Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Олександр Пришляк

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА

ГЕОМЕТРІЯ

УДК
ББК

<u>О.Пришляк</u>

Диференціальна геометрія : Курс лекцій. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004**. –** 68 **с.**

ISBN

Посібник написано на основі нормативних курсів, які автор читав на механіко-математичному факультеті й призначено для студентів, які навчаються за фахом "математика" чи "механіка".

Рецензенти В.В.Шарко, д-р фіз.-мат. наук,
А.П.Петравчук, д-р фіз.-мат. наук

Затверджено вченою радою
механіко-математичного факультету
17 березня 2003 року

ISBN

ВСТУП

Даний курс лекцій розрахований на студентів механіко-математичного факультету. Як випливає з назви, основним завданням курсу є вивчення геометричних об'єктів за допомогою похідних. Перші дві частини (теорії кривих та поверхонь в тривимірному просторі) відносяться до класичної диференціальної геометрії. В наступних частинах викладаються основні поняття загальної топології, теорії многовидів та тензорного числення.

В кінці кожної лекції наводиться список номерів задач з [4], рекомендованих до розв'язання на практичних заняттях. Для лекцій по многовидах задачі вказані з [9].

ТЕОРІЯ КРИВИХ.

1. Криві в $\mathbf{R}^n$. Дотичний вектор.

Вектор-функцією називається відображення $\boldsymbol{r}:U\to V$ деякої множини U в векторний простір V.

Ми будемо розглядати такі відображення у яких U – "гарна" підмножина прямої $\mathbf{R}$. "Гарними" вважаються такі множини: $[a, b]$, (a, b), $(-\infty, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, де $a<b$.

Нехай $V = \mathbf{R}^n$. Зафіксуємо систему координат $(x_1,\ldots, x_n)$ і метрику d:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\,.$$

Неперервною кривою в $\mathbf{R}^n$ називається неперервна вектор-функція $\boldsymbol{r}:U\to\mathbf{R}^n$, де U – гарна підмножина прямої $\mathbf{R}$. Образ кривої називається *лінією*.

Будемо задавати криві *векторно-параметричним* рівнянням:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

або *параметричними* рівняннями:

$$x_1 = x_1(t),$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = x_n(t),$$

де *параметр* $t\in U$.

Криві описують рух деякої точки, а лінії є траєкторіями руху. Параметр t є часом, $\boldsymbol{r}(t)$ – радіус-вектором точки, а $x_1(t),\ldots, x_n(t)$ – його координатами.

Приклад. Крива $\boldsymbol{r} = \{t, t^2\}$ задає параболу $y = x^2$ на площині.

Очевидно, що образом кривої може бути точка (вироджена крива). Як показав Пеано образом кривої може бути квадрат. Щоб позбутися таких кривих, на криві накладають ряд додаткових умов, які будуть розглянуті далі.

Неперервна крива називається *гладкою* (класу C^k), якщо всі координатні функції $x_i(t)$ є гладкими (класу C^k).

Дотичним вектором до гладкої кривої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в точці t називається вектор

$$\boldsymbol{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \{x'_1(t), \dots, x'_n(t)\}.$$

Точка $t \in U$ називається *регулярною*, якщо $\boldsymbol{r}\,'(t) \neq 0$ і *особливою*, якщо $\boldsymbol{r}\,'(t) = 0$. Гладка крива, всі точки якої регулярні, називається *регулярною*.

Приклад. Крива $\boldsymbol{r} = \{t, t^2\}$ - регулярна, а крива $\boldsymbol{r} = \{t^3, t^2\}$ має особливу точку $t = 0$ (точку "загострення").

Нехай $U, V \subset \mathbf{R}$ **–** "гарні" підмножини прямої. Взаємно-однозначне відображення $\varphi: U \to V$ називається *гомеоморфізмом*, якщо φ та φ^{-1} – неперервні, і *дифеоморфізмом*, якщо φ та φ^{-1} – гладкі (диференційовані). Зауважимо, що відображення $\varphi:[a,b] \to [a_1,b_1]$ буде гомеоморфізмом, якщо воно є неперервним, монотонним і $\varphi(a) = a_1$, $\varphi(b) = b_1$ або $\varphi(a) = b_1$, $\varphi(b) = a_1$. Відображення φ буде дифеоморфізмом, якщо 1) для кожного $t \in U$ існує $\varphi'(t) \neq 0$ і 2) $\varphi(a) = a_1$, $\varphi(b) = b_1$ або $\varphi(a) = b_1$, $\varphi(b) = a_1$.

Дві неперервні (гладкі) криві $\boldsymbol{r}$: $U \to \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{r}_1$: $U_1 \to \mathbf{R}^n$ називаються *еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм (дифеоморфізм) $\varphi: U \to U_1$, такий, що $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1(\varphi(t))$.

Клас еквівалентних кривих називається *непараметризованою* кривою.

Інколи непарематривозанні криві називають просто кривими, а відображення $\boldsymbol{r}$: $U \to \mathbf{R}^n$ їх параметризаціями. Отже, (непараметризована) крива - це клас еквівалентних параметризацій.

Зауважимо, що регулярність кривої не залежить від параметризації, а дотичний вектор множиться на скаляр $\varphi'(t)$ при зміні параметризації.

Вправа. Чи вірно те, що дві параметризації регулярних кривих еквівалентні, якщо вони мають однакові образи – лінії?

2. Дотична. Довжина кривої, натуральна параметризація.

Нехай $\boldsymbol{r}$: $U \to \mathbf{R}^n$ - регулярна крива.

Дотичною в точці t_0 називається пряма, що проходить через $\boldsymbol{r}(t_0)$ і паралельна дотичному вектору $\boldsymbol{r}'(t_0)$. Її рівняння $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0) + \tau\, \boldsymbol{r}'(t_0)$, де τ - параметр.

При $n = 2$ пряма, що проходить через точку кривою і перпендикулярна до дотичного вектора в цій точці називається *нормаллю*. Якщо крива задана рівнянням $F(x, y) = 0$ і (x_0, y_0) - точка на кривій, то рівняння дотичної в цій точці має вигляд

$$F_x(x_0, y_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0)(y-y_0) = 0,$$

а рівняння нормалі

$$F_y(x_0, y_0)(x-x_0) - F_x(x_0, y_0)(y-y_0) = 0.$$

При $n = 3$ площина, що проходить через $\boldsymbol{r}(t_0)$ і перпендикулярна до $\boldsymbol{r}'(t_0)$ називається *нормальною площиною*. Рівняння дотичної

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Рівняння нормальної площини

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0)) = 0.$$

Нехай $\boldsymbol{r}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ – неперервна крива, $a = t_0<t_1<\ldots< t_m = b$ – розбиття відрізку $[a,b]$. Крива називається *спрямлюваною*, якщо існує границя

$$\lim_{\max|t_{i+1}-t_i|\to 0} \sum_{i=1}^{m-1} \left|\boldsymbol{r}(t_{i+1}) - \boldsymbol{r}(t_i)\right|.$$

Ця границя називається *довжиною* кривої $\boldsymbol{r}$. Для гладкої кривої ця границя завжди існує і може бути виражена інтегралом

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)|dt .$$

Вправа. Показати, що довжина дуги гладкої кривої не залежить від параметризації, тобто, однакова у еквівалентних кривих.

Нехай U – "гарна" підмножина прямої, $t_0\in U$ – фіксована точка, $\boldsymbol{r}$: $U\to\mathbf{R}^n$ – регулярна крива. Розглянемо функцію довжини s: $U\to\mathbf{R}$, яка задається умовами:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\bar{r}'(t)|dt \text{ , якщо } t\geq t_0, \text{ і } s(t) = -\int_{t}^{t_0} |\bar{r}'(t)|dt \text{ , якщо } t<t_0.$$

Оскільки крива регулярна, то $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|>0$. Отже відображення s є дифеоморфізмом між U та $s(U)$ і ми можемо ввести нову параметризацію кривої $\boldsymbol{r}$ з параметром s, підставивши в рівнянні кривої замість t функцію обернену до s. Так побудована параметризація називається *натуральною*, а параметр s – *натуральним* параметром.

Похідну за натуральним параметром будемо позначати крапкою зверху: $\dot{x} = \frac{dx}{ds}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{ds^2}$ і т.д.

Твердження. Нехай $0 \in U$. Параметризація регулярної кривої буде натуральною $\Leftrightarrow$ для кожного t дотичний вектор $\mathbf{r}'(t)$ одиничний.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $s = t$. З формули для довжини кривої при $s>0$: $s = \int\limits_0^s |\dot{\mathbf{r}}(s)| ds$. Звідки диференціюючи за s знаходимо: $1 = |\dot{\mathbf{r}}(s)|$. При $s<0$ доведення аналогічне.

Достатність. Якщо $|\mathbf{r}'(t)| = 1$, то $s = \int\limits_0^t |\bar{r}'(t)| dt = t$.□

3**. Довжини дуг в різних системах координат.Ріманова метрика.**

Нехай в тривимірному просторі задана регулярна крива $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$. Для квадрата диференціала довжини маємо

$$ds^2 = |\mathbf{r}'(t)|^2 dt^2 = (x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t))dt^2 = (x'(t)dt)^2+(y'(t)dt)^2+(z'(t)dt)^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$

В n-вимірному просторі в ПДСК

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2.$$

Нехай в $\mathbf{R}^n$ задано криволінійні координати $y_1, \ldots, y_n$, які пов'язані з декартовими координатами $x_1, \ldots, x_n$ формулами переходу:

$$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, \ldots, n.$$

Підставляючи їх в формулу для квадрата диференціала кривої маємо:

$$ds^2 = dx_1(y_1, \ldots, y_n)^2 + dx_2(y_1, \ldots, y_n)^2 + \ldots + dx_n(y_1, \ldots, y_n)^2 =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dy_j dy_k = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} dy_j dy_k$$

де $g_{jk} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$.

Вправа. Показати, що квадрат довжини кривої дорівнює для

1) полярних координат $ds^2 = d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2$,

2) циліндричних координат $ds^2 = d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2$,

3) сферичних координат $ds^2 = d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+\rho^2 cos\varphi^2 d\theta^2$.

Рімановою метрикою в області простору $\mathbf{R}^n$ називається додатна квадратична форма, що задана на дотичних векторах в кожній точці області і гладко залежить від точки.

Ріманова метрика в фіксованій системі координат $x_1,\ldots,x_n$ задається набором функцій g_{ij}, які утворюють симетричну додатно визначену матрицю (g_{ij}). При переході до нової системи координат $y_1,\ldots, y_n$ ріманова метрика змінюється за формулою

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_m}{\partial y_j} g_{km}.$$

За допомогою ріманової метрики g_{ij} задамо скалярний добуток векторів $\boldsymbol{a} = \{a_1,\ldots, a_n\}$ і $\boldsymbol{b} = \{b_1,\ldots, b_n\}$ формулою:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a_i b_j.$$

Тоді довжина дуги (a,b) кривої $x_i = x_i(t)$:

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i' x_j'}\, dt.$$

Часто ріманову метрику задають формулою

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Стандартна (*евклідова*) метрика має вигляд

$$ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2.$$

Проективна метрика (довжина дуги на площині xy знаходиться як довжина проекції цієї дуги на півсферу $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, $z<1$)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (xdy - ydx)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Гіперболічна метрика на півплощині $y>0$ (модель Хопфа)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Вправи. 1.1.2-6, 9; 1.2.1, 3, 4, 11, 25, 28-30. 1.3.2,4, 7, 8, 10-14, 18-20, 23, 27, 28, 32, 2.1.3, 4.

4. **Базис Серре-Френе. Формули Френе.**

Нехай $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ - гладка класу C^n крива в $\mathbf{R}^n$, у якої для кожного t вектори $\boldsymbol{r}'(t)$, $\boldsymbol{r}''(t),\ldots$, $\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)$ лінійно незалежні. Позначимо через $\tau_1(t),\ldots$, $\tau_{n-1}(t)$ сукупність векторів, що отримана з $\boldsymbol{r}'(t)$, $\boldsymbol{r}''(t),\ldots$, $\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)$ в результаті процесу ортогоналізації Грама-Шмідта, а $\tau_n(t)$– одиничний вектор, що ортогональний до $\tau_1(t),\ldots$, $\tau_{n-1}(t)$ і такий, що базис $\tau_1(t),\ldots$, $\tau_n(t)$ має додатну орієнтацію.

Означення. Сукупність векторів $\tau_1(t),\ldots$, $\tau_n(t)$ називається *супроводжуючим базисом Френе* кривої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в точці t.

Нехай $t = s$ – натуральний параметр. Оскільки $\tau_1(s),\ldots$, $\tau_n(s)$ - базис, то кожна з похідних $d\tau_i/ds$ розкладається за цім базисом:

$$\dot{\tau}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tau_k .$$

Помноживши цю рівність на τ_k маємо: $a_{ik} = \left(\dot{\tau}_i, \tau_k\right)$.

З ортогональності базисних векторів випливає, що $(\tau_i,\tau_k) = \delta_i^k$ – символ Кронекера. Після диференціювання по s отримаємо: $a_{ik}+a_{ki} = 0$.

З побудови $\tau_i \in$л.о.$(\boldsymbol{r}',\ldots,\boldsymbol{r}^{(i)})$ і $\boldsymbol{r}^{(i)} \in$л.о.$(\tau_1,\ldots,\tau_i)$. Тоді похідна $d\tau_i/ds \in$л.о.$(\boldsymbol{r}',\ldots,\boldsymbol{r}^{(i+1)})$ = л.о.$(\tau_1,\ldots,\tau_{i+1})$. Отже $a_{ik} = 0$ при $k>i+1$.

Позначивши $k_i = a_{i(i+1)}$ отримуємо рівності:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\tau_1}{ds} = k_1\tau_2,\\
&\frac{d\tau_2}{ds} = -k_1\tau_1 + k_2\tau_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\tau_i}{ds} = -k_{i-1}\tau_{i-1} + k_i\tau_{i+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\tau_n}{ds} = -k_{n-1}\tau_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ці рівності називаються *формулами Френе*. Коефіцієнти $k_1,\ldots$, k_{n-1} називаються *кривинами* кривої. З побудови базису Френе випливає, що $k_1>0$, …, $k_{n-2}>0$.

Теорема. *Нехай на гарній підмножині* U $(0\in U)$ *прямої* $\mathbf{R}$ *задані гладкі функції* $k_1 = k_1(s)>0$, …, $k_{n-2} = k_{n-2}(s)>0$, $k_{n-1} = k_{n-1}(s)$. *Тоді для любої точки* $\boldsymbol{r}_0\in\mathbf{R}^n$ *і ортонормованого базису* $\boldsymbol{e}_1,\ldots$, $\boldsymbol{e}_n$ *існує єдина регулярна крива*

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, *кривинами якої є функції* $k_1 = k_1(s)$, …, $k_{n-1} = k_{n-1}(s)$ *і така, що* $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$, $\tau_i(0) = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1,.., n$.

Доведення отримується застосуванням теореми про існування та єдність розв’язку системи диференціальних рівнянь до формул Френе.

Рівняння $k_1 = k_1(s), \ldots, k_{n-1} = k_{n-1}(s)$ називаються *натуральними рівняннями* кривої.

У випадку плоскої кривої ($n = 2$) базис Френе складається з двох векторів: $\tau = \tau_1 = \{dx/ds,\ dy/ds\}$ – одиничного дотичного вектора та перпендикулярного йому вектора нормалі $\nu = \tau_2 = \{-dy/ds,\ dx/ds\}$. Натуральне рівняння кривої має вигляд $k = k(s)$, де $k(s) = k_1(s)$ – кривина кривої.

Вправа. Використовуючи першу формулу Френе і переходячи до параметру t ($ds = |\boldsymbol{r}'|dt$), показати, що для плоскої кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Покажемо, як знаючи функцію кривини знайти параметричні рівняння плоскої кривої в явному вигляді. Нехай $x = x(s)$, $y = y(s)$ – шукані рівняння. Тоді $\tau = \{dx/ds,\ dy/ds\}$. Позначимо $\alpha(s)$ – кут між вектором $\tau(s)$ та віссю Ox. Через те що $|\tau| = 1$, $\tau = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$. Отже, $dx/ds = \cos\alpha$, $dy/ds = \sin\alpha$ і

$$x(s) = \int \cos\alpha(s)\,ds + C_1,$$

$$y(s) = \int \sin\alpha(s)\,ds + C_2.$$

Оскільки при натуральному параметрі $x'^2 + y'^2 = 1$, то $k = x'y'' - y'x'' = \alpha'\cos^2\alpha + \alpha'\sin^2\alpha = \alpha'$. Звідси

$$\alpha(s) = \int k(s)ds + C_3.$$

Зауважимо, що за рахунок вибору констант C_1 та C_2 ми можемо здійснити паралельний перенос кривої, а за рахунок вибору C_3 – її поворот.

Приклад. Плоска крива буде прямою $\Leftrightarrow k \equiv 0$ і колом $\Leftrightarrow k = \mathrm{const}$, $k \neq 0$.

5. Кривина і скрут

Розглянемо випадок просторової кривої ($n = 3$). Нехай $\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ – регулярна крива. Базис Френе складається з трьох векторів: одиничного дотичного вектора $\tau = \tau_1 = d\boldsymbol{r}/ds = \boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|$, вектора нормалі $\nu = \tau_2 = (d\tau/ds) / |d\tau/ds|$ та вектора бінормалі $\beta = \tau_3 = [\tau,\nu] = [\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''] / |[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'']|$.

Формули Френе мають такий вигляд

$$d\tau/ds = k\nu,$$
$$d\nu/ds = -k\tau + æ\beta,$$
$$d\beta/ds = -æ\nu.$$

Коефіцієнт k називається *кривиною*. З першої формули Френе ми бачимо, що він чисельно дорівнює швидкості обертання одиничного дотичного вектора: $k = |d\tau/ds|$.

Коефіцієнт æ називається *скрутом*. Його модуль дорівнює модулю швидкості обертання вектора бінормалі: $|æ| = |d\beta/ds|$.

Наступною нашою метою буде отримання формул для кривини і скруту при довільній параметризації кривої. При переході від натуральної до довільної параметризаціїї користуємося тим, що $ds = |\boldsymbol{r}'|dt$.

Зауважимо, що $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|r'|} = \dfrac{d}{dt}((r', r')^{-1/2}) = -\dfrac{(r', r'')}{|r'|^3}$.

$$k = \left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}\right)\right| = \left|\frac{\boldsymbol{r}''|\boldsymbol{r}'|^2 - \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')}{|\boldsymbol{r}'|^4}\right| =$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^3}\left|\boldsymbol{r}''|\boldsymbol{r}'| - \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'')\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'|^3}\left|\boldsymbol{r}''|\boldsymbol{r}'| - \boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r}''|\cos\alpha\right| = \frac{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}''|\sin\alpha}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{|[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']|}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

Передостання рівність випливає з того, що вектори $\boldsymbol{r}''|\boldsymbol{r}'|$ і $\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r}''|\cos\alpha$, відкладені від однієї точки є гіпотенузою і катетом прямокутного трикутника, а їх різниця – іншим катетом

$$æ = \left(\frac{d\nu}{ds}, \beta\right) = \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\frac{d\tau}{ds}\right), \beta\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{d^2\tau}{ds^2}, \beta\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}, \frac{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']}{|[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']|}\right) = \frac{1}{k|\boldsymbol{r}'|^3}\left(\boldsymbol{r}''', \frac{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']}{|[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']|}\right) = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']^2}$$

Отже

$$k = \frac{|[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']|}{|\boldsymbol{r}'|^3},$$

$$æ = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']^2}.$$

З означення, а також з останньої формули, видно, що скрут визначений тільки в тих точках, де кривина $k \neq 0$.

Вправа. Довести, що регулярна крива лежить на прямій $\Leftrightarrow$ її кривина $k \equiv 0$.

Вправа. Регулярна крива з ненульовою кривиною буде плоскою $\Leftrightarrow$ її скрут æ $\equiv 0$.

