УДК 517.9

АСИМПТОТИКА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З ВИРОДЖЕННЯМИ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГРАНИЧНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ

С. П. Пафик

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9

В. П. Яковець

Ун-т менеджменту освіти Нац. акад. пед. наук України
Україна, 01601, Київ, вул. Артема, 52-а

We construct an asymptotic expansion for a fundamental system of solutions of a linear singularly perturbed system of differential equations of order m with a degenerate principal matrix at higher order derivatives. We also study the case where the corresponding characteristic polynomial has multiple spectrum. We prove that the asymptotic expansions are constructed, in this case, in fractional powers of the small parameter. Recurrence formulas for finding coefficients in these expansions are obtained.

Побудовано асимптотичне розвинення фундаментальної системи розв'язків лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь m-го порядку з виродженою головною матрицею при старших похідних. Досліджено випадок, коли відповідний характеристичний поліном має кратний спектр. Встановлено, що в цьому випадку асимптотичні розвинення будуються за дробовими степенями малого параметра. Виведено рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів цих розвинень.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh} A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m} + \varepsilon^{(m-1)h} A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + A_0(t,\varepsilon)x = 0, \qquad (1.1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, — дійсні або комплекснозначні $(n\times n)$-матриці, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Припускаємо, що виконуються наступні умови:

1°) матриці $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\ge 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), \quad i=\overline{0,m}; \qquad (1.2)$$

2°) матриці $A_i^{(k)}(t)$, $i=\overline{0,m}$, $k=0,1,\ldots,$ — нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

3°) $\det A_m^{(0)}(t) = 0 \; \forall t \in [0;T]$;

4°) гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t) \tag{1.3}$$

системи (1.1) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратності p і один нескінченний — кратності $q = mn - p$;

5°) $\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right) \neq 0\ \forall t \in [0;T]$, де $\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)$ — елементи нуль-просторів матриці $A_m^{(0)}(t)$ і спряженої до неї $(A_m^{(0)}(t))^*$ відповідно.

Символом $(x,\ y)$ тут і далі позначається скалярний добуток в n-вимірному комплексному просторі.

Питання побудови асимптотичних розв'язків системи (1.1) за степенями малого параметра вивчалось різними авторами [1–8]. Однак вони розглядали в основному системи рівнянь другого порядку. Системи ж рівнянь вищих порядків досліджувались лише в найпростіших випадках і, як правило, за умови, коли матриці $A_i(t,\varepsilon),\ i = \overline{1, m-1}$, нульові, а $A_m(t,\varepsilon)$ — одинична [9]. Більш загальну систему при $h = 1$ з одиничною матрицею при старшій похідній розглянуто у [10], де для побудови асимптотичних розв'язків використано розклад характеристичного полінома даної системи на лінійні множники. При цьому вивчався випадок, коли характеристичний поліном має простий спектр.

У даній роботі вперше розглядається випадок кратного спектра. Для дослідження асимптотики лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) використовується теорія поліноміальних матричних в'язок, викладена у [13]. У пункті 2 доведено основну теорему, якою визначається вигляд формальних розв'язків системи (1.1) у випадку кратних коренів характеристичного рівняння. У процесі доведення цієї теореми наведено алгоритм, за яким визначаються коефіцієнти відповідних формальних розвинень. У заключному пункті 3 сформульовано умови, за виконання яких побудовані формальні розв'язки мають асимптотичний характер, і наведено відповідні асимптотичні оцінки.

2. Побудова формальних розв'язків. Як показано у [8, с. 95], за умови 5° матриця $A_m(t,\ \varepsilon)$ буде неособливою при досить малих $\varepsilon > 0,\ t \in [0;T]$, що згідно з [12] гарантує існування mn лінійно незалежних розв'язків системи (1.1), які необхідно побудувати.

Розв'язки, що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t,\ \lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\ \mu) = u(t,\ \mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(\tau,\ \mu)d\tau\right), \tag{2.1}$$

де $u(t,\ \mu)$ — n-вимірний вектор, а $\lambda(t,\ \mu)$ — скалярна функція, які зображуються у вигляді формальних розвинень

$$u(t,\ \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u^{(k)}(t), \tag{2.2}$$

$$\lambda(t,\ \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda^{(k)}(t), \tag{2.3}$$

в яких $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$.

Покажемо, що вектор (2.1) формально задовольняє систему (1.1). Диференціюючи вектор-функцію (2.1) k разів, отримуємо рекурентний вираз

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{-jh} C_k^i \frac{d^{k-i}u(t,\ \mu)}{dt^{k-i}} D_{i-j}[\lambda^j] \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda(\tau,\ \mu)d\tau\right), \quad k = \overline{0,\ m}, \tag{2.4}$$

де

$$D_{i-j}[\lambda^j] = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_j=i-j}\ \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}[\lambda], \quad j = \overline{1,\ i}, \quad i = \overline{1,\ m}, \tag{2.5}$$

— суми всіх можливих добутків j операторів $\Gamma_{s_\alpha}[\lambda] = \dfrac{d^{s_\alpha}}{dt^{s_\alpha}}\lambda(t,\ \mu)$, $\alpha = \overline{1,\ j}$, з цілими невід'ємними індексами, сума яких дорівнює $i-j$. Оператори диференціювання, які містяться в $\Gamma_{s_\alpha}[\lambda]$, діють на весь вираз, що знаходиться справа від них. Наприклад,

$$D_2[\lambda^2] = \sum_{s_1+s_2=2} \Gamma_{s_1}[\lambda]\Gamma_{s_2}[\lambda].$$

Перебравши всі можливі набори індексів s_α, $\alpha = 1, 2$, дістанемо

$$D_2[\lambda^2] = \Gamma_2[\lambda]\Gamma_0[\lambda] + \Gamma_1[\lambda]\Gamma_1[\lambda] + \Gamma_0[\lambda]\Gamma_2[\lambda].$$

Згідно зі структурою операторів $\Gamma_s[\lambda]$, $s = 0, 1, 2$, остаточно матимемо

$$D_2[\lambda^2] = \frac{d^2\lambda^2(t,\ \mu)}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\lambda(t,\ \mu)\,\frac{d\lambda(t,\ \mu)}{dt}\right) + \lambda(t,\ \mu)\frac{d^2\lambda(t,\ \mu)}{dt^2}.$$

