УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГАСАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ МАККІ – ГЛАССА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

О. І. Неня

Київ. нац. економ. ун-т ім. В. Гетьмана
Україна, 03680, Київ, просп. Перемоги, 54/1

We consider a functional-differential Mackey – Glass equation with variable coefficients, nonconstant delay, and impulsive effects, and find conditions for attenuation of its positive solutions.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение Макки – Гласса с переменными коэффициентами, непостоянным запаздыванием и импульсным воздействием. Получены условия угасания положительных решений данного уравнения.

Вступ. Розглянемо нелінійне функціонально-диференціальне рівняння Маккі – Гласса з імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = \frac{p(t)x(g(t))}{1 + x^n(g(t))} - \delta(t)x(t), \quad t \neq t_k, \tag{1}$$

$$x(t_k + 0) = (1 + b_k)x(t_k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $n > 0, p(t) \geq 0, \delta(t) > 0, g(t)$ — кусково-неперервні функції, $g(t) < t, \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \sup(t-g(t)) < \infty$, послідовність точок імпульсної дії задовольняє умови $t_{k+1}-t_k >$ $> 0, k \in \mathbb{Z}^+$.

Рівняння Маккі – Гласса було представлене як модель гематопоезу (відтворення клітин крові) у роботі [1]. Дослідження даного рівняння та деяких схожих моделей див., наприклад, у [2 – 4]. Рівняння Маккі – Гласса із запізненням описує модель генерації білих кров'яних тілець [5, 6], а імпульсна дія характеризує короткочасні зовнішні впливи на систему [7, 8].

Основними питаннями, що досліджуються в вищезгаданих працях, є існування періодичних розв'язків, властивість перманентності розв'язку, локальний та глобальний аналіз стійкості розв'язків.

Під розв'язком рівняння (1) із початковим значенням

$$x(t) = \varphi(t), \quad t < t_0, \quad x(t_0) = x_0 > 0, \tag{3}$$

де $\varphi : (-\infty, t_0) \to \mathbb{R}, \varphi(t) \geq 0$ — кусково-неперервна обмежена функція, розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь, а також задовольняє умови імпульсів (2).

Виходячи з біологічної інтерпретації даного рівняння, розглядаємо розв'язки, які набувають невід'ємних значень.

Означення 1. *Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) будемо називати згасаючим, якщо*

$$x(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Допоміжні результати. Розглянемо лінійне рівняння

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= c(t)x(g(t)) - a(t)x(t), \quad t \neq t_k, \\ x(t_k+0) &= (1+b_k)x(t_k), \quad t = t_k, \end{aligned} \tag{4}$$

з початковою функцією та початковим значенням

$$x(t) = \varphi(t) \geq 0, \quad t < t_0, \quad x(t_0) = x_0 > 0. \tag{5}$$

Введемо до розгляду також відповідні нерівності з імпульсною дією:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\leq c(t)y(g(t)) - a(t)y(t), \\ y(t_k+0) &= (1+b_k)y(t_k) \end{aligned} \tag{6}$$

та

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\geq c(t)w(g(t)) - a(t)w(t), \\ w(t_k+0) &= (1+b_k)w(t_k). \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 1. *Нехай $a(t) \geq 0$, $c(t) > 0$, $g(t)$ — кусково-неперервні функції. Тоді розв'язок рівняння (4), (5) є додатним. Якщо $x(t) = y(t) = w(t)$, $t \leq t_0$, то $y(t) \leq x(t) \leq w(t)$, $t \geq t_0$, де $y(t)$ і $w(t)$ — відповідно розв'язки нерівностей (6), (7).*

Доведення. При доведенні теореми використаємо ідеї статті [5]. Позначимо

$$z(t) = x(t)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right\}\prod_{t_0\leq t_k<t}(1+b_k)^{-1}, \quad t > t_0, \tag{8}$$

$$z(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t < t_0, \quad z(t_0) = x(t_0).$$

Підставивши $z(t)$ в (4), отримаємо рівняння

$$\dot{z}(t) = c(t)z(g(t))\exp\left\{\int_{g(t)}^{t} a(s)ds\right\}\prod_{g(t)\leq t_k<t}(1+b_k)^{-1}. \tag{9}$$

Звідси робимо висновок, що при додатних початкових умовах $z'(t) \geq 0$, тому функція $z(t)$ є додатною і неспадною. Розв'язок $x(t)$ теж буде додатною функцією, оскільки знаки $x(t)$ і $z(t)$ збігаються.

Розглянемо фундаментальну функцію $X(t,s)$ для рівняння (4), яка є його розв'язком при $t \geq s$ з початковими умовами $X(t,s) = 0$, $t < s$, $X(s,s) = 1$, і тому $X(t,s) > 0$.