Вправа.* Довести, що для гладкої замкнутої кривої

$$\int(\mathbf{r}dk + æ\beta ds) = 0.$$

Вправа.* Довести, що крива $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ($k \neq 0$, æ $\neq 0$) лежить на сфері радіуса r, у тому і тільки тому випадку, якщо справедливе співвідношення

$$r^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(æk)^2}\right).$$

Вправи. 1.3.21, 22, 1.4.1, 3, 5*, 6, 7, 11, 12, 30, 31, 47.

ЛЕКЦІЯ 3.

6. Лінії, що задані загальними рівняннями. Особливі точки.

Іноді лінії, що розглядаються задаються як множина розв'язків рівняння $F(x, y) = 0$ на площині, як перетин поверхонь $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ в тривимірному просторі і т.д.

Нехай $F_1, \ldots, F_{n-1}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – гладкі функції, M – множина розв'язків системи

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Теорема про неявну функцію, що доводиться в курсі аналізу, стверджує, що якщо $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n-1} \neq 0$ на M, то існують гладкі функції $x_1 = x_1(t)$, …, $x_{n-1} = x_{n-1}(t)$, такі, що

$$F_i(x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t), t) = 0,$$

тобто M є гладкою кривою.

За допомогою перейменування координат легко показати, що M буде гладкою кривою, якщо

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, j=1}^{n-1, n} = n - 1.$$

Точки M в яких виконується ця рівність називаються *регулярними*, а в яких не виконується – *особливими*.

Якщо $x_1 = x_1(t)$, …, $x_n = x_n(t)$ – параметричне рівняння кривої M, то взявши похідну складної функції

$$(F_i(x_1(t),...,x_n(t))' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} x_j'(t) = 0$$

в регулярній точці, бачимо, що кожний з векторів $\left\{\frac{\partial F_i}{\partial x_1},....,\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right\}$, $i = 1,\ldots,n$, перпендикулярний до дотичного вектору $\{x_1'(t),\ldots, x_n'(t)\}$.

У випадку плоскої кривої $F(x,y) = 0$, особливі точки є розв'язками системи

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ F_x'(x,y) = 0, \\ F_y'(x,y) = 0. \end{cases}$$

В регулярній точці вектор $\boldsymbol{N} = \{F_x',\ F_y'\}$ є нормальним до кривої, а вектор $\{F_y', -F_x'\}$ – дотичним.

Вправа. Знайти кривину в регулярній точці кривої $F(x,y) = 0$.

Якщо крива є перетином поверхонь $F(x,\ y,\ z) = 0$ та $G(x,\ y,\ z) = 0$, то дотичним вектором в регулярній точці є векторний добуток

$$[\{F_x',\ F_y',\ F_z'\},\{G_x',\ G_y',\ G_z'\}].$$

7. Дотикання кривих. Огинаюча. Еволюта та евольвента.

Кажуть, що криві дотикаються у їх спільній точці, якщо в цій точці їх дотичні збігаються. Дві криві $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(s)$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(s)$ мають дотик порядку n в їх спільній точці s_0, якщо

$$\frac{d^k \mathbf{r}_1}{ds^k}(s_0) = \frac{d^k \mathbf{r}_2}{ds^k}(s_0),\ 0 \le k \le n,\ \ \frac{d^{n+1} \mathbf{r}_1}{ds^{n+1}}(s_0) \ne \frac{d^{n+1} \mathbf{r}_2}{ds^{n+1}}(s_0).$$

Отже в регулярній точці дотична має дотик порядку 1 з кривою.

Дотикаючим колом називається коло, порядок дотику якого не менший за 2. Його кривина дорівнює кривині кривої k. Значить його радіус дорівнює $1/k$ і називається радіусом кривини кривої. Центр кола лежить на нормалі до кривої.

Еволютою кривої $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ називається геометричне місце центрів кривини. Її рівняння

$$\rho(s) = \boldsymbol{r}(s)+\nu(s)/k(s).$$

Евольвентою кривої γ називається крива, для якої γ є еволютою. Рівняння евольвент

$$\rho(s) = \boldsymbol{r}(s) + (C - s)\tau(s).$$

Огинаючою сім'ї плоских кривих називається крива, яка в кожній своїй точці дотикається однієї з кривих сім'ї. Будемо також вимагати, щоб огинаюча була максимальною за включенням кривою, що задовольняє цій властивості і локально не співпадала з жодною дугою однієї кривої сім'ї.

Теорема. *Якщо сім'я задана рівнянням $F(x, y, C) = 0$, то її огинаюча задовольняє системі рівнянь*

$$F(x, y, C) = 0,$$
$$F_C(x, y, C) = 0.$$

Доведення. З означення огинаючої випливає, що кожна точка огинаючої лежить на одній з кривих сім'ї, а отже задовольняє першому рівнянню. Крім того локально в якості параметра огинаючої можна вибрати C. Тоді взявши похідну за C від лівої частини рівності $F(x(C), y(C), C) = 0$ і враховуючи перпендикулярність вектора нормалі кривої сім'ї $\{F_x,F_y\}$ до дотичної огинаючої (x', y') отримаємо друге рівняння системи.

Приклад. Еволюта плоскої кривої є огинаючою сім'ї нормалей кривої. Для кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$ її сім'я нормалей задається рівнянням

$$x'(C)(x - x(C)) + y'(C)(y - y(C)) = 0.$$

Вправи. (КР) 2.1.37-47, 2.2.1-11, 2.3.1-6, 2.3.19-28. 2.5.21

ЛЕКЦІЯ 4.

II. ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ

1. Поверхні. Дотична площина та вектор нормалі.

Підмножина $F\subset\mathbf{R}^3$ називається *елементарною поверхнею*, якщо існує гомеоморфізм $\boldsymbol{r}$: $U\to F$, де U - відкрита (і опукла) підмножина площини.
Гомеоморфізм $\boldsymbol{r}$ називається параметризацією поверхні. Нехай u, v - прямокутні декартові координати на площині, а x, y, z - в $\mathbf{R}^3$. Тоді параметричні рівняння поверхні мають вигляд $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ або

$$x = x(u,v),$$
$$y = y(u,v),$$
$$z = z(u,v).$$

`Підмножина $F\subset\mathbf{R}^3$ називається *поверхнею*, якщо $\forall x\in F$ $\exists$ відкрита множина $W\subset\mathbf{R}^3$: $x\in W$ і $F\cap W$ - елементарна поверхня. При цьому якщо $\boldsymbol{r}$ - параметризація $F\cap W$, то $\boldsymbol{r}^{-1}$ називається локальною системою координат в точці x.

Приклади. 1. Прямий гелікоїд або гвинтова поверхня.

$$x = u\cos v,$$
$$y = u\sin v,$$
$$z = hv.$$

2. Поверхні обертання.

$$x = x(u)\cos v,$$
$$y = x(u)\sin v,$$
$$z = z(u).$$

3. Лінійчасті поверхні.

$$\boldsymbol{r} = \rho(u) + \sigma(u)\, v.$$

Лінія, що лежить на поверхні, задається параметричними рівняннями:

$$u = u(t),$$
$$v = v(t).$$

Її рівняння в просторі $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$.

Лінії, що задаються рівнянням $u = \text{const}$ або $v = \text{const}$ є координатними. Дотичні вектори до них - вектори $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$. Точка на поверхні називається *регулярною*, якщо в ній вектори $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ не колінеарні. Інакше точка називається *особливою*. Поверхня, всі точки якої регулярні, називається *регулярною*. Надалі, якщо не сказано протилежне, всі поверхні вважаються регулярними.

Дотичним вектором до поверхні називається дотичний вектор до лінії на поверхні. Множина всіх дотичних векторів в даній точці $p = (u_0,\ v_0)$ називається *дотичним простором* в цій точці і позначається T_p.

Теорема. *Дотичний простір до регулярної поверхні є векторним простором з базисом* $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$.

Доведення випливає з формули

$$\boldsymbol{r}' = (\boldsymbol{r}(u(t), v(t))' = u'(t)\,\boldsymbol{r}_u + v'(t)\,\boldsymbol{r}_v.$$

Наслідок. Об'єднання всіх дотичних в даній точці $(u_0,\ v_0)$ є площиною. Ця площина називається *дотичною площиною*. Її рівняння:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(u_0, v_0), \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0), \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)) = 0,$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & x'_v(u_0, v_0) & x'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор, з початком в точці (u_0, v_0) і перпендикулярний до дотичної площини в цій точці називається вектором нормалі. Вектор

$$\overline{m} = \frac{[\overline{r}_u, \overline{r}_v]}{|[\overline{r}_u, \overline{r}_v]|}$$

є одиничним вектором нормалі.

Якщо в точці x задано дві параметризації $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u_1,v_1)$ і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u_2,v_2)$, то відображення $\boldsymbol{r}_2^{-1}\boldsymbol{r}_1$: $(u_1,v_1)\to(u_2,v_2)$ є гомеоморфізмом. Воно задається за допомогою двох функцій: $u_2 = u_2(u_1,v_1)$, $v_2 = v_2(u_1,v_1)$.

Ці функції називають *функціями переходу* від першої системи координат до другої. Матриця $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix}$ називається *матрицею Якобі*, а її визначник - *якобіаном*.

Поверхня називається *орієнтовною*, якщо її можна представити у вигляді об'єднання елементарних поверхонь з такими параметризаціями, що якобіани всіх функцій переходу в усіх точках де вони визначенні є додатними. Упорядкована пара векторів $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ задає орієнтацію кожного дотичного простору орієнтованої поверхні. Ця орієнтація називається орієнтацією поверхні. Орієнтацію поверхні можна задати за допомогою вектора $\boldsymbol{m}$.

2. Перша квадратична форма. Ізометричні поверхні.

Нехай $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ -регулярна поверхня, $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t\in[a,b]$ - крива на ній. Знайдемо її довжину

$$s = \int_a^b |(\overline{r}(u(t),v(t)))'|\,dt = \int_a^b \sqrt{(\overline{r}_u u' + \overline{r}_v v')^2}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\overline{r}_u^2 u'^2 + 2\overline{r}_u \overline{r}_v u'v' + \overline{r}_v^2 v'^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\overline{r}_u^2 du^2 + 2\overline{r}_u \overline{r}_v du dv + \overline{r}_v^2 dv^2}\,.$$

Першою квадратичною формою поверхні називається вираз

$$I = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

в якому

$$E = \bar{r}_u^2,$$
$$F = \bar{r}_u \bar{r}_v,$$
$$G = \bar{r}_v^2,$$

- коефіцієнти цієї форми.

Легко бачити, що перша квадратична форма є рімановою метрикою на площині з координатами $u^1 = u$, $u^2 = v$.

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du^i du^j,$$

де $g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$.

Перша квадратична форма може бути використана для підрахування кутів між кривими на поверхні. Нехай криві на поверхні $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ і $u = u_2(\tau)$, $v = v_2(\tau)$ перетинаються в точці $(u_0, v_0) = (u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(\tau_0), v_2(\tau_0))$. Тоді кут α між ними, що дорівнює куту між дотичними векторами, може бути знайдений з формули

$$\cos\alpha = \frac{\bar{r}_1'\bar{r}_2'}{|\bar{r}_1'|\cdot|\bar{r}_2'|} = \frac{(\bar{r}_u u_1' + \bar{r}_v v_1')(\bar{r}_u u_2' + \bar{r}_v v_2')}{|(\bar{r}_u u_1' + \bar{r}_v v_1')|\cdot|(\bar{r}_u u_2' + \bar{r}_v v_2')|} =$$
$$= \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\sqrt{Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2}}.$$

В курсі математичного аналізу доводиться, що площа поверхні $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ знаходиться за формулою.

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv\ .$$

Ізометрія – це таке гладке бієктивне відображення між поверхнями, яке зберігає довжини дуг кривих. Поверхні називаються ізометричними, якщо між ними існує ізометрія. Оскільки перша квадратична форма *I=ds*^{2}, то справедливе

Твердження. Ізометрія зберігає першу квадратичну форму поверхні.

Вправи. 3.1.(1-5), 6, 10, 11, 17-19, 21, 24, 45-50, 62-65. 3.3.2-5, 10-13, 16*, (20, 22).

ЛЕКЦІЯ 5.

3. Друга квадратична форма, нормальна кривина.

Нехай $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ - регулярна поверхня, $p = \boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ - точка на поверхні.

Нормальною площиною в точці p називається площина, що проходить через p і містить вектор нормалі $\boldsymbol{m}$ в цій точці. Вона залежить від дотичного вектора, через який проходить і задається відношенням його координат $u':v' = du:dv$.

Крива, що отримана в результаті перетину нормальної площини і поверхні, називається *нормальним перерізом*. За означенням вектор нормалі перпендикулярний нормальному перерізу. Виберемо в нормальній площині базис так, що вектор нормалі нормального перерізу $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{m}$. Кривина нормального перерізу (як кривої на площині у цьому базисі) називається *нормальною кривиною*. Нормальну кривину будемо позначати $k_{\text{н}}$. Знайдемо її

$$k_{\text{н}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\bar{\nu} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\bar{m} = \frac{(d(d\bar{r}),\bar{m})}{ds^2} = \frac{(d(\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv),\bar{m})}{ds^2} =$$

$$= \frac{(\bar{r}_{uu}du^2 + 2\bar{r}_{uv}dudv + \bar{r}_{vv}dv^2 + \bar{r}_u d^2u + \bar{r}_v d^2v, \bar{m})}{ds^2} =$$

$$= \frac{(\bar{r}_{uu},\bar{m})du^2 + 2(\bar{r}_{uv},\bar{m})dudv + (\bar{r}_{vv},\bar{m})dv^2}{ds^2}.$$

Вираз

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

де

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{m},\ M = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{m},\ N = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{m},$$

називається *другою квадратичною формою* поверхні.

Отже,

$$k_{\text{н}} = \frac{II}{I}.$$

4. Головні кривини. Індикатриса Дюпена. Гаусова та середня кривини.

Нехай $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ - регулярна поверхня, $p = \boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ - точка на поверхні. Розглянемо всі нормальні кривини $k_{\text{н}}$ в цій точці. З теорем мат. аналізу або загальної топології випливає, що існують скінчені екстремальні значення $k_{\text{н}}$. Позначимо $k_1 = min\, k_{\text{н}}$, $k_2 = max\, k_{\text{н}}$. Ці кривини називаються *головними кривинами*, а відповідні їм напрямки - *головними напрямками*.

Індикатриса Дюпена - це крива в дотичній площині, що утворена кінцями дотичних векторів, відкладених від точки дотику, модуль яких дорівнює $\frac{1}{\sqrt{|k_н|}}$, де $k_н$ - нормальна кривина, що визначається напрямком цього вектора. Якщо x, y -координати точки дотичної площини в базисі $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, то для точок індикатриси Дюпена

$$|x\boldsymbol{r}_u+y\boldsymbol{r}_v| = \sqrt{Ex^2+2Fxy+Gy^2} = \frac{1}{\sqrt{|k_н|}} = \sqrt{\frac{Ex^2+2Fxy+Gy^2}{|Lx^2+2Mxy+Ny^2|}}.$$

Звідси отримаємо рівняння індикатриси Дюпена

$$|Lx^2+2Mxy+Ny^2| = 1.$$

Індикатриса Дюпена - крива 2-го порядку або об'єднання двох таких кривих. При цьому головні напрямки індикатриси Дюпена збігаються з головними напрямками поверхні.

Гаусовою (або *повною*) *кривиною* поверхні називається добуток головних кривин

$$K = k_1k_2.$$

Середньою кривиною називається середнє арифметичне головних кривин

$$H = \frac{k_1+k_2}{2}.$$

За теоремою Вієта головні кривини є розв'язками квадратного рівняння

$$k^2 - 2Hk + K = 0.$$

Точки, в яких $k_1 = k_2 \neq 0$, називаються *сферичними*, а в яких $k_1 = k_2 = 0$ - точками *сплющення*.

Нехай $k_1 \neq k_2$. Позначимо $t = \frac{du}{dv}$. Тоді з формули для нормальної кривини

$$(Et^2+2Ft+G)k_н = Lt^2+Mt+N, \text{ або}$$

$$(Ek_н-L)t^2+2(Fk_н-M)t+Gk_н-N = 0. \qquad (*)$$

У лінії 2-го порядку (індикатриси Дюпена) два головних напрямки, один з яких відповідає k_1, а інший - k_2. Іншим $k_н$ відповідає по два напрямки (значень t). Отже в рівнянні (*) $k_н$ є головною кривиною, а t задає головний напрямок, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$$4D = (Fk-M)^2-(Ek-L)(Gk-N) = 0, \text{ або}$$

$$(EG-F^2)k^2 - (LG+EN - 2FM)k + LN-M^2 = 0.$$

Звідси

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \quad H = \frac{LG+EN-2FM}{2(EG-F^2)}.$$

Вправа*. Довести, що для поверхні $F(x,y,z)=0$ гаусова кривина може бути обчислена за формулою

$$K=-\frac{1}{(F_x^2+F_y^2+F_z^2)^2}\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x\\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} & F_y\\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} & F_z\\ F_x & F_y & F_z & 0\end{vmatrix}.$$

Вправи. Довести, що гаусова кривина поверхні дотичних дорівнює 0.

5. Класифікація точок на поверхні.

Нехай $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ - регулярна поверхня, $p=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ - точка на поверхні.

Точка на поверхні називається

1) *еліптичною*, якщо в ній $K>0$,
2) *гіперболічною*, якщо $K<0$,
3) *параболічною*, якщо $K=0$.

Оскільки $EG-F^2>0$, то знак *K* дорівнює знаку виразу $LN\text{-}M^2$. Тоді тип точки на поверхні дорівнює типу індикатриси Дюпена, як лінії другого порядку.

Приклади. На еліпсоїді всі точки еліптичні, на однопорожненому гіперболоїді - гіперболічні, на циліндрі - параболічні.

Вправи. 3.3.24-32, 35, 36*, 37*, 44, 45, 47.

ЛЕКЦІЯ 6.

6. Дериваційні рівняння Вейнгартена. Символи Кристофеля.

Аналогічно базису Френе для кривої в кожній точці на поверхні вектори $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{m}$ утворюють базис тривимірного простору. Як це робилося для формул Френе, похідні від цих трьох векторів знову можуть бути розкладені за ними:

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_v+C_{11}\boldsymbol{m}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_v+C_{12}\boldsymbol{m}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\Gamma_{22}^1\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_v+C_{22}\boldsymbol{m}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{m}_u=A_1\boldsymbol{r}_u+B_1\boldsymbol{r}_v+C_1\boldsymbol{m}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{m}_v=A_2\boldsymbol{r}_u+B_2\boldsymbol{r}_v+C_2\boldsymbol{m}. \quad (5)$$

Коефіцієнти Γ_{ij}^{k}, що зустрічаються в цих формулах називаються коефіцієнтами зв'язності або символами Кристофеля 2-го роду. Скалярно помножуючи кожну з формул на один з векторів базису $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{m}$ виразимо всі коефіцієнти через коефіцієнти першої і другої квадратичної форми поверхні.

$$L = (\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{m}) = (\Gamma_{11}^{1}\,\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^{2}\,\boldsymbol{r}_v + C_{11}\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) = C_{11},$$

$$M = (\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{m}) = (\Gamma_{12}^{1}\,\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^{2}\,\boldsymbol{r}_v + C_{12}\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) = C_{12},$$

$$N = (\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{m}) = (\Gamma_{22}^{1}\,\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{22}^{2}\,\boldsymbol{r}_v + C_{22}\boldsymbol{m},,\boldsymbol{m}) = C_{22},$$

$$0 = 1_u = (\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})_u = 2(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}_u) = 2(A_1\boldsymbol{r}_u + B_1\boldsymbol{r}_v + C_1\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) = 2C_1,$$

$$0 = 1_v = (\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})_v = 2(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}_v) = 2(A_2\boldsymbol{r}_u + B_2\boldsymbol{r}_v + C_2\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}) = 2C_2.$$

Оскільки $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m} = 0$, то $0 = (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m})_u = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m}_u = L + \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m}_u$. Отже, $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m}_u = -L$. Аналогічно $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m}_v = \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{m}_u = -M$, $\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{m}_v = -N$.