Підставивши вектори (2.4) у систему (1.1), одержимо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{(k-j)h} C_k^i D_{i-j}[\lambda^j] A_k(t,\ \varepsilon)\, \frac{d^{k-i}u(t,\ \mu)}{dt^{k-i}} = 0.$$

Виділивши доданки, в яких $k = i = j$, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m} D_0[\lambda^k] A_k(t,\ \varepsilon) u(t,\ \mu) = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^{(k-j)h} C_k^i D_{i-j}[\lambda^j] A_k(t,\ \varepsilon)\, \frac{d^{k-i}u(t,\ \mu)}{dt^{k-i}} -$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon^{(k-j)h} D_{k-j}[\lambda^j] A_k(t,\ \varepsilon) u(t,\ \mu). \tag{2.6}$$

Оскільки функція $\lambda(t,\ \mu)$ зображується у вигляді формального розвинення (2.3), то функції $D_{i-j}[\lambda^j]$, $j = \overline{1,\ i}$, $i = \overline{1,\ m}$, які визначаються формулою (2.5), теж можна подати у вигляді формальних розвинень за степенями μ:

$$D_{i-j}[\lambda^j] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k D_{i-j}^{(k)}[\lambda^j], \quad j = \overline{1,\ i}, \quad i = \overline{1,\ m}, \tag{2.7}$$

де

$$D_{i-j}^{(k)}[\lambda^j] = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_j=i-j} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_j=k} \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}^{(k_\alpha)}[\lambda], \quad j = \overline{1,\, i}, \quad i = \overline{1,\, m} \tag{2.8}$$

(підсумовування проводиться за всіма можливими наборами цілих невід'ємних індексів $s_\alpha, k_\alpha, \alpha = \overline{1,\, j}$, причому сума нижніх індексів дорівнює $i - j$, а верхніх — k).

Підставивши у (2.6) розвинення (1.2), (2.2), (2.3), (2.7) та прирівнявши доданки при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$P(t,\, \lambda^{(0)}(t))u^{(0)}(t) = 0, \tag{2.9}$$

$$P(t,\, \lambda^{(0)}(t))u^{(\alpha)}(t) = b^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.10}$$

де

$$b^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{\alpha} D_0^{(\beta)}[\lambda^k] A_k^{(0)}(t) u^{(\alpha-\beta)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.11}$$

$$g^{(\alpha)}(t) = -\sum_{k=0}^{m} \sum_{\beta=0}^{\alpha-p} \sum_{\gamma=1}^{\left[\frac{\alpha-\beta}{p}\right]} D_0^{(\beta)}[\lambda^k] - A_k^{(\gamma)}(t) u^{(\alpha-\beta-\gamma p)}(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\beta=0}^{\alpha-(k-j)ph} \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{\alpha-\beta-(k-j)ph}{p}\right]} C_k^i D_{i-j}^{(\beta)}[\lambda^j] A_k^{(\gamma)}(t) \frac{d^{k-i} u^{(\alpha-\beta-\gamma p-(k-j)ph)}(t)}{dt^{k-i}} -$$

$$-\sum_{k=2}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{\alpha-(k-j)ph} \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{\alpha-\beta-(k-j)ph}{p}\right]} D_{k-j}^{(\beta)}[\lambda^j] A_k^{(\gamma)}(t) u^{(\alpha-\beta-\gamma p-(k-j)ph)}(t),$$

$$\alpha = p, p+1, \ldots .$$

Покажемо, що з цієї системи можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3).

З рівняння (2.9) одразу маємо

$$\lambda^{(0)}(t) = \lambda_0(t), \tag{2.12}$$

$$u^{(0)}(t) = \varphi(t), \tag{2.13}$$

де $\lambda_0(t)$ — власне значення в'язки матриць (1.3), а $\varphi(t)$ — відповідний власний вектор, який визначимо так, щоб виконувалось включення $\varphi(t) \in C^\infty[0;T]$, що згідно з [8] завжди є можливим.

Рівняння (2.10) розв'язні тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(b^{(\alpha)}(t),\ \psi(t)) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

де $\psi(t)$ — елемент нуль-простору матриці $P^*(t,\ \lambda_0(t))$, спряженої з $P(t,\ \lambda_0(t))$.

За виконання умови (2.14) вектори $u^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, визначатимемо за формулою

$$u^{(\alpha)}(t) = H(t)b^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \tag{2.15}$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $P(t,\ \lambda_0(t))$, яку виберемо так, щоб $H(t) \in \in C^\infty[0; T]$, що згідно з [8] та умовою 2° завжди є можливим. Умову ж (2.14) використаємо для визначення функцій $\lambda^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$. З цією метою виразимо через ці функції вектори $b^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$.

Підставлятимемо послідовно (2.13), (2.15) в (2.11) при $\alpha < p$. При $\alpha = 1$ дістанемо

$$b^{(1)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} D_0^{(1)}[\lambda^k] A_k^{(0)}(t)\varphi(t).$$

Нехай

$$P_s^{(k)}(\lambda) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_s=k} \lambda^{(j_1)}(t)\lambda^{(j_2)}(t)\ldots\lambda^{(j_s)}(t) \tag{2.16}$$

— сума всіх можливих добутків s функцій $\lambda^{(j)}(t)$ з натуральними індексами j_i, $i = \overline{1,\ s}$, сума яких дорівнює k. Враховуючи (2.8), (2.16), маємо

$$D_0^{(j)}[\lambda^k] = \sum_{i=1}^{j} C_k^i (\lambda_0(t))^{k-i} P_i^{(j)}(\lambda), \quad k = \overline{1,\ m}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.17}$$

Використавши (2.17), вектор $b^{(1)}(t)$ подамо у вигляді

$$b^{(1)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} C_k^1 (\lambda_0(t))^{k-1} P_1^{(1)}(\lambda) A_k^{(0)}(t)\varphi(t),$$

а використавши формулу

$$\sum_{k=i}^{m} C_k^i (\lambda_0(t))^{k-i} A_k^{(0)}(t) = \frac{\partial^i P(t,\ \lambda_0(t))}{i!\partial\lambda^i}, \quad i = \overline{1,\ m},$$

остаточно отримаємо

$$b^{(1)}(t) = -P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t). \tag{2.18}$$

Провівши аналогічні міркування при $\alpha = 2, 3$, дістанемо

$$b^{(2)}(t) = -P_2^{(2)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H_1(t) + \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\right]\varphi(t) -$$

$$- P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t), \tag{2.19}$$

$$b^{(3)}(t) = -P_3^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\left(H_1^2(t) + H_2(t)\right) + \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}H_1(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 P(t,\ \lambda_0(t))}{3!\partial\lambda^3}\right]\varphi(t) - P_2^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H_1(t) + \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\right]\varphi(t) -$$

$$- P_1^{(3)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\varphi(t), \tag{2.20}$$

