nu}=k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu g_{\mu\nu}k_\nu.$$

Задача 31.4. Обчислити дію операцій $\bar\phi^\pm(x)$ та $\phi^\pm(x)$, що переводять коефіцієнтні функції ВВФ оператора S в коефіцієнтні функції ВВФ-лів $:\bar\psi(x)S:$, $:\overline{\bar\psi(x)S}:$, $:\psi(x)S:$, $:\overline{\psi(x)S}:$.

Задача 31.5. Отримати переставні співвідношення (31.49), (31.50).

Задача 31.6. Довести теорему Фаррі для внесків, записаних в імпульсному просторі.

Задача 31.7. Довести інваріантність S-матриці, записаної у вигляді (31.26) відносно калібрувальних перетворень (31.61).

Задача 31.8. Вивести рівняння (31.68), використовуючи рівняння полів (31.4).

Задача 31.9. Вивести рівняння Швінгера, що відповідають другому і третьому рівнянню системи (31.4).

Задача 31.10. Вивести рівняння Дайсона для 2-точкової електронно-позитронної функції Гріна.

Задача 31.11. Довести, що для 2-точкової фотонної функції Гріна справедливе представлення (31.76)–(31.78).

Задача 31.12. Довести, що функції $\widetilde{\Sigma}^r$ і $\widetilde{\pi}^r$, визначені співвідношеннями (31.93), (31.94), не містять у собі розбіжностей.

Задача 31.13. Довести, що тензорна, псевдовекторна і аксіально векторна частини функції $w(x)$ (31.108) тотожно перетворюються в нуль.

Задача 31.14. Записати представлення для 2-точкової функції Гріна $G_{2,0}$, використовуючи представлення (31.111), (31.112) для функції Вайтмана $W_{2,0}$.

Задача 32.1. Довести таку формулу

$$\frac{1}{K}\int \mathscr{D}A\widetilde{\delta}(\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})e^{i\int\limits_{\mathbb{M}} dx:\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right]:+\int\limits_{\mathbb{M}} dxA_\mu(x)j^\mu(x)} =$$

$$= e^{\int\limits_{\mathbb{M}} dx\int\limits_{\mathbb{M}} dyj^\mu(x)\frac{1}{i}D^{\text{с,ел, Coul}}_{\mu\nu}(x-y)j^\nu(y)},$$

де K вибирається з умови, що при $j=0$ ліва частина рівності обертається в одиницю.

Задача 32.2. Обчислити пропагатор фотонної лінії (32.28) в калібровці Лоренца методом функціонального інтегрування.

Задача 32.3. Із визначення (32.26) показати, що функціонал (32.29) не буде залежати від A.

Задача 32.4. Обчислити пропагатор фотонної лінії (31.25) в α-калібровці методом функціонального інтегрування.

Задача 32.5. Знайти елементи матриці-оператора M_{φ_i}, $i=1,2,3,4$ для кулонівської, лоренцової, часової та аксіальної калібровок, тобто справедливість формул (32.59)–(32.62).

Задача 32.6. Обчислити вираз для 2-точкової функції Гріна W-бозонів в α-калібровці.

Задача 32.7. Записати вираз для повної дії, що відповідає взаємодії полів Янга–Міллса і полів матерії з урахуванням поля "духів" Фаддєєва–Попова.

Задача 32.8. Встановити вигляд лагрангіана після БРСТ–перетворення полів (32.85)–(32.90).

Задача 33.1. Обчислити вираз для 2-точкової функції Гріна поля B_μ, виходячи з лагранжіана (33.55).

Вказівки до розв'язків задач

Розділ I

Задача 1.1. Застосувати до виразу $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ нерівність Шварца і скористатися умовою 2.

Задача 1.2. Покласти в (1.10) $x'^1 = 0$ $\frac{x^1}{x^0} = \frac{v}{c} = \beta$.

Задача 1.3. Для обчислення M_{k0} див. задачу 1.2 (див. також [102, гл. 2])

Задача 1.4. Скористатися законом перетворення спінорів 2-го рангу (1.38), розкладом (1.39) і формулою (1.29).

Задача 2.1. Скористатися тотожністю Якобі (2.24) і співвідношенням (2.20).

Задача 2.2. Дійсність матриць $S_\omega(x)$ випливає з розкладу експоненти в (2.19) в ряд і формули (2.27). Ортогональність з ермітовості T^a.

Задача 2.3. Перевірити групову властивість перетворень (2.28).

Задача 2.4. Перевірити групову властивість перетворень (2.30).

Розділ II

Задача 3.1. Перше твердження випливає з (3.7), (3.6) і (3.8), а друге з (3.8) (див. також [2, §15]).

Задача 4.1. Скористатись фопрмулою

$$\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_k \frac{1}{|f'(x_k)|}\delta(x - x_k)$$

(див. [22, п.1.9]).

Задача 5.3. Дивись обчислення P^0 для скалярного поля (ф-ла (4.59)).

Задача 5.4. Дивись обчислення P^0 для скалярного поля (ф-ла (4.59)).

Задача 5.5. Дивись доведення ф-ли (4.42).

Задача 6.1. Дивись обчислення P^0 для скалярного поля (ф-ла (4.59)).

Задача 7.1. Скористатися означенням (7.9) і формулою (7.10).

Розділ III

Задача 9.1. Спершу вибрати $\chi_1(x)$ таким чином, щоб для нового поля $B'_\mu(x)$ виконувалась умова $B'_0(x) \equiv 0$, а потім $\chi_2(x)$ таким чином, щоб $B''_0(x) \equiv 0$ і $\partial_k B''_k(x) \equiv 0$.

Задача 10.1. Скористатись явним виглядом матриць Паулі та визначенням скалярного і векторного добутків у $\mathbb{R}^3$.

Задача 10.3. Скористатися визначенням (10.1)і довести справедливість тотожності Якобі для матриць Паулі.

Розділ IV

Задача 17.3. Дивись аналогічні міркування у випадку скалярного поля (п.14.4.1).

Задача 17.4. Дивись п.3.1.4.

Задача 18.1. Скористатися формулами (18.5), (18.13) і властивістю $C\gamma^0 = -\gamma^0 C$ (див. (5.99)).

Задача 18.3. Переписати умову (5.148) у трансформованому вигляді і врахувати властивості матриць γ^μ і C (див. (5.99)).

Задача 18.4. Використати формули (18.5),(18.6) та (18.12),(18.13).

Задача 20.1. Дивись обчислення $D^{ret}(x)$ в [13, п.14.1].

Задача 20.2. Дивись вказівку до задачі 20.1.

Задача 20.4. Скористатися теоремою 20.2 і властивостями вакуумних середніх від нормального добутку операторів вільних полів.

Розділ V

Задача 21.1. Див. ф-ли (21.12)–(21.15).

Задача 21.2. Скористатися представленням поля у вигляді фур'є-перетворення (15.2) і формулою (4.58).

Задача 22.2. а) Скористатися умовою (22.56), представленням (22.43) і умовою (14.13) для скалярного поля; б) записати представлення вигляду (22.43) і проробити те саме, що і для взаємодії a.

Задача 22.3. Див. доведення твердження 22.1 .

Задача 23.2. Див. вивід рівнянь резольвентного типу (п.23.2).

Задача 23.3. По аналогії зі скалярним полем (див. п.23.1).

Задача 23.4. Проробити всі дії п.23.2 і п.23.3 з урахуванням статистики і задачі 23.3.

Задача 24.1. Скористатися представленням функцій Гріна формулою (24.8) з лагранжіаном (21.3) і теоремою 20.3, представивши експоненту формальним рядом.

Задача 25.7. Скористатися формулою (25.29), враховуючи, що $m = m_1 + \cdots + m_k$, $n = n_1 + \cdots + n_k$, де m_i, n_i—відповідні величини вузла G_i.

Задача 25.8. Довести лему 25.1 (п.25.4). Див. [13, п.18.6]

Задача 26.5. Скористатися формулою (26.31) з

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i, g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j,$$

диференціюючи за відповідними $\alpha_i,\ \beta_j$ і прирівнявши їх до нуля.

Задача 26.6. Розписати ліву частину (26.76) за формулою (26.14), а праву, скориставшись узагальненою теоремою Віка.

Задача 26.7. Розкласти експоненту в ряд і врахувати властивості(26.81), (26.83), (26.84), а також косоермітовість матриці B.

Розділ VI

Задача 27.1. Скористатися формулами (27.2), (27.1)

Задача 27.2. Скористатися формулами перетворення Фур'є для узагальнених функцій (див. [22, гл.II]).

Задача 27.3. Див. доведення в [11, гл.3,§2].

Задача 27.4. Див. доведення в [11, гл.3,§2].

Задача 27.5. Див. аналогічне доведення для простору Фока (§19).

Задача 28.2. Див. доведення в [11, гл.4,§1].