Помножуючи (4) по черзі на $\boldsymbol{r}_u$ і $\boldsymbol{r}_v$ отримаємо систему для знаходження A_1 і B_1

$$A_1E + B_1F = (A_1\boldsymbol{r}_u + B_1\boldsymbol{r}_v + C_1\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_u) = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{m}_u = -L,$$

$$A_1F + B_1G = (A_1\boldsymbol{r}_u + B_1\boldsymbol{r}_v + C_1\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_v) = \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{m}_u = -M.$$

Звідки знаходимо

$$A_1 = \frac{FM - LG}{EG - F^2},\ B_1 = \frac{FL - EM}{EG - F^2}.$$

З (5) маємо систему

$$A_2E + B_2F = (A_2\boldsymbol{r}_u + B_2\boldsymbol{r}_v + C_2\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_u) = \boldsymbol{m}_v\boldsymbol{r}_u = -M,$$

$$A_2F + B_2G = (A_2\boldsymbol{r}_u + B_2\boldsymbol{r}_v + C_2\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_v) = \boldsymbol{m}_v\boldsymbol{r}_v = -N,$$

Звідки

$$A_2 = \frac{FN - MG}{EG - F^2},\ B_2 = \frac{FM - EN}{EG - F^2}.$$

Коефіцієнти зв'язності Γ_{ij}^{k}, $1 \le i, j, k \le 2$, знаходяться з (1)-(3). Спочатку знайдемо скалярні добутки других і перших частинних похідних для $\boldsymbol{r}$:

$$E_u = (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u)_u = 2\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u \Rightarrow \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u = ½E_u,$$

$$E_v = (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_u)_v = 2\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u \Rightarrow \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u = ½E_v,$$

$$G_u = (\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v)_u = 2\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v \Rightarrow \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v = ½G_u,$$

$$G_v = (\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_v)_v = 2\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v \Rightarrow \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v = ½G_v,$$

$$F_u = (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)_u = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u \Rightarrow \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v = F_u - ½E_v,$$

$$F_v = (\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)_v = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u \Rightarrow \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u = F_v - ½G_u.$$

З (1) отримуємо

$$\Gamma_{11}^{1}E+\Gamma_{11}^{2}F=(\Gamma_{11}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^{2}\boldsymbol{r}_v+C_{11}\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_u)=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u=\tfrac{1}{2}E_u,$$

$$\Gamma_{11}^{1}F+\Gamma_{11}^{2}G=(\Gamma_{11}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^{2}\boldsymbol{r}_v+C_{11}\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_v)=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v=F_u-\tfrac{1}{2}E_v.$$

Звідки

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_u+FE_v-2FF_u}{2(EG-F^2)},\ \Gamma_{11}^{2}=\frac{2EF_u-FE_u-EE_v}{2(EG-F^2)}.$$

З (2) отримуємо

$$\Gamma_{12}^{1}E+\Gamma_{12}^{2}F=(\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v+C_{12}\boldsymbol{m},,\boldsymbol{r}_u)=\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u=\tfrac{1}{2}E_v,$$

$$\Gamma_{12}^{1}F+\Gamma_{12}^{2}G=(\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v+C_{12}\boldsymbol{m},,\boldsymbol{r}_v)=\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v=\tfrac{1}{2}G_u.$$

Звідки

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\ \Gamma_{12}^{2}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)}.$$

З (3) отримуємо

$$\Gamma_{22}^{1}E+\Gamma_{22}^{2}F=(\Gamma_{22}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{22}^{2}\boldsymbol{r}_v+C_{22}\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_u)=\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u=F_v-\tfrac{1}{2}G_u,$$

$$\Gamma_{22}^{1}F+\Gamma_{22}^{2}G=(\Gamma_{22}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{22}^{2}\boldsymbol{r}_v+C_{22}\boldsymbol{m},\boldsymbol{r}_v)=\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v=\tfrac{1}{2}G_v.$$

Звідки

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)},\ \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}.$$

Як бачимо коефіцієнти зв'язності залежать тільки від коефіцієнтів першої квадратичної форми, а отже є інваріантами при ізометричних перетвореннях поверхні. В подальшому коефіцієнти зв'язності будуть використовуватись для знаходження коваріантної похідної і геодезичних ліній.

З урахуванням знайдених коефіцієнтів рівняння (1)-(5) запишуться у вигляді

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\Gamma_{11}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^{2}\boldsymbol{r}_v+L\boldsymbol{m}, \tag{1'}$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{m}, \tag{2'}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\Gamma_{22}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{22}^{2}\boldsymbol{r}_v+N\boldsymbol{m}, \tag{3'}$$

$$\boldsymbol{m}_u=\frac{FM-LG}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v \tag{4'}$$

$$\boldsymbol{m}_v=\frac{FN-MG}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v. \tag{5'}$$

Ці рівняння називаються дериваційними рівняння Вейнгартена.

7. Формули Гауса та Петерсона-Кодацці. Теорема Боне.

Нехай $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ - регулярна поверхня класу C^3.
З властивостей скалярного добутку векторів випливає, що

$$E > 0,\ G > 0,\ EG - F^2 > 0.$$

Для диференційованої функції класу C^3 мають місце рівності

$$\boldsymbol{r}_{uuv} = \boldsymbol{r}_{uvu},\ \boldsymbol{r}_{uvv} = \boldsymbol{r}_{vvu}.$$

Ми використаємо ці рівності і дериваційні рівняння Вейнтгартена для отримання співвідношень між коефіцієнтами першої і другої квадратичних форм.

$$\boldsymbol{r}_{uuv} = (\Gamma_{11}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{m})_v = \Gamma_{11\,v}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^1 \boldsymbol{r}_{uv} + \Gamma_{11\,v}^2 \boldsymbol{r}_v + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_{vv} + L_v\boldsymbol{m} + L\boldsymbol{m}_v =$$

$$= \Gamma_{11\,v}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{m}) + \Gamma_{11\,v}^2 \boldsymbol{r}_v + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{22}^2 \boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{m}) + L_v\boldsymbol{m} +$$

$$+L\left(\frac{FN - MG}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_v\right) =$$

$$= \left(\Gamma_{11\,v}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + L\frac{FN - MG}{EG - F^2}\right)\boldsymbol{r}_u +$$

$$+\left(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11\,v}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\frac{FM - EN}{EG - F^2}\right)\boldsymbol{r}_v +$$

$$+(\Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L_v)\boldsymbol{m}.$$

$$\boldsymbol{r}_{uvu} = (\Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{m})_u = \Gamma_{12\,u}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_{uu} + \Gamma_{12\,u}^2 \boldsymbol{r}_v + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_{uv} + M_u\boldsymbol{m} + M\boldsymbol{m}_u =$$

$$= \Gamma_{12\,u}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{m}) + \Gamma_{12\,u}^2 \boldsymbol{r}_v + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^1 \boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2 \boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{m}) + M_u\boldsymbol{m} +$$

$$+M\left(\frac{FM - LG}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2}\boldsymbol{r}_v\right) =$$

$$= \left(\Gamma_{12\,u}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + M\frac{FM - LG}{EG - F^2}\right)\boldsymbol{r}_u +$$

$$\left(\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12\,u}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + M\frac{FL - EM}{EG - F^2}\right)\boldsymbol{r}_v +$$

$$+(\Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M_u)\boldsymbol{m}.$$

Оскільки $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{m}$ - базис, то рівність векторів рівносильна рівності координат (коефіцієнтів) при розкладі за цим базисом. Порівнявши коефіцієнти при $\boldsymbol{r}_v$, отримаємо

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11\,v}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\frac{FM - EN}{EG - F^2} = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12\,u}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + M\frac{FL - EM}{EG - F^2},$$

Звідки

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{1}{E}\left(\Gamma_{11}^1\,\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11\,v}^2 + \Gamma_{11}^2\,\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\,\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12\,u}^2 - \Gamma_{12}^2\,\Gamma_{12}^2\right).$$

Ліва частина цієї формули (формули Гауса) є гаусовою кривиною, а в правій виразимо коефіцієнти зв'язності через коефіцієнти першої квадратичної форми. В результаті (після проведення всіх громіздких обчислень та спрощень) отримаємо такий запис формули Гауса

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} \frac{2F_{uv}-G_{uu}-E_{vv}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} \\ F_v - \frac{G_u}{2} & E & F \\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}\right).$$

Прямим наслідком цієї формули є

Теорема (*Гауса*). *Гаусова кривина поверхні виражається через коефіцієнти першої квадратичної форми* (*і їх частинні похідні*).

Порівнявши коефіцієнти при $\boldsymbol{m}$ в рівності $\boldsymbol{r}_{uuv} = \boldsymbol{r}_{uvu}$, отримуємо

$$\Gamma_{11}^1 M + \Gamma_{11}^2 N + L_v = \Gamma_{12}^1 L + \Gamma_{12}^2 M + M_u.$$

Це рівняння називається (першою) формулою Петерсона-Кодацці.

Аналогічно, якщо порівняємо коефіцієнти при $\boldsymbol{m}$ в рівності $\boldsymbol{r}_{uvv} = \boldsymbol{r}_{vvu}$:

$$\boldsymbol{r}_{uvv} = (\Gamma_{12}^1\,\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2\,\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{m})_v = \Gamma_{12}^1\,\boldsymbol{r}_{uv} + \Gamma_{12}^2\,\boldsymbol{r}_{vv} + M_v\boldsymbol{m} + \ldots = (\Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M_v)\boldsymbol{m} + ..$$

$$\boldsymbol{r}_{vvu} = (\Gamma_{22}^1\,\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{22}^2\,\boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{m})_u = \Gamma_{22}^1\,\boldsymbol{r}_{uu} + \Gamma_{22}^2\,\boldsymbol{r}_{vu} + N_u\boldsymbol{m} \ldots = (\Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N_u)\boldsymbol{m} + ..$$

то отримаємо другу формулу Петерсона-Кодацці

$$\Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N + M_v = \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M + N_u.$$

Обидві формули Петерсона-Кодацці можна записати у такому вигляді

$$\sum_{i,k=1}^{2}(-1)^i\,\Gamma_{ij}^k b_{(3-j)k} = (b_{1j})_v - (b_{2j})_u\,.$$

Тут $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$.

Вправа. Порівнявши решту відповідних коефіцієнтів отримати формулу Гауса.

Теорема (*Боне*). *Якщо шість функцій* $E = E(u,v)$, $F = F(u,v)$, $G = G(u,v)$, $L = L(u,v)$, $M = M(u,v)$, $N = N(u,v)$, *задовольняють рівнянням* (1), *Гауса та*

Петерсона-Кодацці, то існує поверхня, для якої вони є коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм.

Доведення основане на інтегруванні дериваційних рівнянь, що є диференціальними рівняннями другого порядку, а формули Гауса та Петерсена-Кодацці забезпечує рівність похідних третього порядку, що є достатньою умовою інтегрованості.

Вправи. (КР) 3.4.6, 7, 9, 10, 13, 20, 59, 16*, 18*.

ЛЕКЦІЯ 7.

8. Лінії кривини та асимтотична лінії.

Нагадаємо, що головний напрямок відповідає головним кривинам і співпадає з головним напрямком індикатриси Дюпена.

Лінія на поверхні, дотична до якої в кожній точці задає головний напрямок, називається *лінією кривини*.

У кожної лінії другого порядку існує два головних напрямки, що є за означенням взаємно спряженими та ортогональними. Якщо $h = du{:}dv$ і $h_1 = du_1{:}dv_1$ - головні напрямки, то умова їх спряженості (вона вірна в будь-якій декартовій системі координат), як відомо з курсу аналітичної геометрії, має вигляд

$$Lhh_1+M(h+h_1)+N = 0.$$

Умова ортогональності має вигляд

$$Ehh_1+F(h+h_1)+G = 0.$$

Вилучаючи h_1 з цих двох рівнянь отримаємо

$$\frac{Lh+M}{Eh+F}=\frac{Mh+N}{Fh+G}.$$

Ця рівність рівносильна

$$(LF - EM)\, du^2 + (LG - EN)\, dudv + (MG - FN)\, dv^2 = 0.$$

Або за допомогою визначника

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0.$$

Це квадратне рівняння (відносно $du{:}dv$) завжди має два розв’язки. Якщо їх проінтегрувати, то отримаємо рівняння ліній кривини. Отже через кожну точку поверхні проходить принаймні дві лінії кривини.

Асимптотичний напрямок - це такий напрямок для якого нормальна кривина дорівнює нулю. Він збігається з асимптотичним напрямком індикатриси Дюпена. Лінія на поверхні, дотична до якої в кожній точці задає асимптотичний напрямок, називається *асимптотичною лінією*.

Умова $k_н = 0$ рівносильна рівнянню

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 = 0.$$

З цього рівняння можна знайти асимптотичні напрямки, а проінтегрувавши - асимптотичні лінії.

9. Геодезична кривина. Геодезичні лінії.

Нехай $u = u(s)$, $v = v(s)$ - регулярна класу C^3 крива на регулярній класу C^3 поверхні $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

Геодезичною кривиною k_g лінії на поверхні називається кривина проекції цієї лінії на дотичну площину.

Лінія на поверхні називається *геодезичною*, якщо в кожній точці її геодезична кривина дорівнює нулю.

Виведемо формулу для знаходження геодезичної кривини. Фіксуємо точку $u_0 = u(s_0)$, $v_0 = v(s_0)$. Тоді рівняння кривої $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(s), v(s)) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \mathbf{r}_t(s) + \mathbf{r}_m(s)$, де $\mathbf{r}_t(s)$ - вектор дотичний, а $\mathbf{r}_m(s)$ - перпендикулярний до поверхні. Рівняння проекції кривої на дотичну площину:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0)+\mathbf{r}_t(s).$$

Знайдемо другу похідну за натуральним параметром s:

$$\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}_u u'+\mathbf{r}_v v')' = \mathbf{r}_{uu}(u')^2+2\mathbf{r}_{uv}u'v'+\mathbf{r}_{vv}(v')^2+\mathbf{r}_u u''+\mathbf{r}_v v'' =$$

$$= (\Gamma_{11}^1 \mathbf{r}_u+\Gamma_{11}^2 \mathbf{r}_v+L\mathbf{m})(u')^2+2(\Gamma_{12}^1 \mathbf{r}_u+\Gamma_{12}^2 \mathbf{r}_v+M\mathbf{m})u'v'+$$

$$+(\Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_u+\Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_v+N\mathbf{m})(v')^2+\mathbf{r}_u u''+\mathbf{r}_v v'' =$$

$$= (u''+\Gamma_{11}^1 (u')^2+2\Gamma_{12}^1 u'v'+\Gamma_{22}^1 (v')^2)\mathbf{r}_u+(v''+\Gamma_{11}^2 (u')^2+2\Gamma_{12}^2 u'v'+\Gamma_{22}^2 (v')^2)\mathbf{r}_v+$$

$$+(L(u')^2+2Mu'v'+N(v')^2)\,\mathbf{m}.$$

Отже

$$\mathbf{r}_t'' = (u''+\Gamma_{11}^1 (u')^2+2\Gamma_{12}^1 u'v'+\Gamma_{22}^1 (v')^2)\mathbf{r}_u+(v''+\Gamma_{11}^2 (u')^2+2\Gamma_{12}^2 u'v'+\Gamma_{22}^2 (v')^2)\mathbf{r}_v.$$

Оскільки $|k_g| = |\mathbf{r}_t''|$, то рівняння $k_g = 0$ рівносильне системі

$$A_1: = u''+\Gamma_{11}^1 (u')^2+2\Gamma_{12}^1 u'v'+\Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0,$$

$$A_2: = v''+\Gamma_{11}^2 (u')^2+2\Gamma_{12}^2 u'v'+\Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0.$$

Розв'язками цієї системи є геодезичні лінії. При цьому слід пам'ятати, що параметризація в цих рівняннях натуральна, тобто виконується рівняння

$$E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2 = 1.$$

Знайдемо геодезичну кривину довільної лінії

$$k_g = \mathbf{r}_t''\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{r}_t'', \mathbf{r}', \mathbf{m}) = (u'A_2 - v'A_1)(\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\mathbf{m}) = (u'A_2 - v'A_1)(EG-F^2)^{1/2}.$$

Оскільки геодезичні лінії задаються системою диференціальних рівнянь другого порядку, то, за теоремою про існування та єдність розв'язку диференціального рівняння, через кожну точку в кожному напрямку проходить єдина геодезична лінія.
Крім того в достатньо малому околі через дві точки проходить єдина геодезична.

Напівгеодезичною системою координат на поверхні називається така систем координат в якій лінії u є геодезичними, а лінії v - їх ортогональними траєкторіями. В околі даної точки напівгеодезичну систему координат легко побудувати провівши всі геодезичні лінії перпендикулярні до кривої, що проходить через цю точку, і взявши їх ортогональні траєкторії.

Оскільки в цій системі координат координатні лінії перпендикулярні, то $F = 0$. Підставляючи $v = const$ в друге рівняння геодезичних ліній отримаємо, що $\Gamma_{11}^2 = 0$. Тоді $\Gamma_{11}^2 = \dfrac{2EF_u - FE_u - EE_v}{2(EG-F^2)} = -\dfrac{E_v}{2G} = 0$. Звідки $E_v = 0$. Це означає, що E не залежить від v. З урахуванням того, що $E>0$, можемо ввести заміну параметра u на натуральний параметр w на геодезичних. Тоді $dw^2 = Edu^2$ і перша квадратична форма буде мати вигляд (після перепозначення w на u)

$$ds^2 = du^2+Gdv^2.$$

Використовуючи напівгеодезичну систему координат, легко показати, що найкоротшою кривою між двома точками є геодезична. Дійсно ця властивість носить локальний характер, тому можна вважати що дві точки лежать на одній лінії $v = v_0 = const$ напівгеодезичної системи координат. Нехай їх координати будуть (u_1, v_0) і (u_2, v_0), $u_2 > u_1$. Тоді довжина геодезичної між ними дорівнює $u_2 - u_1$. Для будь-якої іншої кривої $u = u(t)$, $v = v(t)$, що проходить через ці точки, її довжина

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{u'^2 + Gv'^2}\,dt > \int_{t_1}^{t_2} |u'|\,dt = u_2 - u_1.$$

Вправи. 4.2.6, 9, 12, 14, 17-23, 4.3.1, 8, 14, 4.4.2, 3, 6, 31, 32, 37, 45.

ЛЕКЦІЯ 8.

ЗАГАЛЬНА ТОПОЛОГІЯ

1. Топологічний простір.

В теорії метричних просторів встановлюються такі властивості відкритих множин:

1) $\varnothing$ і весь простір є відкритими множинами,

2) об'єднання довільного числа відкритих множин є відкритою множиною,

3) перетин скінченого числа відкритих множин є відкритою множиною.

Зауважимо, що багато понять можна описати використовуючи відкриті множини і не використовуючи метрики, причому такі описання часто є простішими (наприклад, неперервність). Більшість властивостей цих понять можна довести на основі властивостей 1)-3) відкритих множин.

Через 2^X будемо позначати множину всіх підмножин множини X.

Топологічним простором називається пара (X, τ), в якій X - множина, а $\tau \subset 2^X$ - сім'я підмножин множини X, що задовольняє таким умовам:

T1) $\varnothing\in\tau$, $X\in\tau$,

T2) Якщо $\{U_i\}\subset\tau$, то $\cup U_i\in\tau$,

T3) Якщо $U\in\tau$ *і* $V\in\tau$, то $U\cap V\in\tau$.

Множину X називають *простором*, елементи з X - *точками*, підмножини X, що належать τ - *відкритими* в просторі X, а сім'ю τ відкритих множин - *топологією*.

Приклади. 1) Нехай (X, d) - метричний простір. Нагадаємо, що множина U називається відкритою в метричному просторі, якщо $\forall\ x\in U$ існує відкрита куля $B(x,r)\subset U$. *С*укупність τ_d усіх відкритих у метриці ρ множин є топологією на X, яка називається *метричною* топологією. Тому (X, τ_d) - топологічний простір.

Зауважимо, що різним метрикам на множині X може відповідати одна і та сама топологія. Наприклад, якщо всі відстані помножити на стале додатне число, то τ_d не зміниться.

Топологічний простір (X, τ) називається *метризовним*, якщо існує така метрика d на X, що $\tau = \tau_d$.

Якщо на прямій задано стандартну евклідову метрику, то кожна відкрита множина є об'єднанням інтервалів виду (a, b), де $-\infty\le a<b\le\infty$. Цю топологію будемо називати *евклідовою* (або *стандартною*) і позначати τ_E.

