УДК 517.956.3

О МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. Т. Асанова

Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан
Республика Казахстан, 050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
e-mail: anarasanova@list.ru
anar@math.kz

We consider a multipoint problem with the data lying on the characteristics of a system of hyperbolic second order equations with two independent variables. By introducing new unknown functions, we reduce the problem to an equivalent one consisting of a family of multipoint problems for a family of ordinary differential equations and functional relations. We find conditions for edxistence of a unique solution in terms of the coefficients of the multipoint problems.

Розглянуто багатоточкову задачу з даними на характеристиці системи гіперболічних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними. Шляхом введення нових невідомих функцій задачу зведено до еквівалентної задачі, що складається з сім'ї багатоточкових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь та функціональних співвідношень. Отримано умови існування єдиного розв'язку в термінах коефіцієнтів багатоточкових задач.

Рассматривается многоточечная задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений со смешанной производной в прямоугольной области $\bar{\Omega} = [0,T]\times[0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) \tag{1}$$

с условиями

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{K_j(x)\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{t=t_j} + L_j(x)\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_j} + M_j(x)u(t,x)|_{t=t_j}\right\} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u = \mathrm{colon}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $K_j(x)$, $L_j(x)$, $M_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, — $(n\times n)$-матрицы, n-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ являются непрерывными на $\bar{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Пусть $C(\bar{\Omega}, R^n)$ — пространство непрерывных на Ω вектор-функций $u(t,x)$ с нормой

$$\|u\|_0 = \max_{(t,x)\in\bar{\Omega}} \|u(t,x)\|, \quad \|u(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|.$$

Функция $u(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Нелокальные краевые задачи для уравнений и систем в частных производных гиперболического типа изучались в работах многих авторов. Обзор и библиографию, посвященную данной тематике, можно найти в [1 – 3]. Активное развитие теории нелокальных краевых задач связано с их многочисленными приложениями в механике, физике, химии, теории ударных волн и др. [4]. Исследуемая задача (1) – (3) относится к нелокальной краевой задаче, условие (3) связывает значения искомой функции и ее производных на характеристических линиях $t = t_j$, $j = \overline{1,m}$. Некоторые типы многоточечных задач изучались в работах [5 – 6] численно-аналитическим методом. В работах [7 – 10] нелокальная краевая задача с данными на характеристиках $t = 0$, $t = T$ для систем гиперболических уравнений путем введения новых неизвестных функций была сведена к эквивалентной задаче, состоящей из семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональных соотношений. На основе этого и метода параметризации [11, 12] были получены коэффициентные условия однозначной и корректной разрешимости изучаемой задачи, а также предложены алгоритмы нахождения ее решения.

В настоящей работе данный подход развивается на многоточечные задачи и устанавливаются достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1) – (3) в терминах исходных данных. При этом относительно коэффициентов системы и граничных матриц предполагается только непрерывность на $\bar{\Omega}$ и $[0,\omega]$ соответственно. Основным условием разрешимости многоточечной задачи (1) – (3) является обратимость некоторой матрицы, составленной из матриц $A(t,x)$, $K_j(x)$, $j = \overline{1,m}$.

Вводятся новые неизвестные функции $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $w(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ и задача (1) – (3) сводится к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + B(t,x)w(t,x) + C(t,x)u(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \Big\{ K_j(x)v(t,x)|_{t=t_j} + L_j(x)w(t,x)|_{t=t_j} + M_j(x)u(t,x)|_{t=t_j} \Big\} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int_0^x v(t,\xi)d\xi, \quad w(t,x) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t} d\xi. \tag{6}$$

В задаче (4) – (6) условие $u(t,0) = \psi(t)$ учтено в соотношениях (6).

Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ называется решением задачи (4) – (6), если функция $v(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(t,x)$, $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$, $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$ функциональными соотношениями (6).

При фиксированных $w(t,x)$, $u(t,x)$ в задаче (4)–(6) требуется найти решение из $C(\bar{\Omega}, R^n)$ однопараметрического семейства многоточечных краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которое требует специального изучения.

Рассмотрим семейство многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in [0,\omega], \quad v \in R^n, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_j(x)v(t_j,x) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega]. \tag{8}$$

Непрерывная функция $v : \bar{\Omega} \to R^n$, имеющая на $\bar{\Omega}$ непрерывную производную по t, называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе (7) и условию (8) соответственно при всех $(t,x) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0,\omega]$.

При фиксированных $x \in [0,\omega]$ задача (7), (8) является линейной многоточечной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая различными методами была исследована многими авторами (обзор и библиографию см. в [13–16]). Вопросы разрешимости многоточечных краевых задач остаются важными в прикладном плане, так как имеют прямое отношение к теории сплайна и интерполирования, а также используются в теории многоопорных балок [15]. Несмотря на многочисленные работы, общие постановки многоточечных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений остаются малоизученными. Основным аппаратом исследования и решения многоточечных краевых задач остается метод функций Грина, отражающий специфику краевой задачи, построение которой сопряжено с большими трудностями вследствие сложности объекта и недостаточной изученностью ее свойств. Одним из путей преодоления этих трудностей является разработка конструктивных методов исследования и решения многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, не использующих фундаментальную матрицу и функцию Грина. Для исследования и решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [11, 12] был предложен метод параметризации. Он позволил, наряду с установлением коэффициентных критериев однозначной разрешимости исследуемой задачи, построить алгоритмы нахождения ее решения. В работе [17] метод параметризации был применен к многоточечным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. На его основе были получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи без использования фундаментальной матрицы и функции Грина, а также построены алгоритмы нахождения решений. При изменении переменной x на $[0,\omega]$ получаем семейство многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе метод параметризации распространяется на семейство многоточечных краевых задач (7), (8), зависящее от параметра $x \in [0,\omega]$.

Приведем схему метода. Выберем шаг $h > 0 : Nh = T$, $N = 1, 2, \ldots$, и проведем разбиение $[0,T) \times [0,\omega] = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r$, $\Omega_r = [(r-1)h, rh) \times [0,\omega]$. Пусть функция $v(t,x)$ — решение задачи (7), (8), v_r — сужение функции v на Ω_r, т. е. $v_r : \Omega_r \to R^n$ и $v_r(t,x) = v(t,x)$ при $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,N}$, $\lim_{t \to T-0} v_N(t,x) = v(T,x)$ при $x \in [0,\omega]$. Тогда задача

(7), (8) будет эквивалентна семейству многоточечных краевых задач

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = A(t,x)v_r + F(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{9}$$

$$K_1(x)v_1(0,x) + \sum_{j=2}^{m-1} K_j(x)v_{r_j}(t_j) + K_m(x)\lim_{t\to T-0} v_N(t,x) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{10}$$

$$\lim_{t\to sh-0} v_s(t,x) = v_{s+1}(sh,x), \quad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1,N-1}. \tag{11}$$

Здесь r_j — номер области, которому принадлежит линия t_j при выбранном $N : (t_j,x) \in \in [(r_j-1)h, r_jh) \times [0,\omega]$, $h = \dfrac{T}{N}$, $1 = r_1 \le r_2 \le r_3 \le \ldots \le r_m = N$. В условии (10) также учтено, что $0 = t_1$, $T = t_m$. Равенства (11) являются условиями склеивания или непрерывности решения на внутренних линиях разбиения. При отсутствии разбиения отсутствует также условие (11).