Задача 28.3. Див. доведення в [11, гл.4,§1].

Задача 28.4. Скористатися виразом S-оператора у вигляді T-експоненти і обчислити вираз для струму в нижчих порядках теорії збурень (див. також [11, гл.4,п.3.3].

Задача 28.5. Порівняти формальні вирази рядів теорії збурень правої та лівої частин формули (28.22).

Задача 29.1. Так само, як і простір Фока (§19).

Задача 29.2. Див. доведення ф-ли (29.16).

Задача 29.3. Скористатися означенням матриць (29.17) і властивостями (29.16).

Розділ VII

Задача 31.1. Див. [16, п.8.3].

Задача 31.2. Аналогічно до взаємодії (21.1)(див. п.21.1).

Задача 31.6. Див. [3, п.17.4].

Задача 31.11. Див. [3, п.21.2].

Задача 32.1. Довести спершу формулу

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{M}^4} dx : \Big[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\Big] : = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{M}^4} dx : \Big[\, \boldsymbol{A}(x)\Box\, \boldsymbol{A}(x)+A_0(x)(-\Delta_{\mathbf{x}})A_0(x)\Big] :$$

і скористатися представленням δ-функції (26.19) та формулами вигляду (26.7).

Задача 32.8. Врахувати властивість (32.80) для грасманових змінних θ і ϕ, а також властивості структурних констант f^{abc}.

Список літератури

1. *Арефьева И.Я.* Перенормированная теория рассеяния для модели Юкавы. I. Построение одевающих операторов// Теор. и мат. физика.– 1973.–**14**, №1.–С. 3-7.

2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики.– М.: Наука, 1974.– 431 С.

3. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика.– М.: Наука, 1969.– 623 С.

4. *Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.* Модель релятивистской струны в физике адронов.– М.: Энергоатомиздат, 1987.– 176 С.

5. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе.– К.: Наук. думка, 1988.– 680 С.

6. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования.– М.: Наука, 1965.– 235 С.

7. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория.– М.: Наука, 1968.– Ч. I.– 480 С.

8. *Боголюбов Н.Н.* К вопросу об основных уравнениях релятивистской квантовой теории поля // Докл. АН СССР.– 1951.– **81**, № 5, С. 757–760.

9. *Боголюбов Н.Н.* Условие причинности в квантовой теории поля // Изв. АН СССР. Сер. физ.– 1955.– **19**.– С. 237–242.

10. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля.– М.: Наука,1987.– 615 С.

11. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.– М.: Наука, 1969.– 422 С.

12. *Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С.* О вычитательном формализме при умножении причинных функций. // Изв. АН СССР.– 1956.– **20**, № 3.– С. 585–598.

13. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей, 3-е изд. М.: Наука, 1976.– 480 С.

14. *Борн М.* Эйнштейновская теория относительности//Пер. с англ.– М.: Мир, 1972.– 368 С.

15. *Бъёркен Дж.Д., Дрелл С.Д.* Релятивистская квантовая теория. т.I Релятивистская квантовая механика//Пер. с англ.– М.: Наука, 1978.– 295 С.

16. *Вайнберг С.* Квантовая теория полей. Т. I//Пер. с англ.– М.: Физ.мат.лит., 2003.– 648 С.

17. *Вайнберг С.* Квантовая теория полей. Т. II//Пер. с англ.– М.: Физ.мат.лит., 2003.– 528 С.

18. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Метод теории групп в квантовой механике//Пер. с нем.–Харьков, 1938.—234 С.

19. *Васильев А.Н., Казанский А.К.* Преобразования Лежандра порождающих функционалов в квантовой теории поля // Теор. и мат. физика.– 1972.– **12**, № 3.– С. 352–369.

20. *Вик Д.* Вычисление матрицы столкновений // Новейшее развитие квантовой электродинамики : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Ин. лит-ра, 1954.– С. 245–253.

21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1967.– 436 С.

22. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике.– М.: Наука, 1976.– 280 С.

23. *Волошин М.Б., Тер-Мартиросян К.А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц.– М.: Энергоиздат, 1984.– 296 С.

24. *Гелл-Манн М.* Восьмимерный формализм: теория симметрий в сильных взаимодействиях // Элементарные частицы и компенсирующие поля : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1964.– С. 117–146.

25. *Гелл-Манн М., Лоу Ф.* Связные состояния квантовой теории поля // Проблемы современной физики//Пер. с англ.–1955.– № 10.– С. 43–51.

26. *Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца.– М.: Физматгиз, 1958.– 380 С.

27. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики//Пер. с англ.– М.:Мир, 1984.– 445 С.

28. *Глэшоу Л., Гелл-Манн М.* Калибровочная теория векторных частиц // Элементарные частицы и компенсирующие поля : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1964.– С. 147–175.

29. *Дайсон Ф.Дж.* Теории излучения Томонаго–Швингера–Фейнмана // Сдвиг уровней атомных электронов : Сб. науч. ст.//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1960.– С. 94–123.

30. *Дайсон Ф.Дж.* S-матрица в квантовой электродинамике // Новейшее развитие квантовой электродинамики Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Ин. лит-ра, 1954.– С. 205–244.

31. *Дирак П.* Принципы квантовой механики.– М.: Наука, 1979.– 480 С.

32. *Ефимов Г.В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей.– М.: Наука, 1977.– 368 С.

33. *Ефимов Г.В.* Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий.– М.: Наука, 1985.– 215 С.

34. *Завьялов О.И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана.– М.: Наука, 1979.– 318 С.

35. *Завьялов О.И.* R-операция Боголюбова и теорема Боголюбова–Парасюка // Успехи мат. наук.– 1994.– **49**, Вып. 5 (299).– С. 61-70.

36. *Завьялов О.П., Степанов Б.М.* Асимптотика расходящихся диаграмм Фейнмана // Ядер. физика.– 1965.– **1**, Вып. 5.– С. 922–934.

37. *Зиновьев Ю.М.* Формулы обращения преобразования Лапласа // Теор. и мат. физика.– 1985.– **65**, № 2.– С. 163-175.

38. *Иванов С.С., Петрина Д.Я., Ребенко А.Л.* Уравнения для коэффициентных функций S-матрицы в квантовой теории поля // Там же.– 1974.– **19**, № 1.– С. 37-52.

39. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1967.– 236 С.

40. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов//Пер. с англ.– М.: Мир, 1972.– 740 С.

41. *Кейн Г* Современная физика элементарных частиц//Пер. с англ.– М.: Мир, 1990.– 358 С.

42. *Кошманенко В.Д.* Теория рассеяния Хаага–Рюэля как теория в различных пространствах состояний // Теор. и мат. физика.– 1979.– **38**, № 2.– С. 163– 168.

43. *Лакс П.Д., Филлипс Р.С.* Теория рассеяния//Пер. с англ.– М.: Мир, 1971.– 312 С.

44. *Ландау Л.Д.* О законах сохранения при слабых взаимодействиях // ЖЭТФ.– 1957.– **32**, вып. 2.– С. 405–406.

45. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля.– М.: ГИФМЛ, 1962.– 422 С.

46. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 3: Квантовая механика.– М.: ГИФМЛ, 1963.– 702 С.

47. *Левашев А.Е.* Элементарные частицы.– К.: Изд-во КГУ им. Т. Шевченко, 1960.– 135 С.

48. *Леман Г.* О свойствах функций распостранения и констант перенормировки квантовых полей // Проблемы современной физики.–1955.–№ 3.– С. 133–145.(Перевод с англ.)

49. *Ли Т.Д., Янг Ч.Н.* Несохранение чётности и двухкомпонентная теория нейтрино // Новые свойства симметрии элементарных частиц: Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Ин. лит-ра, 1957.

50. *Лич Дж.У.* Классическая механика//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1961.– 173 С.

51. *Магнус В., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп.– М.: Наука, 1974.– 455 С.

52. *Марков М.А.* Нейтрино.– М.: Наука, 1964.– 163 С.

53. *Менский М.Б.* Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частицы.– М.: Наука, 1976.– 287 С.

54. *Наймарк М.Л.* Линейные представления группы Лоренца.– М.:ГИФМЛ, 1958.– 376 С.

55. *Нгуен Ван Хъеу* Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц.– М.: Атомиздат, 1967.

56. *Нееман Ю.* Вывод сильных взаимодействий из принцыпа калибровочной инвариантности // Элементарные частицы и компенсирующие поля : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1964.– С. 176–185.

57. *Нишиджима К.* Фундаментальные частицы//Пер. с англ.– М.: Мир, 1965.– 462 С.

58. *Новожилов Ю.В.* Введение в теорию элементарных частиц.– М.: Наука, 1972.– 472 С.

59. *Остервальдер К.* Евклидовы функции Грина и обобщённые функции Вайтмана // Конструктивная теория поля :Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1977.– С. 48–73.