2) Топологія $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ називається *тривіальною* (або *антидискретною*).

3) Топологія $\tau_D = 2^X$ називається *дискретною*. Топологія буде дискретною $\Leftrightarrow$ кожна точка простору є відкритою множиною.

4) Нехай $X\neq\varnothing$. Сім'я $\{U\subset X\colon\ U=\varnothing$ або $X\backslash U$ є скінченою (зліченою)$\}$ називається *коскінченою* (*козліченою*) *топологією* або *топологією скінчених* (*злічених*) *доповнень*.

Вправа. Довести, що простір X з дискретною топологією - метризовний, а з тривіальною - не метризовний, якщо $|X|>1$.

Вправа. Показати що, якщо $X=\{a, b\}$ і $\tau\subset 2^X$, $\varnothing\in\tau$, $X\in\tau$, то τ - топологія. Отже, існує 4 різні топології на множині з 2 елементів. Скільки різних топологій існує на множині з трьох (n) елементів?

Множина N називається *околом* підмножини *A* топологічного простору X, якщо існує така відкрита множина U, що $A\subset U\subset N$. Відкрита множина є околом кожної своєї підмножини.

Теорема. Множина відкрита тоді і тільки тоді, коли вона містить окіл кожної своєї точки.

Доведення. *Необхідність.* Нехай U - відкрита множина. Тоді U - окіл кожної точки $x\in U$.

Достатність. Нехай U містить окіл кожної своєї точки. Тоді вона містить відкритий окіл кожної своєї точки. Оскільки множина U є об'єднанням цих відкритих околів, то вона відкрита. □

Вправа. Доведіть такі властивості околів точки:

1) Якщо N - окіл точки x, $N\subset K$, то *K* - окіл x.
2) Перетин скінченого числа околів точки x є околом точки x.

Приклад. Нехай $X=\{x,y\}$, $\tau=\{\varnothing, \{x\}, X\}$. Околами точки x є $\{x\}$ і X, а єдиним околом *y* є X.

2. База та передбаза. Підпростір

Часто при побудові топології описують не всю сім'ю відкритих множин, а тільки деяку підсім'ю, з якої всяка відкрита множина може бути отримана за допомогою об'єднань деяких елементів підсім'ї.

Нехай (X,τ) - топологічний простір. Сім'я $\beta\subset\tau$ називається *базою* топології τ (або *базою* топологічного простору (X,τ)), якщо кожна відкрита множина в X може бути представлена у вигляді об'єднання деяких елементів з β:

$$U\in\tau\Leftrightarrow\exists\{U_i\}\subset\beta\colon U=\cup U_i.$$

Очевидно, що топологічний простір може мати багато баз.

Теорема (1-*й критерій бази*). $\beta\subset\tau$ буде базою $\Leftrightarrow$ $\forall U\in\tau$ $\forall x\in U$ $\exists$ $V\in\beta$: $x\in V\subset U$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай β - база топології τ, $U\in\tau$, $x\in U$. Оскільки U - відкрита множина, то за означенням бази $U = \bigcup V_\alpha$, $\alpha\in$M, $\forall V_\alpha\in\beta$. Тому $\exists\ \alpha_0\in$M: $x\in V_{\alpha_0}\subset U$.

Достатність. Нехай U - довільна відкрита множина з X. Тоді для довільної точки $x\in U$ існує така відкрита множина $V_x\in\beta$: $x\in V_x\subset U$. Оскільки $U = \bigcup V_x$, $x\in U$, то довільна відкрита множина $U\subset X$ є об'єднанням множин із β.□

Вправа. (2-*й критерій бази*)**.** Довести, що для того, щоб сукупність $\beta = \{U_i\}\subset\tau$, $i\in M$ була базою деякої топології на множині X, необхідно і достатньо, щоб $X = \bigcup\limits_{i\in M} U_i$ і $\forall j, k\in M\ \exists\ N\subset M$: $U_j \bigcap U_k = \bigcup\limits_{i\in N} U_i$.

Приклади. 1) Бази евклідової топології τ_E прямої $\mathbf{R}^1$: a) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів з раціональними кінцями, b) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів з ірраціональними кінцями, c) сукупність, що складається з усіх відкритих інтервалів.

2) Якщо (X, d) - метричний простір, то сім'я відкритих куль $\beta = \{B(x, r), x\in X, r>0\}$ є базою метричної топології τ_d.

3) Сім'я $\beta = \{x, x\in X\}$ є базою дискретної топології τ_D на X.

Нехай (X,τ) - топологічний простір. Сім'я $s\subset\tau$ називається *передбазою* топології τ, якщо скінчені перетини $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, де $U_i\in s$ для $i = 1,\ldots, k$ утворюють базу топології τ.

Приклад. Сім'я, що складається з інтервалів $(a, +\infty)$ та $(-\infty, b)$, утворює передбазу евклідової топології τ_E на прямій.

Усі топології, які задані на тій самій множині, можна частково впорядкувати в розумінні такого означення: кажуть, що топологія τ_1 більш *сильна*, ніж топологія τ_2, якщо довільний елемент із τ_2 належить τ_1. В цьому випадку кажуть також, що топологія τ_2 більш *слабка*, ніж τ_1. Дискретна топологія - найсильніша, а тривіальна - найслабша з усіх таких топологій.

Нехай (X,τ) - топологічний простір, $Y\subset X$, $\tau_y = \{U\bigcap Y : U\in\tau\}$.

Вправа. Перевірте, що сукупність τ_y є топологією на Y.

Топологія τ_y називається *індукованою* (або *відносною*) *топологією*. При цьому пара (Y,τ_y) називається *підпростором* простору (X,τ).

Вправа. Нехай сім'я β є базою (X,τ), $Y\subset X$. Довести, що сім'я $\beta_y = \{U\bigcap Y : U\in\beta\}$ є базою для (Y,τ_y).

Зауваження. Множини, що є відкритими в індукованій топології τ_y, можуть не бути відкритими в топології τ.

Приклад. Нехай $X = \mathbf{R}^1$, $\tau = \tau_E$ - евклідова топологія, $Y = [0, 1]$, $\tau_{[0, 1]}$ - індукована топологія. Півінтервали $[0, a)$ та $(a, 1]$, де $0<a<1$, є відкритими множинами в $\tau_{[0, 1]}$, але не є відкритими в τ_E.

Домовленість. Надалі, якщо не сказано інше, то всі підмножини наділені індукованою топологією, а топологія в $\mathbf{R}^n$ - стандартна (евклідова), тобто породжена евклідовою метрикою.

3. Замкнені множини. Замикання та внутрішність.

Множина F називається *замкненою* в топологічному просторі (X,τ), якщо її доповнення $X\backslash F$ відкрите в (X,τ).

Використовуючи формули де Моргана та аксіоми T1) - T3) топології можна отримати такі властивості замкнених множин:

C1) $\varnothing$ і X - замкнені множини,

C2) перетин довільної кількості замкнених множин є замкненою множиною,

C3) об'єднання скінченої кількості замкнених множин є замкненою множиною.

Множина, що є одночасно відкритою і замкненою називається *відкрито-замкненими*. $\varnothing$ і X є прикладами таких множин.

Приклади. Точки та замкнені відрізки є замкненими множинами в $\mathbf{R}$. В дискретному просторі кожна множина є відкрито-замкненою.

Замиканням $\bar{A}$ підмножини A топологічного простору (X,τ) називається перетин усіх замкнених в X множин, які містять A. Замикання $\bar{A}$ є найменшою замкненою множиною, що містить множину A.

Вправа. Доведіть такі властивості замикання

1) $\bar{A} = A \Leftrightarrow A$ замкнена,

2) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$,

3) $\overline{A \bigcup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

4) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \tau,\ U \ni x$: $U \cap A \neq \varnothing$.

Двоїстим поняттям до замикання є внутрішність.

Внутрішністю $IntA$ підмножини A топологічного простору (X,τ) називається об'єднання всіх відкритих в X множин, які лежать в A. Внутрішність $IntA$ є найбільшою відкритою множиною, що лежить в множині A.

Вправа. Доведіть такі властивості внутрішності:

1) $IntA = A \Leftrightarrow A \in \tau$,

2) $Int(IntA) = IntA$.

Приклади. 1) В стандартній (евклідовій) топології на прямій $\overline{[a,b)} = [a,b]$, $Int[a,b) = (a,b)$.

2) В дискретній топології на X для довільної множини A: $\bar{A} = IntA = A$.

3) В тривіальній топології на X для $A\neq\varnothing$: $\bar{A} = X$ і для $A\neq X$: $IntA = \varnothing$.

Підмножина A називається *скрізь щільною* в X, якщо $\bar{A} = X$. Ця умова еквівалентна тому, що A перетинається з кожною не порожньою відкритою підмножиною простору X.

Приклад. Множина дійсних чисел скрізь щільна на прямій $\mathbf{R}$.

Межею FrA множини A називається множина $\bar{A}\backslash IntA$.

Вправа. Доведіть, що $\mathrm{Fr}A = \overline{A}\bigcap\overline{X \setminus A}$.

Для межі множини A використовується також позначення ∂A.

Приклади. Нехай $D^n = \{(x_1,..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1\}$ - n-вимірний диск, $S^{n-1} = \{(x_1,..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ - n-1-вимірна сфера в $\mathbf{R}^n$. Тоді $S^{n-1} = \partial D^n$.

Вправи. 6.1.2-10, 12, 32, 36, 38, 39, 110, 111*.

ЛЕКЦІЯ 9.

4. Неперервні відображення, гомеоморфізми.

В теорії метричних просторів неперервне відображення це те, яке близькі точки переводить в близькі. Не маючи відстані в загальному топологічному просторі ми використовуємо критерій неперервності метричних просторів в якості означення:

Нехай (X,τ) і (Y,γ) - топологічні простори. Відображення f: $X\to Y$ називається ***неперервним***, якщо $\forall U\in\gamma$: $f^{-1}(U)\in\tau$, тобто прообраз довільної відкритої множини з Y є відкритою множиною в X.

Приклади. 1) Якщо τ - дискретна або γ - тривіальна топологія, то відображення f: $X\to Y$ -неперервне.

2) Тотожне відображення id: $X\to X$, $id(x) = x$ є неперервним.

Теорема (*Критерії неперервності відображення*). Нехай (X,τ) і (Y,γ) - топологічні простори. Такі умови рівносильні:

1) відображення f: $X\to Y$ неперервне,
2) прообраз довільної замкненої множини з Y є замкнена множина в X,
3) $\forall x\in X$ і довільного околу V точки $f(x)$ існує такий окіл U точки x , що $f(U)\subset V$,

4) $\forall A \subset X$: $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Доведення. 1)$\Rightarrow$2) Нехай А - довільна замкнена підмножина в Y. Тоді множина $Y \setminus A$ - відкрита. Через те, що f - неперервне, то $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ - відкрита, а $f^{-1}(A)$ - замкнена множина.

2)$\Rightarrow$4) Оскільки $B = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ замкнена і $A \subset B$, то $\overline{A} \subset B$. Тому $f\left(\overline{A}\right) \subset f(B) = \overline{f(A)}$.

4)$\Rightarrow$3) Оскільки V - окіл $f(x)$, то $\exists W \in \gamma$: $x \in W \subset V$. Покладемо $A = f^{1}(Y \setminus W)$, $U = X \setminus A$. Тоді з 4) випливає, що $f(A) = f(\overline{A}) = Y \setminus W$. Отже $\overline{A} = A$, A - замкнене, а $U = X \setminus A$ - шукане.

3) $\Rightarrow$1) Нехай V - довільна відкрита множина в Y. Тоді V - окіл довільної точки $f(x) \in V$. За умовою існує така відкрита множина $U_x \ni x$, що $f(U_x) \subset V$. Оскільки множина $f^{-1}(V)$ є об'єднанням всіх таких відкритих множин U_x то вона є відкритою.□

Вправа. Довести, що композиція неперервних відображень є неперервним відображенням.

Відображення f: $X \to Y$ називається ***гомеоморфізмом*** (або топологічним відображенням), якщо воно взаємно однозначне і неперервне в обидва боки. Простори X, Y ***гомеоморфні***, якщо між ними існує хоча б один гомеоморфізм. Позначають $X \cong Y$.

Символом 1_x або id_X будемо позначати тотожне відображення простору X, тобто таке відображення, що залишає кожну точку нерухомою.

Гомеоморфізми мають такі властивості:

1) 1_x - гомеоморфізм.

2) Якщо f - гомеоморфізм, то f^{-1}- гомеоморфізм.

3) Композиція гомеоморфізмів є гомеоморфізм.

Із цих властивостей випливає, що властивість бути гомеоморфними є відношення еквівалентності у множині топологічних просторів. Ті властивості топологічних просторів, які притаманні усім гомеоморфним просторам, називаються *топологічними інваріантами*. Більшість понять, що вводяться в наступних параграфах, є топологічними інваріантами.

Вправи. 1) Довести, що функція $f(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ здійснює гомеоморфізм між $(0,1)$ та $\mathbf{R}^1$.

2) Довести, що $(a,b) \cong (0,1)$.

3) Побудувати гомеоморфізм $B^2 \to \mathbf{R}^2$, де B^2- відкрита куля радіуса 1.

4) Побудувати гомеоморфізм $S^2\setminus\{\omega\} \to \mathbf{R}^2$, де S^2- сфера одиничного радіусу, а ω - деяка фіксована точка на S^2.

Відображення f: $X\to Y$ називається (***гомеоморфним***) ***вкладенням***, якщо f: $X\to f(X)\subset Y$ - гомеоморфізм.

Приклад. Якщо $X\subset Y$, то тотожне відображення id: $X\to Y$, $id(x) = x$, $x\in X$, є вкладенням.

5. Зв'язність та лінійна зв'язність.

Топологічний простір називається ***зв'язним***, якщо його не можна подати у вигляді об'єднання двох непорожніх відкритих множин, що не перетинаються. В іншому випадку простір називається ***незв'язним***.

Якщо X - незв'язний простір, то існують такі відкритті не порожні множини U і V, що $X = U\bigcup V$ і $U\bigcap V\neq\varnothing$. Тоді множини U і V є також замкненими, як доповнення до відкритих. В цьому випадку також кажуть, що пара $\{U, V\}$ є ***розбиттям*** простору X. Отже, топологічний простір зв'язний, якщо для нього не існує розбиття.

Підмножина зв'язна в топологічному просторі, якщо вона зв'язна в ньому як підпростір.

Лема. Топологічний простір X - незв'язний $\Leftrightarrow$ існує відкрито-замкнена множина U така, що $U\neq\varnothing$ і $U\neq X$.

Приклади. 1) Простір X з тривіальною топологією - зв'язний, а з дискретною незв'язний, якщо $|X|>1$.

2) Інтервали $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $-\infty\leq a<b\leq\infty$, і тільки вони є зв'язними множинами в стандартній топології на прямій.

Вправа. Довести, що замикання зв'язної множини - зв'язна множина.

Вказівка. Показати, що якщо $\{U, V\}$ - розбиття $\overline{A}$, то $\{U\cap A, V\cap A\}$ - розбиття *A*.

Лема. Образ зв'язного простору при неперервному відображенні - зв'язний.

Доведення. Нехай X - зв'язний простір, f: $X\to Y$ - неперервне відображення. Припустимо, що множина $f(X)$ - незв'язна і $\{U, V\}$ - розбиття $f(X)$. Тоді пара $\{f^{1}(U), f^{1}(V)\}$ є розбиттям простору X, що суперечить його зв'язності.□

Компонентою зв'язності топологічного простору називається максимально зв'язна в ньому підмножина, тобто така зв'язна множина, яка не є власною підмножиною ніякої іншої зв'язної множини. Отже, U - компонента зв'язності простору $X \Leftrightarrow U$ - зв'язна і не існує зв'язної множини $V\supset U$, $V\neq U$.

Вправа. Доведіть такі властивості компонент зв'язності:

1) компонента зв'язності, що містить точку x дорівнює об'єднанню всіх зв'язних множин, що містять точку x ,

2) довільна компонента зв'язності є замкненою множиною,

3) якщо топологічний простір складається зі скінченого числа компонент зв'язності, то кожна компонента зв'язності є відкритою множиною,

4) кожні дві компоненти зв'язності або не перетинаються, або співпадають,

5) у гомеоморфних просторів однакове число компонент зв'язності. Отже, число компонент зв'язності є топологічним інваріантом.

Конструкція. Остання властивість часто використовується при доведенні негомеоморфності топологічних просторів. Так, якщо f: $X \to Y$ - гомеоморфізм, то для довільної підмножини $A \subset X$ обмеження $f|_{X \setminus A}$: $X \setminus A \to f(X \setminus A)$ - гомеоморфізм і, отже, простори $X \setminus A$, $f(X \setminus A)$ мають однакове число компонент зв'язності.

Приклад. Нехай на площині задана стандартна топологія, породжена стандартною метрикою, множина X - об'єднання координатних осей, а Y - пряма, на X i Y задано індуковану топологію. Тоді простір X не гомеоморфних Y, бо, якщо з X викинути початок координат, то отримаємо простір, що має 4 компоненти зв'язності (півпрямі), а якщо з Y викинути довільну точку, то отриманий простір буде мати лише дві компоненти зв'язності.

Розглянемо операцію обернену до розбиття топологічного простору - незв'язне об'єднання:

Нехай (X, τ_1) і (Y, τ_2) - топологічні простори і $X \cap Y = \varnothing$. ***Незв'язним об'єднанням*** або *топологічною сумою* $X \coprod Y$ просторів X та Y називається їх об'єднання $X \cup Y$ з топологією τ, яка задається так: $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X \in \tau_1$ і $U \cap Y \in \tau_2$. Якщо $X \neq \varnothing$ і $Y \neq \varnothing$, то пара $\{X, Y\}$ є розбиттям $X \coprod Y$. Незв'язне об'єднання $\coprod X_i$ довільного числа неперетинних топологічних просторів (X_i, τ_i) визначається аналогічно: $\coprod X_i = (\cup X_i, \tau)$, $U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X_i \in \tau_i$.

Шляхом з точки x в точку y в топологічному просторі X називається неперервне відображення f:$[0,1] \to X$ таке, що $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Топологічний простір X називається *лінійно зв'язним*, якщо для довільних точок x, $y \in X$ існує шлях з x в y.

Теорема. Якщо простір X лінійно зв'язний, то він - зв'язний.

Доведення. Припустимо, що X - лінійно зв'язний, але не зв'язний і $\{U, V\}$ - розбиття X. Оскільки множини U, V - не порожні, то існують точки $x \in U$, $y \in V$. За означенням лінійної зв'язності існує шлях f:$[0,1] \to X$ з x в y. Тоді $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ - розбиття відрізку $[0,1]$, що суперечить його зв'язності.□

Приклад. Простір $X = \{(x,0)\in\mathbf{R}^2|\ x\leq 0\}\cup\{(x,\ sin(1/x))|\ x>0\}$ є зв'язним, але лінійно не зв'язним.

Вправи. 6.1.59, 60, 62, 63, 66, 68 -73, 75-82, 88*, 89*.

ЛЕКЦІЯ 10.

6. Аксіоми відокремлення.

Топологічний простір $(X,\ \tau)$ називається T_0-простором (або простором, що задовольняє аксіомі T_0), якщо для довільних точок $x,\ y\in X,\ x\neq y$ існує окіл U точки y, що $x\notin U$ або окіл V точки x, що $y\notin U$.

Топологічний простір $(X,\ \tau)$ називається T_1-простором (або простором, що задовольняє аксіомі T_1), якщо для довільних точок $x,\ y\in X,\ x\neq y$ існує окіл U точки y, що $x\notin U$.

Теорема. (Критерій T_1-простору). Топологічний простір $(X,\ \tau)$ - T_1-простір $\Leftrightarrow \forall x\in X$: $\{x\}$ - замкнена.

Доведення. *Необхідність.* Нехай X - T_1-простір, $x\in X$. З означення T_1-простору випливає, що для кожної точки $y\neq x$ існує такий її відкритий окіл U_y, що $x\notin U_y$. Тоді $X\backslash\{x\} = \cup U_y,\ y\in X\backslash\{x\}$. Отже $X\backslash\{x\}$ - відкрита, а $\{x\}$ - замкнена.