Пусть $C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$ — пространство систем функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), \ldots \ldots, v_N(t,x))'$, где функция $v_r : \Omega_r \longrightarrow R^n$ непрерывна и равномерно относительно $x \in \in [0,\omega]$ имеет конечный левосторонний предел $\lim_{t\to rh-0} v_r(t,x)$, $r = \overline{1,N}$, с нормой

$$\|v\|_1 = \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{(t,x)\in\Omega_r} \|v_r(t,x)\|.$$

Решением семейства многоточечных краевых задач (9)–(11) является система функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), \ldots, v_N(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$, где $v_r(t,x)$ — сужение функции $v(t,x)$ на Ω_r, непрерывно дифференцируемой и ограниченной на своей области определения Ω_r (здесь на начальных отрезках линий $t = (r-1)h$ функция $v_r(t,x)$ имеет правостороннюю производную), $r = \overline{1,N}$.

Эквивалентность задач (7), (8) и (9)–(11) заключается в следующем. Функция $v(t,x)$, определяемая равенствами $v(t,x) = v_r(t,x)$ при $(t,x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1,N}$, $v(T,x) = = \lim_{t\to Nh-0} v_N(t,x)$ при $x \in [0,\omega]$, удовлетворяет системе уравнений (7) при всех $(t,x) \in \in \bar{\Omega}$ и условию (8) при всех $x \in [0,\omega]$. Если $v(t,x)$ — решение семейства краевых задач (7), (8), то система его сужений $\{v_r(t,x)\}$, $r = \overline{1,N}$, является решением семейства многоточечных краевых задач (9)–(11). И наоборот, если система функций $v([t],x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), \ldots, v_N(t,x))' \in C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$ — решение задачи (9)–(11), то функция $v(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций $\{v_r(t,x)\}$, $r = \overline{1,N}$, будет решением исходного семейства краевых задач (7), (8). Из непрерывности коэффициентов $A(t,x)$, правой части $F(t,x)$ и функции $v(t,x)$ следует непрерывность $\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}$.

Через $\lambda_r(x)$ обозначим значение функции $v_r(t,x)$ при $t = (r-1)h$ и в каждой области $(t,x) \in \Omega_r$ выполним замену $\widetilde{v}_r(t,x) = v_r(t,x) - \lambda_r(x)$. Тогда задача (9)–(11) сводится к эквивалентной краевой задаче с неизвестными параметрами-функциями $\lambda_r(x)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \widetilde{v}_r}{\partial t} = A(t,x)\widetilde{v}_r + A(t,x)\lambda_r(x) + F(t,x), \\ \widetilde{v}_r((r-1)h,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N},\end{gathered} \tag{12}$$

$$K_1(x)\lambda_1(x)+\sum_{j=2}^{m-1}K_j(x)\lambda_{r_j}+\sum_{j=2}^{m-1}K_j(x)\widetilde{v}_{r_j}(t_j)+K_m(x)\lambda_N(x)+$$
$$+K_m(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N(t,x)=\Phi(x),\quad x\in[0,\omega],\tag{13}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\widetilde{v}_s(t,x)=\lambda_{s+1}(x),\quad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,N-1}.\tag{14}$$

Решением задачи (12) – (14) является пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*([t],x))$, $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots$ $\ldots,\lambda_N^*(x))'\in C([0,\omega],R^{nN})$, $\widetilde{v}^*([t],x)=(\widetilde{v}_1^*(t,x),\widetilde{v}_2^*(t,x),\ldots,\widetilde{v}_N^*(t,x))'\in C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$, где функции $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ непрерывно дифференцируемы на Ω_r, и при $\lambda_r(x)=\lambda_r^*(x)$, $r=\overline{1,N}$, удовлетворяет задаче Коши (12) при всех $(t,x)\in\Omega_r$ и условиям (13), (14) при всех $x\in$ $\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,N}$. Здесь $C([0,\omega],R^{nN})$ — пространство функций $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots$ $\ldots,\lambda_N^*(x))'$, где функция $\lambda_r:[0,\omega]\longrightarrow R^n$ непрерывна на $[0,\omega]$ с нормой

$$\|\lambda\|_2=\max_{r=\overline{1,N}}\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda_r(x)\|.$$

Задачи (7), (8) и (12) – (14) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $v(t,x)$ является решением задачи (7), (8), то пара $(\lambda(x),\widetilde{v}([t],x))$ с компонентами $\lambda_r(x)=v((r-$ $-1)h,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=v(t,x)-v((r-1)h,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (12) – (14). И наоборот, если пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*([t],x))$, где $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_N^*(x))'$, $\widetilde{v}^*([t],x)=(\widetilde{v}_1^*(t,x),\widetilde{v}_2^*(t,x),\ldots,\widetilde{v}_N^*(t,x))'$ — решение задачи (12) – (14), то функция $v^*(t,x)$, определяемая равенствами $v^*(t,x)=\lambda_r^*(x)+\widetilde{v}_r^*(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, $v^*(T,x)=$ $=\lambda_N^*(x)+\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N^*(t,x)$, $x\in[0,\omega]$, является решением задачи (7), (8). Из непрерывности и ограниченности функций $\widetilde{v}_r^*(t,x)$ на Ω_r, $r=\overline{1,N}$, следует существование левосторонних пределов $\lim_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r^*(t,x)$, а значения $\widetilde{v}_{r_j}^*(t_j,x)$, $j=\overline{2,m-1}$, $\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_N^*(t,x)$, $\lim_{t\to sh-0}\widetilde{v}_s^*(t,x)$, $s=\overline{1,N-1}$, удовлетворяют условиям (13), (14) при всех $x\in[0,\omega]$.