Позначимо $u(t) = x(t) - y(t)$, де $y(t)$ — розв'язок рівняння, яке отримується із нерівності (6):

$$\dot{y}(t) = c(t)y(g(t)) - a(t)y(t) - f(t),$$

$$y(t_k + 0) = (1 + b_k)y(t_k), \quad f(t) \geq 0.$$

Тоді

$$\begin{gathered} \dot{u}(t) = c(t)u(g(t)) - a(t)u(t) + f(t), \quad u(t) = 0, \quad t \leq t_0, \\ u(t_k + 0) = (1 + b_k)u(t_k), \quad t = t_k. \end{gathered} \tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s)f(s)ds \geq 0. \tag{11}$$

Звідси $x(t) \geq y(t)$ при $t \geq t_0$.

Аналогічно, якщо $u(t) = w(t) - x(t)$, де $w(t)$ — розв'язок нерівності (7), отримуємо $u(t) \geq 0$ і тому $x(t) \leq w(t)$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови*

$$\inf_{t>t_0} \left\{ \frac{a(t)}{c(t)} \prod_{g(t)\leq t_k<t} (1 + b_k) \right\} > \rho > 1, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(\prod_{t_0\leq t_k<t} (1 + b_k)\, e^{-\alpha(t-t_0)} \right) = 0, \tag{13}$$

де α визначається формулою

$$0 < \alpha < \inf_{t\in(t_0,+\infty)} \left\{ a(t)\left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \frac{1}{h(t)} \ln \left(\inf_{t>t_0} \left\{ \frac{a(t)}{\rho c(t)} \prod_{g(t)\leq t_k<t} (1 + b_k) \right\} \right) \right\}, \tag{14}$$

$h(t) = t - g(t)$, *то для будь-якого розв'язку $x(t)$ рівняння (4)* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Доведення. При доведенні теореми скористаємося методикою, запропонованою в [9]. Введемо функцію

$$y(t) = k \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} [a(s) - \alpha]\, ds \right\}, \tag{15}$$

де k вибирається достатньо великим, щоб для довільного $t \le t_0$ виконувалась умова $z(t) \le y(t)$, $z(t)$ — розв'язок рівняння (9).

Можна показати, що для $t \ge t_0$

$$y'(t) = (a(t) - \alpha) \exp\left\{ \int\limits_{g(t)}^{t} [a(s) - \alpha] ds \right\} y(g(t)). \tag{16}$$

Розіб'ємо інтервал $[t_0; +\infty)$ на інтервали запізнення. Існує значення t_1 таке, що $g(t) > t_0$ при $t > t_1$, тому $g(t_1) = t_0$. Тобто маємо інтервал $[t_0, t_1)$. Аналогічно будується інтервал $[t_1, t_2)$, де $g(t_2) = t_1$, і т. д.

Далі, для довільного $t \in [t_0, t_1]$ маємо розв'язок рівняння (9)

$$z(t) = z(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} c(s) \exp\left\{ \int\limits_{g(s)}^{s} a(\sigma) d\sigma \right\} \prod_{g(s) \le t_k < s} (1 + b_k)^{-1} z(g(s)) ds.$$

Тоді

$$z(t) \le y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} c(s) \exp\left\{ \int\limits_{g(s)}^{s} a(\sigma) d\sigma \right\} \prod_{g(s) \le t_k < s} (1 + b_k)^{-1} y(g(s)) ds \le$$

$$\le y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (a(s) - \alpha) \exp\left\{ \int\limits_{g(s)}^{s} [a(\sigma) - \alpha] ds \right\} y(g(s)) ds = y(t).$$

Перехід в останній нерівності можливий за умови

$$c(t) \exp\left\{ \int\limits_{g(t)}^{t} a(s) ds \right\} \prod_{g(t) \le t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \le (a(t) - \alpha) \exp\left\{ \int\limits_{g(t)}^{t} [a(s) - \alpha] ds \right\},$$

звідки

$$\alpha \le a(t) - c(t) e^{\alpha h(t)} \prod_{g(t) \le t_k < t} (1 + b_k)^{-1}.$$

Якщо виконується умова (14), то для $t > t_0$ отримуємо

$$a(t) - c(t)e^{\alpha h(t)} \prod_{g(t) \le t_k < t} (1+b_k)^{-1} \ge a(t) - c(t)\frac{a(t)}{\rho c(t)} = a(t)\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) > \alpha.$$

Отже, на проміжку $[t_0, t_1]$ виконується оцінка $z(t) \le y(t)$.