60. *Остервальдер К. Шрадер Р.* Аксиомы для евклидовых функций Грина. II. // Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1978.– С. 9–45.

61. *Парасюк О.С.* К теории R-операции Боголюбова // Укр. мат. журн.– 1960.– **12**, № 3.– С. 287–294.

62. *Паули В.* Релятивистская теория элементарных частиц//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1947.– 47 С.

63. *Паули В.* Общие принципы волновой механики//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1948.

64. *Паули В.* Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда // Нильс Бор и развитие физики : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1958.– С. 46–75.

65. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля//Пер. с англ.– Москва–Ижевск : РХД, 2001.

66. *Петрина Д.Я.* О суммировании вкладов от диаграмм Фейнмана. Теорема существования. // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1968.– **32**, № 5.– С. 1052–1074.

67. *Петрина Д.Я.* Квантовая теория поля. Учебн. пособие.– К.: Вища школа, 1984. – 248 С.

68. *Петрина Д.Я., Иванов С.С., Ребенко А.Л.* Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния.– М.: Наука, 1979.– 296 С.

69. *Петрина Д.Я., Ребенко А.Л.* Проекционно-итеративный метод решения уравнений квантовой теории поля и его связь с теорией перенормировок. Уравнения квантовой теории поля и некорректно поставленные задачи математической физики. // Теор. мат. физика.– 1980.– **42**, № 2.– С. 167–182.

70. *Погребков А.К., Сушко В.Н.* Квантовые солитоны и их связь с фермионными полями при $(\sin\varphi)_2$-взаимодействии. // Теор. мат. физика.– 1976.– **26**, № 3.– С. 419–425.

71. *Поляков А.М.* Спектр частиц в квантовой теории поля // Письма в ЖЭТФ.– 1974.– **20**.– С. 430.

72. *Попов В.Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.– М.: Атомиздат, 1976.– 256 С.

73. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля//Пер. с англ.– М.: Мир, 1985.– 414 С.

74. *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс.– М.: Мир, 1984.– 332 С.

75. *Ребенко О.Л.* Об уравнениях для матричных элементов эвклидовой квантовой электродинамики // Теор. мат. физика.– 1972.– **11**, № 3.– С. 301–316.

76. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ//Пер. с англ.– М.: Мир, 1977.– 357 С.

77. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность//Пер. с англ.– М.: Мир, 1978.– 395 С.

78. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 3. Теория рассеяния//Пер. с англ.– М.: Мир, 1982.– 443 С.

79. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов//Пер. с англ.– М.: Мир, 1982.– 428 С.

80. *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория унитарной симметрии.– М.: Наука, 1970.

81. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля//Пер. с англ.– М.: Мир, 1976.– 357 С.

82. *Салам А.* // Новые свойства симметрии элементарных частиц//Пер. с англ.– М.: Ин. лит-ра, 1957.

83. *Славнов А.А.* Тождества Уорда в калибровочных теориях // Теор. и мат. физика.– 1972.– **10**, № 2.– С. 153–161.

84. *Славнов А.А.* Инвариантная регуляризация калибровочных теорий // Там же.– 1972.– **13**, № 2.– С. 174–177.

85. *Славнов А.А.* Перенормировка по линиям // Теор. и мат. физика.– 1997.– **110**, № 3.– С. 399–415.

86. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочнх полей.– М.: Наука, 1978.– 238 С.

87. *Степанов Б.М.* Абстрактная теория R-операции // Изв. АН СССР, сер. матем.– 1963.– **27**, № 4.– С. 819–831.

88. *Стритер Р., Вайтман А.* PCT, спин и статистика и все такое//Пер. с англ.– М.: Наука, 1966.–231 С.

89. *Сунакава С.* Квантовая теория рассеяния//Пер. с японского– М.: Мир, 1979.– 268 С.

90. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений//Пер. с англ.– М.: Мир, 1975.– 565 С.

91 *Теория* групп и элементарные частицы: Сб. ст.– М.: Мир, 1967.– 375 С.

92. *Утияма Р.* Инвариантная теория взаимодействия // Элементарные частицы и компенсирующие поля : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1964.– С. 250–273.

93. *Фаддеев Л.Д.* О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений // ДАН СССР.– 1963.– **152**, № 3.– С. 573–576.

94. *Фейнман Р. П.* Теория позитронов // Новейшее развитие квантовой электродинамики : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Ин. лит-ра, 1954.– С. 138–160.

95. *Фейнман Р. П.* Пространственно-временная трактовка квантовой электродинамики // Новейшее развитие квантовой электродинамики : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Ин. лит-ра, 1954.– С. 161–204.

96. *Ферми Э.* Научные труды. Т. 1.//Пер. с англ.– М.: Наука, 1971.

97. *Ферми Э.* Квантовая механика (конспект лекций)//Пер. с англ.– М.: Мир, 1968.– 367 С.

98. *Хелзен Ф., Мартин А.* Кварки и лептоны: введение в физику частиц//Пер. с англ.– М.: Мир, 1987.– 455 С.

99. *Хепп К.* Теория перенормировок//Пер. с англ.– М.: Наука, 1974.– 270 С.

100. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и подгруппы//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1962.– 829 С.

101. *Шварц А.С.* Математические основы квантовой теории поля.– М: Атомиздат, 1975.– 395 С.

102. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля//Пер. с англ.– М.: ИЛ, 1963.– 842 С.

103. *Швингер Ю.* О функциях Грина для квантованных полей. Часть I, II. // Проблемы современной физики//Пер. с англ.– 1955.– № 3– С. 28–36.

104. *Широков Ю.М.* Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. II. Классификация неприводимых представлений неоднородной группы Лоренца // ЖЭТФ.– 1957.– **33**, вып. 5.– С. 1196–1207.

105. *Янг Ч., Миллс Р.* Сохранение изотопического спина и изотопическая калибровочная инвариантность // Элементарные частицы и компенсирующие поля : Сб. ст.//Пер. с англ.– М.: Мир, 1964.– С. 28–41.

106. *Bailin D., Love A.* Introduction to Gage Field Theory.– Editorial: Bristol and Boston, Adam Hilger, 1996.– 990 P.

107. *Becchi C., Rouet A., Stora A.* Renormalization of the abelian Higgs-Kibble model // Commun. Math. Phys.– 1975.– **42**, N 2.– P. 127–162.

108. *Bleuler K.* Eine neue Methode zum Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen // Helv. Phys. Acta.– 1950.– **23**.– P. 567-575.

109. *Bloom E.D., et al.* BCD_2M_2TBFHK High-energy inelastic $e-p$ scattering at 6° and 10° // Phys. Rev. Lett.– 1969.–**23**.– P. 930–931.

110. *Bogoliubow N.N., Parasiuk O.S.* Über die Multiplikation der Kausalfunktionenin der Quantentheorie der Felder // Acta Math.– 1957.– **97**, N 1.– P. 227–242.

111. *Coleman S.* There are no classical glueballs // Commun. Math. Phys.– 1977.– **55**, N 2.– P. 113–116.

112. *Dashen R.F., Hasslacher B., Neveu A.* Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory, I, II, III // Phys. Rev. D .– 1974.– **10**, N 12.– P. 4114–4142.

113. *De Donger T., Van Dungen H.* // Compt. Rend.– (July, 1926).

114. *De-Witt B.S.* Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory // Phys. Rev.– 1967.– **160**, N 5.– P. 1113–1148.

115. *De-Witt B.S.* Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory // Ibid.– **162**, N 5.– P. 1195–1239.

116. *De-Witt B.S.* Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory // Ibid.– **162**, N 5.– P. 1239–1256.

117. *Dirac P.A.M.* On the annihilation of electrons // Proc. Cambr. Phil. Soc.– 1930.– **26**.– P. 361–375.

118. *Faddeev L.D., Popov V.N.* Feynman diagrams for the Yang-Mills field // Phys. Lett. **B**.– 1967.– **25**, N 1.– P. 29–30.

119. *Feldman J., Kn´orrer H., Trubowitz E.* Fermionic Functional Integrals and the Renormalization Group.– CRM Monograph Series, AMS, Providence, Rhode Island USA, 1999.

120. *Feynman R.P.* Space–Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys.– 1948.– **20**, N 2.– P. 367–387.

121. *Feynman R.P.* Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction // Phys. Rev.– 1950.– **80** , N 3.– P. 440–457.

122. *Feynman R.P.* // Acta Phys. polon.– 1963.– **24**.– P. 697.

123. *Fock V.* // Zs. f. Phys.– 1926.– **38**.– P. 242.

124. *Fock V.* // Ibid.– 1926.– **39**,.– P. 226.

125. *Fock V.* // Ibid.– 1932.– **75**.– P. 622.

126. *Furry W.H.* A Symmetry Theorem in the Positron Theory // Phys. Rev.– 1937.– **51**, N 2.– P. 125–129.