де

$$H_k(t) = -H(t)\frac{\partial^k P(t,\ \lambda_0(t))}{k!\partial\lambda^k}, \quad k = \overline{1,\ m}. \tag{2.21}$$

Скориставшись формулою

$$\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m) = E,$$

$$\sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m) = \sum_{j=1}^{\min(i-1,\ m)} H_j(t)\sigma^{i-j}(H_1, H_2, \ldots, H_m), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{2.22}$$

рівності (2.18) – (2.20) подамо у вигляді

$$b^{(1)}(t) = -P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),$$

$$b^{(2)}(t) = -P_2^{(2)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^2(H_1, H_2, \ldots, H_m) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\right]\varphi(t) -$$

$$- P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),$$

$$b^{(3)}(t) = -P_3^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\,\sigma^3(H_1, H_2, \ldots, H_m) + \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\,\sigma^2(H_1, H_2, \ldots, H_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 P(t,\ \lambda_0(t))}{3!\partial\lambda^3}\,\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\right]\varphi(t) -$$
$$- P_2^{(3)}(\lambda)\left[\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\,\sigma^2(H_1, H_2, \ldots, H_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\right]\varphi(t) -$$
$$- P_1^{(3)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\sigma^1(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t).$$

Взявши до уваги, що $g^{(\alpha)}(t) = 0$ при $\alpha < p$, методом математичної індукції встановимо, що

$$b^{(\alpha)}(t) = -\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\min(i,\ m)} P_i^{(\alpha)}(\lambda)\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t), \quad \alpha = \overline{1,\ p-1}. \tag{2.23}$$

При $\alpha \geq p$ у вираз $b^{(\alpha)}(t)$ входять вектори $g^{(\alpha)}(t)$. Позначимо доданки, які містять ці вектори, через $\widetilde{b}^{(\alpha)}(t)$. Якщо продовжувати підстановку (2.13), (2.15) в (2.11), то отримаємо вираз вигляду (2.23) та доданки $\widetilde{b}^{(\alpha)}(t)$, які містять вектори $g^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = p, p+1, \ldots$. Для останніх маємо

$$\widetilde{b}^{(p)}(t) = g^{(p)}(t),$$
$$\widetilde{b}^{(p+1)}(t) = -P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\,H(t)g^{(p)}(t) + g^{(p+1)}(t), \tag{2.24}$$
$$\widetilde{b}^{(p+2)}(t) = P_2^{(2)}(\lambda)\left[\left(\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}H(t)\right)^2 - \frac{\partial^2 P(t,\ \lambda_0(t))}{2!\partial\lambda^2}H(t)\right]g^{(p)}(t) -$$
$$- P_1^{(2)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\,H(t)g^{(p)}(t) - P_1^{(1)}(\lambda)\frac{\partial P(t,\ \lambda_0(t))}{1!\partial\lambda}\,H(t)g^{(p+1)}(t) + g^{(p+2)}(t).$$

Ввівши позначення

$$\widetilde{H}_j(t) = -\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\,H(t), \quad j = \overline{1,\ m}, \tag{2.25}$$

та використавши (2.22), вектори $\widetilde{b}^{(p+1)}(t)$, $\widetilde{b}^{(p+2)}(t)$ запишемо у вигляді

$$\widetilde{b}^{(p+1)}(t) = P_1^{(1)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m)g^{(p)}(t) + g^{(p+1)}(t), \tag{2.26}$$

$$\widetilde{b}^{(p+2)}(t) = \left[P_2^{(2)}(\lambda)\sigma^3(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) + P_1^{(2)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m)\right] g^{(p)}(t) +$$
$$+ P_1^{(1)}(\lambda)\sigma^2(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) g^{(p+1)}(t) + g^{(p+2)}(t). \tag{2.27}$$

Проаналізувавши вирази (2.24), (2.26), (2.27) і провівши індукцію по α, дістанемо

$$\widetilde{b}^{(\alpha)}(t) = \sum_{j=0}^{\alpha-p-1} \sum_{i=1}^{\alpha-p-j} P_i^{(\alpha-p-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) g^{(p+j)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = p, p+1, \ldots. \tag{2.28}$$

Об'єднуючи вирази (2.23), (2.28), остаточно маємо

$$b^{(\alpha)}(t) = -\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\min(i,\, m)} P_i^{(\alpha)}(\lambda) \frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\, \sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\alpha-p-1} \sum_{i=1}^{\alpha-p-j} P_i^{(\alpha-p-j)}(\lambda)\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) g^{(p+j)}(t) + g^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots. \tag{2.29}$$

Перейдемо тепер до визначення коефіцієнтів $\lambda^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, розвинення (2.2). Оскільки за умовою 4° в'язка матриць (1.3) має скінченний елементарний дільник кратності p, то, як показано у [13], йому відповідає жорданів ланцюжок завдовжки p, що складається з власного вектора $\varphi(t)$ та приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{2,\ p}$, які задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered} P(t,\ \lambda_0(t))\varphi(t) = 0, \\ P(t,\ \lambda_0(t))\varphi_i(t) + \sum_{j=1}^{\min(i-1,\, m)} \frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\, \varphi_{i-j}(t) = 0, \quad i = \overline{2,\ p}, \end{gathered} \tag{2.30}$$

а рівняння

$$P(t,\ \lambda_0(t))y + \sum_{j=1}^{\min(p,\, m)} \frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\, \varphi_{p+1-j}(t) = 0 \tag{2.31}$$

є не розв'язним відносно y. Виразимо приєднані вектори цього ланцюжка через власний вектор. Оскільки

$$\varphi_i(t) = -\sum_{j=1}^{\min(i-1,\, m)} H(t) \frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\, \varphi_{i-j}(t), \quad i = \overline{2,\ p},$$

то, використавши (2.21), дістанемо

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{\min(i-1,\, m)} H_j(t)\varphi_{i-j}(t), \quad i = \overline{2,\, p},$$

звідки

$$\varphi_i(t) = \sigma^i(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),\ i = \overline{2,\, p}. \tag{2.32}$$