Аналогічно для розв'язку $z(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$:

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^{t} c(s)\exp\left\{\int_{g(s)}^{s} a(\sigma)d\sigma\right\} \prod_{g(s) \le t_k < s} (1+b_k)^{-1} z(g(s))ds \le$$

$$\le y(t_1) + \int_{t_1}^{t} c(s)\exp\left\{\int_{g(s)}^{s} a(\sigma)d\sigma\right\} \prod_{g(s) \le t_k < s} (1+b_k)^{-1} y(g(s))ds \le$$

$$\le y(t_1) + \int_{t_1}^{t} (a(s)-\alpha)\exp\left\{\int_{g(s)}^{s} [a(\sigma)-\alpha]ds\right\} y(g(s))ds = y(t).$$

Аналогічно оцінку $z(t) \le y(t)$ можна продовжити на решту інтервалів $[t_{n-1}, t_n]$. Тому, використовуючи заміну (8), отримуємо

$$x(t) = z(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \prod_{t_0 \le t_k < t} (1+b_k) \le$$

$$\le k\exp\left\{\int_{t_0}^{t} [a(s)-\alpha]ds\right\} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \prod_{t_0 \le t_k < t} (1+b_k) =$$

$$= k\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \alpha ds\right) \prod_{t_0 \le t_k < t} (1+b_k) = ke^{-\alpha(t-t_0)} \prod_{t_0 \le t_k < t} (1+b_k).$$

З останньої нерівності та умови (13) випливає, що для довільного розв'язку рівняння (4) має місце $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Теорему 2 доведено.

Умови згасання розв'язку рівняння Маккі – Гласса.

Теорема 3. *Будь-який розв'язок рівняння (1) – (3) є додатним для всіх t.*

Доведення. Позначимо

$$x(t) = z(t)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \delta(s)ds + \sum_{t_0 \le t_k < t} \ln(1+b_k)\right\}, \quad t > t_0,$$

$z(t) = \varphi(t)$ при $t < t_0$, $z(t_0) = x(t_0)$.
Тоді рівняння (1) – (3) набере вигляду

$$\dot{z}(t) = \frac{p(t)z(g(t))\exp\left\{\int_{g(t)}^{t}\delta(s)ds - \sum_{g(t)\le t_k<t}\ln(1+b_k)\right\}}{1+\left[z(g(t))\exp\left\{-\int_{t_0}^{g(t)}\delta(s)ds + \sum_{t_0\le t_k<g(t)}\ln(1+b_k)\right\}\right]^n}.$$

Оскільки $\varphi(t) > 0$, $x_0 = z_0 > 0$, то $\dot{z}(t) \ge 0$ і функція $z(t)$ є неспадною. Тому $z(t) > 0$ при $t \ge t_0$ і відповідно $x(t) > 0$ при $t \ge t_0$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*

$$\inf_{t>t_0}\left\{\frac{\delta(t)}{p(t)}\prod_{g(t)\le t_k<t}(1+b_k)\right\} > \rho > 1, \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\prod_{t_0\le t_k<t}(1+b_k)\,e^{-\alpha(t-t_0)}\right) = 0, \tag{18}$$

де

$$0 < \alpha < \inf_{t\in(t_0,+\infty)}\left\{\delta(t)\left(1-\frac{1}{\rho}\right), \frac{1}{h(t)}\ln\left(\inf_{t>t_0}\left\{\frac{\delta(t)}{\rho p(t)}\prod_{g(t)\le t_k<t}(1+b_k)\right\}\right)\right\}.$$

Тоді для будь-якого розв'язку $x(t)$ рівняння (1) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Доведення. Оскільки розв'язок $x(t)$ є додатним, то

$$\dot{x}(t) \le p(t)x(g(t)) - \delta(t)x(t), \quad t \ge 0,$$

$$x(t_k+0) = (1+b_k)x(t_k).$$

Далі, використовуючи теореми 1, 2, доводимо дану теорему.

1. *Mackey M. C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. — 1977. — **197**. — P. 287 – 289.

2. *Hale J. K., Sternberg N.* Onset of chaos in differential delay equations // J. Comput. Phys. — 1988. — **77**, № 1. — P. 221 – 239.

3. *Gopalsamy K., Trofimchuk S. I., Bantsur N. R.* A note on global attractivity in models of hematopoiesis // Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, № 1. — P. 5 – 12.

4. *Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* A global stability criterion for a family of delayed population models // Quart. Appl. Math. — 2005. — **63**. — P. 56 – 70.

5. *Berezansky L., Braverman E.* Mackey – Glass equation with variable coefficients // Comput. and Math. Appl. — 2006. — **51**. — P. 1 – 16.

6. *Мисло Ю. М., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі – Гласса з імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 507 – 515.

7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.

8. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapure: World Sci., 1989. — 273 p.

9. *Lisena B.* Global attractivity in nonautonomous logistic equations with delay // Nonlinear Anal.: Real World Appl. — 2008. — **9**. — P. 53 – 63.

Одержано 19.06.12,
після доопрацювання — 28.08.13