127. *Gell-Mann M., Ne'eman Y.* The Eightfold Way. N.Y., 1964.

128. *Georgi H., Glashow S.L.* Unified Weak and Electromagnetic Interactions without Neutral Currents // Phys. Rev. Lett.– 1972.– **28**, N 22.– P. 1494–1497.

129. *Georgi H., Glashow S.L.* Unity of All Elementary-Particle Forces // Ibid.– 1974.– **32**, N. 8.– P. 438-441.

130. *Ginibre J.* Some application of functional integration in statistical mechanics //In: Statistical Mehanics and Quantum Fields Theory, C. De Witt and R. Stora, eds., N.Y., Gordon and Breach, 1971.

131. *Glashow S.L.* Partial-Symmetries of Weak Interactions // Nucl. Phys.– 1961.– **22**, N 3.– P. 579–588.

132. *Glashow S.L., Illiopoulos J., Majani L.* Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry // Phys. Rev. D.– 1970.– **2**, N 7.– P. 1285–1292.

133. *Glimm J., Jaffe A.* A $\lambda(\phi^4)_2$ quantumfield theory without cutoffs. I // Phys. Rev.– 1968.– **176**, N 5.– P. 1945–1951.

134. *Glimm J., Jaffe A.* A $\lambda(\phi^4)_2$ quantumfield theory without cutoffs. III // Acta Math.– 1970.– **125**, N 1.– P. 204–267.

135. *Glimm J., Spencer T.* The Wightman axioms and the mass gap for the $P(\phi)_2$ quantum field theory.– New York, 1972.– 17 P.(Preprint)

136. *Goldstone J.* Field theories with "superconductor"solutions // Nuovo cimento.– 1961.– **19**, N 1. P. 154–164.

137. *Goldstone J., Jackiw R.* Quantization of nonlinear waves // Phys. Rev. D.– 1975.– **11**, N 6.– P. 1486– 1498.

138. *Gordon W.* // Zs. f. Phys.– 1926.– **40**.– P. 117–120; P. 21.

139. *Gross D.J., Wilczeck F.* Ultraviolet behaviour of non-abelian gauage theories // Phys. Rev. Lett.– 1973.– **30**, N 21.– P. 1343–1346.

140. *Guerra F., Rosen L., Simon B.* The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics // Ann. Math.– 1975.– **101**, N 2.– P. 111–259.

141. *Gupta S.N.* Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics // Proc. Phys. Soc.– 1950.– **A63**.– P. 681.

142. *Haag R. and Kastler D.* An algebraic approach to quantum field theory // Jour. Math. Phys.– 1964.– **5**.– P. 848.

143. *Hall D., Wightman A.S.* A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory // Kgl. Dansk. Vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.– 1957.– **31**, N 5.

144. *Heisenberg W.* Die "Beobachtbaren Grössen"in der Theorie der Elementarteilchen. Tail I,II // Zs. f. Phys.– 1943.– **120**.– P. 513–538; 673–702.

145. *Hepp K.* Proof of the Bogoliubov-Parasiuk Theorem on Renormalization // Comm. Math. Phys.– 1966.– **2**, N 4.– P. 301–326.

146. *Higgs P.W.* Broken Symmetries and the Masses of Gauge Fields // Phys. Rev. Lett.– 1964.– **13**, N 16.– P. 508–509.

147. *Hoegh-Krohn R.* A general class of quantum fields without cutoff in two space-time dimensions // Commun. Math. Phys.– 1971.– **21**, N 3.– P. 244–255.

148. *Jordan P., Klein O.* // Zs. f. Phys.– 1927.– **45**.– P. 751.

149. *Jordan P., Pauli W.* // Ibid.– 1928.– **47**.– P. 151.

150. *Jordan P., Wigner E.P.* Über das Paulische Ëquivalenzverbot // Zs. f. Phys.– 1928.– **47**.– P. 631-651.

151. *Jost R.* Eine Bemerkung zum CTP-Theorem // Helv. Phys. Acta.– 1957.– **30**.– P. 409.

152. *Jost R.* Eine Biespiel zum Nukleon–Vertex // Helv. Phys. Acta.– 1958.– **31**.– P. 263.

153. *Jost R.* Über das zeitliche Verhalten von glatten Lösungen der Klein–Gordon Gleichung. // Helv. Phys. Acta.– 1966.– **39**, N. 1.– P. 21–32.

154. *Julia D., Zee A.* Poles with both magnetic and electric charges in non–Abelian gauge theory // Phys. Rev. D.– 1975.– **11**, N 8.– P. 2227–2232.

155. *Källen G.* On the definition of renormalization constants in quantum electrodynamics // Helv. Phys. Acta.– 1952.– **25**.– P. 417.

156. *Karplus R., Neuman M.* Non-Linear Interactions between Electromagnetic Fields // Phys. Rev.– 1950.– **80**, N 3.– P. 380–385.

157. *Kato T.* Scattering theory with two Hilbert spaces // Journ. Funct. Anal.– 1967.– **1**.– P. 342–369.

158. Klein O. // Zs. f. Phys.– 1926.– **37**.– P. 895.

159. *Kobayashi M., Maskawa T. CP*-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction // Progr. Theor. Phys.– 1973.– **49**, N 2.– P. 652–657.

160. *Kudar J.* // Ann. d. Phys.– 1926.– **81**.– P. 632.

161. *Landau L.D.* On the conservation laws for weak interactions // Nucl. Phys.– 1957.– **3**.– P. 127–131.

162. *Lehmann H., Symanzik K. and Zimmermann W.* Zur Formulierung quantiserter Feldtheorien // Nuovo Cim.– 1955.– **1**, N 2.– P. 206–223.

163. *Lehmann H., Symanzik K. and Zimmermann W.* On the formulation of quantized field theories. II // Nuovo Cim.– 1957.– **6**, N 2.– P. 319–332.

164. *Lüders G.* On the equivalence of invariance under time reversal and under particle–antiparticle conjugation for relativistic field theories // Kgl. Danske Viderskab. Selskab., Mat.-Fys. Medd.– 1954.– **28**, N 5.– P. 1–17

165. *Lüders G.* Proof of the TCP theorem // Ann. Phys.– 1957.– **2**, N 1.– P. 1–12.

166. *Lüders G., Zumino B.* Connection between spin and statistics // Phys. Rev.– 1958.– **110**, N 6.– P. 1450–1453.

167. *Maskawa T., Nakajima H.* Singular Lagrangian and the Dirac–Faddeev Method — Existance Theorem of Constraints in "Standard Forms"// Progr. Theor. Phys.– 1976.– **56**, N 4.– P. 1295–1309.

168. *Miransky V.A.* Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theory.– World Sci., Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1993.– 583 P.

169. *Morchio G. and Strocchi F.* // Nucl. Phys. B.– 1983.– **211**.– P. 471.

170. *Nakanishi N.* General Integral Formula of Perturbation Term in the Quantized Field Theory // Progr. Theor. Phys. (Kyoto).– 1957.– **17**, N 3.– P. 401–418.

171. *Nakano T.* Quantum field theory in terms of Euclidean parameters // Ibid.– 1959.– **21**, N 2.– P. 241–259.

172. *Nelson E.* Quantum fields and Markoff fields // Proceedings of Summer Institute of Partial Differential Equations.– Symp. in Pure Math.– **23**, A.M.S. Publications, 1973.– P. 413–420.

173. *Nelson E.* Construction of quantum fields from Markoff fields // Jour. Funct. Anal.– 1973.– **12**, N 1.– P. 97–112.

174. *O'Raifertaig L.* Lorentz Invariance and Internal Symmetry // Phys. Rev. B.– 1965,– **139**, N 4.– P. 1052–1062.

175. *Osterwalder K., Schrader R.* Euclidean Fermi Fields and Feynman–Kac for Boson–Fermion Models // Helv. Phys. Acta.– 1973.– **46**, N 3.– P. 277–302.

176. *Pati J.C., Salam A.* Unified Lepton–Hadron Symmetry and Gauge Theory of the Basic Interactions // Phys. Rev. **D**.– 1973.– **8**, N 4.– P. 1240–1251.

177. *Pauli W., Weisskopf V.* // Helv. Phys. Acta.– 1934.– **7**.– P. 709.

178. *Polchinski J.* String Theory. V.I, V.2.– Cambrige Univ. press, 1999.

179. *Politzer H.D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions // Phys. Rev. Lett.– 1973.– **30**, N 26.– P. 1343–1346.

180. *Rebenko A.L.* On the Generating Operator for Green's Functions Equations.– Kiev, 1971.– 44 P. (Preprint / ITP-71-37E.– Inst. Ther. Physics)

181. *Salam A.* Divergent Integrals in Renormalizable Field Theories // Phys. rev.– 1951.– **84**, N 3.– P. 426–431.

182. *Salam A.* Elementary Particles Theory.– Stockholm, 1968.

