УДК 517.9

КОЕФІЦІЄНТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. М. Станжицький, О. О. Самойленко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We prove a theorem on existence of an optimal control for differential systems in terms of coefficients of the initial system.

Доказаны теоремы существования оптимального управления для систем дифференциальных уравнений в терминах коэффициентов исходного уравнения.

Вступ. У даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{2}$$

де $t \in [0,T]$, $x \in D$, D — деяка обмежена замкнена область в $\mathbb{R}^d$, τ — момент виходу розв'язку $x(t)$ на межу області D.

Більш точну постановку задачі наведено в основній частині роботи.

В статті доводиться теорема існування оптимального керування для задачі (1), (2) в термінах правих частин системи (1) і функції $L(t,x,u)$ з критерію якості. Раніше подібні задачі розглядалися, наприклад, у роботах [1, 2, 3, 6], де є широка бібліографія.

Робота складається зі вступу, постановки задачі та основного результату.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального керування (1), (2), де $x_0 \in D$ — фіксований вектор, $t \in [0,T]$, $x \in D$ — фазовий вектор, D — обмежена замкнена область в $\mathbb{R}^d$, τ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на межу області D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла замкнена множина, вектор-функція $f_1(t,x) : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^d$ та матриця $f_2(t,x) : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ — неперервні за сукупністю змінних функції, для яких за змінною x виконується умова Ліпшиця, тобто існує така стала $H > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$|f_1(t,x_1) - f_1(t,x_2)| \le H|x_1 - x_2|, \quad \|f_2(t,x_1) - f_2(t,x_2)\| \le H|x_1 - x_2|.$$

Функції $L(t,x,u)$ і $L_u(t,x,u)$ є неперервними для будь-яких $t \in [0,T]$, $x \in D$, $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) існують такі сталі $k > 0$ та $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t,x,u) \geq k|u|^p \tag{3}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in D$, $u \in U$;

2) існує стала $K > 0$ така, що

$$|L_x(t,x,u)| + |L_u(t,x,u)| \leq K(1 + |u|^p); \tag{4}$$

3) $L(t,x,u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0,T]$, $x \in D$.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо:

a$_1$) $u(t) \in L_p([0,T])$,

a$_2$) $u(t) \in U$ при $t \in [0,T]$.

Множину керувань, що задовольняють умови a$_1$), a$_2$), будемо називати допустимою для задачі (1), (2) і позначатимемо її через V.

2. Основний результат. Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови пункту 1. Тоді задача (1), (2) має розв'язок у класі допустимих керувань V, тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

Доведення. Оскільки критерій якості — невід'ємна величина, то існує невід'ємна нижня границя m значень $J(u)$, і тому існує послідовність допустимих керувань $\{u_n(t), n \geq \geq 1\}$ таких, що $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$ монотонно, тобто

$$J(u_n) = \int\limits_0^{\tau_n} L(t, x_n(t), u_n(t))\, dt \to m \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

де $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), що відповідають керуванням $u_n(t)$, τ_n — моменти виходу розв'язків $x_n(t)$ на межу області D.

Зауважимо, що для достатньо великих n

$$J(u_n) \leq m + 1.$$

Отже, використовуючи умову (3), отримуємо

$$k \int\limits_0^{\tau_n} |u_n(t)|^p\, dt \leq \int\limits_0^{\tau_n} L(t, x_n(t), u_n(t))\, dt \leq m + 1,$$

$$\int\limits_0^{\tau_n} |u_n(t)|^p\, dt \leq \frac{m+1}{k}.$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $u_n(s) = 0$ для $\tau_n < s \leq T$. Тоді

$$\int_0^{\tau_n} |u_n(t)|^p\,dt = \int_0^T |u_n(t)|^p\,dt \leq \frac{m+1}{k},$$

а отже,

$$\|u_n(\cdot)\|_p \leq \left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Тому можна вибрати підпослідовність (яку також позначимо через $u_n(t)$), яка слабко збігається до границі $u^*(t) \in L_p([0,T])$ і така, що виконується умова (5). Тоді за лемою Мазура [4, c. 173] знайдеться опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in \in U \left(\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1\right)$ така, що $b_k \to u^*$, $k \to \infty$, за нормою L_p. Отже, існує збіжна майже скрізь на $[0,T]$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l} така, що $b_{k_l}(t) \to u^*(t)$, $l \to \infty$, для майже всіх t. Оскільки U — опукла і замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$. Тоді із замкненості множини U випливає, що $u^*(t) \in U$ майже для всіх $t \in [0,T]$.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n \geq 1\}$. Має місце зображення