В отличие от (9) – (11) в задаче (12) – (14) появились начальные условия $\widetilde{v}_r((r-1)h,x)=$ $=0$. При фиксированных $\lambda_r(x)$ функция $\widetilde{v}_r(t,x)$ является решением задачи Коши (12), эквивалентной семейству систем интегральных уравнений на интервалах длины $h>0:$

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\left[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x)+A(\tau,x)\lambda_r(x)+F(\tau,x)\right]d\tau.\tag{15}$$

Подставив вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ правую часть (15) и повторив этот процесс $\nu(\nu\in\mathbb{N})$ раз, получим

$$\widetilde{v}_r(t,x)=D_{\nu,r}(t,x)\lambda_r(x)+G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r)+F_{\nu,r}(t,x),\tag{16}$$

где

$$D_{\nu,r}(t,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)\widetilde{v}_r(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(\tau_1,x)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} F(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1.$$

Из (16) найдем $\lim_{t\to rh-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,N}$, $x\in[0,\omega]$, $\widetilde{v}_{r_j}(t_j,x)$, $j=\overline{2,m-1}$. Подставив их в (13), (14), предварительно умножив (13) на $h>0$, относительно функциональных параметров $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$, получим систему уравнений

$$hK_1(x)\lambda_1(x) + h\sum_{j=2}^{m-1}K_j(x)[I+D_{\nu r_j}(t_j,x)]\lambda_{r_j}(x) + hK_m(x)[I+D_{\nu r_m}(t_m,x)]\lambda_{r_m}(x) =$$

$$= h\Phi(x) - h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)F_{\nu r_j}(t_j,x) - h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)G_{\nu r_j}(t_j,x,\widetilde{v}_{r_j}), \quad x\in[0,\omega], \quad (17)$$

$$[I+D_{\nu s}(sh,x)]\lambda_s(x) - \lambda_{s+1}(x) = -F_{\nu s}(sh,x) - G_{\nu s}(sh,x,\widetilde{v}_s), \quad s=\overline{1,N-1}, \quad (18)$$

где I — единичная матрица размерности n.

Запишем систему уравнений (17), (18) в виде

$$Q_\nu(h,x)\lambda(x) = -F_\nu(h,x) - G_\nu(h,x,\widetilde{v}), \quad (19)$$

где матрица $Q_\nu(h,x)$ размерности $(nN\times nN)$ определяется левой частью (17), (18), а nN-векторы $F_\nu(h,x)$, $G_\nu(h,x,\widetilde{v})$ имеют вид

$$G_\nu(h,x,\widetilde{v}) = \left(h\sum_{j=2}^{m}K_j(x)G_{\nu r_j}(t_j,x,\widetilde{v}_{r_j}), G_{\nu,1}(h,x,\widetilde{v}_1),\ldots,G_{\nu,N-1}((N-1)h,x,\widetilde{v}_{N-1})\right)',$$

$$F_\nu(h,x) = \left(-h\Phi(x) + h\sum_{j=2}^{m} K_j(x)F_{\nu r_j}(t_j,x), F_{\nu,1}(h,x),\ldots,F_{\nu,N-1}((N-1)h,x)\right)'.$$

Отметим, что при отсутствии разбиения, т. е. при $N=1$, матрица $Q_\nu(T,x)$ имеет вид

$$Q_\nu(T,x) = \sum_{j=1}^{m-1} K_j(x) + K_m(x)[I + D_{\nu 1}(T,x)].$$

Матрица $Q_\nu(h,x)$ имеет специальную структуру, поэтому при любом $x \in [0,\omega]$ она переводит элементы R^{nN} в R^{nN} и

$$\|Q_\nu(h,x)\| \le 1 + h\|K_1(x)\| + \max\left(h\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|, 1\right)\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}.$$

Из непрерывности матриц $A(t,x)$, $K_j(x)$, $j=\overline{1,m}$, на $\bar\Omega$, $[0,\omega]$ следует, что она является непрерывной по $x\in[0,\omega]$ при любом $\nu\in\mathbb{N}$.

Если известна $\widetilde v([t],x)\in C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$ с компонентами $\widetilde v_r(t,x)$, то из (19) можно найти $\lambda(x)\in C([0,\omega],R^{nN})$ с компонентами $\lambda_r(x)$, $r=\overline{1,N}$. Наоборот, если известна $\lambda(x)\in$ $\in C([0,\omega],R^{nN})$, то из (12) можно найти $\widetilde v([t],x)\in C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$. Поскольку неизвестны ни $\widetilde v([t],x)$, ни $\lambda(x)$, применяется итерационный метод, и решение задачи (12)–(14) — пару $(\lambda^*(x),\widetilde v^*([t],x))\in C([0,\omega],R^{nN})\times C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$ с компонентами $(\lambda_r^*(x),\widetilde v_r^*(t,x))$, $r=\overline{1,N}$, находим как предел последовательности $(\lambda^{(k)}(x),\widetilde v^{(k)}([t],x))\in C([0,\omega],R^{nN})\times$ $\times C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$ с компонентами $(\lambda_r^{(k)}(x),\widetilde v_r^{(k)}(t,x))$, $r=\overline{1,N}$, $k=0,1,2,\ldots$, определяемой по следующему алгоритму.

Шаг 0. Предполагая, что при выбранных $h>0$, $\nu\in\mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(h,x): R^{nN}\to R^{nN}$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, начальное приближение по функциональному параметру $\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),\ldots,\lambda_N^{(0)}(x))'\in C([0,\omega],R^{nN})$ определяем из системы линейных уравнений $Q_\nu(h,x)\lambda(x)=-F_\nu(h,x)$. На Ω_r, решая семейство задач Коши (12) при $\lambda_r(x)=$ $=\lambda_r^{(0)}(x)$, находим $\widetilde v^{(0)}([t],x)=(\widetilde v_1^{(0)}(t,x),\widetilde v_2^{(0)}(t,x),\ldots,\widetilde v_N^{(0)}(t,x))'\in C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$.

Шаг 1. Подставляя вместо $\widetilde v([t],x)$ найденную функцию $\widetilde v^{(0)}([t],x)$, из систем уравнений (19) определяем $\lambda^{(1)}(x)=(\lambda_1^{(1)}(x),\lambda_2^{(1)}(x),\ldots,\lambda_N^{(1)}(x))'\in C([0,\omega],R^{nN})$. На Ω_r, решая семейство задач Коши (12) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $\widetilde v^{(1)}([t],x)=(\widetilde v_1^{(1)}(t,x),$ $\widetilde v_2^{(1)}(t,x),\ldots,\widetilde v_N^{(1)}(t,x))'\in C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$.

Шаги 3–k-1 аналогичны.