183. *Schwartz L.* Théorie dos distribtions. V. I.– Hermann, Paris, 1957.

184. *J. Schwinger* On the Euclidean structure of relativistic field theory // Proc. Mat. Acad. Sci.(USA).– 1958.– **44**, N 10.– P. 956–961.

185. *Speer E.* Analytic renormalization // Jour. Math. Phys.– 1968.– **9**.– P. 1404–1410.

186. *Steinmann O.* Perturbative Quantum Electrodynamics and Axiomatic Field Theory.– Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.– 355 P.

187. *Stueckelberg E.C.G., Green J.*// Helv. Phys. Acta.– 1949.– **24**.– P. 215.

188. *Stueckelberg E.C.G., Rivier D.* // Helv. Phys. Acta.– 1949.– **22**.– P. 215.

189. *Symanzik K.* Euclidean Quantum Field Theory. I. Equations for a Scalar Model // Jour. Math. Phys.– 1966.– **7**, N 3.– P. 510–525.

190. *Taylor J.C.* Ward identities and charge renormalization of Yang-Mills field // Nucl. Phys. **B**.– 1971.– **33**, N 2.– P. 436–444.

191. *t'Hooft G.* Renormalization of massless Yang–Mills fields // Nucl. Phys. **B**.– 1971.– **33**, N 1.– P. 173–199.

192. *t'Hooft G.* Magnetic monopoles in unified gauge theories // Ibid.– 1974.– **79**, N 1.– P. 276–284.

193. *t'Hooft G., Veltman M.* Regularization and renormalization of gauge fields // Nucl. Phys. **B**.– 1972.– **44**, N 1.– P. 189–213.

194. *Tyutin I. V.* // Lebedev Institute preprint № 39, Moscow, 1975;

195. *Weinberg S.A.* A Model of Leptons // Phys. Rev. Lett.– 1967.– **19**, № 21.– P. 1264–1266.

196. *Weyl H.* Electron und Gravitation, I. // Zs. Phys.– 1929.– **56**.– P. 330.

197. *Wheeler J.A.* On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure // Phys. Rev.– 1937.– **52**, N 11.– P. 1107–1122.

198. *Wiener N.* // Jour. Math. Phys.– 1923.– **2**, N 3.– P. 131.

199. *Wightman A.S.* Quantum field theoryin terms of vacuum expectation values // Phys. Rev.– 1956.– **101**, N 2.– P. 860-866.

200. *Wightman A.S., Garding L.* Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum field theory // Arkiv fur Physik.– 1965.– **28**, N.1 P. 129–133.

201. *Wigner E.P.* // Göttinger Nachrichten.– 1932.– **31**.– P. 546.

202. *Wigner E.P.* // Proc. Amer. Phil. Soc.– 1949.– **93**.– P. 521.

203. *Word J.C.* The Scattering of Light by Light // Phys. Rev.– 1950.– **77**, N 2.– P. 293–L.

204. *Word J.C.* An Identity in Quantum Electrodynamics // Ibid.– 1950.– **78**, N 2.– P. 182–L.

205. *Zimmermann W.* Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space // Commn. Math. Phys.– 1969.– **15**, N 3.– P. 208–234.

206. *Zinoviev Yu.M.* Equivalence of Euclidean and Wightman field theories // Ibid.– 1995.– **174**, N 1.– P. 1-27.

Предметний покажчик

Пояснення до предметного покажчика

Предмети, назва яких складається з двох чи більше слів, вказуються один раз. Шукати їх треба на одній із літер, на яку починається або назва (іменник) самого поняття або його пояснювальна характеристика (прикметник, називний іменник тощо). У випадку, коли назва предмета містить у собі прізвище, шукати його треба на літеру, з якої починається прізвище.

A

Абелева група 36

Адіабатичне включення взаємодії 292

Адрони 171

Аксіоми Боголюбова–Медведєва–Поліванова (БМП)

— Вайтмана

— квантування

— Лемана–Симанзика–Цимермана (ЛСЦ)

— Остервальдера–Шрадера (ОШ)

Альфа-калібровка

— матриці

— представлення внесків діаграм Фейнмана

Ампера, закон

Аналітичне продовження амплітуд Фейнмана

— — функцій Вайтмана

Аномальний магнітний момент

Антикомутатор

Антикомутаційні співвідношення операторів поля

Антихронологічний добуток

Античастинка

Аромати кварків

Асимптотична повнота

— свобода

Асимптотичні поля

— умови

Аут (Out) — оператори полів

— стани

Б

Базис у просторі Фока

Баргмана–Холла–Вайтмана теорема

Баріони

Бета-розпад

Біанки тотожність

Боголюбова–Парасюка операція (R-операція)

Бозе-поле

Бозе-Ейнштейна статистика

Бозони

— голдстоунівські

— обмінні(калібрувальні)

Бора магнетон

— постулати

Борна наближення

БРСТ–перетворення

В

Вайтмана функції

Вакуум (стан)

— для вільних полів (”голий”)

— для взаємодіючих полів (”фізичний”)

Вакуумне середнє

Варіаційна похідна

Варіаційний принцип 49

Вейля рівняння 123

Вектор

— аксіальний
— експоненціальний
— енергії-імпульсу
— ізотропний
— одиничний
— просторово подібний
— спіну
— стану
— струму
— — векторного поля
— — скалярного комплексного поля
— — спінорного поля
— фоківський
— циклічний
— часоподібний

"Великий вибух"

Великого об'єднання модель

Вершинна діаграма

— — калібрувальних теорій
— функція

Взаємодії представлення

Взаємодія електромагнітна

— електрослабка
— між скалярним і електромагнітним полем
— об'єднана
— сильна
— слабка

Вігнера перетворення

Віддзеркалення просторове

— просторово–часові

— часові

Відокремлені хвилі

Віка добуток для квантованих полів

— теорема

— — для хронологічного добутку

— — узагальнена

Віртуальна частинка

Віртуальний стан

Г

Гама матриці Дірака

— — — властивості

Гамільтона рівняння

Гамільтоніан взаємодії дійсного скалярного поля

— — електромагнітного і скалярного полів

— вільного векторного поля

— — дійсного скалярного поля

— — електромагнітного поля

— — комплексного скалярного поля

— — нейтринного поля

— — спінорного поля

— класичної механіки

— — — зі зв'язками

— частинки у зовнішньому електромагнітному полі

Гамільтонів формалізм класичної механіки

— — теорії поля

Гаусса закон

Гейзенберга представлення (картина)
— рівняння
— — для операторів поля

Гелл-Манна матриці

Генератори групи

Гіперзаряд

Глешоу–Ілліопулоса–Майамі лагранжіан

Глюони

Голдстоуна теорема

Голдстоунівський бозон

Градієнтні перетворення (див. групи калібрувальних перетворень)

Грасманова алгебра

Гріна функція випереджувальна
— — взаємодіючих полів
— — – – спектральне представлення
— — вільного векторного поля
— — евклідова
— — – електромагнітного поля
— — — скалярного поля
— — — – – N-точкова
— — — спінорного поля
— — запізнювальна
— — причинна
— — фотонна

Група, абелева, унітарна U(1)
— внутрішніх симетрій
— калібрувальна
— калібрувальних перетворень 1-го роду
— — — — 2-го роду
— комплексних унімодулярних матриць

— локальних перетворень
— Лоренца власних ортохронних перетворень(обмежена)
— — загальна
— — комплексних перетворень
— — повна (ортохронна)
— Пуанкаре
— спеціальна унітарна SU(n)
— — — SU(2)
— – — SU(3)
— – — SU(5)

Групи параметр

Гупта–Блейлера формалізм
— — — для взаємодіючого поля

Д

Дайсона рівняння

д'Аламбера оператор

Дивність

Динамічні інваріанти

Динамічні характеристики 1-го роду
— — — 2-го роду

Діонні розв'язки

Дірака дужки класичної механіки
— матриці (див. гама-матриці Дірака)
— —- властивості
— представлення (картина)
— рівняння
— — зарядово-спряжене
— — розв'язки
— — спряжене
— — у зовнішньому полі

Дія в класичній механіці

— — теорії поля

Додатно-визначеності умова

"Дýхи" Фаддєєва–Попова

Е

Евклідового поля оператор

Електромагнітного поля канонічні змінні

— — квантування

— — напруженість

— — потенціал

Електрона магнітний момент

Енергетична поверхня

Енергії-імпульсу вектор

— — — векторного поля

— — — електромагнітного поля

— — — скалярного поля

— — — спінорного поля

— — тензор

Ерміта поліноми

Ефективний переріз розсіяння

З

Заміна змінних у гауссовому інтегралі

Заряд і густина струму

— — — — векторного поля

— — — — комплексного скалярного поля

— — — — спінорного поля

Зарядового спряження властивість матриць Дірака

— — перетворення

— — — векторного поля

— — — електромагнітного поля
— — — скалярного поля
— — — спінорного поля

Зв'язки вторинні
— — первинні

І

Ізотопічний спін

Імпульс канонічний
— узагальнений класичної механіки

Ін (In)-оператори полів

Інверсії просторової перетворення
— — — векторного поля
— — — електромагнітного поля
— — — скалярного поля
— — – спінорного поля
— часової перетворення
— — — векторного поля
— — — електромагнітного поля
— — – скалярного поля
— — — спінорного поля