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t)]\,ds, \quad t \in [0, \tau_n].$$

Продовжимо функції x_n на весь інтервал $[0,T]$ таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{при} \quad t \in [0, \tau_n), \\ x_n(\tau_n) & \text{при} \quad t \in [\tau_n, T]. \end{cases} \tag{6}$$

Доведемо рівностепеневу неперервність функцій $y_n(t)$ при $t \in [0,T]$.

Із нерівності Гельдера для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \tau_n]$ таких, що $s_1 < s_2$, отримуємо

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} [f_1(t, x_n(t))\,dt + f_2(t, x_n)(t) u_n(t)]\,dt \right| \leq$$

$$\leq M(s_2 - s_1) + M \left| \int_{s_1}^{s_2} u_n(t)\,dt \right| \leq M(s_2 - s_1) + M(s_2 - s_1)^{1/q} \|u_n\|_p,$$

де $1/p + 1/q = 1$, а $M = \max\{\max_{x \in D, t \in [0,T]} |f_1(t,x)|, \max_{x \in D, t \in [0,T]} |f_2(t,x)|\}$.

Якщо $s_1 < \tau_n < s_2 < T$, то маємо

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| = \left| \int_{s_1}^{\tau_n} [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t)]\,dt \right| \leq$$

$$\leq M(\tau_n - s_1) + M\left|\int\limits_{s_1}^{\tau_n} u_n(t)\,dt\right| \leq M(\tau_n - s_1) + M(\tau_n - s_1)^{1/q}\|u_n\|_p \leq$$

$$\leq M(s_2 - s_1) + M(s_2 - s_1)^{1/q}\|u_n\|_p.$$

Якщо $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, то

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n)| = 0.$$

Звідси випливає рівностепенева неперервність функцій $y_n(t)$. Оскільки $y_n(t)$ належить D для будь-якого $n \geq 0$ і $t \in [0, T]$, то функції $y_n(t)$ є рівномірно обмеженими на $[0, T]$. За теоремою Асколлі тепер можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n(t), n \geq 1\}$ (яку також позначимо через $\{y_n(t), n \geq 1\}$) таку, що $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Позначимо через τ^* момент першого виходу $y^*(t)$ на межу ∂D, тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] : y^*(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо} \quad y^*(t) \in D \setminus \partial D \;\; \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

і

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] : y_n(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо} \quad y_n(t) \in D \setminus \partial D \;\; \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Покажемо, що $\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$.

Припустимо, що це не так. Тоді

$$\tau^* > \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau.$$

За теоремою про характеризацію точної нижньої межі для будь-якого $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} | \tau_n < \tau + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо δ таким чином, щоб $\tau + \delta < \tau^*$. Тоді існують така підпослідовність $\{\tau_{n_k}, n_k \geq 1\}$ послідовності $\{\tau_n, n \geq 1\}$ і число $N \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $n_k \geq N$ $\tau_{n_k} < \tau + \delta$.

Виберемо момент часу t_0 такий, що $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$. Тоді $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k})$ належить ∂D.

Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T]$ маємо, що для будь-якого $\epsilon > 0$ існує таке $P \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $n_k \geq P$ виконується нерівність

$$|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon.$$

Але якщо взяти $0 < \varepsilon < \inf_{v\in\partial D} |y^*(t_0) - v|$, то для фіксованого $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k})| > \varepsilon.$$

Отримали суперечність. Тому

$$\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n.$$

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1) при $t \in [0, \tau^*]$, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$ $y_{n_k}(y) = x_{n_k}(t)$ для достатньо великих n_k, і оскільки для всіх $t \in [0, T]$ $y_{n_k}(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно, то $x_{n_k}(t) \to x^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau^*]$.