Зокрема,

$$\varphi_2(t) = H_1(t)\varphi(t), \quad \varphi_3(t) = \left(H_1^2(t) + H_2(t)\right)\varphi(t),$$

$$\varphi_4(t) = \left(H_1^3(t) + H_1(t)H_2(t) + H_2(t)H_1(t) + H_3(t)\right)\varphi(t).$$

За означенням жорданового ланцюжка

$$\sum_{j=1}^{\min(i,\, m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{i-j+1}(t),\ \psi(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1,\, p-1},$$

$$\sum_{j=1}^{\min(p,\, m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\varphi_{p-j+1}(t),\ \psi(t)\right) \neq 0,$$

звідки, врахувавши (2.32), матимемо

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{\min(i,\, m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),\ \psi(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1,\, p-1}, \\ \sum_{j=1}^{\min(p,\, m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{p-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),\ \psi(t)\right) \neq 0.\end{gathered} \tag{2.33}$$

Оскільки вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до довільного скалярного множника, то його можна вибрати так, щоб $\psi(t) \in C^\infty[0; T]$ і виконувалась рівність

$$\sum_{j=1}^{\min(p,\, m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\,\sigma^{p-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),\ \psi(t)\right) = 1. \tag{2.34}$$

Отже,

$$\sum_{j=1}^{\min(i,\, m)} \left(\frac{\partial^j P(t,\ \lambda_0(t))}{j!\partial\lambda^j}\sigma^{i-j+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),\ \psi(t)\right) = \delta_{i,\, p}, \quad i = \overline{1,\, p}, \tag{2.35}$$

де $\delta_{i,\, p}$ — символ Кронекера.

Із (2.29), (2.35) випливає, що при $\alpha < p$ умова (2.14) виконується, а при $\alpha = p$ набирає вигляду

$$P_p^{(p)}(\lambda) - \Big(g^{(p)}(t), \psi(t)\Big) = 0. \tag{2.36}$$

Оскільки $P_p^{(p)}(\lambda) = (\lambda^{(1)}(t))^p$ і $g^{(p)}(t) = K(t)\varphi(t)$, де

$$K(t) = -\sum_{k=0}^{m} \lambda_0^k(t) A_k^{(1)}(t) - \delta_{1,h} \sum_{k=1}^{m} C_k^{k-1} \lambda_0^{k-1}(t) A_k^{(0)}(t) \frac{d}{dt} - \delta_{1,h} \sum_{k=2}^{m} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_0^{k-1-i}(t) \frac{d\lambda_0^i(t)}{dt} A_k^{(0)}(t),$$

то з рівняння (2.36) дістанемо

$$(\lambda^{(1)}(t))^p = \big(K(t)\varphi(t), \psi(t)\big).$$

Припустимо, що виконується умова

6°) $(K(t)\varphi(t),\ \psi(t)) \neq 0\ \forall t \in [0,\ T]$.

Тоді з останнього рівняння знайдемо p різних, відмінних від нуля функцій $\lambda^{(1)}(t)$:

$$\lambda^{(1)}(t) = \sqrt[p]{\|(K(t)\varphi(t),\ \psi(t))\|}\left[\cos\frac{\arg(K(t)\varphi(t),\ \psi(t)) + 2\pi(j-1)}{p} + \right.$$
$$\left. + i \sin\frac{\arg(K(t)\varphi(t),\ \psi(t)) + 2\pi(j-1)}{p}\right], \quad j = \overline{1,\ p}. \tag{2.37}$$

Знайшовши функцію $\lambda^{(1)}(t)$, за формулою (2.15) визначимо вектор $u^{(1)}(t)$, оскільки вектор $b^{(1)}(t)$ вже відомий, а рівняння (2.10) є розв'язним при $\alpha = 1$.

Зафіксуємо одну з функцій $\lambda^{(1)}(t)$, що визначається виразом (2.37), а також відповідний вектор $u^{(1)}(t)$ і знайдемо наступні коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3). Для визначення функції $\lambda^{(2)}(t)$ використаємо умову (2.14) при $\alpha = p+1$. Згідно з (2.29), (2.35) цю умову запишемо у вигляді

$$P_p^{(p+1)}(\lambda) = C_1(t),$$

де

$$C_1(t) = P_1^{(1)}(\lambda)\Big(\sigma^2(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) g^{(p)}(t),\ \psi(t)\Big) + \Big(g^{(p+1)}(t),\ \psi(t)\Big) -$$
$$- \sum_{i=1}^{\min(p+1,m)} P_{p+1}^{(p+1)}(\lambda)\left(\frac{\partial^i P(t,\ \lambda_0(t))}{i!\partial\lambda^i}\,\sigma^{p-i+2}(H_1, H_2, \ldots, H_m)\varphi(t),\ \psi(t)\right).$$

Оскільки $P_p^{(p+1)}(\lambda) = p\lambda^{(2)}(t)(\lambda^{(1)}(t))^{p-1}$, а $C_1(t)$ — вже відомий вираз, то звідси маємо

$$\lambda^{(2)}(t) = \frac{C_1(t)}{p(\lambda^{(1)}(t))^{p-1}}.$$

Визначивши функцію $\lambda^{(2)}(t)$, за формулою (2.11) знайдемо вектор $b^{(2)}(t)$, а потім за формулою (2.15) — вектор $u^{(2)}(t)$. Продовжуючи цей ітераційний процес, можна визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.2), (2.3). Дійсно, нехай $\lambda^{(i)}(t),\ u^{(i)}(t)$ вже відомі при $i \leqslant s$. Тоді для визначення функції $\lambda^{(s+1)}(t)$ використаємо умову (2.14) при $\alpha = p + s$. Згідно з (2.29), (2.35) ця умова набирає вигляду

$$P_p^{(p+s)}(\lambda) = C_s(t),$$

де

$$C_s(t) = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i=1}^{\min(s-k,\, m)} P_i^{(s-k)}(\lambda) \left(\sigma^{i+1}(\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_m) g^{(p+k)}(t),\ \psi(t)\right) + \left(g^{(p+s)}(t),\ \psi(t)\right) -$$

$$- \sum_{k=p+1}^{p+s} \sum_{i=1}^{\min(k,\, m)} P_k^{(p+s)}(\lambda) \left(\frac{\partial^i P(t,\ \lambda_0(t))}{i! \partial \lambda^i} \sigma^{k-i+1}(H_1, H_2, \ldots, H_m) \varphi(t),\ \psi(t)\right)$$

— вже відомий вираз згідно з припущенням індукції.