Індекс вершини
— розбіжності діаграми

Індефінітна метрика

Інстантони

Інтеграл Вінера
— руху
— Фейнмана

Інфінітезимальні перетворення

Й

Йоста теорема

— точка

К

Калібровка аксіальна

— кулонівська

— Лоренца–Ландау

— часова

Калібрувальної інваріантності перетворення

— — — інфінітезимальні

— — принцип

— — умова для коефіцієнтних функцій

Канонічні змінні

— — переставні співвідношення

— перетворення

Квантова хромодинаміка

Квантування векторного поля

— взаємодіючого електромагнітного поля

— вільного електромагнітного поля

— вторинне

— калібрувального поля (Янга–Міллса)

— первинне

— скалярного поля

— спінорного поля

Кварки

Клейна–Гордона–Фока рівняння

— — розв'язки

Кобаяші–Маскава матриця

Коваріантні похідні

Коваріація гауссової міри

Коефіцієнтні функції матриці розсіяння

Константа взаємодії (зв'язку)

— — перенормована

Континуальний інтеграл

Контрчлени лагранжіана

— — калібрувальної теорії

— — квантової електродинаміки

— — скалярних взаємодій

Конус бічний

— майбутнього

— минулого

— світловий

Корпоскулярно-хвильовий дуалізм

Л

Лагранжа рівняння

Лагранжа–Ейлера рівняння

Лагранжіан

— Великого об'єднання

— взаємодії

— — полів Янга–Мілса

— — Юкави

— повний дійсного скалярного поля

— — електромагнітного і спінорного полів

— – електрослабкої

— – комплексного скалярного поля

— — КХД

— – слабкої

— — — феноменологічний

— — хіґсівського поля

— вільного векторного поля

— — дійсного скалярного поля

— — електромагнітного поля

— — комплексного скалярного поля
— — нейтринного поля
— — спінорного поля
— "ду́хів"Фаддєєва–Попова
— класичної механіки
— класичної теорії поля

Лагранжів формалізм

Лемана–Симанзика–Цимермана аксіоматика

Лептони

Локальність

Лоренца група (див. група Лоренца)

Лоренца перетворення
— — власні неортохронні
— — — ортохронні
— — комплексні
— — невласні неортохронні
— – – ортохронні
— умова

Людерса–Паулі–Швінгера теорема (CPT-теорема)

M

Магнітний момент електрона
— — нейтрона

Максвелла рівняння

Майорани спінори

Маса Великого об'єднання
— неперенормована (“гола”)
— перенормована (фізична)

Маси перенормування
— – контрчлен

Масова поверхня

Масовий оператор

Матриця розсіяння

— — закон збереження енергії

— — інваріантність відносно перетворень Лоренца

— – — — — зарядового спряження

— — причинності умова

— — теорія збурень

— — унітарність

Мезони

— псевдоскалярні

— скалярні

Метричний тензор

Мінковського простір

Множина всюдищільна

Момент гауссової міри

— кількості руху орбітальний

— — — спіновий

Н

Нейтрино

Нерелятивістське наближення

Нетер теорема

Норма вектора

Нормальний добуток (див. Віка добуток)

— — зі спаренням

Нормальна форма оператора розсіяння

Нуклон

О

Область визначення операторів поля

— трубчаста

Оператор антилінійний

— антиунітарний

— знищення зовнішньої лінії діаграми Фейнмана

— — — — — — у КЕД

— — частинки (античастинки)

— інфінітезимальний

— народження зовнішньої лінії діаграми Фейнмана

— — частинки (античастинки)

— проекційний

— розсіяння (див. матриця розсіяння)

— симетризації

— еволюції

Орбіта калібрувальної групи

Ортогональні співвідношення спінорів

Остервальдера–Шрадера теорема

П

Паулі матриці

— принцип

Паулі–Вілларса метод регуляризації

Паулі–Йордана функція

Перенормовні і неперенормовні теорії

Перенормування маси і заряду

Переріз розсіяння

— — диференціальний

— — повний

Переставні співвідношення

— — одночасові

— функції

Плоскі хвилі

Поздовжня складова векторного поля

— — електромагнітного поля

— — функцій Гріна електромагнітного поля

Позитрон

Поле

— векторне

— електромагнітне

— псевдоскалярне

— Раріти–Швінгера

— скалярне

— спіну 3/2

— спіну 2

Поляризації оператор

Поперечна складова електромагнітного поля

— — функції Гріна електромагнітного поля

Поперечності умова

Постулати квантування

Потенціал взаємодії

Правила обходу полюсів

Представлення антикомутаційних співвідношень

— взаємодії

— групи Лоренца

— — — скінченновимірне

— звідне (незвідне)

— комутаційних співвідношень

— — — електромагнітного поля

— — — скалярного поля

— приєднане

— фундаментальне

Примітивно-розбіжні діаграми Фейнмана

Причинності принцип

Приведення S-матриці до нормального виду

Пропагатор фотона в довільній калібровці

Простір станів

— — одночастинковий

— — n-частинковий

Просторово подібна поверхня

Псевдовектор

Псевдоевклідова метрика

Псевдо-Максвелівське рівняння

Псевдоскаляр

Пуассона дужки

Р

Регуляризація

— аналітична (Спіра)

— за допомогою введення довільної розмірності

— Паулі – Вілларса

— по лініях (Славнова)

— проективно-ітеративним методом

Релятивістська інваріантність

— — рівнянь Вейля

— — — Дірака

— — — Клейна–Гордона–Фока

Рівняння для коефіцієнтних функцій S-матриці

— — — — — КЕД

— — функцій Гріна

— — — — у функціональних похідних

— — — — зв'язних

— — — — сильнозв'язних

Розсіяння амплітуда

— теорія

С

Скаляр

Солітон

Спектр оператора енергії-імпульсу

Спектральна умова

Спектральне представлення 2-точкової функції Гріна

— — — — — у КЕД

Спін

Спінор

Спіральність

Спонтанне порушення симетрії

— — — вакууму

Спряження правила для компонент поля

— — — спінорів

Стабільність вакууму

— одночастинкового стану

Структурні константи групи

Т

Тензор електромагнітного поля

— енергії-імпульсу

— метричний

— моменту кількості руху

— спіну

Теорія Великого об'єднання

Транформаційні властивості поля

— — — векторного

— — — скалярного

— — — спінорного

У

Узагальнені імпульси

— координати

— швидкості

Унітарне представлення

Унітарності умова для матриці розсіяння

Уорда тотожність.

Ф

Фаза

Фазові перетворення полів

Фаррі теорема

Фейнмана діаграма

— — вершина

— — вершинна

— — власне-енергетична

— — для калібрувальних теорій

— — — квантової електродинаміки

— — — коефіцієнтних функцій

— — – матриці розсіяння

— — — матричних елементів

— — — функцій Гріна

— — зв'язна

— — незв'язна

— — сильнозв'язна

— — слабозв'язна

— правила для коефіцієнтних функцій

— — — матричних елементів калібровочних теорій
— — — — — квантової електродинаміки
— — — — — самовзаємодії φ^4
— інтеграл за траекторіями
— правило обходу полюсів

Ферміони
— ліві
— праві

Фока простір
— — Евклідів 411

Фолді–Вотхойзена перетворення 413

Фотони поздовжні 140, 219
— поперечні 140, 219
— часові 140, 219

Х

Хаага теорема

Хвильова функція електрона (позитрона)
— — скалярного бозна
— — фотона

Хвильовий оператор

Хильовий пакет

Хевісайда функція

Хіґса механізм

Хіґсівське поле

Хронологічний добуток

Хронологічне спарення

Ч

Часова складова електромагнітного поля

Челлена–Леманна представлення 2-точкової функції Гріна

— — — — — — у КЕД

Ш

Швінгера рівняння для функцій Гріна

— — — — — у КЕД

Шредінгера представлення (картина)

— рівняння

Я

Якобі тотожність

Янга–Міллса поле

— — рівняння

Зміст

Передмова **3**
Список позначень 5

Вступ **9**

Розділ I. Групи симетрій взаємодії елементарних частинок **13**
§ 1. Група Лоренца 13
1.1. Простори Евкліда та Мінковського. Релятивістські позначення 13
1.2. Однорідна група Лоренца 16
1.3. Неоднорідна група Лоренца – група Пуанкаре 20
1.4. Комплексні перетворення Лоренца 20
1.5. Представлення групи Лоренца і Пуанкаре, польові функції та фізичні стани 21
§ 2. Групи внутрішніх симетрій 27
2.1. Абелева унітарна група U(1) 28
2.2. Зарядове спряження C 28
2.3. Спеціальна унітарна група SU(n) 29
2.3.1. SU(2) – симетрія 30
2.3.1. SU(3) – симетрія 31
2.4. Групи локальних перетворень. Калібрувальна група 33
Задачі до розділу I 39