Оскільки $x_{n_k}(t)$ — розв'язок системи (1), то маємо

$$x_{n_k}(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x_{n_k}(s))\, dt + f_2(s, x_{n_k}(s)) u_{n_k}(s)]\, ds =$$

$$= x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x_{n_k}(s)) + f_2(s, x_{n_k}(s)) u^*(s)]\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t [f_2(s, x_{n_k}(s)) - f_2(s, x^*(s))](u_{n_k}(s) - u^*(s))\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t f_2(s, x^*(s))[u_{n_k}(s) - u^*(s)]\, ds \le x_0 + \int\limits_0^t [f_1(t, x_{n_k}(s)) + f_2(t, x_{n_k}(s)) u^*(s)]\, ds +$$

$$+ \left(\int\limits_0^t [f_2(t, x_{n_k}(s)) - f_2(t, x^*(s))]^q\, ds \right)^{1/q} \left(\int\limits_0^t (u_{n_k}(s) - u^*(s))^p\, ds \right)^{1/p} +$$

$$+ \int\limits_0^t f_2(t, x^*(s))(u_{n_k}(s) - u^*(s))\, ds \le x_0 + \int\limits_0^t [f_1(t, x_{n_k}(s)) + f_2(t, x_{n_k}(s)) u^*(s)]\, ds +$$

$$+ \left(\int\limits_0^t [H |x_{n_k}(s) - x^*(s)|]^q\, ds \right)^{1/q} (\|u_{n_k}(s)\|_p + \|u^*(s)\|_p) +$$

$$+ \int\limits_0^t f_2(t, x^*(s))(u_{n_k}(s) - u^*(s))\, ds \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau^*].$$

Останні два інтеграли прямують до нуля при $n \to \infty$. Це випливає із рівномірної збіжності послідовності розв'язків $x_{n_k}(t)$ до $x^*(t)$ і слабкої збіжності послідовності керувань $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$ при $n \to \infty$ на відрізку $t \in [0, T]$. Тому маємо

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x^*(s))\, dt + f_2(s, x^*(s)) u^*(s)]\, ds$$

для будь-якого $t \in [0, \tau^*]$.

Отже, $x^*(t)$ — розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ є оптимальним.

Розглянемо два випадки:

1. Функція $y^*(\tau^*)$ належить ∂D.

Нехай $\chi_R(t)$ — характеристична функція множини $\{t : |u^*(t)| < R\}$. Оскільки $L(t, x, \cdot)$ є опуклою, то виконується нерівність

$$L(t, y^*(t), v(t))\chi_R(t) \ge L(t, y^*(t), u^*(t))\chi_R(t) + \\ + (v(t) - u^*(t))L_v(t, y^*(t), u^*(t))\chi_R(t) \ \ \forall v(t) \in V, \ \ t \in [0, \tau^*].$$

Покладемо $v(t) = u_{n_k}(t)$, тоді

$$\int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u_{n_k}(t))\chi_R(t)\, dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\chi_R(t)\, dt + \\ + \int_0^{\tau^*} (u_{n_k}(t) - u^*(t))L_u(t, y^*(t), u^*(t))\chi_R(t)\, dt. \tag{7}$$

Із умови (4) маємо

$$|L_u(t, y^*(t), u^*(t))| \le |L_x(t, x^*(t), u^*(t))| + |L_u(t, x^*(t), u^*(t))| \le K(1 + |u^*(t)|^p) \le K(1 + R^p).$$

Другий інтеграл у правій частині нерівності (7) прямує до 0 при $n \to \infty$. Останнє випливає із слабкої збіжності $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$. Отже,

$$\lim_{n_k \to \infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u_{n_k}(t))\chi_R(t)\, dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\chi_R(t)\, dt.$$