Шаг k. Подставляя вместо $\widetilde v([t],x)$ найденную функцию $\widetilde v^{(k-1)}([t],x)$, из систем уравнений (19) определяем $\lambda^{(k)}(x)=(\lambda_1^{(k)}(x),\lambda_2^{(k)}(x),\ldots,\lambda_N^{(k)}(x))'\in C([0,\omega],R^{nN})$. На Ω_r, решая семейство задач Коши (12) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(k)}(x)$, находим $\widetilde v^{(k)}([t],x)=(\widetilde v_1^{(k)}(t,x),$ $\widetilde v_2^{(k)}(t,x),\ldots,\widetilde v_N^{(k)}(t,x))'\in C(\bar\Omega,\Omega_r,R^{nN})$, $k=0,1,2,\ldots$.

Метод параметризации процесс нахождения неизвестных функций разбивает на две части:

1) нахождение введенных параметров $\lambda_r(x)$ из системы функциональных уравнений (19);

2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{v}_r(t,x)$ из семейства задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12).

Умножая обе части (19) на h^{-1} и переходя в этом уравнении к пределу при $\nu \to \infty$ с учетом неравенства

$$\|G_\nu(h,x,\widetilde{v})\| \le \max\left(h\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|, 1\right)\frac{[\alpha(x)]^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r(t,x)\|,$$

получаем, что $\lambda(x)$ с компонентами $\lambda_r(x) \in C([0,\omega],R^n)$, $r=\overline{1,N}$, удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{h}\,Q_*(h,x)\lambda(x) = -F_*(A,F,\Phi,x,h). \tag{20}$$

Здесь $\dfrac{1}{h}\,Q_*(h,x) = \lim_{\nu\to\infty}\dfrac{1}{h}\,Q_\nu(h,x)$, $F_*(A,F,\Phi,x,h) = \dfrac{1}{h}\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(h,x)$.

Решение $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_N^*(x))' \in C([0,\omega],R^{nN})$ системы функциональных уравнений (20) совпадает на линиях разбиения со значениями функции $v^*(t,x)$ — точного решения задачи (7), (8) на линиях $t=(r-1)h$, $r=\overline{1,N}$, т. е. справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если $v^*(t,x)$ — решение задачи (7), (8), то $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_N^*(x))'$ с компонентами $\lambda_r^*(x) = v^*((r-1)h,x)$ удовлетворяет системе функциональных уравнений (20). И наоборот, если $\widehat{\lambda}(x) = (\widehat{\lambda}_1(x),\widehat{\lambda}_2(x),\ldots,\widehat{\lambda}_N(x))'$ — решение системы (20), то функция $v(t,x)$, определяемая равенствами*

$$v(t,x) = \widehat{\lambda}_r(x) + \widehat{\widetilde{v}}_r(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N}, \quad v(T,x) = \widehat{\lambda}_N(x) + \lim_{t\to T-0}\widehat{\widetilde{v}}_N(t,x),$$

где $\widehat{\widetilde{v}}_r(t,x)$ — решение задачи Коши (12) при $\lambda_r(x) = \widehat{\lambda}_r(x)$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (7), (8).

Доказательство. Пусть $v^*(t,x)$ — решение задачи (7), (8), а пара $(\lambda^*(x),\widetilde{v}^*([t],x))$ с компонентами $\lambda_r^*(x) = v^*((r-1)h,x)$, $\widetilde{v}_r^*(t,x) = v^*(t,x) - v^*((r-1)h,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r = \overline{1,N}$, — решение задачи с функциональными параметрами (12)–(14). Тогда для любого $\nu\in\mathbb{N}$ из представления (16) и системы (19) имеют место равенства

$$\widetilde{v}_r^*(t,x) = D_{\nu,r}(t,x)\lambda_r^*(x) + G_{\nu,r}(t,x,\widetilde{v}_r^*) + F_{\nu,r}(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N}, \tag{21}$$

$$Q_\nu(h,x)\lambda^*(x) = -F_\nu(h,x) - G_\nu(h,x,\widetilde{v}^*). \tag{22}$$

Поскольку

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|G_\nu(h,x,\widetilde{v}^*)\| \le \max\left(h\max_{x\in[0,\omega]}\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|, 1\right)\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}\max_{x\in[0,\omega]}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^*(t,x)\|$$

и $D_{\nu,r}(t,x)$, $F_{\nu,r}(t,x)$ в правой части (21) при $\nu \to \infty$ на Ω_r равномерно сходятся к

$$D_{*,r}(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} A(\tau_{j+1},x) d\tau_{j+1} \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1,N},$$

$$F_{*,r}(t,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} F(\tau_1,x) d\tau_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{(r-1)h}^{t} A(\tau_1,x) \ldots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j,x) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_j} F(\tau_{j+1},x) d\tau_{j+1} d\tau_j \ldots d\tau_1,$$

перейдя к пределу при $\nu \to \infty$ в (21), (22) и разделив обе части (22) на $h > 0$, получим

$$\widetilde{v}_r^*(t,x) = D_{*,r}(t,x)\lambda_r^*(x) + F_{*,r}(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N},$$

$$\frac{1}{h} Q_*(h,x)\lambda^*(x) = -F_*(A,F,\Phi,x,h),$$

т. е. $\lambda^*(x)$ удовлетворяет (20).

Теперь пусть $\widehat{\lambda}(x) = (\widehat{\lambda}_1(x), \widehat{\lambda}_2(x), \ldots, \widehat{\lambda}_N(x))'$ — решение уравнения (20) и $\widehat{\widetilde{v}}_r(t,x)$ — решение задачи Коши (12) при $\lambda_r(x) = \widehat{\lambda}_r(x)$. При введенных предположениях существует единственное решение

$$\widehat{\widetilde{v}}_r(t,x) = D_{*,r}(t,x)\widehat{\lambda}_r(x) + F_{*,r}(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \tag{23}$$

и $\widehat{\widetilde{v}}([t],x) \in C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{nN})$.