Розділ II. Класична теорія вільних полів **41**
§ 3. Лагранжів та гамільтонів формалізм класичної теорії поля 41
3.1. Варіаційний принцип і канонічний формалізм класичної механіки 41
3.1.1. Рівняння Лагранжа 41
3.1.2. Канонічні змінні. Рівняння Гамільтона 43
3.1.3. Дужки Пуассона. Інтеграли руху 44
3.1.4. Канонічний формалізм при наявності зв'язків 45
3.2. Від класичної до квантової механіки. Первинне квантування . 49
3.3. Загальні вимоги до лагранжіанів теорії поля 53
3.4. Рівняння Лагранжа – Ейлера 54
3.5. Теорема Нетер і динамічні інваріанти 55

3.6. Вектор енергії – імпульсу 57
3.7. Тензор моменту кількості руху і тензор спіну 58
3.8. Заряд і вектор струму 59
3.9. Канонічні змінні 60
§ 4. Класична теорія вільного скалярного поля 61
4.1. Рівняння Клейна – Гордона – Фока 61
4.2. Релятивістська інваріантність рівняння Клейна–Гордона–Фока 62
4.3. Розв'язки рівняння Клейна – Гордона – Фока 64
4.4. Інтерпретація розв'язків. Гільбертів простір станів 66
4.5. Перетворення $\widehat{C}$, $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ 70
4.5.1. Перетворення зарядового спряження $\widehat{C}$ 70
4.5.2. Просторова інверсія $\widehat{P}$. 72
4.5.3. Часова інверсія $\widehat{T}$ 72
4.5.4. $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$–інваріантність 72
4.6. Представлення групи Лоренца у просторі станів 73
4.7. Лагранжів формалізм скалярного поля. Динамічні інваріанти 76
§ 5. Спінорне поле 79
5.1. Рівняння Дірака 80
5.1.1. Вивід рівняння Дірака 80
5.1.2. Властивості матриць Дірака. Спряжене рівняння 81
5.2. Релятивістська інваріантність 84
5.2.1. Трансформаційні властивості спінорного поля 84
5.2.2. Про звідні та незвідні спінорні представлення 88
5.2.3. Трансформаційні властивості білінійних форм $\boldsymbol{\psi O \psi}$ 89
5.3. Розв'язки рівняння Дірака 91
5.3.1. Структура розв'язків в імпульсному просторі 91
5.3.1. Класифікація розв'язків. Спіральність 93
5.3.3. Співвідношення між спінорами 98
5.3.4. Хвильові функції електрона і позитрона. Операція зарядового спряження 100
5.3.5. $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$-перетворення 103
5.4. Лагранжів формалізм 105
5.5. Представлення групи Лоренца 110
5.5.1. Гільбертів простір станів 110
5.5.2. Представлення групи Лоренца у просторі станів 111
5.6. Застосування рівняння Дірака 113
5.6.1. Рівняння Дірака у зовнішньому полі 113
5.7. Спінорне безмасове поле 115
5.7.1. Двокомпонентність безмасового спінорного поля 115
5.7.2. Релятивістська інваріантність 117
5.7.3. Чи відповідає спінорне безмасове поле реальним частинкам? Фізична інтерпретація розв'язків. Нейтрино 117
5.7.4. Лагранжіан і динамічні інваріанти 118

5.7.5. Про масу нейтрино і спінори Майорани 120
§ 6. Векторні поля 121
6.1. Лагранжів формалізм 121
6.2. Представлення в імпульсному просторі 123
6.3. Розкладання на поздовжні і поперечні складові 124
6.4. $\widehat{\boldsymbol{P}}, \widehat{\boldsymbol{T}}, \widehat{\boldsymbol{C}}$-перетворення 126
§ 7. Електромагнітне поле 126
7.1. Рівняння Максвелла 126
7.2. Потенціал електромагнітного поля 128
7.3. Градієнтні перетворення і умова Лоренца: умова поперечності 128
7.4. Лагранжів формалізм електромагнітного поля 130
7.5. Поперечні, поздовжні і часові складові електромагнітного поля 132
7.6. Квантово-механічні характеристики фотона 134
7.7. $\widehat{\boldsymbol{C}}, \widehat{\boldsymbol{P}}, \widehat{\boldsymbol{T}}$-перетворення 137
7.8. Про сумісність лоренцових і калібрувальних перетворень. Різні види калібровок 137
§ 8. Рівняння полів з вищими значеннями спіну 139
8.1. Поля спіну 3/2 139
8.2. Частинки спіну 2 140
Задачі до розділу II 141

Розділ III. Класична теорія взаємодіючих полів 143
§ 9. Калібрувальна теорія електромагнітної взаємодії електронно-позитронного поля 143
9.1. Принцип калібрувальної інваріантності в теорії Максвелла . . 143
9.2. Рівняння Шредінгера і градієнтна (калібрувальна) інваріантність 144
9.3. Калібрувальний принцип — динамічний принцип взаємодії електромагнітного і електронно-позитронного полів 146
§ 10. Класична теорія полів Янга–Міллса 148
10.1. Калібрувальний принцип і лагранжиан полів Янга – Міллса 148
10.2. Рівняння руху вільних полів Янга–Міллса 151
10.3. Поля Янга–Міллса у випадку довільних представлень групи $SU(N)$ 152
§ 11. Маси частинок і спонтанне порушення симетрії 154
11.1. Спонтанне порушення симетрії 155
11.2. Механізм Хіґса у випадку локальної $U(1)$-симетрії 157
11.3. Механізм Хіґса у випадку локальної $SU(2)$-симетрії 159
11.4. Генерація мас ферміонів 161
§ 12. Про побудову загального лагранжіану взаємодіючих полів 163
12.1. Лагранжіан КХД 165
12.2. Лагранжіан слабких взаємодій 166
12.3. Про електрослабкі взаємодії 169

12.4. Про лагранжиан великого об'єднання 170
§ 13. Про розв'язки рівнянь для класичних полів: відокремлені хвилі, солітони, інстантони 171
Задачі до розділу III 177

Розділ IV. Вторинне квантування полів **179**
§ 14. Постулати та загальні принципи квантування 179
14.1. Для чого потрібне вторинне квантування? Операторна природа функцій поля 179
14.2. Представлення Шредінгера, Гейзенберга і взаємодії 180
14.3. Постулати квантування 182
14.4. Релятивістське рівняння Гейзенберга для квантованих полів 190
14.4.1. Рівняння Гейзенберга для вільного скалярного поля 191
14.5. Фізичний зміст додатно- і від'ємно-частотних розв'язків операторів вільного поля 194
§ 15. Квантування вільного скалярного поля 195
15.1. Комутаційні (переставні) співвідношення. Переставні функції 195
15.2. Комплексне скалярне поле 198
15.3. Операторні вирази для динамічних інваріантів 198
§ 16. Квантування спінорного поля 199
16.1. Переставні функції фермі-полів 199
16.2. Динамічні інваріанти вільного спінорного поля 201
§ 17. Квантування векторного та електромагнітного полів. Особливості квантування калібрувальних полів 201
17.1. Квантування векторного комплексного поля 201
17.2. Квантування електромагнітного поля 206
17.2.1. Особливості та труднощі квантування електромагнітного поля 206
17.2.2. Формалізм Гупти—Блейлера 209
17.2.3. Канонічний метод квантування 212
17.3. Про квантування калібрувальних полів 214
§ 18. CPT. Спін і статистика 215
18.1. Перетворення зарядового спряження 216
18.2. Перетворення просторової інверсії 217
18.3. Перетворення часової інверсії 218
18.4. CPT-теорема і зв'язок спіну та статистики 221
18.5. Доведення теореми Паулі 223
§ 19. Представлення комутаційних та антикомутаційних співвідношень 225
19.1. Загальна структура простору Фока 225
19.2. Представлення комутаційних співвідношень вільного дійсного скалярного поля 226
19.2.1. Простір Фока вільних скалярних бозонів 226