Достатність. Множина $X\backslash\{x\}$ є шуканим околом точки $y\neq x$.□

Топологічний простір $(X,\ \tau)$ називається T_2 (або ***хаусдорфовим***) простором, якщо для довільних точок $x,\ y\in X,\ x\neq y$ існують їх околи, що неперетинаються.

З означень випливає, що кожний хаусдорфовий простір є T_1-простором.

Приклади. 1) Дискретний та метризовний простори є T_0, T_1, і T_2-просторами.

2) Тривіальний простір $(X,\ \tau_0)$ не буде T_0, T_1 чи T_2-простором, якщо $|X|>1$.

3) Простори $(X = \{x,\ y\},\ \tau = \{\varnothing,\ \{x\},\ X\})$ і $(\mathbf{R},\ \tau_+ = \{(a,\ +\infty)|\ a\in\mathbf{R}\})$ - T_1, але не T_0-простори.

4) Множини $\boldsymbol{Z}$, $\mathbf{R}$ з коскінченою топологією є не хаусдорфовими T_1-просторами.

Вправи. 1) Довести, що підпростір хаусдорфового простору є хаусдорфовим, а підпростір T_1-простору - T_1-простір.

2)* Нехай $f,\ g$: $X\to Y$ - неперервні відображення і Y - T_2-простір. Довести, що множина $\{x\in X|\ f(x) = g(x)\}$ є замкненою.

T_1-простір $(X,\ \tau)$ називається T_3 (або ***регулярним***) простором, якщо $\forall$ замкненої множини A і $\forall\ x\notin A\ \exists U,\ V\in\tau$: $A\subset U,\ x\in V,\ U\cap V = \varnothing$.

T_1-простір (X, τ) називається $T_{3½}$ (або *тихоновим*, або *цілком регулярним*) простором, якщо $\forall$ замкненої множини A і $\forall$ $x \notin A$ $\exists$ неперервна функція $f{:}X \to [0,1]$, $f(A) = 0$, $f(x) = 1$. В цьому випадку кажуть, що точка x і множина *A* є ***функціонально відокремленими***.

T_1-простір (X, τ) називається T_4 (або ***нормальним***) простором, якщо $\forall$ замкнених множин A і B, $A \cap B = \varnothing$ $\exists U$, $V \in \tau$: $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$.

Зауваження. Умову існування двох відкритих множин в аксіомі T_4 можна замінити на умову існування відкритої множини $U_{A,B}$ такої, що $A \subset U_{A,B}$ і $\overline{U_{A,B}} \cap B = \varnothing$.

Між аксіомами відокремлення існує така залежність $T_4 \Rightarrow T_{3½} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$, тобто кожний нормальний простір є тихоновим, кожний тихоновий - регулярним і т.д. Крім того існують приклади, які показують, що всі ці аксіоми не рівносильні.

Зауважимо, що деякі автори не включають умову T_1 в означення аксіом T_3, $T_{3½}$, T_4. В цьому випадку наведена вище залежність між аксіомами порушується.

Теорема. Кожний метризовний простір є нормальним.

Доведення. Нехай τ_d - метрична топологія на просторі X. Перевіримо спочатку виконання аксіоми T_1. Для довільних точок $x \neq y$ відстань $d = d(x,y) > 0$. Тоді куля $B(y,d)$ є околом *y*, що не містить x.

Нехай A і B - замкнені множини, $A \cap B = \varnothing$. Нагадаємо, що відстань $d(x,Y)$ від точки x до множини Y визначається за формулою: $d(x,Y) = inf\{d(x,y)|\ y \in Y\}$. Якщо Y - замкнена множина і $x \notin Y$, то $d(x,Y) > 0$. Покладемо $U = \{x|\ d(x,A) < d(x,B)\}$, $V = \{x|\ d(x,A) > d(x,B)\}$. Тоді U і V - шукані.□

За аналогією з цілком регулярними можна ввести цілком нормальні простори, в яких будь-які дві замкнені неперетинні множини є функціонально відокремленими. Але виявляється, що кожний такий простір є нормальним.

Лема (*Урісона*)**.** Топологічний простір (X,τ) - нормальний $\Leftrightarrow$ $\forall$ замкнених множин A і B, $A \cap B = \varnothing$ $\exists$ неперервна функція $f{:}\ X \to [0,1]$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай X - нормальний простір, A і B -замкнених множин, що не перетинаються. Покладемо $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_{1/2} = \overline{U_{A,B}}$, $B_{1/2} = X \backslash U_{A,B}$, а далі за індукцією

$$A_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = \overline{U_{A_{\frac{k}{2^n}},B_{1-\frac{k+1}{2^n}}}},\quad B_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = X \setminus U_{A_{\frac{k}{2^n}},B_{1-\frac{k+1}{2^n}}}.$$

З побудови випливає, що $A_r \subset A_s$, якщо $r<s$. Тоді шукана функція задається формулою

$$f(x) = sup\{0, r{:}\ x \notin A_r\}.$$

Достатність. $U = f^{-1}[0,1/3)$, $V = f^{-1}(2/3, 1]$.

Вправа (*Тітце-Урисон*). Довести, що якщо A - замкнена підмножина нормального простору X, f: $A\to\mathbf{R}$ - неперервна функція, то існує неперервна функція g: $X\to\mathbf{R}$, що $g|_A = f$.

Вправи. 6.1.13-15, 17, 20, 22, 24, 6.2.5, 11-13, 22.

ЛЕКЦІЯ 11.

7. Тихонів добуток, факторпростір.

В цьому параграфі ми познайомимось з двома способами конструювання нових топологічних просторів з старих - добутком просторів та факторпростором.

Нагадаємо, що декартовим добутком двох множин X та Y називається множина пар: $X\times Y = \{(x, y) \mid x\in X, y\in Y\}$, а декартовим добутком множин X_i, $i\in \boldsymbol{N}$ - множина послідовностей $\Pi X_i = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i\in X_i\}$. Кожну таку послідовність можна розглядати як таке відображення $\boldsymbol{N}\to\coprod X_i$, що $i\to X_i$. Через π: $\Pi X_i\to X_i$ будемо позначати проекцію на *i*-ий множник.

Топологічним або *тихоновим* добутком топологічних просторів (X,τ_1) та (Y,τ_2) називається декартовий добуток $X\times Y$ з топологією τ, базу якої складають множини $U\times V$, де $U\in\tau_1$, $V\in\tau_2$. *Топологічним* або *тихоновим* добутком топологічних просторів (X_i,τ_i) називається декартовий добуток ΠX_i з топологією τ, передбазу якої складають множини $\pi^{-1}(U_i)$, де $U_i\in\tau_i$. Топологія τ є найслабшою з усіх топологій на ΠX_i, для яких кожна з проекцій π_i є неперервним відображенням.

Приклади. 1) Добуток $\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}^2$. База $\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$ складається з відкритих прямокутників $\{(a,b)\times(c,d)$: $a<b$, $c,d\}$, а база $\mathbf{R}^2$ - з відкритих куль $\{B(x, r)$: $x\in\mathbf{R}^2$, $r>0\}$. Оскільки кожну кулю можна подати у як об'єднання прямокутників, а кожний прямокутник як об'єднання куль, то обидві бази задають одну і ту саму топологію на площині.

2) Канторова множина $\boldsymbol{K}$ є нескінченим добутком дискретних двоточкових множин. Отже це множина послідовностей $\{(\alpha_i)$: $\alpha_i\in\{0,1\}$, $i\in\boldsymbol{N}\}$ з передбазою топології, що складається з множин $U(\beta_1,\ldots,\beta_n) = \{(\alpha_i)$: $\alpha_1 = \beta_1$, $\ldots$, $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_i\in\{0,1\}$, $i>n\}$. Розглянемо на прямій множину $A = [0,1]\backslash(1/3,2/3)\backslash(1/9,2/9)\backslash(7/9,8/9)\ldots$ Тобто множина A отримана в такій спосіб: відрізок $[0,1]$ розрізається на 3 рівні частини і видаляється середня, відрізки, що залишилися знову розрізаються та 3 частин і видаляються середини і т.д. Відображення f: $\boldsymbol{K}\to A$,

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\alpha_i}{3^i}$$

є гомеоморфізмом.

Вправа. Довести, що топологічний добуток двох хаусдорфових просторів є хаусдорфовим.

Нехай (X,τ) - топологічний простір, Y - множина і f - відображення $X\to Y$. *Фактортопологією* відносно відображення f і топології τ називається найбільш сильна з усіх топологій на множині Y, для яких відображення f неперервне. Нехай тепер ω - відношення еквівалентності на множині X, Y - фактормножина X/ω і f - природна проекція $X\to X/\omega$, яка кожній точці $x\in X$ ставить у відповідність її клас еквівалентності. Тоді *факторпростір* простору (X,τ) за відношенням еквівалентності ω - це фактормножина X/ω, що має фактортопологію відносно відображення f і топології τ . Часто факторпростір позначають так, як і фактормножину, тобто символом X/ω. Якщо відношення еквівалентності ω полягає в тому, що воно ототожнює усі точки з деякої підмножини $A\subset X$ з деякою однією точкою, то факторпростір позначається через X/A.

Приклади. 1) Нехай $D^1=[-1;1]$ - одновимірний диск, $S^0=\{-1;1\}$- нульвимірна сфера. Тоді $D^1/S^0\cong S^1$ - коло.

2) Нехай $I^2=[0;1]\times[0;1]$ - одиничний квадрат, ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;t)$ і $(1;t)$, $t\in I=[0,1]$. Тоді $I^2/\omega\cong S^1\times I$ - *циліндр*.

3) Нехай ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;b)$ з $(1;b)$ і $(a;0)$ з $(a;1)$. Тоді $\mathbf{T}^2=I^2/\omega\cong S^1\times S^1$ - *тор*.

4) Якщо ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;b)$ і $(1;1-b)$, то $MB=I^2/\omega$ - це *лист Мебіуса*.

5) Якщо ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;b)$ з $(1;b)$ і $(a;0)$ з $(1-a;1)$, то $KB=I^2/\omega$ - *пляшка Клейна*.

6) Якщо ω - відношення еквівалентності в I^2, яке ототожнює точки $(0;b)$ з $(1;1-b)$ і $(a;0)$ з $(1-a;1)$, то $\mathbf{R}P^2=I^2/\omega$ - (*дійсна*) *проективна площина*.

7) (Узагальнення 1) Якщо сфера S^{n-1} є межею диска D^n, то $D^n/S^{n-1}=S^n$.

В наведених нижче рисунках до прикладів 1)-7) склеюються сторони з однаковими стрілочками так, щоб стрілочки співпали.

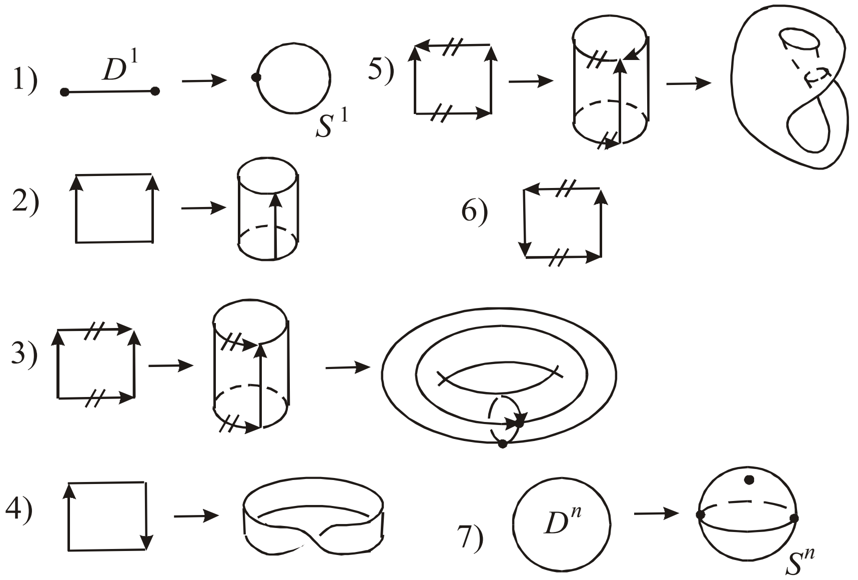

Рис. 1.

Вправи. (КР) 6.1.53-56, 92.

1. Яка поверхня буде одержана, якщо в правильному шестикутнику склеїти протилежні сторони за осьовими симетріями між ними?
2. Скільки різних (не гомеоморфних) поверхонь можна отримати попарно склєюючи сторони чотирикутника, шестикутника?

ЛЕКЦІЯ 12.

8. Компактні простори. Компактифікація.

Покриттям підмножини *A* простору X називається сім'я $\{U_i \subset X\colon\ i \in S\}$ така, що $A \subset \bigcup_{i\in S} U_i$. Покриття називається *відкритим*, якщо всі U_i - відкриті, і *скінченим*, якщо S - скінчена множина.

Приклад. База топології є відкритим покриттям простору X.

Якщо $T \subset S$, то підсім'я $\{U_i \subset X\colon\ i \in T\}$ називається *підпокриттям* покриття $\{U_i \subset X\colon\ i \in S\}$, якщо вона сама є покриттям *A*.

Множина *A* називається *компактною*, якщо довільне її відкрите покриття містить скінчене підпокриття. Топологічний простір компактний, якщо він компактний в собі як підмножина.

Вправи. 1) Довести, що множина $A \subset X$ компактна $\Leftrightarrow$ A компактний простір з індукованою топологією.

2) Довести, що відрізок $[0,1] \subset \mathbf{R}$ - компактний.

Лема. Компактна підмножина хаусдорфового простору є замкненою в ньому підмножиною.

Доведення. Нехай простір X - хаусдорфовий, A - компактна підмножина в X. З аксіоми T_2 випливає, що для довільних $x \in A$, $y \notin A$ існує відкритий окіл $U(x, y)$ точки x і окіл $U(y, x)$ точки y, що $U(x, y) \cap U(y, x) = \varnothing$. Фіксуємо точку $y \notin A$. Тоді $\{U(x, y): x \in A\}$ - відкрите покриття A. З компактності A випливає, що існує скінчене підпокриття $\{U(x_i, y): i = 1,\ldots,n\}$. Тоді $U(y) = \bigcap_{i=1}^{n} U(y, x_i)$ - окіл y і $U(y) \subset X \backslash A$. За 1.6 $X \backslash A$ - відкрита, а отже, A - замкнена. □

Лема. Замкнена підмножина A компактного простору X компактна.

Для доведення необхідно доповнити відкрите покриття A множиною $X \backslash A$ і скористатися компактністю простору X.

Лема. Образ компактного простору при неперервному відображенні є компактним простором.

Доведення. Нехай f: $X \rightarrow Y$ - неперервне відображення простору X, $\{U_i\}$- покриття Y. Тоді $\{f^{-1}(U_i)\}$ - відкрите покриття X. Для нього існує скінчене підпокриття $\{V_1,\ldots, V_n\}$, образ якого $\{f(V_1),\ldots, f(V_n)\}$ - скінчене підпокриття $\{U_i\}$.□

Лема. Нехай f - неперервне і взаємно однозначне відображення компактного простору X в хаусдорфовий простір Y. Тоді f - гомеоморфізм.

Доведення. Нехай U - відкрита в X, $x \in f(U)$. З аксіоми T_2 для Y: $\forall y \in Y | f(U)$ $\exists$ відкриті $U_y \ni x$, $V_y \ni y$, $U_y \cap U_y = \varnothing$. Тоді $\{f^{-1}(V_y)$: $y \in Y | f(U)\}$ відкрите покриття компактної множини $X \backslash U$. Якщо $\{f^{-1}(V_y)$: $y \in \{y_1,\ldots, y_n\}\}$ - його скінчене покриття, то $W = \cap V_y$: $y \in \{y_1,\ldots, y_n\}$ - відкритий окіл x , $W \subset f(U)$. Отже за 1.6 $f(U)$ - відкрита, а f - гомеоморфізм.□

Теорема (*Гейне-Бореля*). Підмножина в $\mathbf{R}^n$ - компактна $\Leftrightarrow$ вона замкнена та обмежена.

Теорема (*Тихонова*). Топологічний добуток довільного числа компактних просторів є компактним простором.

Компактифікацією простору X називається пара $cX = (Y, c)$, де Y - компактний хаусдорфовий простір, а c: $X \rightarrow Y$ - вкладення таке, що $\overline{c(X)} = Y$. Якщо доповнення $Y \backslash c(X)$ складається з однієї точки, то компактифікація називається одноточковою або компактифікацією Александрова.

Вправа. Якщо (X, τ) - некомпактний простір, то покладемо $Y = X\cup\infty$, де ∞ - точка, що не належить X, $\tau_\infty = \tau\cup\{U\cup\infty$: $X\backslash U$ - компактне в $X\}$. Довести, що τ_∞ - топологія на Y і, якщо X - хаусдорфовий локально-компактний простір (кожна точка має компактний окіл), то (Y, c) - компактифікація X, де c: $X\to Y$ - натуральне вкладення. Всі одноточкові компактифікації гомеоморфні.

Приклади. Якщо $\omega = \{0,\ldots,1\}\in S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$, φ: $S^n\backslash\omega\to\mathbf{R}^n$ - стереографічна проекція ($\varphi(x)$ це точка перетину променя ωx з координатною площиною $x_{n+1} = 0$), то (S^n,φ^{-1}) є одноточковою компактифікацією простору $\mathbf{R}^n$.

Теорема. Для хаусдорфового простору X існує компактифікація $\Leftrightarrow$ X - нормальний простір.

9. Класичні топологічні простори.

В цьому параграфі наводяться топологічні простори, які будуть основними прикладами в наступних главах.

Евклідові простори, сфери, диски. Нагадаємо, що евклідів простір $\mathbf{R}^n$ має стандартну (евклідову) топологію. На всіх його підмножинах топологія є індукованою.

$S^{n-1} = \{(x_1,..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$ - одинична n-1-вимірна сфера в $\mathbf{R}^n$,

$D^n = \{(x_1,..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \le 1\}$ -одиничний n-вимірний диск.

Ми будемо ототожнювати комплексну площину $\boldsymbol{C}$ з $\mathbf{R}^2$: $x+iy\leftrightarrow(x,y)$. Простір $\mathbf{C}^n$ ототожнюється з $\mathbf{R}^{2n}$.

Через $\mathbf{R}^\infty$ позначається злічений топологічний добуток просторів $\mathbf{R}$.

Проективні простори. Дійсним n-вимірним *проективним простором* називається сукупність прямих у просторі $\mathbf{R}^{n+1}$, що проходять через початок координат з метрикою, що дорівнює куту між прямими. Проективний простір розмірності n позначається $\mathbf{R}P^n$ або P^n.

Кожна пряма простору $\mathbf{R}^{n+1}$, що проходить через початок координат, задається своїм напрямним вектором, визначеним з точністю до ненульового множника. Таким чином, точки з $\mathbf{R}P^n$ можна розглядати, як впорядковані набори з n+1 дійсних чисел $(x_0,x_1,...,x_n)$ (не рівних одночасно нулю), причому два таких набори $(x_0,x_1,...,x_n)$ і $(x^1{}_0,x^1{}_1,...,x^1{}_n)$ відповідають одній і тій же ж точці $\mathbf{R}P^n$ тоді і тільки тоді, коли існує $\lambda\neq 0$, для якого $(x^1{}_0,x^1{}_1,...,x^1{}_n) = \lambda(x_0,x_1,...,x_n)$. Очевидно, що вказане співвідношення є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності впорядкованих наборів, що знаходяться у взаємно-однозначній відповідності з точками $\mathbf{R}P^n$

позначаються $(x_0{:}x_1{:}...{:}x_n)$ і називаються *однорідними координатами* точок проективного простору.

Оскільки кожна пряма, що проходить через початок координат перетинає сферу S^n по двох діаметрально протилежним точкам, то $\mathbf{R}P^n = S^n/\sim$, де $x\sim -x$, $x\in S^n$. Отже $\mathbf{R}P^n$ може бути отриманий зі сфери S^n, якщо в ній склеїти всі діаметрально протилежні точки. Через $\pi{:}S^n\to\mathbf{R}P^n$ будемо позначати канонічну проекцію.