Таким образом, пара $(\widehat{\lambda}(x), \widehat{\widetilde{v}}([t],x)) \in C([0,\omega], R^{nN}) \times C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{nN})$ и удовлетворяет (12). Поскольку $\widehat{\lambda}(x)$ — решение (20), справедливы равенства

$$K_1(x)\widehat{\lambda}_1(x) + \sum_{j=2}^{m} K_j(x)\widehat{\lambda}_{r_j}(x) + \sum_{j=2}^{m} K_j(x)[D_{*,r_j}(t_j,x)\widehat{\lambda}_{r_j}(x) + F_{*,r_j}(t_j,x)] + K_m(x)\widehat{\lambda}_N(x) +$$

$$+ K_m(x)[D_{*,N}(T,x)\widehat{\lambda}_N(x) + F_{*,N}(T,x)] = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{24}$$

$$\widehat{\lambda}_r(x) + [D_{*,r}(rh,x)\widehat{\lambda}_r(x) + F_{*,r}(rh,x)] = \widehat{\lambda}_{r+1}(x), \quad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,N-1}. \tag{25}$$

Тогда в силу (23) выражения, стоящие в квадратных скобках (24), (25), равны $\widehat{\widetilde{v}}_{r_j}(t_j,x)$, $j = \overline{2,m-1}$, $\lim_{t\to T-0} \widehat{\widetilde{v}}_N(t,x)$, $\lim_{t\to rh-0} \widehat{\widetilde{v}}_r(t,x)$ соответственно, и пара $(\widehat{\lambda}(x), \widehat{\widetilde{v}}([t],x))$ удовлетворяет также и (13), (14). Поэтому из эквивалентности задач (7), (8) и (12)–(14) следует второе утверждение леммы.

Лемма 1 доказана.

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного выше алгоритма, одновременно обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (7), (8), а также оценку решения, дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $h > 0 : Nh = T$ *и* $\nu, \nu \in \mathbb{N}$, *матрица* $Q_\nu(h,x) : R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства:*

1) $\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(h,x)$,

2) $q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=2}^m \|K_j(x)\|, 1\right)\left[e^{\alpha(x)h} - \sum_{p=0}^{\nu}\dfrac{[\alpha(x)h]^p}{p!}\right] \le \chi < 1$, *где* $\gamma_\nu(h,x)$ *— положительная, непрерывная по* $x \in [0,\omega]$ *функция,* χ *— константа.*

Тогда задача (7), (8) имеет единственное решение $v^*(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\|v^*(t,x)\| \le [k_1(x,h,\nu) + k_2(x,h,\nu)]\max\left[\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right], \tag{26}$$

где

$$k_1(x,h,\nu) = \frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\max\left(1, h\sum_{j=2}^m\|K_j(x)\|\right)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}k_0(x,h,\nu) +$$

$$+ h\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=2}^m\|K_j(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$k_2(x,h,\nu) = \left\{[e^{\alpha(x)h}-1]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\max\left(1, h\sum_{j=2}^m\|K_j(x)\|\right)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} + 1\right\}k_0(x,h,\nu),$$

$$k_0(x,h,\nu) = [e^{\alpha(x)h}-1]\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=2}^m\|K_j(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}h + he^{\alpha(x)h}.$$

Доказательство. В силу непрерывности $K_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, $A(t,x)$ матрица $Q_\nu(h,x)$ непрерывна по $x \in [0,\omega]$. В свою очередь в силу условий теоремы и неравенства

$$\|[Q_\nu(h,x)]^{-1} - [Q_\nu(h,\bar{x})]^{-1}\| \le \|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\|\|Q_\nu(h,x) - Q_\nu(h,\bar{x})\|\|[Q_\nu(h,\bar{x})]^{-1}\|, \ x,\bar{x} \in [0,\omega],$$

матрица $[Q_\nu(h,x)]^{-1}$ также непрерывна при всех $x \in [0,\omega]$. Тогда существует единственный $\lambda^{(0)}(x)$ с компонентами $\lambda_r^{(0)}(x) \in C([0,\omega], R^n)$, $r = \overline{1,N}$, и

$$\|\lambda^{(0)}(x)\|_3 = \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r^{(0)}(x)\| \leq$$

$$\leq \gamma_\nu(h,x)\|F_\nu(h,x)\|_3 \leq \gamma_\nu(h,x \max\Bigg\{ h\|\Phi(x)\| +$$

$$+ h\sum_{j=2}^{m} \|K_j(x)\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|h, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|h \Bigg\} \leq$$

$$\leq \gamma_\nu(h,x) \max\Bigg\{ 1 +$$

$$+ h\sum_{j=2}^{m} \|K_j(x)\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \Bigg\} \max\left(\|\Phi(x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\| \right) h. \tag{27}$$

При введенных предположениях задача Коши (12) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ для каждого фиксированного $x \in [0,\omega]$ имеет единственное решение $\widetilde{v}^{(0)}([t],x)$ с компонентами $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r = \overline{1,N}$. Используя неравенство Гронуолла – Беллмана в интегральных уравнениях (15), имеем

$$\|\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)\| \leq \left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)} - 1 \right] \|\lambda_r^{(0)}(x)\| +$$

$$+ e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|F(t,x)\|h, \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}. \tag{28}$$

Аналогично для разности $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(0)}(t,\bar{x})$, $x,\bar{x} \in [0,\omega]$, получаем оценку

$$\sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(0)}(t,\bar{x})\| \leq \left[e^{\alpha(x)h} - 1 \right] \|\lambda_r^{(0)}(x) - \lambda_r^{(0)}(\bar{x})\| +$$

$$+ e^{\alpha(x)h} h \Bigg\{ \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|F(t,x)\| + \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|A(t,x) - A(t,\bar{x})\| \times$$

$$\times \left[\sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(0)}(t,\bar{x})\| + \|\lambda_r^{(0)}(\bar{x})\| \right] \Bigg\}, \ \ r = \overline{1,N}. \tag{29}$$

Поскольку $\lambda^{(0)}(x) \in C([0,\omega], R^{nN})$, матрица $A(t,x)$ и вектор $F(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, из (29) следует принадлежность $\widetilde{v}^{(0)}([t],x)$ пространству $C(\bar{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$. Из (27), (28) получаем

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)\| \leq k_0(x,h,\nu) \max\left(\|\Phi(x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\| \right). \tag{30}$$

По первому шагу алгоритма определяем $\lambda^{(1)}(x) \in C([0,\omega], R^{nN})$ и, используя (30), оцениваем разность $\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)$:

$$\|\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_3 \le \gamma_\nu(h,x)\|G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(0)})\|_3 \le$$

$$\le \gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|, 1\right)\frac{[\alpha(x)]^\nu}{\nu!}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|, 1\right)\frac{[\alpha(x)]^\nu}{\nu!}k_0(x,h,\nu)\max\left(\|\Phi(x)\|, \max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|\right). \quad (31)$$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательности $\{\lambda_r^{(k)}(x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x))\}$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,\ldots$. Снова воспользовавшись неравенством Гронуолла–Беллмана, при каждом $r=\overline{1,N}$ оценим разность решений задач Коши через разность параметров для всех $x\in[0,\omega]$:

$$\|\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(k-1)}(t,x)\| \le \left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)} - 1\right]\|\lambda_r^{(k)}(x) - \lambda_r^{(k-1)}(x)\|. \quad (32)$$