19.2.2. Оператори народження і знищення у просторі Фока. Імпульсне представлення . . . 227
19.2.3. Вільний вакуум. Циклічність вакууму. Множина експоненціальних векторів . . . 231
19.2.4. Побудова представлень комутаційних співвідношень для комплексного скалярного поля . . . 233
19.2.5. Побудова представлень комутаційних співвідношень у конфігураційному просторі. Релятивістська інваріантність вільного поля . . . 235
19.3. Представлення антикомутаційних співвідношень спінорного поля . . . 237
19.3.1. Представлення антикомутаційних співвідношень операторів народження і знищення ферміона і антиферміона . . . 237
19.3.2. Представлення антикомутаційних співвідношень у конфігураційному просторі . . . 240
19.4. Простір станів вільного електромагнітного поля . . . 241
19.5. Простір чисел заповнення . . . 245
§ 20. Функції Гріна . . . 248
20.1. Функції Гріна скалярного поля . . . 248
20.2. Функції Гріна спінорних, векторних та електромагнітного полів . . . 251
20.3. Хронологічний добуток і функції Гріна . . . 252
20.4. Теореми Віка . . . 253
20.4.1. Теорема Віка для нормальних добутків . . . 253
20.4.2. Теорема Віка для хронологічного добутку . . . 255
20.4.3. Узагальнена теорема Віка . . . 257
20.5. Операція множення і регуляризація узагальнених функцій . 258
20.6. N-точкові функції Гріна вільних полів . . . 259
Задачі до розділу IV . . . 260

Розділ V. Квантова теорія взаємодіючих полів. Загальні проблеми **261**

§ 21. Побудова квантових взаємодіючих полів і проблеми такої побудови 261
21.1. Формальна побудова квантового поля . . . 261
21.2. Математичні проблеми побудови квантового взаємодіючого поля . . . 264
§ 22. Теорія розсіяння. Матриця розсіяння . . . 267
22.1. Квантовий опис розсіяння. Визначення оператора розсіяння 268
22.2. Формальна побудова оператора розсіяння методом теорії збурень . . . 272
22.3. Основні властивості S-оператора . . . 275
22.3.1. Нормальна форма оператора S . . . 275

22.3.2. Інваріантність матриці розсіяння відносно перетворень Лоренца і перетворень зарядового спряження 278
22.3.3. Унітарність оператора розсіяння 279
22.3.4. Закон збереження енергії 280
22.3.5. Матричні елементи S-оператора і амплітуда розсіяння . . . 282
22.4. Діаграми Фейнмана 285
22.4.1. Діаграми Фейнмана для S-оператора 286
22.4. Діаграми Фейнмана для коефіцієнтних функцій S-оператора 287
22.4.3. Діаграми Фейнмана для матричних елементів S-оператора 288
22.5. Ефективні перерізи і матриця розсіяння 291
22.5.1. Класичні уявлення 292
22.5.2. Квантовий випадок 294
§ 23. Рівняння для коефіцієнтних функцій S-матриці 295
23.1. Оператори народження і знищення зовнішніх ліній діаграм Фейнмана 296
23.2. Рівняння резольвентного типу 299
23.3. Рівняння еволюційного типу 302
§ 24. Функції Гріна та їх зв'язок із S-оператором 303
24.1. Функції Гріна і S-матриця в представленні взаємодії 304
24.2. Рівняння Швінгера для функцій Гріна 306
24.3. Про зв'язок функцій Гріна з коефіцієнтними функціями S-оператора розсіяння 308
24.4. Рівняння для функцій Гріна в функціональних похідних . . 309
24.5. Рівняння для зв'язних функцій Гріна 311
24.6. Рівняння для сильно зв'язних функцій Гріна. Рівняння Дайсона 314
24.7. Спектральне представлення двохточкової функції Гріна (представлення Челлена – Леманна) 321
§ 25. Загальна теорія усунення розбіжностей 324
25.1. Примітивно-розбіжні діаграми. Виділення розбіжностей методом Паулі – Вілларса 325
25.2. Індекси розбіжності діаграм Фейнмана 331
25.3. Усунення розбіжностей методом R-операції Боголюбова – Парасюка (БП) 334
25.4. R-операція і контрчлени в лагранжиані 339
25.5. Класифікація взаємодій: перенормовні та неперенормовні теорії 344
25.6. Зв'язок контрчленів з перенормуванням основних констант теорії 346
25.7. Еквівалентні види перенормувань 352
§ 26. Метод континуальних інтегралів в теорії квантованих полів 355
26.1. Поняття та основні формули континуального інтегрування . 356

26.2. Формалізм інтегралів Фейнмана (інтегралів за траекторіями) у квантовій механіці . . . 364
26.3. Формалізм інтегралів Фейнмана для систем зі зв'язками . . . 369
26.4. Континуальний інтеграл і теорія збурень у моделях самовзаємодіючих скалярних полів . . . 372
26.5. Континуальний інтеграл для фермі-полів . . . 375
Задачі до розділу V . . . 378

Розділ VI. Аксіоматична та Евклідова теорії поля 381
§ 27. Аксіоматика Вайтмана . . . 382
27.1. Аксіоми Вайтмана для нейтрального скалярного поля . . . 382
27.2. Функції Вайтмана та їх властивості . . . 384
27.3. Теорема реконструкції: відновлення квантової теорії поля за функціями Вайтмана . . . 386
§ 28. Про інші аксіоматичні підходи . . . 388
28.1. Теорія розсіяння Хаага–Рюеля (ТРХР) . . . 388
28.2. Аксіоматика Леманна–Симанзика–Циммермана (ЛСЦ) . . . 392
28.3. Аксіоматичний підхід Боголюбова–Медвєдєва–Поліванова (БМП) . . . 394
§ 29. Евклідова теорія поля . . . 397
29.1. Аналітичне продовження амплітуд Фейнмана . . . 398
29.2. Оператори вільних евклідових полів . . . 401
29.2.1. Дійсне скалярне поле . . . 401
29.2.2. Евклідові фермі-поля . . . 402
29.3. Евклідові функції Гріна вільного скалярного поля . . . 404
29.4. Евклідові функції Гріна взаємодіючих полів . . . 405
§ 30. Евклідова аксіоматика . . . 409
30.1. Аналітичне продовження узагальнених функцій Вайтмана . 410
30.2. Евклідові функції Гріна. Аксіоми Остервальда–Шрадера . . 411
30.3. Реконструкція теорії Вайтмана . . . 414
Задачі до розділу VI . . . 416

Розділ VII. Квантова теорія калібрувальних полів 419
§ 31. Квантова електродинаміка (КЕД) . . . 419
31.1. Квантування взаємодіючого електромагнітного поля . . . 420
31.1.1. Формалізм Гупти–Блейлера для взаємодіючого електромагнітного поля . . . 420
31.1.2. Квантування взаємодіючого електромагнітного поля в кулонівській калібровці . . . 421
31.1.3. Фотонний пропагатор і умови калібрування . . . 423
31.2. S-матриця в КЕД . . . 425
31.2.1. Теорія збурень. Діаграми Фейнмана . . . 425

31.2.2. Коефіцієнтні функції S-матриці в термінах операторів народження і знищення ліній фейнманівських діаграм 428
31.2.3. Теорема Фаррі 430
31.2.4. Умова калібрувальної інваріантності для коефіцієнтних функцій S-оператора 433
31.3. Рівняння для функцій Гріна і коефіцієнтних функцій S-матриці 434
31.3.1. Рівняння Швінгера 434
31.3.2. Система рівнянь для власне енергетичних і вершинної частин функцій Гріна 435
31.4. Розбіжності в КЕД і методи їх усунення 438
31.4.1. Примітивно розбіжні діаграми та їх регуляризація 439
31.4.2. Перенормування маси і заряду електрона (позитрона) . . . 443
31.5. Спектральні представлення 2-точкових функцій Гріна 446
§ 32. Квантування калібрувальних полів 450
32.1. Континуальний інтеграл для функцій Гріна у КЕД (кулонівська калібровка) 452
32.2. Коваріантні калібровки: метод Попова–Фаддєєва–Де Вітта . 455
32.3. Коваріантне квантування електромагнітної взаємодії 458
32.3.1. Зв'язок між різними калібровками 459
32.3.2. Тотожність Уорда 461
32.4. Квантування полів Янга–Міллса, що взаємодіють з полями матерії 462
32.5. Дýхи Фаддєєва–Попова. Діаграмна техніка 466
32.6. БРСТ–інваріантність 470
§ 33. Основні моделі взаємодій квантованих полів 473
33.1. Перенормування калібрувальних теорій 473
33.2. Про маси глюонів і спонтанне порушення симетрії 482
33.2.1. Зв'язок радіуса взаємодії та маси обмінних бозонів 482
33.2.2. Чи перенормовні теорії з відмінною від нуля масою обмінних бозонів? 484
33.2.3. Спонтанне порушення U(1) симетрії 485
33.2.4. Спонтанне порушення локальної $SU(N)$ симетрії 487
33.3. Моделі взаємодій елементарних частинок 489
33.3.1. Сильна взаємодія. Модель КХД 490
33.3.2. Слабкі та електрослабкі взаємодії 492
Задачі до розділу VII 493
Вказівки до розв'язків задач 495
Список літератури 498
Предметний покажчик 511