Розглянемо верхню півсферу $S^n{}_+ = \{x = (x_0,\dots,x_n)\in S^n\colon x_n\geq 0\}$. Проекція її на гіперплощину $x_n = 0$ задає гомеоморфізм між $S^n{}_+$ і D^n. Обмеження π на $S^n{}_+$ задає ще одне представлення проективного простору: $\mathbf{R}P^n = D^n/\sim$, де $x\sim -x$, $x\in\partial D^n = S^{n-1}$. При $n = 2$ це представлення співпадає з описаним в 7.5.

Розглянемо впорядковані набори з $n+1$ комплексних чисел $(z_0,z_1,...,z_n)$ (не рівних одночасно нулю), причому два таких набори $(z_0,z_1,...,z_n)$ і $(z^1{}_0,z^1{}_1,...,z^1{}_n)$ будемо вважати еквівалентними, якщо існує $\lambda\neq 0,\lambda\in\mathbf{C}$, для якого $(z^1{}_0,z^1{}_1,...,z^1{}_n) = \lambda(z_0,z_1,...,z_n)$. Тоді класи еквівалентності будуть утворювати *комплексний проективний простір* $\boldsymbol{C}P^n = \boldsymbol{C}^{n+1}/\sim$.

Многовиди Грасмана. *Многовидом Грасмана або Грасманіаном* $G(n,m)$ називається множина m-вимірних підпросторів в $\mathbf{R}^n$. Відстань між підпростарами визначається як кут між ними. Многовиди Грасмана є узагальненням проективних просторів: $G(n+1,1) = \mathbf{R}P^n$.

Позначимо $M(n)$ - множину квадратних матриць порядку n, яку можна ототожнити з евклідовим простором вимірності n^2. Виявляється, що многовиди Гарсмана гомеоморфні множині проективних матриць:

$$G(n,m) = \{A\in M(n) : A^2 = A,\ A = A^T,\ \mathrm{trace}(A) = m\},$$

де кожній площині ставиться у відповідність матриця проектування на цю площину.

З взаємно-однозначної відповідності між k-вимірними підпросторами і їх ортогональними доповненнями отримаємо рівність: $G(n,m) = G(n,n\text{-}m)$.

Топологічні групи. *Топологічною групою* G називається група G на якій задана топологія така, що групова операція $G\times G\to G$ і взяття оберненого $G\to G$ є неперервними відображеннями. Кожна група буде топологічною групою, якщо на ній задати дискретну топологію. В цьому випадку група називається дискретною. З означення випливає, що при фіксованому $y\in G$ відображення $x\to xy$ є гомеоморфізмом. Група невироджених матриць $GL(n)$ з операцією добутку матриць наділяється індукованою з $M(n) = \mathbf{R}^{n^2}$ топологією.

До компактних класичних груп відносять:

1) $O(n) = \{A\in M(n)\colon AA^T = A^TA = E\}$ - група ортогональних матриць,

2) $SO(n) = \{A\in O(n)\colon \det(A) = 1\}$ - група спеціальних ортогональних матриць,

3) $U(n) = \{A\in M_{\mathbf{C}}(n)\colon AA^* = A^*A = E\}$ - група унітарних матриць,

4) $SU(n) = \{A\in U(n)\colon \det(A) = 1\}$ - група спеціальних унітарних матриць,

5) $Sp(n) = \{A\in M_{\mathbf{H}}(n)\colon AA^* = A^*A = E\}$ - група кватерніоних матриць унітарних перетворень $\mathbf{H}^n$, де $A^* = \bar{A}^T$.

В усіх цих групах операцією є множення матриць, а топологія - індукована.

Класичні поверхні. Прикладами замкнених класичних поверхонь є сфера S^2, тор T^2, проективна площина $\mathbb{R}P^2$, пляшка Клейна KB (означення див. тему 7). З цих поверхонь побудуємо інші за допомогою операції зв'язного сумування.

Нехай D_1 - двовимірний диск, вкладений в поверхню F_1, а D_2 - в F_2, $\varphi\colon\partial D_1\to\partial D_2$ - гомеоморфізм. Під ***зв'язною сумою*** $F_1\#F_2$ поверхонь F_1 і F_2 будемо розуміти поверхню, що виходить з F_1 і F_2 після видалення з них внутрішностей двовимірних дисків і склеюванням країв отриманих дірок за гомеоморфізмом φ:

$$F_1\#F_2 = (F_1\backslash D_1 \cup F_2\backslash D_2)/\sim, \text{ де } x\sim\varphi(x),\ x\in\partial D_1.$$

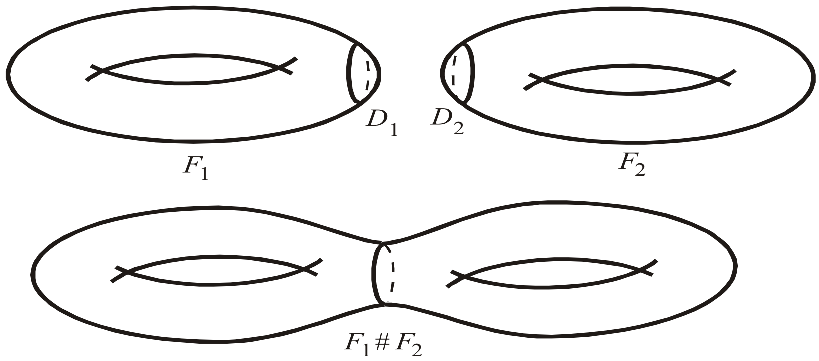

Рис. 2.

Операція зв'язної суми має такі властивості:

1) $F_1\#F_2 = F_2\#F_1$;

2) $(F_1\#F_2)\#F_3 = F_1\#(F_2\#F_3)$;

3) $S^2\#F = F$.

Замкненою орієнтовною поверхнею або кренделем роду g називається зв'язна сума g торів $T^2\#\ldots\#T^2$. Її можна отримати також зі сфери $S^2\subset\mathbf{R}^3$, якщо вирізати в ній $2g$ дірок і заклеїти отримані краї g циліндрами $S^1\times[0,1]$.

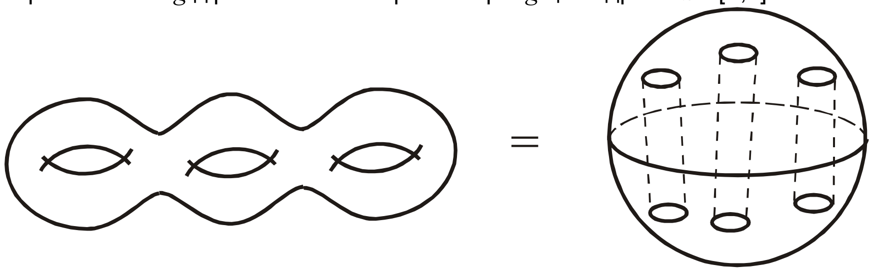

Рис. 3.

Замкненою неорієнтовною поверхнею роду g називається зв'язна сума g проективних площин $\mathbf{R}P^2\#\ldots\#\mathbf{R}P^2$. Її можна отримати зі сфери якщо вирізати в ній g дірок і заклеїти отримані краї g листами Мьобіуса.

Компактні поверхні з краєм це ті, що можна отримати з замкнених поверхонь висвердлюванням в них дірок (викиданням внутрішностей двовимірних дисків, що не перетинаються).

Замкнені та компактні поверхні з краєм будемо називати класичними поверхнями.

Неорієнтовні поверхні характеризуються тим що в них існує проста замкнена крива, окіл якої гомеоморфний листу Мьобіуса. В орієнтовних поверхонь окіл кожної простої замкненої кривої гомеоморфний циліндру. Оскільки лист Мьобіуса не гомеоморфний циліндру, бо ці поверхні мають різне число компонент краю, то кожна неорієнтована поверхня не гомеоморфна орієнтованій.

Опишемо процедуру обернену до зв'язної суми з T^2 чи $\mathbf{R}P^2$. Нехай α - проста замкнена крива в F, що не розбиває поверхню, $U(\alpha)$ - її регулярний окіл. Позначимо F_1 поверхню, що вийде при заклейці компонент краю $F\backslash U(\alpha)$ двовимірними дисками. Якщо $U(\alpha)$ гомеоморфний листу Мьобіуса, то $F = F_1\#\mathbf{R}P^2$, а якщо циліндру, то $F = F_1\#T^2$. Рід поверхні може бути охарактеризований як максимальне число замкнених кривих, що не перетинаються і розрізання поверхні по яких залишає її зв'язною. Отже, поверхні різного роду не гомеоморфні.

Приклади. 1) Проективна площина з дiркою гомеоморфна листу Мьобiуса. Дійсно, $\mathbf{R}P^2 = S^2/\sim$, де $x\sim -x$, $x\in S^2$. Якщо вирізати зі сфери пару діаметрально протилежних дірок і ототожнити діаметрально протилежні точки, то отримаємо лист Мьобіуса.

Корисним є також представлення листа Моьбіуса у вигляді трикутника зі склеєною парою сторін:

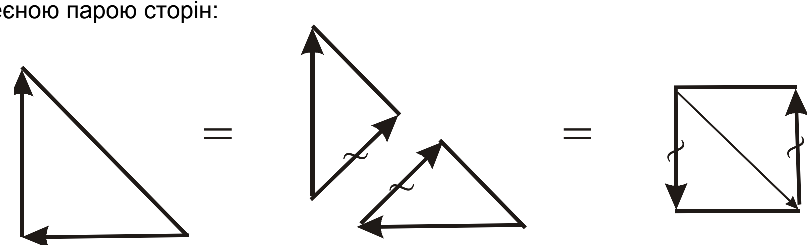

Рис. 4.

2) Пляшка Клейна є замкненою неорінтованою поверхнею роду 2, тобто $BK = \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$. З попереднього приклада випливає, що $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$ гомеоморфно квадрату $I^2/\sim = [0;1]\times[0;1]/\sim$, де $(0;a) \sim (a,\ 1)$ $і$ $(a;0) \sim (1,a)$ для всіх $a\in[0;1]$. Розріжмо квадрат вздовж діагоналі, що з'єднує точку $(0;1)$ з $(1;0)$. Після ототожнення точок $(0;a)$ з $(a,\ 1)$ отримаємо паралелограм, точки сторін якого ототожнюються так само як і в означенні пляшки Клейна.

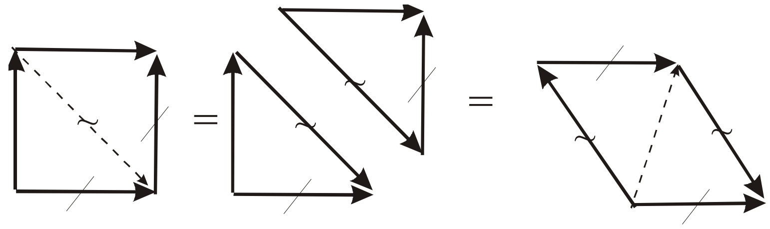

Рис. 5.

Вправи. 1) Доведіть рівності (гомеоморфність просторів):

a) $BK\#\mathbf{R}P^2 = T^2\#\mathbf{R}P^2 = \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$,

b) $BK\#BK = T^2\#BK = \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$.

2) У $2n$-кутнику склеєні (ототожнені) пари сторін. Чи буде отриманий у результаті склейки простір класичною поверхнею? Якщо так, то чи буде вона орієнтована та як визначити її рід?

3) Показати, що кожна класична поверхня може бути отримана із многокутника за допомогою склеювання між собою відповідних пар сторін.

4) Що буде, якщо лист Мебіуса розрізати по середній лінії.

Вправи. 6.4.6, 8, (9, 10), 13, 17, 22, 23 (24).

III. ТЕОРІЯ МНОГОВИДІВ ТА ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

1. **Многовиди**

В цьому параграфі ми вводимо одне з основних понять сучасної математики - многовида, що є k-вимірним аналогом 2-вимірних поверхонь, а також поняття гладкості та орієнтації многовида, поняття многовида з краєм. Почнемо з многовидів, що є підмножинами евклідового простору.

Нехай U, V - відкриті підмножини в $\mathbf{R}^n$. Гомеоморфізм f: $U\to V$ називається ***дифеоморфізмом*** (класу C^m), якщо f і f^{-1} є гладкими відображеннями (класу C^m).

Приклади. Функція $f(x) = \mathrm{tg}\ x$ є дифеоморфізмом з $(-\pi/2,\ \pi/2)$ в $\mathbf{R}$. Функція $f(x) = x^3$ не є дифеоморфізмом з $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$.

Підмноговидом вимірності k в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$ називається підмножина $M\subset\mathbf{R}^n$ така, що для кожної точки $x \in M$ існує її окіл U в $\mathbf{R}^n$ і дифеоморфізм $\varphi: U\to V\subset\mathbf{R}^n$ такі, що $\varphi(U\cap M) = \varphi(U)\cap\mathbf{R}^k$, де $\mathbf{R}^k = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ x_{n-k+1} = 0,\dots,\ x_n = 0\}$. Число n-k називається *ковимірністю* M.

Теорема. (*про неявну функцію для підмноговидів*). Нехай в просторі $\mathbf{R}^n$ задано систему рівнянь

$$f_i(x_1,\dots,x_n) = 0,\ i=1,\dots,m,$$

де f_i – гладкі функції і M – множина розв'язків цієї системи. Якщо ранг матриці $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ всюди на множині M рівний k, то M є підмноговидом розмірності n-k.

Доведення. Нехай $x = (x_1,\dots,x_n)\in M$. За необхідності переставляючи місцями рівняння і координати можемо вважати, що $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{k} \neq 0$ в x.

Тоді знайдеться достатньо малий окіл U точки x , в якому цей визначник не нульовий. В цьому околі решта рівнянь лінійно виражаються через перші k, бо інакше ранг J буде більший за k. Тоді ми можемо замінити систему на систему, що складається з перших k рівнянь. За теоремою про неявну функцію з курсу математичного аналізу знайдуться гладкі функції $x_i = g_i(x_{k+1},\dots,x_n)$, $i = 1,\ \dots,\ n$, що $f_i(g_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots,\ g_k(x_{k+1},\dots,x_n),\ x_{k+1},\dots,x_n) = 0$, $i = 1,\dots,\ k$. Тоді дифеоморфізм φ можна задати формулою:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = (x_{k+1},\dots,x_n,\ x_1\text{-}g_1(x_{k+1},\dots,x_n),\dots,\ x_k\text{-}g_k(x_{k+1},\dots,x_n)).$$

Приклади. 1) сфера, 2) тор.

Топологічний простір M називається (топологічним) ***многовидом розмірності*** n, якщо

1) M – хаусдорфів простір (для будь-яких двох точок існують їх околи, що не перетинаються),

2) *M* задовольняє другій аксіомі зліченості (існує злічена база)

3) *M* – локально евклідів (для будь якої точки існує окіл гомоеморфний відкритій множині $\mathbf{R}^n$).

Останні дві умови можуть бути замінені однією - існує таке злічене покриття $\{U_i\}$ простору M відкритими множинами U_i, що кожне U_i є гомеоморфним відкритій підмножині в $\mathbf{R}^n$. Пари (U_i, h_i), де h_i - гомеоморфізм U_i в $\mathbf{R}^n$, називаються ***картами*** для M; сім'я $\{(U_i, h_i)\}$ карт, що покривають $\mathbf{R}^n$, називається ***атласом***. Відображення h_i задає локальну систему координат $(x_1, \ldots, x_n)$: кожній точці p ставляться у відповідність координати точки $h_i(p)\in\mathbf{R}^n$.

Атлас $\{(U_i, h_i)\}$ на многовиді X називається ***диференційовним атласом*** класу C^k, якщо для будь-яких i, j відображення

$$h_j \cdot h_i^{-1}\colon h_i(U_i \cap U_j) \to \mathbf{R}^n$$

мають неперервні частинні похідні порядку k. Відображення $h_j h_i^{-1}$ називається функцією переходу від карти (U_i, h_i) до карти (U_j, h_j).

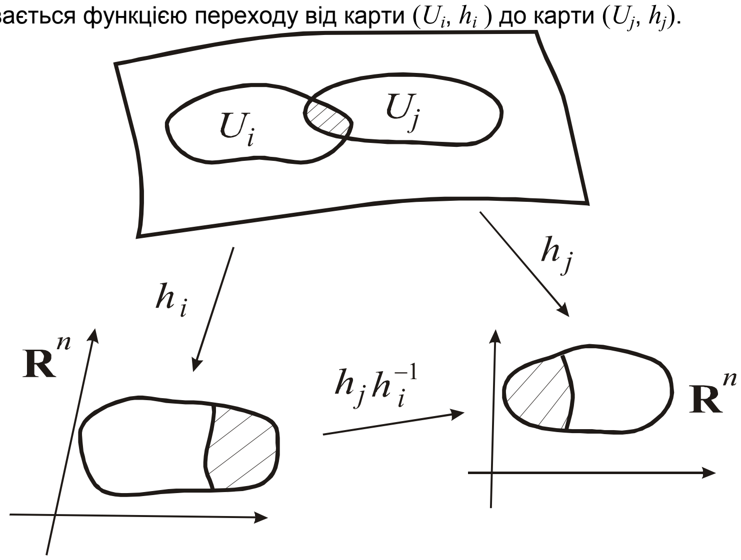

Рис. 7.

Два диференційовані атласи $\{(U_i,\ h_i\ )\}$ і $\{(V_i,\ g_i\ )\}$ класу C^k називаються ***еквівалентними***, якщо їх об'єднання $\{(U_i\ ,h_i\ )\}\ \cup\{(V_i,\ g_i\ )\}$ також є диференційованим атласом класу C^k (перевірте, що це дійсно відношення еквівалентності). Атлас називається максимальним, якщо він містить всі атласи, що еквівалентні йому. ***Диференційованою структурою класу*** C^k на M називається клас еквівалентності диференційованих атласів. Вона задається максимальним атласом. ***Диференційованим многовидом класу*** C^k називається многовид M разом із заданою диференційованою структурою класу C^k.

Гладким многовидом називається диференційовний многовид класу C^∞. Якщо $(U_i,\ h_i\ )$ – деяка карта на многовиді X, то в околі U_i можна ввести ***локальну систему координат*** $(y_1,...,y_n)$, вважаючи координатами $(y^0{}_1,...,y^0{}_n)$ точки $p\in\ U_i$ координати її образа $h_i(p)$ в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$. Отже локальна система координат (або параметризація) задається оберненим відображеннями h_i^{-1}.

Приклади. 1) $\mathbf{R}^n$ є гладким многовидом з однією картою (U,h), $U=\mathbf{R}^n$, $h=Id$.

2) $\mathbf{R}P^n$ є гладким многовидом. Розглянемо в $\mathbf{R}P^n$ області U_q такі, що $x_q\neq 0$ в U_q. В областях U_q введемо локальні координати $y_1^q,...,y_n^q$, вважаючи

$$y_1^q=\frac{x_0}{x_q},...,y_q^q=\frac{x_{q-1}}{x_q},y_{q+1}^q=\frac{x_{q+1}}{x_q},...,y_n^q=\frac{x_n}{x_q}.$$

Області U_q , $q=0,1,2,...,n$ покривають весь проективний простір. Обчислимо функції переходу від області U_i до області U_j (i<j). В області U_i маєм координати ($y_1^i,...,y_n^i$), для яких

$$y_1^i=\frac{x_0}{x_i},...,y_i^i=\frac{x_{i-1}}{x_i},y_{i+1}^i=\frac{x_{i+1}}{x_i},...,y_n^i=\frac{x_n}{x_i}.$$

в області U_j :

В перетині $U_i\cap U_j$ областей U_i і U_j отримаємо $y_1^j=\frac{y_1^i}{y_j^i},y_2^j=\frac{y_2^i}{y_j^i},...,y_i^j=\frac{y_i^i}{y_j^i},...,y_n^j=\frac{y_n^i}{y_j^i}$. Легко перевірити, що якобіан цих функцій не дорівнює нулю. Отже, $\mathbf{R}P^n$ є гладким многовидом.