Из (19) следует

$$\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\|_3 = \|[Q_\nu(h,x)]^{-1}[G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(k)}) - G_\nu(h,x,\widetilde{v}^{(k-1)})]\|_3 \le$$

$$\le \gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|, 1\right)\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha(x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(x)\|\widetilde{v}_r^{(k)}(\tau_\nu,x)-\right.$$

$$\left.-\widetilde{v}_r^{(k-1)}(\tau_\nu,x)\|d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1\right\}.$$

Подставляя в это выражение (32) и вычисляя повторные интегралы, получаем

$$\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\|_3 \le q_\nu(h,x)\|\lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x)\|_3 \le \chi\|\lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x)\|_3, \quad (33)$$

$$k=1,2,\ldots.$$

Из условия 2 теоремы и неравенства

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|\widetilde{v}_r^{(k)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(k-1)}(t,x)\| \le \left[e^{\alpha(x)h} - 1\right]\max_{r=\overline{1,N}}\|\lambda_r^{(k)}(x) - \lambda_r^{(k-1)}(x)\| \quad (34)$$

следует сходимость последовательности $(\lambda^{(k)}(x), \widetilde{v}^{(k)}([t], x)) \in C([0,\omega], R^{nN}) \times \times C(\bar{\Omega}, \Omega_r, R^{nN})$ с компонентами $(\lambda_r^{(k)}(x),\ \widetilde{v}_r^{(k)}(t,x))$, $r = \overline{1,N}$, к $(\lambda^*(x),\ \widetilde{v}^*([t],x))$ — решению задачи (12)–(14) при $k \to \infty$.

На основе (27), (30), (31), (33), (34) имеют место оценки

$$\|\lambda^*(x)\|_3 \le \|\lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_3 + \|\lambda^{(0)}(x)\|_3 \le$$
$$\le \frac{1}{1 - q_\nu(h,x)} \|\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_3 + \|\lambda^{(0)}(x)\|_3 \le$$
$$\le k_1(x,h,\nu) \max\left(\|\Phi(x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|\right),$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}^*(t,x)\| \le \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^*(t,x) - \widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)\| +$$
$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)\| \le$$
$$\le \left(e^{\alpha(x)h} - 1\right) \|\lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_3 +$$
$$+ k_0(x,h,\nu) \max\left(\|\Phi(x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|\right) \le$$
$$\le k_2(x,h,\nu) \max\left(\|\Phi(x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)|\right).$$

Поскольку пара $(\lambda^*(x),\ \widetilde{v}^*([t],x))$ является решением задачи (12)–(14), функция $v^*(t,x)$, определяемая равенствами

$$v^*(t,x) = \lambda_r^*(x) + \widetilde{v}_r^*(t,x)\ \ (t,x) \in \Omega_r,\ \ r = \overline{1,N},\ \ v^*(T,x) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t\to T-0} \widetilde{v}_N^*(t,x),\ \ x \in [0,\omega],$$

будет решением исходной задачи (7), (8) и для него справедлива оценка (26).

Покажем единственность решения задачи (7), (8). Пусть $v^*(t,x)$, $v^{**}(t,x)$ — два решения задачи (7), (8). Тогда соответствующие им пары $(\lambda^*(x), \widetilde{v}^*([t],x))$, $(\lambda^{**}(x), \widetilde{v}^{**}([t],x))$ будут решениями краевой задачи с параметрами-функциями (12)–(14) и аналогично (32), (33) получаем

$$\|\widetilde{v}_r^*(t,x) - \widetilde{v}_r^{**}(t,x)\| \le \left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)} - 1\right] \|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{**}(x)\|,$$

$$\|\lambda^*(x) - \lambda^{**}(x)\|_3 \le q_\nu(h,x)\|\lambda^*(x) - \lambda^{**}(x)\|_3, \quad \text{где} \quad q_\nu(h,x) \le \chi < 1.$$

Отсюда следует, что $\lambda_r^*(x) = \lambda_r^{**}(x)$, $\widetilde{v}_r^*(t,x) = \widetilde{v}_r^{**}(t,x)$, $r = \overline{1,N}$, т. е. $v^*(t,x) = v^{**}(t,x)$ при $(t,x) \in \bar{\Omega}$.

Теорема 1 доказана.

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является существование чисел $h > 0 : Nh = T$ и $\nu \in \mathbb{N}$, при которых матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$. Поскольку $(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(h,x)$ при $N \geq 2$ имеет специальную структуру, справедливы следующие леммы.

Лемма 2. $(nN \times nN)$*-матрица* $Q_\nu(h,x)$ *при* $x \in [0,\omega]$ *обратима тогда и только тогда, когда обратима* $(n \times n)$*-матрица* $M_\nu(x) = K_1(x) + \sum_{i=2}^m K_i(x)[I + D_{\nu r_i}(t_i,x)] \prod_{s=r_i-1}^1 [I + D_{\nu,s}(sh,x)]$.

Лемма 3. *Если матрица* $M_\nu(x)$ *обратима, то* $[Q_\nu(h,x)]^{-1} = \{d_{rj}(x)\}$, $r,j = \overline{1,N}$, *где*

$$d_{11}(x) = h^{-1} M_\nu^{-1}(x),$$

$$d_{1k}(x) = M_\nu^{-1}(x) \sum_{i=2}^m K_i(x)[I + D_{\nu r_i}(t_i,x)] H(r_i - 1, k)(x), \quad 1 < k \leq N,$$

$$d_{rr}(x) = [I + D_{\nu,r-1}((r-1)h,x)]\, d_{r-1,r}(x) - I, \quad r = 2,3,\ldots,N,$$

$$d_{rj}(x) = [I + D_{\nu,r-1}((r-1)h,x)]\, d_{r-1,j}(x), \quad j \neq r.$$

Здесь $H(k,j)(x) = \prod_{s=k}^j [I + D_{\nu s}(sh,x)]$, *если* $k \geq j$, $H(k,j)(x) = I$, *если* $k = j-1$, $H(k,j)(x) = 0$, *если* $k \leq j-2$.

Доказательства лемм 2 и 3 проводятся так же, как и доказательства аналогичных утверждений из [17]. Лемма 2 показывает, что обратимость матрицы $Q_\nu(h,x)$ размерности $(nN \times nN)$ эквивалентна обратимости матрицы $M_\nu(x)$, размерность которой совпадает с размерностью исходной системы (1), а лемма 3 позволяет поблочно определить элементы обратной матрицы $[Q_\nu(h,x)]^{-1}$.