Покладемо $P_p^{(p+s)}(\lambda) = p\lambda^{(s+1)}(t)(\lambda^{(1)}(t))^{p-1} + \widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda)$, де $\widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda)$ — частина виразу $P_p^{(p+s)}(\lambda)$, яка містить лише ті функції $\lambda^{(i)}(t)$, індекси яких $i \leq s$. Тоді

$$\lambda^{(s+1)}(t) = \frac{C_s(t) - \widetilde{P}_p^{(p+s)}(\lambda)}{p(\lambda^{(1)}(t))^{p-1}}. \tag{2.38}$$

Визначивши $\lambda^{(s+1)}(t)$, за формулою (2.15) знайдемо відповідний вектор $u^{(s+1)}(t)$.

Рекурентні формули (2.13), (2.15), (2.12), (2.37), (2.38) дають змогу визначити будь-які коефіцієнти формальних розвинень (2.2), (2.3). Існування похідних, які входять у ці формули, гарантується умовою 2° та відповідною гладкістю функції $\lambda_0(t)$, вектор-функцій $\varphi(t),\ \psi(t)$ та матриці $H(t)$. Згідно з (2.37) описаним способом можна знайти p різних формальних розв'язків системи (1.1).

Дотримуючись [8], другу групу розв'язків системи (1.1), які відповідають нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (1.3), шукатимемо у вигляді

$$x(t,\ \nu) = v(t,\ \nu) \exp\left(\nu^{-qh-1} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau,\ \nu)}\right), \tag{2.39}$$

де n-вимірний вектор $v(t,\ \nu)$ і скалярна функція $\xi(t,\ \nu)$ зображуються у вигляді формальних розвинень

$$v(t,\ \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v^{(k)}(t), \tag{2.40}$$

$$\xi(t,\ \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi^{(k)}(t) \tag{2.41}$$

за степенями $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$.

Використавши формули (2.4), (2.5), матимемо

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\nu^{-(qh+1)j}C_k^i\frac{d^{k-i}v(t,\ \nu)}{dt^{k-i}}D_{i-j}[\xi^{-j}]\exp\left(\nu^{-qh-1}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\xi(\tau,\ \nu)}\right), \quad k=\overline{0,\ m}, \tag{2.42}$$

де

$$D_{i-j}[\xi^{-j}] = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_j=i-j}\prod_{\alpha=1}^{j}\Gamma_{s_\alpha}[\xi^{-1}], \quad j=\overline{1,\ i}, \quad i=\overline{1,\ m}.$$

Підставивши вектори (2.42) у систему (1.1), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\nu^{q(k-j)h-j}C_k^iD_{i-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\ \varepsilon)\,\frac{d^{k-i}v(t,\ \nu)}{dt^{k-i}} = 0.$$

Помноживши цю рівність на функцію $\nu^m\xi^m(t,\ \nu)$, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\nu^{q(k-j)h+m-j}C_k^i\xi^m(t,\ \nu)D_{i-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\ \varepsilon)\,\frac{d^{k-i}v(t,\ \nu)}{dt^{k-i}} = 0.$$

Виділивши тут доданки, в яких $k=i=j$, та взявши до уваги, що $D_0[\xi^\alpha]=\xi^\alpha(t,\ \nu)$, матимемо

$$\sum_{k=0}^{m}\nu^{m-k}D_0[\xi^{m-k}]A_k(t,\ \varepsilon)v(t,\ \nu)+\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\nu^{q(k-j)h+m-j}D_0[\xi^m]D_{k-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\ \varepsilon)v(t,\ \nu)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i}\nu^{q(k-j)h+m-j}C_k^iD_0[\xi^m]D_{i-j}[\xi^{-j}]A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^{k-i}v(t,\ \nu)}{dt^{k-i}} = 0. \tag{2.43}$$

Запишемо шукану функцію $\dfrac{1}{\xi(t,\ \nu)}=\widetilde{\xi}(t,\ \nu)$ у вигляді формального ряду за степенями параметра ν:

$$\widetilde{\xi}(t,\ \nu) = \sum_{k=0}^{\infty}\nu^k\widetilde{\xi}^{(k)}(t),$$

коефіцієнти якого визначаються за рекурентними формулами

$$\widetilde{\xi}^{(0)}(t) = \frac{1}{\xi^{(0)}(t)},$$

$$\widetilde{\xi}^{(k)}(t) = -\frac{\sum_{j=1}^{k}\xi^{(j)}(t)\widetilde{\xi}^{(k-j)}(t)}{\xi^{(0)}(t)}, \quad k=1,2,\ldots.$$

Згідно з (2.7), (2.8) маємо

$$D_{i-j}[\widetilde{\xi}^j] = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k D_{i-j}^{(k)}[\widetilde{\xi}^j], \quad j = \overline{1,\, i}, \quad i = \overline{1,\, m}, \tag{2.44}$$

де

$$D_{i-j}^{(k)}[\widetilde{\xi}^j] = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_j=i-j} \; \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_j=k} \prod_{\alpha=1}^{j} \Gamma_{s_\alpha}^{(k_\alpha)}[\widetilde{\xi}], \quad j = \overline{1,\, i}, \quad i = \overline{1,\, m}.$$

Підставивши в (2.43) розвинення (1.2), (2.40), (2.41), (2.44) і прирівнявши вирази при однакових степенях ν, дістанемо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$A_m^{(0)}(t) v^{(0)}(t) = 0, \tag{2.45}$$

$$A_m^{(0)}(t) v^{(s)}(t) = a^{(s)}(t),\ s = 1,\ 2, \ldots, \tag{2.46}$$

де

$$a^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{s-m+k} D_0^{(\alpha)}[\xi^{m-k}] A_k^{(0)}(t) v^{(s-\alpha-m+k)}(t) + g^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$g^{(s)}(t) = g_1^{(s)}(t) + g_2^{(s)}(t) + g_3^{(s)}(t), \quad s = q, q+1, \ldots,$$

$$g_1^{(s)}(t) = -\sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha=0}^{s-q-m+k} \sum_{\beta=1}^{\left[\frac{s-\alpha-m+k}{q}\right]} D_0^{(\alpha)}[\xi^{m-k}] A_k^{(\beta)}(t) v^{(s-\alpha-\beta q+k-m)}(t),\ s = q, q+1, \ldots, \tag{2.47}$$