3) Оскільки комплексний простір $\boldsymbol{C}$ гомеоморфний площині $\mathbf{R}^2$, то аналогічно дійсному випадку можна показати, що $\boldsymbol{C}P^n$ є гладким многовидом вимірності $2n$.

4) Об'єднання двох координатних осей в $\mathbf{R}^2$ не є многовидом, бо в точці їх перетину (початку координат) не існує околу гемеоморфного $\mathbf{R}^n$.

Лема. Графік M_f неперервної функції f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ ($M_f = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$: $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\}$) є n-вимірним многовидом.

Дійсно, M_f покривається однією картою з локальною системою координат, що задається гомеоморфізмом $h(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$.

Лема. Довільна відкрита множина U n-вимірного многовиду M є многовидом.

Дійсно, картами на U будуть перетин карт M з U.

Лема. Декартовий добуток многовидів є многовидом.

Доведення. Нехай $M = M_1 \times M_2$ - декартовий добуток многовидів M_1 та M_2, $(U_1, h_1 : U_1 \to \mathbf{R}^k)$, $(U_2, h_2 : U_2 \to \mathbf{R}^m)$ - карти на M_1 та M_2, відповідно. Тоді , $(U_1 \times U_2, h_1 \times h_2 \colon U_1 \times U_2 \to \mathbf{R}^{k+m})$- карта на M. Тут $(h_1 \times h_2)(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2)) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{k+m}$.

Лема. Якщо M – многовид, а f: $M \to N$ – гомеоморфізм, то N –многовид.

Дійсно, якщо $\{U_i, \varphi_i\}$ – атлас на M, то $\{fU_i, f\varphi_i\}$ – атлас на N, який ми будемо називати *індукованим* відображенням f.

Множина матриць $M(n,k)$ дійсними елементами наділяється стриктурою многовиду завдяки відображенню i: $M(n,k) \to \mathbf{R}^{nk}$, $i((a_{ij})) = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, a_{21}, \ldots, a_{2k}, \ldots, a_{nk}\}$.

Вправа. Довести, що група невироджених матриць $GL(n,\mathbf{R})$, та група спеціальних ортонормованих матриць $SO(n)$ є гладкими многовидами. Обчислити їх розмірність. (Вказівка. Показати, що $GL(n,\mathbf{R})$ є відкритою множиною в $M(n) = \mathbf{R}^{n^2}$ множині всіх квадратних матриць порядку n, та застосувати теорему про неявну функцію для $SO(n)$.)

Нехай (U_i, h_i), (U_j, h_j) – дві карти на гладкому многовиді M. Скажемо, що вони однаково орієнтовані, якщо визначник матриці, складеної з частинних похідних функції переходу $h_j h_i^{-1}$ додатній в кожній точці з перетину $U_i \cap U_j$ (якщо цей перетин зв'язний, то досить перевірити додатність визначника в одній точці). Якщо всі карти атласу однаково орієнтовані, то многовид називається *орієнтованим*. Многовид, на якому існує такий атлас, називається *орієнтовним*, а якщо не існує - *неорієнтовним*.

Вправи. 1) Перевірити, чи орієнтовані наступні многовиди: а) сфера S^n ; в) тор T^2 ; c) проективний простір $\mathbf{R}P^n$; d) комплексний проективний простір CP^n ; е) групи $GL(n,\mathbf{R})$, $SO(n)$; f) пляшка Клейна.

2) Довести, що кожний однозв'язний многовид орієнтовний.

3) Довести, що якщо M – накриваючий простір над гладким многовидом N, то M – гладкий многовид.

4) Показати, що на сфері не можно ввести атлас, що складається з однієї карти.

5) Довести, що такі многовиди гомеомрфні: $\mathbf{R}P^1 \approx S^1$, $\mathbf{C}P^1 \approx S^2$.

6) Довести, що група $SO(3)$ гомеоморфна проективному простору $\mathbf{R}P^3$.

7) Довести, що кожний многовид є локально-компактним простором (кожна точка має компактний окіл).

8) Многовид зв'язний $\Leftrightarrow$ він лінійно-зв'язний.

Крім гладких многовидів часто розглядають кусково-лінійні, комплексні та алгебраїчні многовиди. Це такі топологічні многовиди з атлосом, в якому всі функції переходу є кусково-лінійними, аналітичними та раціональними, відповідно.

Многовидом з краєм називається хаусдорфів простір M, що задовольняє другій аксіомі зліченості і такий, що для будь якої точки існує окіл гомоеморфний відкритій множині $\mathbf{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots, x_n)\colon x_n \geq 0\}$. При цьому множина точок, що відображаються гомеоморфізмом на множину $\{(x_1,\ldots, x_n)\colon x_n = 0\}$ називається краєм многовида M і позначачається ∂M. Доповнення $M \backslash \partial M$ називається внутрішністю многовида. Поняття гладкості та орієнтованості для многовидів з краєм аналогічні, як для многовидів без краю. З означення випливає, що край є многовидом розмірності n-1.

Приклад. n-вимірний диск D^n є многовидом з краєм $\partial D^n = S^{n-1}$.

Замкненим многовидом називається компактний многовид без краю.

Вправи. 14.1-20 з [9].

ЛЕКЦІЯ 14.

2. Гладкі відображення гладких многовидів.

Нехай M і N - гладкі многовиди розмірності m і n і $f\colon M \to N$ - неперервне відображення, $x_0 \in M$. Відображення f називається ***гладким*** в точці x_0, якщо для деякої карти (U, h) на M в точці x_0 і для деякої карти (V, g) в точці $f(x_0)$ відображення $g \circ f \circ h^{-1}\colon W \to \mathbf{R}^n$ належить класу C^∞ (тобто має неперервні часткові похідні всіх порядків), де $W = \{h^{-1}(U \cap f^{-1}(V))\} \subset \mathbf{R}^m$. Якщо $x_1,\ldots, x_m$ - система координат в $\mathbf{R}^m$, а $y_1,\ldots, y_n$ - в $\mathbf{R}^n$, то відображення $g \circ f \circ h^{-1}$ записується у вигляді набору функцій $y_k = f_k(x_1,\ldots, x_m)$, $k = 1,\ldots,n$.

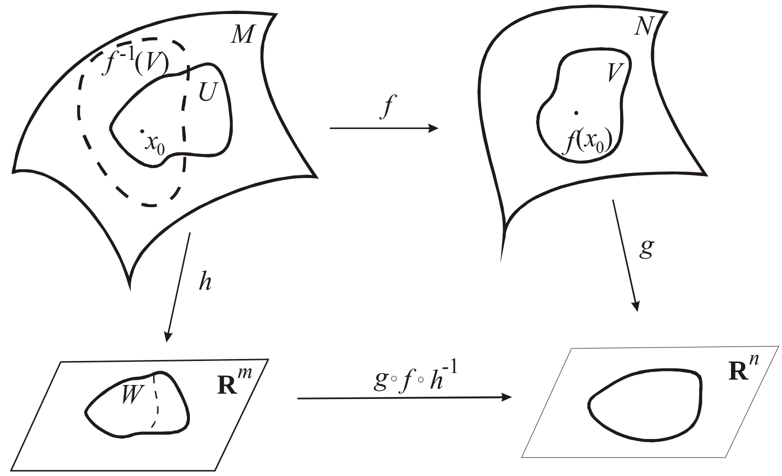

Рис. 8.

Відображення f називається *гладким*, якщо воно гладке у кожній своїй точці.

Якщо $f:M \to N$ - гладке відображення відносно атласів $\{(U_i, h_i)\}$ і $\{(V_i, g_i)\}$, то воно є гладким і відносно еквівалентних атласів $\{(U^1{}_i, h^1{}_i)\}$ і $\{(V^1{}_i, g^1{}_i)\}$. Іншими словами, визначення гладкого відображення не залежить від вибору атласів.

Гладкою функцією на гладкому многовиді M називається гладке відображення $f:M \to \mathbf{R}^1$ многовиду M в многовид $\mathbf{R}^1$ ($V = \mathbf{R}^1$, $g = id$).

Приклади. 1) Нехай тор $T^2 \in \mathbf{R}^3$, утворений обертанням кола навколо осі Oz (стандартне вкладення). Координати X, Y, Z є гладкими функціями на торі.

2) Нехай тор $T^2 \in \mathbf{R}^3$ стандартно вкладений в $\mathbf{R}^3$, відображення f: $T^2 \to S^2$ ставить кожній точці p є T^2 у відповідність одиничний вектор нормалі до тора T в точці р. Тоді f - гладке відображення.

Вправи. 1) Нехай M, L - гладкі многовиди, N - підмноговид, f: $M \to L$ - гладке відображення. Довести, що обмеження $f|_N:N \to L$ - гладке відображення.

2) Довести, що композиція гладких відображень - гладке відображення.

3) Показати, що проекція прямого добутку двох многовидів на кожний співмножник є глладким відображенням.

Нехай X і Y - гладкі многовиди і f: $X \to Y$ такий гомеоморфізм, що обидва відображення f і f^{-1} є гладкими. Тоді f називається *дифеоморфізмом*.

Многовиди X і Y називаються ***дифеоморфними*** якщо між ними існує який-небудь дифеоморфізм. В цьому випадку вони, звичайно ж, мають однакову розмірність.

Приклад. Відображення $(x, y, z) \to (ax, by, cz)$ задає диффеоморфізм одиничної сфери на еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Інші приклади див. 1.2.

Вправа. Довести, що множина $\mathrm{Diff}(M)$ всіх дифеоморфізмів многовида M на себе є групою відносно операції композиції.

Підмножина $N \subset M$ гладкого n-мірного многовиду називається ***підмноговидом*** (розмірності k), якщо N - гладкий многовид, такий що для будь-якої точки $x \in N$ існує карта (U, h) з максимального атласу M, така що $x \in U$, в локальних координатах $x_1,\ldots,x_n$, що визначаються цією картою множина $N \cap U$ задається системою рівнянь $x_{k+1}=0, \ \ldots, \ x_n=0$. При цьому $(N \cap U, h_{|N \cap U})$ входить до максимального атласу N.

Відображення f: $N \to M$ між многовидами називається ***вкладенням***, якщо воно гладке і якщо відображення f:$N \to f(N)$ - дифеоморфізм, де $f(N)$ – підмноговид многовиду M. Якщо N – підмноговид многовиду M, то відображення включення $N \subset M$ є вкладенням.

Лема Уітні. Кожний компактний гладкий замкнений n-вимірний многовид M можна вкласти в $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Вправи. 1) Довести, що гладка функція на гладкому компактному многовиді M може бути подана як координата при деякому вкладенні M в $\mathbf{R}^n$.

2) Довести, що двовимірний замкнений многовид занурюється в $\mathbf{R}^3$.

Теорема. Нехай M - гладкий зв'язний многовид. Тоді для довільних точок x, $y \in M$ існує дифеоморфізм f: $M \to M$ такий, що $f(x)=y$.

Вправа. Довести, що якщо $\dim X < \dim Y$, а f: $X \to Y$ - гладке відображення, то $f(X) \neq Y$.

Групою Лі G називається гладкий многовид G, який є одночасно групою і такий, що групова операція $G \times G \to G$ і взяття оберненого $G \to G$ є гладкими відображеннями.

Приклади груп Лі:

1) Одиничне коло в комплексній площині $S^1 \subset \boldsymbol{C}$. Множення комплексних чисел задає групову операцію на S^1.
2) Матричні групи, які були розглянуті в попередній лекції, є многовидами і, отже, групами Лі.

3. Дотичні вектори. Дотичний простір.

Нехай M – гладкий многовид, $p\in M$. *Кривою* (з початком в точці p) називається таке гладке відображення $c:(a,b)\to M$, що $a<0<b$, $c(0) = p$. Кожна така крива діє на множині $C^\infty(M)$ гладких функцій на M (як похідна за напрямком в точці): $f\to c(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f\circ c$.

Вправа. Довести, що ця дія є диференціюванням, тобто таке лінійне відображення, що $\forall f, g \in C^\infty(M)$: $c(fg) = c(f)\, g + f\, c(g)$.

Нехай (U, h) – карта, в точці p, що задає локальні координати $x_1,\ldots, x_n$. Тоді крива c задається звичайною кривою $h\circ c(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ в $\mathbf{R}^n$. Дві криві c і b називаються *еквівалентними*, якщо рівні їх дотичні вектори в деякій карті: $\frac{d}{dt}(h\circ c) = \frac{d}{dt}(h\circ b)$.

Вправи. 1) Довести, що це означення не залежить від вибору карти (Вказівка: координати векторів помножаються на ту саму матрицю з частинних похідних функцій переходу).

2) Довести, що криві еквівалентні тоді та тільки тоді, коли співпадають індуковані ними диференціювання.

Дотичним вектором називається клас еквівалентності кривої. Множина дотичних векторів в точці p називається *дотичним простором* в точці p і позначається T_pM. Нехай $\frac{\partial}{\partial x_i}$ - дотичний вектор до координатної лінії $x_1 = 0,\ldots, x_{i-1} = 0,\ x_i = t,\ x_{i+1} = 0,\ \ldots, x_n = 0$. Покоординатне додавання кривих та множення на число індукують лінійні операції на множені T_pM.

Таким чином, простір T_pM є n-вимірним векторним простором з базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Якщо, крива c задається рівнянням $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, то $\{x_1'(t), \ldots, x_n'(t)\}$ – координати дотичного до неї вектора в цьому базисі.

Конструкція. Дослідимо як перетворюються координати дотичного вектора при зміні системи координат. Нехай $y_1,\ldots, y_n$- інша система координат в точці p; $y_1 = y_1(x_1,\ldots, x_n),\ \ldots,\ y_n = y_n(x_1,\ldots, x_n)$-функції переходу. Тоді рівняння кривої c в новій системі координат буде

$$y_1 = y_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, y_n = y_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} x_j' .$$

Отже при переході до нової системи координат вектор-стовпчик координат дотичного вектору множиться на матрицю $J = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$, яка називається матрицею Якобі функцій переходу.

Нехай f: $M \to N$ – гладке відображення гладких многовидів, $p \in M$. Тоді відображення f індукує відображення df_p: $T_pM \to T_{f(p)}N$ дотичних просторів: якщо c – крива, що задає вектор в точці p, то композиція $f \circ c$ є кривою, що задає вектор в точці $f(p)$. Відображення df_p називається *диференціалом* відображення f в точці p. Це відображення називають також *дотичним* відображенням і позначають T_pf.

Вправи. 1) Довести, що відображення df_p визначено коректно, є лінійним відображенням і в локальних координатах може бути задано формулою

$$df_p(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} a_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} a_k\} ,$$

де $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$– локальний запис відображення f.

2) Довести, що якщо M_1, M_2, M_3 –гладкі многовиди, а f: $M_1 \to M_2$, f: $M_2 \to M_3$ -гладкі відображення, то $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.

3.9**. Твердження**. Якщо f – дифеоморфізм, то df_p - ізоморфізм.

3.10**. Вправа.** Довести, що при $n \neq m$ простори $\mathbf{R}^n$ і $\mathbf{R}^m$ не диффеоморфні.

Точка $x \in M$ буде *регулярною* точкою відображення f, якщо ранг матриці $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ максимальний. Не регулярні точки називаються *критичними* або *особливими*.

Вправи. 1) Нехай X^n - замкнений многовид, $f : X^n \to Y^n$ - гладке відображення, $y_0 \in Y$ - регулярна точка відображення f. Довести, що прообраз $f^{-1}(y_0)$ складається з cкінченого числа точок.

2) Нехай $f : SO(n) \to S^{n-1}$ - відображення, яке ставит кожній ортогональній матриці у відповідність її перший стовбець. Довести, що у відображення f всі точки регулярні. Знайти прообраз $f^{-1}(y)$.

Відображення f: $M \to N$ називається *зануренням*, якщо для довільної точки $p \in M$ диференціал відображення df: $T_pM \to T_{f(p)}N$ є мономорфізмом, тобто ізоморфізмом на підпростір простору $T_{f(p)}N$. Так, крива буде зануренням, якщо дотичні вектори в кожній її точці не нулові.

Вправа. Довести, що занурення замкненого многовида є вкладенням, якщо воно є ін'єкцією.

Дотичним розшаруванням многовида M називається незв'язне об'єднання $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ дотичних просторів разом з канонічною проекцією π: $TM \to M$ такою, що $\pi(T_pM) = \{p\}$. При цьому TM наділяється структурою многовиду: кожна карта (U, h) на M індукує карту $(U \times \bigcup_{p \in U} T_pM, H)$, де гомеоморфізм H задається формулою

$$H(p, v) := (h(p), (v_1, \dots, v_n)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Тут v_i – коефіцієнти (координати) вектора v в розкладі його за базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ простору T_pM.

Вправа. Показати, що TM є гладким многовидом (розмірності $2n$), а відображення π - гладким відображенням многовидів.

Конструкція. Нехай многовид M вкладений в $\mathbf{R}^N$ (існування такого вкладення випливає з леми Уітні). Тоді дотичне розшарування $TM = \{(p,v) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid p \in M, v \in T_pM\}$ є многовидом, вкладеним в $\mathbf{R}^{2N}$.

Вправи. 1) Довести, що $TS^1 \cong S^1 \times \mathbf{R}^1$.

2) Нехай f: $M \to N$ - гладке відображення гладких многовидів. Довести, що відображення df: $TM \to TN$ є гладким.

Нехай f: $M \to N$ - гладке відображення гладких многовидів, L - підмноговид многовида N. Відображення f називається *трансверсальним* до L *в точці* $p \in M$, якщо $p \notin L$ або $df(T_pM) + T_{f(p)}L = T_{f(p)}N$. Відображення f *трансверсальне* до L, якщо воно трансверсальне в кожній точці $p \in M$. Підмноговид $L_1 \subset N$ називаються трансверсальним до підмноговида , $L_2 \subset N$, якщо відображення вкладення i: $L_1 \to N$ є трансверсальним до L_2. Очевидно, що якщо L_1 трансверсальний до L_2, то L_2 трансверсальний до L_1. Про трансверсальні підмноговиди також кажуть, що вони знаходяться у загальному положені.

Приклади. Якщо $dim\ L_1 + dim\ L_2 < dim\ N$, то L_1 трансверсальний до $L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Якщо f: $M \to N$ - субмерсія, то f трансверсальне до будь-якого підмноговида $L\subset N$. На двовимірному многовиді (поверхні) дві криві трансверсальні $\Leftrightarrow$ вони не мають точок дотику.

Вправи. 15.1-24 з [9].

Лекція 15.

4. Означення та приклади тензорів

Означення тензора.

Нехай V - векторне поле розмірності n над $\mathbf{R}$.

Тензором типу k, m над векторним простором V називається полілінійне (лінійне за кожною координатою) відображення декартового добутку

$$T: V\times V\times\ldots\times V\times V^{*}\times V^{*}\times\ldots\times V^{*}\to\mathbf{R},$$

в якому k співмножників V і m співмножників V^*.

Кажуть, що тензор є k разів контраваріантним і m разів коваріантним. Число $k+m$ називається *валентністю* тензора. Якщо $m=0$, то тензор називається контраваріантним, а якщо $k=0$, то - коваріантним.

Якщо $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис векторного простору V, то тензор задається масивом чисел $T^{i_1 i_2\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_m}$. Ці числа називаються компонентами тензора.

Кажуть, що на многовиді M задано тензор типу k,m, якщо в кожній точці $p\in M$ задано тензор k,m над TM_p. Тензори на многовидах також називають тензорними полями.

ДОМОВЛЕНІСТЬ: *Якщо в виразі, що містить компоненти тензорів зустрічаються однакові індекси зверху та знизу, то по цих індексах проводиться сумування* (*знак суми не пишеться*). Наприклад,

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n.$$

Тензорний закон перетворення. При переході до нового базису компоненти тензора змінюються за формулою

$$T^{i_1' i_2' \ldots i_k'}_{j_1' j_2' \ldots j_m'} = \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{i_2'}}{\partial x^{i_2}}\cdots\frac{\partial x^{i_k'}}{\partial x^{i_k}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}}\cdots\frac{\partial x^{j_m}}{\partial x^{j_m'}}T^{i_1 i_2\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_m}.$$

Оскільки, на практиці тензори задаються своїми компонентами, то часто тензор означають як масив чисел $T^{i_1 i_2\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_m}$ в даному базисі, для якого виконується тензорний закон перетворення.