Определение 1. *Задача (7), (8) называется корректно разрешимой, если для любых* $F(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\Phi(x) \in C([0,\omega], R^n)$ *она имеет единственное решение* $v(t,x) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ *и для него справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t,x)\| \leq K \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right), \quad x \in [0,\omega],$$

где K *— константа, не зависящая от* $F(t,x)$, $\Phi(x)$.

Функция $k(x,h,\nu) = k_1(x,h,\nu) + k_2(x,h,\nu)$ в неравенстве (26) ограничена и непрерывна по x на $[0,\omega]$ при фиксированных $h > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ и не зависит от функций $F(t,x)$, $\Phi(x)$.

Устремив ν к бесконечности, установим, что

$$\max_{t\in[0,T]} \|v^*(t,x)\| \leq k^*(x,h) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right),$$

где $k^*(x,h) = e^{\alpha(x)h}\left(1 + \gamma(x) \max\left\{1 + h\sum_{j=2}^m \|K_j(x)\| e^{\alpha(x)h}, e^{\alpha(x)h}\right\}\right) h$.

Эта оценка справедлива при любом $h > 0 : Nh = T$. Поэтому, предполагая $h = T$ и беря максимальное значение по $x \in [0, \omega]$, получаем константу корректной разрешимости K, определяемую только по исходным данным задачи (7), (8) и не зависящую от h, $F(t,x)$, $\Phi(x)$, т. е. справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]} \|v^*(t,x)\| \leq K \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right), \tag{35}$$

где $K = \max_{x\in[0,\omega]} e^{\alpha(x)T}\left(1 + \gamma(x)\max\left\{1 + T\sum_{j=2}^{m}\|K_j(x)\|e^{\alpha(x)T}, e^{\alpha(x)T}\right\}\right)T$.

Поэтому при условиях теоремы 1 задача (7), (8) корректно разрешима.

Теорема 2. *Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T$ и $\nu, \nu \in \mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(h,x) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенств из условий 1, 2 теоремы 1.*

Тогда краевая задача (1) – (3) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x) \in \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ и справедлива оценка

$$\max\left(\|u^*\|_0, \left\|\frac{\partial u^*}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial u^*}{\partial t}\right\|_0\right) \leq \widehat{K}\max\left[\|f\|_0, \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|, \max_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|\right], \tag{36}$$

где

$$\widehat{K} = \max\left(e^{K_0\widetilde{K}\omega}[1+\omega K_0], K[\widetilde{K}(1+\omega K_0)+1]\right),$$

$$K_0 = \max(K, \max_{x\in[0,\omega]}\|\alpha(x)\|K+1), \quad \widetilde{K} = \max_{x\in[0,\omega]}\widetilde{K}(x),$$

$$\widetilde{K}(x) = \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\| + \max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|, \sum_{j=1}^{m}\|L_j(x)\| + \sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|\right).$$

Доказательство. При выполнении условий теоремы задача (7), (8) имеет единственное решение. Кроме того, справедлива оценка (35), т. е. задача (7), (8) корректно разрешима. Покажем, что задача (1) – (3) имеет единственное классическое решение. Для этого достаточно рассмотреть задачу (4) – (6) и доказать ее однозначную разрешимость.

Решение задачи (4) – (6) — тройку функций $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ — найдем методом последовательных приближений. За нулевое приближение по $u(t,x)$, $w(t,x)$ возьмем соответственно $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$, а $v^{(0)}(t,x)$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + B(t,x)\dot{\psi}(t) + C(t,x)\psi(t) + f(t,x), \quad (t,x) \in \bar{\Omega}, \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_j(x)v(t_j,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{m} L_j(x)\dot{\psi}(t_j) - \sum_{j=1}^{m} M_j(x)\psi(t_j), \quad x \in [0,\omega]. \tag{38}$$

По предположению задача (37), (38) имеет единственное решение $v^{(0)}(t,x)$ и

$$\max_{t\in[0,T]}\|v^{(0)}(t,x)\| \le K\times$$

$$\times\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\dot\psi(t)+C(t,x)\psi(t)+f(t,x)\|,\left\|\varphi(x)-\sum_{j=1}^{m}L_j(x)\dot\psi(t_j)-\sum_{j=1}^{m}M_j(x)\psi(t_j)\right\|\right\},$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial v^{(0)}(t,x)}{\partial t}\right\| \le \left\{\max_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|K+1\right\}\times$$

$$\times\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\dot\psi(t)+C(t,x)\psi(t)+f(t,x)\|,\left\|\varphi(x)-\sum_{j=1}^{m}L_j(x)\dot\psi(t_j)-\sum_{j=1}^{m}M_j(x)\psi(t_j)\right\|\right\}.$$

Если известны $u^{(k-1)}(t,x)$, $w^{(k-1)}(t,x)$, то $v^{(k)}(t,x)$ находим, решая задачу (4), (5), где в правых частях уравнения $w(t,x)=w^{(k-1)}(t,x)$, $u(t,x)=u^{(k-1)}(t,x)$, $k=1,2,\ldots$.

При найденном $v^{(k)}(t,x)$ следующие приближения по $u(t,x)$, $w(t,x)$ определяем из соотношений (6):

$$u^{(k)}(t,x)=\psi(t)+\int_0^x v^{(k)}(t,\xi)d\xi,\quad w^{(k)}(t,x)=\dot\psi(t)+\int_0^x\frac{\partial v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(k)}(t,x)=v^{(k)}(t,x)-v^{(k-1)}(t,x)$, $\Delta u^{(k)}(t,x)=u^{(k)}(t,x)-u^{(k-1)}(t,x)$, $\Delta w^{(k)}(t,x)=w^{(k)}(t,x)-w^{(k-1)}(t,x)$, и для них, использовав корректную разрешимость задачи (7), (8), установим оценки

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta v^{(k+1)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\Delta v^{(k+1)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right)\le\max\left(K,\max_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|K+1\right)\times$$

$$\times\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\|+\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|,\sum_{j=1}^{m}\|L_j(x)\|+\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|\right)\times$$

$$\times\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta w^{(k)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta u^{(k)}(t,x)\|\right),\tag{39}$$

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta w^{(k)}(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|\Delta u^{(k)}(t,x)\|\right)\le$$

$$\le\int_0^x\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta v^{(k)}(t,\xi)\|,\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\Delta v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right)d\xi.\tag{40}$$