$$g_2^{(s)}(t) = -\sum_{k=2}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\alpha=0}^{s-\theta(k,j)} \sum_{\beta=0}^{s-\alpha-\theta(k,j)} \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{s-\alpha-\beta-\theta(k,j)}{q}\right]} D_0^{(\alpha)}[\xi^m] D_{k-j}^{(\beta)}[\widetilde{\xi}_j] A_k^{(\gamma)}(t) v^{(s-\alpha-\beta-\gamma q-\theta(k,j))}(t),$$

$$s = qh + m - 1, qk + m, \ldots,$$

$$g_3^{(s)}(t) = -\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \sum_{\alpha=0}^{s-\theta(k,j)} \sum_{\beta=0}^{s-\alpha-\theta(k,j)} \sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{s-\alpha-\beta-\theta(k,j)}{q}\right]} C_k^i D_0^{(\alpha)}[\xi^m] D_{i-j}^{(\beta)}[\widetilde{\xi}^j] A_k^{(\gamma)}(t) \times$$

$$\times \frac{d^{k-i} v^{(s-\alpha-\beta-\gamma q-\theta(k,j))}(t)}{dt^{k-i}},$$

$$s = qh + m, \quad qk + m + 1, \ldots, \quad \theta(k,j) = q(k-j)h + m - j.$$

Покажемо, що з цієї системи можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.40), (2.41). З рівняння (2.45) маємо

$$v^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}(t). \tag{2.48}$$

Як і при розв'язуванні системи рівнянь (2.10), сумісність системи (2.46) забезпечимо, визначаючи функції $\xi^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, з умови ортогональності її правої частини вектору $\widetilde{\psi}(t)$:

$$(a^{(s)}(t),\ \widetilde{\psi}(t)) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{2.49}$$

За виконання умови (2.49) вектори $v^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, визначатимемо за формулою

$$v^{(s)}(t) = G(t)a^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{2.50}$$

де $G(t)$ — матриця, напівобернена до $A_m^{(0)}(t)$, яку визначимо так, щоб $G(t) \in C^\infty[0; T]$.

Виразимо вектори $a^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, через шукані функції $\xi^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$. Підставляючи послідовно (2.48), (2.50) у (2.47) при $s < q$, маємо

$$a^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$a^{(2)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^2]\left[A_{m-1}^{(0)}(t)G(t)A_{m-1}^{(0)}(t) - A_{m-2}^{(0)}(t)\right]\widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1]A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$\begin{aligned} a^{(3)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^3]\Big[A_{m-1}^{(0)}(t)\Big((G(t)A_{m-1}^{(0)}(t))^2 - G(t)A_{m-2}^{(0)}(t)\Big) - A_{m-2}^{(0)}(t)G(t)A_{m-1}^{(0)}(t) + \\ + A_{m-3}^{(0)}(t)\Big]\widetilde{\varphi}(t) + D_0^{(1)}[\xi^2]\left[A_{m-1}^{(0)}(t)G(t)A_{m-1}^{(0)}(t) - A_{m-2}^{(0)}(t)\right]\widetilde{\varphi}(t) - \\ - D_0^{(2)}[\xi^1]A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t). \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що

$$A_{m-j}^{(0)}(t) = \frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j!\partial\omega^j}, \quad j = \overline{1,\ m},$$

де

$$M(t,\ \omega) = \sum_{j=0}^{m} \omega^j A_{m-j}^{(0)}(t), \tag{2.51}$$

і вводячи позначення

$$G_j(t) = -G(t)\frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j!\partial\omega^j}, \quad j = \overline{1,\ m},$$

вектори $a^{(1)}(t)$, $a^{(2)}(t)$, $a^{(3)}(t)$ записуємо у вигляді

$$a^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\widetilde{\varphi}(t),$$

$$a^{(2)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,G_1(t) + \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}\right]\widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(1)}[\xi^1]\,\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\widetilde{\varphi}(t),$$

$$a^{(3)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^3]\left[\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}(G_1^2(t) + G_2(t)) + \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}\,G_1(t) + \frac{\partial^3 M(t,\ 0)}{3!\partial\omega^3}\right]\widetilde{\varphi}(t) -$$
$$- D_0^{(1)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,G_1(t) + \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}\right]\widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(2)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\widetilde{\varphi}(t).$$

Нарешті, використовуючи формулу (2.22), дістаємо

$$a^{(1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$a^{(2)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\sigma^2(G_1, G_2, \ldots, G_m) + \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}\,\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\right]\widetilde{\varphi}(t) -$$
$$- D_0^{(1)}[\xi^1]\,\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t),$$

$$a^{(3)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^3]\left[\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\sigma^3(G_1, G_2, \ldots, G_m) + \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}\,\sigma^2(G_1, G_2, \ldots, G_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 M(t,\ 0)}{3!\partial\omega^3}\,\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\right]\widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(1)}[\xi^2]\left[\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\sigma^2(G_1, G_2, \ldots, G_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}\,\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\right]\widetilde{\varphi}(t) - D_0^{(2)}[\xi^1]\,\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,\sigma^1(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t).$$

Методом математичної індукції встановимо, що у загальному випадку

$$a^{(s)}(t) = -\sum_{i=1}^{s}\ \sum_{j=1}^{\min(i,\ m)} D_0^{(s-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t), \quad s = \overline{1,\ q-1}. \tag{2.52}$$

При $s \geq q$ у складі $a^{(s)}(t)$ з'являються вирази $g^{(s)}(t)$, $s = q, q+1, \ldots$. Тому, продовживши підстановку (2.48), (2.50) у (2.47), дістанемо вирази вигляду (2.52) та вирази, що містять вектори $g^{(s)}(t)$. Позначивши останні через $\widetilde{a}^{(s)}(t)$, $s = q, q+1, \ldots,$ виразимо їх через функції $\xi^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots$.