Приклади тензорів:

1) *Функції на многовиді - тензори валентності* 0. Значення функції в точці не залежить від вибору системи координат.

2) *Векторні поля на многовидах - контраваріантні тензори валентності* 1.

Скажемо, що на многовиді M задано *векторне поле* X, якщо в кожній його точці *p* задано дотичний вектор $v_p \in T_pM$. Таким чином векторне поле це відображення X: $M \to TM$ таке, що композиція $\pi X = Id$ - тотожне відображення.

В кожній карті з координатами $x_1, \dots, x_n$ векторне поле задається функціями $X_i = X_i(x_1, \dots, x_n)$ – координатами векторів за базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Векторне поле буде *гладким*, якщо всі ці функції є гладкими. Надалі, якщо не сказано інше, будемо вважати всі векторні поля гладкими.

Оскільки кожний вектор можна розглядати як диференціювання (похідну за напрямком), то завдання векторного поля рівносильне завданню диференціювання гладких функцій X: $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Траєкторією векторного поля називається така крива, що дотичний вектор в будь-якій точці цієї кривої співпадає з вектором поля X в цій точці.

В карті з координатами $x_1, \dots, x_n$ траєкторія є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$x_k' = X_k(x_1, \dots, x_n),\ k=1, \dots, n \qquad (*)$$

З теореми про існування та єдиність розв'язків системи диференціальних рівнянь випливає, що через кожну точку проходить єдина траєкторія $x_i = x_i(t)$. Траєкторія називається *повною*, якщо вона визначена для всіх $t \in \mathbf{R}^1$. Векторне поле називається *повним*, якщо через кожну точку многовиду проходить повна траєкторія. Кожне векторне поле на замкненому многовиді є повним.

Можливі три типа траєкторій на многовиді:

1) *особливі точки* – стале відображення прямої в точку. Це ті точки, в яких векторне поле дорівнює 0.
2) *прості траєкторії* – вкладення прямої або інтервалу (образ траєкторії гомеоморфний прямій)
3) *замкнені* (*або періодичні*) *траєкторії* – замкнені криві.

Нехай M – замкнений многовид. Будемо позначати через $\varphi_t(p)$, $t \in \mathbf{R}$ – таку траєкторію, що $\varphi_0(p) = p$. Зафіксуємо $t \in \mathbf{R}$. Тоді маємо відображення $\varphi_t: M \to M$. Покажемо, що це відображення є дифеоморфізмом. Дійсно, існує обернене відображення $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. Гладкість відображення φ_t, а також його оберненого випливає з того, що розв'язок диференціального рівняння гладко залежить від початкових умов.

Набір дифеоморфізмів $\varphi_t: M \to M$, $t \in \mathbf{R}$ називається *однопараметричною групою дифеоморфізмів* або *потоком*, якщо

1) $\varphi_0 = Id$,

2) $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$, $\forall\ t\in\mathbf{R}$,

3) $\varphi_{t+s} = \varphi_t\varphi_s$, $\forall\ t, s\in\mathbf{R}$.

Очевидно, що кожне векторне поле на замкненому многовиді породжує потік. Навпаки, кожний потік задає криві $\varphi_t(p)$ для кожного *p*, а отже і векторне поле, що складається з дотичних векторів до цих кривих. Отже векторне поле можна завдавати такими способами:

1) відображення X: $M\to TM$ таке, що $\pi X = Id$,
2) диференціювання гладких функцій X: $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$,
3) система диференціальних рівнянь (*),
4) потік(однопараметрична група дифеоморфізмів) φ_t:$M\to M$.

Множину всіх гладких векторних полів, заданих на многовиді M, будемо позначати Г(*M*).

Вправа. Нехай *p* – неособа точка векторного поля X ($X_p\neq 0$). Довести, що існує система координат $(x_1,\ldots, x_n)$ в точці *p*, така, що $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$.

Вправа. Пересвідчитись, що для координат вектора виконується тензорний закон перетворення.

3) *Диференціальна* 1*-форма - коваріантний тензор валентності* 1.

Диференціальна 1-форма в локальній системі координат має вигляд $\omega = a_i dx^i$. Наприклад, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Тензорний закон перетворення випливає з формули для диференціювання складної функції $\dfrac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

4) *Ріманова метрика - коваріантний тензор валентності* 2.

Якщо в кожної точки $x\in M$ задано скалярний добуток (білінійне симетричне додатно визначене відображення) в дотичному просторі T_xM, який неперервно залежить від точки, то кажуть, що на многовиді задано ріманову метрику. У фіксованій карті $(U,\ h)$ ріманова метрика задається матрицею $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, $x\in M$.

Прикладом ріманової метрики є перша квадратична форма поверхні в тривимірному просторі.

Нехай $x(t) = \{x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\}$, $t\in(a,\ b)$ – рівняння кривої α в локальній системі координат $x_1, \ldots, x_n$. Довжиною кривої α називається число

$$s(\alpha)=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}g_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}}dt.$$

Вправа. Перевірити, що це означення не залежить від вибору системи координат.

З курсу лінійної алгебри відомо, що скалярний добуток $g{:}V\times V\to\mathbf{R}$ на векторному просторі V задає його ізоморфізм на спряжений простір V^*: $v\in V \to v^*\in V^*$, $v^*(w)=g(v,w)$. Вектор v називається *двоїстим* до лінійного відображення v^*.

Якщо $f{:}M\to\mathbf{R}$ – гладка функція, то визначимо для $x\in M$ вектор $grad\,f(x)\in T_xM$ як двоїстий до лінійного відображення df: $T_xM\to\mathbf{R}$. Отримане векторне поле $grad\,f$ називається *градієнтним полем* функції f. Це поле залежить від вибору ріманової метрики.

Якщо M – відкрита підмножина евклідового простору $\mathbf{R}^n$ зі стандартною метрикою, то

$$\mathrm{grad}\ f(x)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right\}.$$

Очевидно, що $grad\,f(x)=0$ тоді та тільки тоді, коли точка x є критичною точкою функції f. В регулярних точках вектор $gradf(x)$ ортогональний до поверхні рівня $f^{1}(f(x))$.

Вправа. Довести, що функція f є неспадною на кожній траєкторії векторного поля $grad\,f$.

5. Операції з тензорами.

1) *Додавання тензорів однакового типу*.

Додавати можна тільки тензори однакового типу. Додаються компоненти з однаковими індексами

$$U_{i_1...i_p}^{j_1...j_q}+V_{i_1..i_p}^{j_1...j_q}=W_{i_1...i_p}^{j_1...j_q}$$

Запис U+$V=W$. Сума тензорів - тензор того ж типу, що і доданки. Для додавання, очевидно, виконується комутативність. Аналогічно визначається віднімання тензорів.

2) *Множення тензорів*.

Множити можна тензори довільного типу. Операція множення задається формулою

$$U_{i_1...i_p}^{j_1...j_q}V_{k_1...k_r}^{l_1...l_s}=W_{i_1...i_pk_1...k_p}^{j_1...j_ql_1...l_s}$$

Позначення $U \otimes V = W$. Добуток тензорів - тензор, валентність якого дорівнює сумі валентностей множників, причому окремо складають число як верхніх, так і нижніх індексів. Комутативність, взагалі кажучи. не виконується.

3) *Згортка тензора*.

(Для одночасно ко- та контраваріантних тензорів) ототожнюємо будь яку пару індексів, один із яких верхній, другий – нижній. За цими індексам (після ототожнення по одному) необхідно виконувати сумування. Наприклад, для тензора типу $(3, 2)$ згортка за другим нижнім та другим верхнім індексами задається формулою

$$U_{ikj}^{ik} = V_{ij}^{l}$$

Результат – тензор валентності на 2 меншої за валентність початкового тензора.

4) *Підстановка індексів*.

Виконавши якусь підстановку індексів (одночасно верхніх або нижніх) тензорa, отримують інший тензор, компоненти якого дорівнюють компонентам початкового тензору, але стоять ці компоненти на різних місцях.

5) *Симетрування тензорів*.

Нехай T_{ijklms}^{ab} - якийсь тензор. Фіксуємо якусь кількість його індексів одночасно верхніх або нижніх). Нехай це будуть $j,l,m.$ Утворюємо наступний тензор:

$$U_{ijklms}^{ab} = \mathrm{T}_{i(j|k|lm)s}^{ab} = \frac{1}{3!}(T_{ijklms}^{ab} + T_{ilkmjs}^{ab} + T_{imkjls}^{ab} + T_{ilkjms}^{ab} + T_{ijkmls}^{ab} + T_{imkljs}^{ab}).$$

Тензор U_{ijklms}^{ab} симетричний за всіма індексами $j,l,m.$ Така операція називається симетруванням тензора.

6) *Альтернація тензорів*.

Цю операцію легко зрозуміти з наступної рівності

$$V_{ijklms}^{ab} = \mathrm{T}_{i[j|k|lm]s}^{ab} = \frac{1}{3!}(T_{ijklms}^{ab} + T_{ilkmjs}^{ab} + T_{imkjls}^{ab} \text{-}(T_{ilkjms}^{ab} + T_{ijkmls}^{ab} + T_{imkljs}^{ab})).$$

Знак з яким компонента входить в суму додатний, якщо підстановка індексів - парна, і від'ємний, якщо вона непарна.

Тензор V_{ijklms}^{ab} кососиметричний за індексами $j,m,l.$ Якщо тензор вже був симетричний (кососиметричний) за деякими індексами, то його симетрування (альтернація) за цими індексами не змінює його.

7) *Захоплення відображенням контраваріантного тензора*.

Для гладкого відображення $f{:}M \to N$ i тензора $U = U^{i_1 \dots i_m}$ на M визначимо тензор $V = f_* U$ на N захоплений відображенням f за формулою

$$V^{j_1\dots j_m}=\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial f^{j_m}}{\partial x^{i_m}}U^{i_1\dots i_m},$$

де $y^j = f^j(x^1,\dots, x^n)$ - локальне зображення відображення f.

8) *Антизахоплення коваріантного тензора*.

Для гладкого відображення $f:M\to N$ і тензора $V=V_{i_1\dots i_m}$ на N визначимо тензор $U=f^*V$ на M антизахоплений f за формулою

$$U_{j_1\dots j_m}=\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial f^{i_m}}{\partial x^{j_m}}U_{i_1\dots i_m},$$

де $y^j = f^j(x^1,\dots, x^n)$ - локальне зображення відображення f.

Вправа. Перевірити коректність означення захоплення та антизахоплення.

Вправи. 5.1.1-8, 14.

Лекція 16.

6. Зв'язність на многовидах. Коваріантна похідна

Означення. Нехай M - гладкий многовид, $\gamma:[0,1]\to M$ - шлях, $x=\gamma(0)$, $X\in TM_x$. Задамо операцію паралельного перенесення вектора X вздовж кривої γ формулою

$$dX^k=-\Gamma^k_{ij}d\gamma^i X^j.$$

Коефіцієнти Γ^k_{ij} називаються коефіцієнтами зв'язності. Многовид на якому задана зв'язність Γ^k_{ij} називається афінним. З теореми про існування та однозначність розв'язку звичайного диференціального рівняння випливає, що операція паралельного перенесення є коректно визначеною.

Природно вимагати, щоб паралельний перенос не залежав від вибору системи координат.

Лема. Паралельний перенос не залежить від системи координат $\Leftrightarrow$ при заміні координат функції Γ^k_{ij} змінюються за формулою

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}-\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i\partial x^j}.$$

Лема показує, що коефіцієнти зв'язності не утворюють тензор.

Вправа. Довести, що різниця компонент двох зв'язностей утворює тензор.

Означення. Коваріантною похідною векторного поля X називається вираз

$$\nabla_i X^k=\frac{\partial X^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}X^j.$$

Для довільного тензора T коваріантна похідна задається формулою

$$\nabla_i T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_m} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_m}}{\partial x^i} + \Gamma^{i_1}_{is} T^{si_2\dots i_k}_{j_1\dots j_m} + \dots + \Gamma^{i_k}_{is} T^{i_1\dots i_{k-1}s}_{j_1\dots j_m} - \Gamma^{s}_{ij_1} T^{i_1\dots i_k}_{sj_2\dots j_m} - \dots - \Gamma^{s}_{ij_m} T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_{m-1}s}.$$

Зв'язність Леві-Чевіта. Це зв'язність, що породжена рімановою метрикою. Аналогічно, як для поверхонь маємо такі означення:

$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ - символи Кристофеля першого роду;

g^{ij} - двічи контраваріантний метричний тензор, що визначається з системи рівнянь $g_{ij} g^{ik} = \delta^k_j$;

$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij}$ – коефіцієнти зв'язності або символи Кристофеля другого роду.

Приклад. В гіперболічному півпросторі (u,v,w), $w>0$, з рімановою метрикою $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}$ не нульові коефіцієнти зв'язності $\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{33} = -\frac{1}{w}$, $\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \frac{1}{w}$. При паралельному переносі з точки $(0, 0, 1)$ в точку $(0, 0, 2)$ за кривою $u = 0$, $v = 0$ вектор $\{a, b, c\}$ перейде у вектор $\{2a, 2b, 2c\}$.

7. Тензори кривини та скрута

Для частинних похідних друга похідна не залежить від порядку диференціювання: $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$. Для коваріантних похідних схожа рівність, взагалі кажучи, не виконується. Тому знайдемо різницю других похідних:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) X^k = \nabla_i\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{jp} X^p\right) - \nabla_j\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ip} X^p\right) =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^k_{jp}}{\partial x^i} X^p + \Gamma^s_{pj}\Gamma^k_{si} X^p - \frac{\partial \Gamma^k_{ip}}{\partial x^j} X^p - \Gamma^s_{pi}\Gamma^k_{sj} X^p = R^k_{p,ij} X^p,$$

де

$$R^k_{p,ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{jp}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{ip}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{pj}\Gamma^k_{si} - \Gamma^s_{pi}\Gamma^k_{sj}$$

Ця величина залежить від чотирьох індексів і називається *тензором кривини*.

Вправа. Перевірити, що для тензора кривини виконується тензорний закон перетворення.

Для рімanових многовидів тензор $R_{pq,ij} = R^k_{p,ij} g_{kq}$ називається коваріантним тензором кривини.

Вправа. * Довести, такі властивості коваріантого тензора кривини:

1) $R_{pq,ij} = R_{ij,pq} = -R_{qp,ij} = -R_{pq,ji}$, 2) $R_{[pq,k]l} = 0$.

Вправа.* Довести, що для поверхні в тривимірному просторі

$$K = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}$$

На відміну від символів Кристофеля для поверхні, коефіцієнти зв'язності можуть бути не симетричні за i та j. Але їх різниця

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

утворює тензор, що називається *тензором скрута*. Тензорний закон перетворення випливає з формули для перетворення Γ^k_{ij}.

Вправи. 5.1.23, 26, 27, 5.2.14, 36-40.

Література.

1. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х., 1995.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. -М., 1985
3. Кованцов Н.И. Дифференциальная геометрия. -К., 1973.
4. Кованцов Н.И. и др. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: Сб. задач. - К., 1989
5. Куратовский К. Топология. – *М.*, 1966. – Т. 1.
6. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. – *М.*, 1981.
7. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – *М.*, 1980.
8. Пришляк О.О. Теорія Морса. - К. 2002
9. Топологія. Методичні вказівки. Упорядн. Кочаровський В.Г., Пришляк О.О. - К. 1998.

Додаток. Основні інваріанти деяких поверхонь

Назва поверхні	Поверхня дотичних	Поверхня бінормалей	Прямий гелікоїд	Поверхня обертання	Гіперболіч парабалоїд	Площина Лобачевського
Рівняння x	$\rho(s)+v\tau(s)$	$\rho(s)+v\beta(s)$	$u\cos v$	$x(s)\cos v$	u	
y			$u\sin v$	$x(s)\sin v$	v	
z			$h v$	$z(s)$	uv	
$E=g_{11}$	$1+k^2v^2$	$1+\text{æ}^2v^2$	1	1	$1+v^2$	$1/u^2$
$F=g_{12}$	1	0	0	0	uv	0
$G=g_{22}$	1	1	u^2+h^2	x^2	$1+u^2$	$1/u^2$
$L=b_{11}$	$\text{æ}k^2v^2/\lvert kv\rvert$	$(v\text{æ}'-k-kv^2\text{æ}^2)/\sqrt{\Delta}$	0	$x'z''-z'x''=k$	0	
$M=b_{12}$	0	$\text{æ}/\sqrt{\Delta}$, де $\Delta=1+v^2\text{æ}^2$	$\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$	
$N=b_{22}$	0	0	0	$x'z'$	0	
K	0	$-\text{æ}^2/\Delta^2$	$\frac{-h^2}{(u^2+h^2)^2}$	$-x'x''/x^2$	$\frac{-1}{(1+u^2+v^2)^2}$	-1
H	$\text{æ}/(2\lvert kv\rvert)$	$b_{11}/2\Delta$	0	$\frac{kx^2+x'z'}{2x^2}$	$\frac{-uv}{\sqrt{1+u^2+v^2}^3}$	
Γ_{11}^1	$1/v+k'/k$	$\text{ææ}'v^2/\Delta$	0	0	0	$-1/u$
Γ_{12}^1	$1/v$	$(1-1/\Delta)/v$	0	0	$\frac{v}{1+u^2+v^2}$	0
Γ_{22}^1	0	0	$-u$	$-xx'$	0	$1/u$
Γ_{11}^2	$-1/v-k^2v-k'/k$	$-v\text{æ}^2$	0	0	0	0
Γ_{12}^2	$-1/v$	0	$\frac{u}{u^2+h^2}$	x'/x	$\frac{u}{1+u^2+v^2}$	$-1/u$
Γ_{22}^2	0	0	0	0	0	0

Зміст

Вступ 3

I. Теорія кривих 3

1. Криві в R^n. Дотичний вектор. 5
2. Дотична. Довжина кривої, натуральна параметризація. 7
3. Довжини дуг в різних системах координат. Ріманова метрика. 8
4. Базис Серре-Френе. Формули Френе. 10
5. Кривина і скрут. 12
6. Лінії, що задані загальними рівняннями. Особливі точки 13
7. Дотикання кривих. Обвідна. Еволюта та евольвента 15

II. Теорія поверхонь 15

1. Поверхні. Дотична площина та вектор нормалі. 17
2. Перша квадратична форма. Ізометричні поверхні. 18
3. Друга квадратична форма, нормальна кривина. 19
4. Голвні кривини. Індикатриса Дюпена. Гаусова та середня кривини. 21
5. Класифікація точок на поверхні. 21
6. Дериваційні рівняння Вейнгартена. Символи Кристофеля. 24
7. Формули Гауса та Петерсона-Кодацці. Теорема Боне. 26
8. Лінії кривини та асимптотичні лінії. 27
9. Геодезичні лінії. 29

III. Загальна топологія 29

1. Топологічний простір 31
2. База та передбаза. Підпростір 32
3. Замкнені множини. Замикання та внутрішність 34
4. Неперервні відображення, гомеоморфізми 35
5. Зв'язність та лінійна зв'язність 38
6. Аксіоми відокремлення 40
7. Тихонів добуток, факторпростір 42
8. Компактні простори. Компактифікація 44
9. Класичні топологічні простори 49

IV. Теорія многовидів та тензорний аналіз 49

1. Многовиди 53
2. Гладкі відображення гладких многовидів 56
3. Дотичні вектори. Дотичний простір 59
4. Означення та приклади тензорів 63
5. Операції з тензорами 64
6. Зв'язність на многовидах. Коваріантна похідна 66
7. Тензори кривини та скруту ***67***

Література

Додаток. Основні інваріанти деяких поверхонь

Навчальне видання

ПРИШЛЯК Олександр Олегович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Курс лекцій

Редактор

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"

01033, **Київ, б-р Т.Шевченка,** 14, **кімн.**43, **тел. (**38044**)** 221 3222;
(38044**)** 224 9972
факс (38044**)** 234 2290.

Підписано до друку . Формат 60**х**84/16. **Вид. №** 334.
Друк офсетний. Наклад 100. **Умовн.друк.арк . Обл.-вид. арк.** 5,0
Зам. 22-695