Отсюда следует основное неравенство

$$\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta v^{(k+1)}(t,x)\|,\ \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\Delta v^{(k+1)}(t,x)}{\partial t}\right\|\right) \le$$

$$\le \max\left(K,\ \max_{t\in[0,T]}\|A(t,x)\|K+1\right)\widetilde{K}(x)\int_0^x \max\left(\max_{t\in[0,T]}\|\Delta v^{(k)}(t,\xi)\|,\ \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\Delta v^{(k)}(t,\xi)}{\partial t}\right\|\right)d\xi. \tag{41}$$

Из (41) следует равномерная сходимость последовательностей $\{v^{(k)}(t,x)\}$, $\left\{\dfrac{\partial v^{(k)}(t,x)}{\partial t}\right\}$ в норме пространства $C(\bar{\Omega},R^n)$ при $k\to\infty$. Тогда равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(k)}(t,x)\}$, $\{w^{(k)}(t,x)\}$ вытекает из (40). При этом предельные функции $v^*(t,x)$, $\dfrac{\partial v^*(t,x)}{\partial t}$, $u^*(t,x)$, $w^*(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и тройка функций $\{v^*(t,x),\, u^*(t,x),\, w^*(t,x)\}$ является решением задачи (4)–(6). Используя оценки (39)–(41), получаем оценку (36), где $\widehat{K}$ не зависит от f,ψ,φ.

Пусть теперь тройка $\{\widetilde{v}(t,x),\widetilde{u}(t,x),\widetilde{w}(t,x)\}$ — решение задачи (4)–(6), где $f(t,x)=0$, $\psi(t)=0$, $\varphi(x)=0$ для всех $(t,x)\in\bar{\Omega}$. Тогда из корректной разрешимости задачи (7), (8) и соотношений (6) следуют равенства $\widetilde{v}(t,x)=0$, $\widetilde{u}(t,x)=0$, $\widetilde{w}(t,x)=0$ для всех $(t,x)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (1)–(3).

Теорема 2 доказана.

Проиллюстрируем проверку условий теоремы 2 на конкретных примерах.

Пример 1. Рассмотрим на $[0,1]\times[0,1]$ систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x & 1+t^2 \\ 1+t & 1\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 2+t^2 & x\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t} + u + f(t,x) \tag{42}$$

с условиями

$$u(t,0)=0,\quad t\in[0,1], \tag{43}$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + \frac{\partial u(0.6,x)}{\partial x} - u(1,x) = 0,\quad x\in[0,1], \tag{44}$$

где $u(t,x)$ — двумерная вектор-функция, $f(t,x)$ — непрерывная вектор-функция.

Пусть

$$A(t,x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x & 1+t^2 \\ 1+t & 1\end{pmatrix},\quad K_1(x)=K_2(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad K_3(x)=0.$$

Проверим условия теоремы 2 при $h=1$, $N=1$, $\nu=1$:

$$Q_1(1,x) = \begin{pmatrix} 2+0.2x & 0.224 \\ 0.26 & 2.2\end{pmatrix},$$

$$\|[Q_1(1,x)]^{-1}\| \le 0.5666,\quad q_1(1,x) = 0.5666\cdot 2\left[e^{(x+2)/3} - 1 - \frac{x+2}{3}\right] \le 0.804572 < 1.$$

Условия 1, 2 теоремы 1 выполнены, поэтому задача (42) – (44) однозначно разрешима.

Пример 2. Рассмотрим на $[0,1]\times[0,1]$ систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \begin{pmatrix} 1+tx & 0 \\ 0 & 1+tx \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} t & t+x^2 \\ t+x & x \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t} + u + f(t,x) \tag{45}$$

с условиями

$$u(t,0) = 0, \quad t\in[0,1], \tag{46}$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u(0.5,x)}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u(1,x)}{\partial x} = 0, \quad t\in[0,1], \tag{47}$$

где $u(t,x)$ — двумерная вектор-функция, $f(t,x)$ — непрерывная вектор-функция.

Пусть

$$A(t,x) = \begin{pmatrix} 1+tx & 0 \\ 0 & 1+tx \end{pmatrix}, \quad K_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $h=0.5$, $N=2$, $\nu=1$, а (4×4)-матрица $Q_1(0.5,x)$ будет иметь вид

$$Q_1(0.5,x) = \begin{bmatrix} 0.5K_1(x)+0.5K_2(x)[I+D_{1,1}(0.5,x)] & 0.5K_3(x)[I+D_{1,2}(1,x)] \\ I+D_{1,1}(0.5,x) & -I \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности 2.

Матрица $M_1(x)$ имеет вид

$$M_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & -\left(0.5+\dfrac{0.75x}{2}\right)\left(1.5+\dfrac{0.25x}{2}\right) \\ \left(0.5+\dfrac{0.75x}{2}\right)\left(1.5+\dfrac{0.25x}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

и обратима при всех $x\in[0,1]$. Согласно лемме 2, тогда будет обратима и матрица $Q_1(0.5,x)$. С помощью рекуррентных формул из леммы 3 можно найти ее блочные элементы. Проверим условия теоремы 2:

$$\|[Q_1(0.5,x)]^{-1}\| \le \frac{2}{1.5625}, \quad q_1(0.5,x) = \frac{2}{1.5625}\cdot 2[e-1-1] \approx 0.9088 < 1.$$

Они выполнены, тогда задача (45) – (47) однозначно разрешима.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1984. — 264 с.

2. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. — Киев : Наук. думка, 1992. — 208 с.

3. *Kiguradze T.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 1994. — **1**. — P. 1 – 144.

4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.

5. *Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б.* О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 12. — С. 1657 – 1663.

6. *Урманчева Л. Б.* Двухточечные и многоточечные задачи для систем уравнений с частными производными гиперболического типа. — Киев, 1993. — 40 с. — (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 93.2).

7. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. — 2002. — № 3. — С. 20 – 26.

8. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. РАН. — 2003. — **391**, № 3. — С. 295 – 297.

9. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 3. — С. 337 – 346.

10. *Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.* Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доп. НАН України. — 2010. — № 4. — С. 7 – 11.

11. *Джумабаев Д. С.* Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. АН КазССР. — 1988. — № 1. — С. 48 – 52.

12. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. — 1989. — **29**, № 1. — С. 50 – 66.

13. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.

14. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. — 1987. — **30**. — С. 3 – 103.

15. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н., Кенжебаев К. К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач // Тр. Ин-та математики НАН Украины. — 1999. — **29**. — 220 с.

16. *Agarwal R. P., Kiguradze I.* On multi-point boundary value problems for linear ordinary differential equations with singularities // J. Math. Anal. and Appl. — 2004. — **297**. — P. 131 – 151.

17. *Джумабаев Д. С., Иманчиев А. Е.* Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Мат. журн. — 2005. — **5**, № 1(15). — С. 30 – 38.

Получено 03.07.12