При $s = q, q+1, q+2$ матимемо

$$\widetilde{a}^{(q)}(t) = g^{(q)}(t),$$

$$\widetilde{a}^{(q+1)}(t) = -D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,G(t)g^{(q)}(t) + g^{(q+1)}(t),$$

$$\widetilde{a}^{(q+2)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^2]\left[\left(\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,G(t)\right)^2 - \frac{\partial^2 M(t,\ 0)}{2!\partial\omega^2}G(t)\right]g^{(q)}(t) -$$

$$- D_0^{(1)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,G(t)g^{(q)}(t) - D_0^{(0)}[\xi^1]\frac{\partial M(t,\ 0)}{1!\partial\omega}\,G(t)g^{(q+1)}(t) + g^{(q+2)}(t).$$

Ввівши позначення

$$\widetilde{G}_j(t) = -\frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j!\partial\omega^j}G(t),\ j = \overline{1,\ m},$$

і використавши формулу (2.22), дістанемо

$$\widetilde{a}^{(q+1)}(t) = D_0^{(0)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q)}(t) + g^{(q+1)}(t),$$

$$\widetilde{a}^{(q+2)}(t) = \left[D_0^{(0)}[\xi^2]\sigma^3(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m) + D_0^{(1)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)\right]g^{(q)}(t) +$$

$$+ D_0^{(0)}[\xi^1]\sigma^2(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+1)}(t) + g^{(q+2)}(t).$$

Провівши індукцію по s, встановимо, що у загальному випадку

$$\widetilde{a}^{(s)}(t) = \sum_{j=0}^{s-q-1}\sum_{i=1}^{s-q-j} D_0^{(s-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) + g^{(s)}(t), \quad s = q, q+1, \ldots. \tag{2.53}$$

Об'єднавши формули (2.52), (2.53), отримаємо

$$a^{(s)}(t) = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\min(i,\ m)} D_0^{(s-i)}[\xi^i]\frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-q-1}\sum_{i=1}^{s-q-j} D_0^{(s-q-j-i)}[\xi^i]\sigma^{i+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+j)}(t) + g^{(s)}(t), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{2.54}$$

Перейдемо до визначення коефіцієнтів $\xi^{(s)}(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, розвинення (2.41). Оскільки за умовою 4° в'язка матриць (1.3) має нескінченний елементарний дільник кратності q, то згідно з [13] нульовому власному значенню симетричної в'язки матриць (2.51) відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки q, що складається з власного вектора $\widetilde{\varphi}(t)$ і приєднаних векторів $\widetilde{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{2,\ q}$, які задовольняють співвідношення

$$M(t,\ 0)\widetilde{\varphi}(t) = 0,$$

$$M(t,\ 0)\widetilde{\varphi}_i(t) + \sum_{j=1}^{\min(i-1,\ m)} \frac{\partial^j M(t,\ 0)}{j!\partial\omega^j}\,\widetilde{\varphi}_{i-j}(t) = 0,\ i = \overline{2,\ q}.$$

При цьому рівняння

$$M(t,\,0)\widetilde{y} + \sum_{j=1}^{\min(q,\,m)} \frac{\partial^j M(t,\,0)}{j!\partial\omega^j}\,\widetilde{\varphi}_{q-j+1}(t) = 0$$

є не розв'язним відносно вектора $\widetilde{y}$. Виходячи з цього і провівши такі самі міркування, як і для жорданового ланцюжка, що відповідає скінченному елементарному дільнику, встановимо, що при відповідному виборі вектора $\widetilde{\psi}(t)$ виконуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\min(i,\,m)} \left(\frac{\partial^j M(t,\,0)}{j!\partial\omega^j}\sigma^{i-j+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right) = \delta_{i,\,q}, \quad i = \overline{1,\,q}. \tag{2.55}$$

Згідно з (2.54), (2.55) при $s < q$ умова (2.49) виконується, а при $s = q$ набирає вигляду

$$D_0^{(0)}[\xi^q] - \left(g^{(q)}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right) = 0.$$

Оскільки $D_0^{(0)}[\xi^q] = (\xi^{(0)}(t))^q$, $g^{(q)}(t) = -A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t)$, то звідси маємо

$$(\xi^{(0)}(t))^q = -\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right).$$

Відповідно до умови 5° з останнього рівняння визначимо q різних, відмінних від нуля функцій $\xi^{(0)}(t)$:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt[q]{\left\|\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right)\right\|}\left[\cos\frac{\arg\left(-\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right)\right) + 2\pi(j-1)}{q} + \right.$$

$$\left. + \, i\sin\frac{\arg\left(-\left(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right)\right) + 2\pi(j-1)}{q}\right], \quad j = \overline{1,\,q}. \tag{2.56}$$

Таким чином, функцію $\xi^{(0)}(t)$ і вектор $v^{(0)}(t)$ визначено. Інші коефіцієнти розвинень (2.40), (2.41) можна знайти рекурентним способом. Зафіксуємо одну із знайдених функцій $\xi^{(0)}(t)$ і вважатимемо, що відповідні функції $\xi^{(i)}(t)$ та вектори $v^{(i)}(t)$ вже відомі при $i < r$. Тоді для визначення функції $\xi^{(r)}(t)$ скористаємось умовою (2.49) при $s = q + r$. Взявши до уваги рівність (2.55), матимемо

$$D_0^{(r)}[\xi^q] - S_r(t) = 0,$$

де

$$S_r(t) = -\sum_{\alpha=q+1}^{r+q}\sum_{\beta=1}^{\min(\alpha,\,m)} D_0^{(r+q-\alpha)}[\xi^\alpha]\left(\frac{\partial^\beta M(t,\,0)}{\beta!\partial\omega^\beta}\sigma^{\alpha-\beta+1}(G_1, G_2, \ldots, G_m)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right) +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{r-1}\sum_{\beta=1}^{r-\alpha} D_0^{(r-\alpha-\beta)}[\xi^\beta]\left(\sigma^{\beta+1}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_m)g^{(q+\alpha)}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right) + \left(g^{(q+r)}(t),\ \widetilde{\psi}(t)\right)$$

— вже відомий вираз згідно з припущенням індукції.

Оскільки

$$D_0^{(r)}[\xi^q] = q\xi^{(r)}(t)(\xi^{(0)}(t))^{q-1} + \widetilde{D}_0^{(r)}[\xi^q],$$

де доданок $\widetilde{D}_0^{(r)}[\xi^q]$ містить лише ті функції $\xi^{(i)}(t)$, індекси яких менші за r, то

$$\xi^{(r)}(t) = \frac{S_r(t) - \widetilde{D}_0^{(r)}[\xi^q]}{q(\xi^{(0)}(t))^{q-1}}. \tag{2.57}$$

Знайшовши функцію $\xi^{(r)}(t)$, вектор $v^{(r)}(t)$ знайдемо за формулою (2.50).

Отримані формули дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (2.40), (2.41). Існування похідних, які входять в ці формули, гарантується умовою 2° та відповідною гладкістю вектор-функцій $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$ і матриці $G(t)$. Згідно з (2.56) таким способом можна побудувати q різних формальних розв'язків системи (1.1).