Оскільки $L(t, x, u) \ge 0$, $\chi_R(t) \le 1$ і $\chi_R(t) \to 1$ при $R \to \infty$, то

$$\lim_{n_k \to \infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u_{n_k}(t))\, dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt. \tag{8}$$

Розглянемо також величину

$$\left| \int_0^{\tau^*} [L(t, y_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) - L(t, y^*(t), u_{n_k}(t))]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\tau^*} \int_0^1 L_y(t, y_{\lambda_{n_k}}(t), u_{n_k}(t))(y_{n_k}(t) - y^*(t))\, d\lambda dt \right| \le$$

$$\le \int_0^{\tau^*} |y_{n_k}(t) - y^*(t)| K(1 + |u_{n_k}(t)|^p)\, dt \le$$

$$\le K \max_{t \in [0,\tau^*]} \{|y_{n_k}(t) - y^*(t)|\} \int_0^{\tau^*} (1 + |u_{n_k}(t)|^p)\, dt, \tag{9}$$

де $y_{\lambda_{n_k}}(t) = y^*(t) + \lambda(y_{n_k}(t) - y^*(t))$. Оскільки $\|u_{n_k}\|_p$ є обмеженою, то права частина нерівності (9) прямує до 0 при $n_k \to \infty$. Далі маємо

$$\int_0^{\tau^*} L(t, y_{n_k}(t), u_{n_k}(t))\, dt \pm \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u_{n_k}(t))\, dt \pm \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt =$$

$$= \int_0^{\tau^*} [L(t, y_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) - L(t, y^*(t), u_{n_k}(t))]\, dt +$$

$$+ \int_0^{\tau^*} [L(t, y^*(t), u_{n_k}(t)) - L(t, y^*(t), u^*(t))]\, dt + \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt.$$

Перший інтеграл у правій частині останньої нерівності прямує до 0 при $n \to \infty$ в силу нерівності (9), а другий інтеграл в силу нерівності (8) є невід'ємним. Тому

$$\lim_{n_k \to \infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, y_{n_k}(t), u_{n_k}(t))\, dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt \tag{10}$$

або

$$J(u^*) \le \lim_{n_k \to \infty} \inf J(u_{n_k}(t)).$$

Оскільки

$$\inf_{u \in U} J(u) \le J(u^*) \le \lim_{n_k \to \infty} \inf J(u_{n_k}) = m,$$

то

$$J(u^*) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

2. Нехай тепер $\tau^* = T$ і $y^*(\tau^*) \in D \setminus \partial D$.

Оскільки $y_{n_k}(t) \to y^*(t)$ при $n_k \to \infty$ рівномірно на $[0, T]$, то для достатньо великих n_k $\tau_{n_k} = T$.

Тоді якщо в (10) τ^* замінити на T, то отримаємо

$$J(u^*) \leq \lim_{n_k \to \infty} \inf \int\limits_0^T L(t, y_{n_k}(t), u_{n_k}(t))\, dt = \lim_{n_k \to \infty} \inf J(u_n) = m.$$

Отже, $u^*(t)$ — оптимальне керування.

На завершення проілюструємо доведену теорему.

Приклад. Нехай задача (1), (2) має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 e^{tx} + x^2 u(t), \\ x(0) &= 1, \end{aligned} \tag{11}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^\tau (e^{tx^2} + e^{tx^2} u^2)\, dt \to \inf, \tag{12}$$

де $|x| < 2$, $t \in [0,1] T = 1$, $u \in U$, U — довільна опукла замкнена множина, що містить 0.

Легко перевірити, що для задачі (11), (12) виконано всі умови теореми 1 при $p = 2$, а тому існує її оптимальне керування у класі допустимих керувань, що задовольняють умови a_1) та a_2) при $T = 1$ і $p = 2$.

Отже, задача (11), (12) має розв'язок.

1. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solution. — Springer, 2005. — 448 p.
2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
5. *Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Оптимальное управление: линейная теория и приложения. — М.: Макс Пресс, 2007.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
7. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. — М.: Наука, 2007. — 272 с.

Одержано 28.11.12