Таким чином, справджується така теорема.

Теорема. *Якщо виконуються умови $1^\circ - 6^\circ$, то на відрізку $[0, T]$ система диференціальних рівнянь (1.1) має p формальних розв'язків вигляду*

$$x_i(t,\ \mu) = u_i(t,\ \mu) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda_i(\tau,\ \mu)d\tau\right), \quad i = \overline{1, p},$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (1.3), і q розв'язків вигляду

$$x_j(t,\ \nu) = v_j(t,\ \nu) \exp\left(\nu^{-qh-1}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\xi_j(\tau,\ \nu)}\right),\ j = \overline{1,\ q},$$

які відповідають нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\ \mu)$, $v_j(t,\ \nu)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\ \mu)$, $\xi_j(t,\ \nu)$ — скалярні функції, які зображуються у вигляді формальних розвинень (2.2), (2.3), (2.40), (2.41) за степенями параметрів $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно. Коефіцієнти цих розвинень визначаються за рекурентними формулами (2.13), (2.15), (2.12), (2.37), (2.38),(2.48), (2.50), (2.56), (2.57).

Зазначимо, що дана теорема поширюється і на той випадок, коли головна матриця $A_m^{(0)}(t)$ при старшій похідний у системі (1.1) є неособливою. У цьому випадку гранична в'язка матриць матиме тільки скінченний елементарний дільник, якому відповідає $p = mn$ розв'язків вигляду (2.1).

Методами, викладеними у роботах [8, 11], можна довести, що формальні розв'язки, які будуються за вказаним алгоритмом, лінійно незалежні в тому розумінні, що такими будуть l-наближення, утворені шляхом обривання розвинень (2.2), (2.3), (2.40), (2.41) на l-му члені, якщо $l \geq \max(p-1,\ q-1)$. Тому їх лінійна комбінація буде загальним формальним розв'язком системи (1.1).

3. Асимптотичні властивості формальних розв'язків. Використовуючи результати [8, 11], можна переконатися, що отримані розв'язки є асимптотичним розвиненням точних лінійно незалежних розв'язків системи (1.1) при $\varepsilon \to 0$, якщо функції

$$\operatorname{Re}\left(\lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{ph-1} \mu^k \lambda_i^{(k)}(t)\right), \quad i = \overline{1,\, p},$$

і

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{qh} \nu^k \xi_j^{(k)}(t)\right), \quad j = \overline{1, q},$$

не змінюють знак на заданому відрізку $[0;\, T]$. Для цього необхідно звести систему (1.1) до еквівалентної системи рівнянь першого порядку і застосувати процедуру оцінки відхилу, описану в [8, 11]. В результаті отримаємо асимптотичні оцінки

$$\|x_i(t,\, \varepsilon) - x_i^{(l)}(t,\, \varepsilon)\| \le c_i \varepsilon^{\frac{\delta(l+1-ph)+p(1-\delta)}{p\delta}} \sup_{t\in[0;\, T]} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{ph-1} \mu^k \lambda_i^{(k)}(\tau)\right) d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_i(t,\, \varepsilon)}{dt^k} - \frac{d^k x_i^{(l)}(t,\, \varepsilon)}{dt^k}\right\| \le$$

$$\le c_i \varepsilon^{\frac{\delta(l+1-ph)+p(1-\delta)}{p\delta}} \varepsilon^{-kh} \sup_{t\in[0;\, T]} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{ph-1} \mu^k \lambda_i^{(k)}(\tau)\right) d\tau\right),$$

$i = \overline{1, p}$ для розв'язків першої групи, що відповідають скінченному елементарному дільнику, і

$$\|x_j(t,\, \varepsilon) - x_j^{(l)}(t,\, \varepsilon)\| \le \varepsilon^{\frac{\delta(l-qh)+q(1-\delta)}{q\delta}} \sup_{t\in[0;\, T]} \exp\left(\varepsilon^{\frac{-qh-1}{q}} \int_{t_0}^{t} \frac{\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{qh} \nu^k \xi_j^{(k)}(\tau)\right)}{\left|\xi^{(l)}(\tau, \nu)\right|^2} d\tau\right),$$

$$\left\|\frac{d^k x_j(t,\, \varepsilon)}{dt^k} - \frac{d^k x_j^{(l)}(t,\, \varepsilon)}{dt^k}\right\| \le$$

$$\le \varepsilon^{\frac{\delta(l-ph)+p(1-\delta)}{p\delta}} \varepsilon^{-kh} \sup_{t\in[0;\, T]} \exp\left(\varepsilon^{\frac{-qh-1}{q}} \int_{t_0}^{t} \frac{\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{qh} \nu^k \xi_j^{(k)}(\tau)\right)}{\left|\xi^{(l)}(\tau, \nu)\right|^2} d\tau\right),$$

$j = \overline{1,\, q}$, для розв'язків другої групи, які відповідають нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $P(t, \lambda)$, де $x_i(t,\, \varepsilon),\ x_j(t,\, \varepsilon)$ — точні розв'язки системи (1.1), $x_i^{(l)}(t,\, \varepsilon),\ x_j^{(l)}(t,\, \varepsilon)$ — відповідні l-наближення, $c_i,\, c_j$ — деякі сталі, що не залежать від ε, $\delta = \max(p, q)$.

1. *Фещенко С. Ф.* Малі коливання систем із скінченним числом ступенів вільності // Наук. зап. Київ. пед. ін-ту. Фіз-мат. сер. — 1949. — **9**, № 4. — С. 99–155.
2. *Павлюк І. А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. — Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. — 208 с.
3. *Шкиль Н. И., Шаманов З.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Приближенные методы математического анализа. — Киев: Киев. пед. ин-т, 1978. — С. 137–146.
4. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга // Докл. АН УССР. — 1979. — № 4. — С. 264–267.
5. *Шкиль Н. И., Конет И. И.* Асимптотические свойства формальных фундаментальных матриц систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 124–130.
6. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища шк., 1989. — 287 с.
7. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
8. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
9. *Кушнир В. А.* Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков з малым параметром при производных: дис.... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1984. — 139 с.
10. *Кушнір В. А., Кушнір Г. А.* Побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з малим параметром при похідних // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2007. – Вип. 8. — С. 139–143.
11. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
12. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 296–306.
13. *Пафик С. П., Яковець В. П.* Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2012. — Вип. 13. — С. 201–217.

Одержано 03.07.13,
після доопрацювання — 14.04.14