УДК 517.988.6

НЕЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ У ПРОСТОРАХ ОБМЕЖЕНИХ ДВОСТОРОННІХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We obtain conditions for the existence of bounded solutions of nonlinear difference equations.

Получены условия существования ограниченных решений нелинейных разностных уравнений.

1. Основні функціональні простори і об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел, E_n, $n \in \mathbb{Z}$, — довільні банахові простори з нормами $\|\cdot\|_{E_n}$, $n \in \mathbb{Z}$, і нульовими векторами 0_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно, $\mathfrak{l}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, — банахові простори двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, з нульовим елементом $\mathbf{0} = (0_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, для кожної з яких $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^p_{E_n} < \infty$, якщо $p \in [1, \infty)$, і $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n} < \infty$, якщо $p = \infty$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^p_{E_n}\right)^{1/p}, & \text{якщо} \quad p \in [1, \infty), \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n}, & \text{якщо} \quad p = \infty, \end{cases}$$

відповідно, $\mathfrak{C}_0$ — банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, з нульовим елементом $\mathbf{0} = (0_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, для кожної з яких $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{E_n} = 0$, і нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{C}_0} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n}$$

(якщо всі простори E_n, $n \in \mathbb{Z}$, збігатимуться з деяким банаховим простором E, то простори $\mathfrak{l}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, і $\mathfrak{C}_0$ позначатимемо через $l_p(\mathbb{Z}, E)$, $1 \leq p \leq \infty$, і $c_0(\mathbb{Z}, E)$ відповідно) і $L(X, Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із банахового простору X у банаховий простір Y, з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + F_n(x_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — елемент одного з просторів $\mathfrak{l}_p$, $1 \le p \le \infty$, або $\mathfrak{C}_0$, а відображення $A_n \in L(E_n, E_{n+1})$ і $F_n : E_{n-1} \to E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, є такими, що

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E_n,E_{n+1})} < \infty, \tag{2}$$

і для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ x\in E_{n-1},\ \|x\|_{E_{n-1}}\le r} \|F_n(x)\|_{E_n} < \infty. \tag{3}$$

Метою цієї статті є встановлення умов існування розв'язків рівняння (1) у просторах $\mathfrak{l}_p$, $1 \le p \le \infty$, і $\mathfrak{C}_0$ (у випадку $\mathbf{h} \in \mathfrak{l}_\infty$ і нульових відображень F_n, $n \in \mathbb{Z}$, це рівняння досліджено в [1]).

При дослідженні рівняння (1) будемо використовувати елементи теорії c-неперервних операторів.

2. c-Неперервні та c-цілком неперервні оператори. Розглянемо оператори $\mathcal{P}_m : \mathfrak{l}_\infty \to \to \mathfrak{C}_0$, $m \in \mathbb{N}$, і $\mathcal{Q}_n : \mathfrak{l}_\infty \to E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, що визначаються рівностями

$$(\mathcal{P}_m\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad |n| \le m, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad |n| > m, \end{cases}$$

і

$$\mathcal{Q}_n\mathbf{x} = x_n.$$

Нехай $\mathfrak{X}$ — простір $\mathfrak{l}_p$, $1 \le p \le \infty$, або $\mathfrak{C}_0$. Послідовність елементів $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{X}$, $k \ge 1$, називатимемо *локально збіжною* до $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{X}} \mathbf{x} \text{ при } \quad k \to \infty,$$

якщо $\sup_{k\geqslant 1} \|\mathbf{x}_k\|_{\mathfrak{X}} < \infty$ і $\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_m(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\|_{\mathfrak{X}} = 0$ для кожного числа $m \in \mathbb{N}$.

Оператор $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ і $\mathbf{x}_k \in \in \mathfrak{X}$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{X}} \mathbf{x}$ при $k \to \infty$, виконується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc, } \mathfrak{X}} \mathcal{H}\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

c-Неперервний оператор $\mathcal{H} : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ називається *c-цілком неперервним*, якщо для кожного $m \in \mathbb{N}$ оператор $\mathcal{P}_m\mathcal{H}$ є цілком неперервним.

Зазначимо, що c-неперервні та c-цілком неперервні оператори можуть не бути відповідно неперервними та цілком неперервними і навпаки. Це ми покажемо у випадку операторів, що діють у просторі $c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Приклад 1. Для ненульового елемента $\mathbf{x} \in c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ позначимо через $n_0(\mathbf{x})$ найменше натуральне число, для якого $|x_{-n_0(\mathbf{x})}| + |x_{n_0(\mathbf{x})}| \ne 0$. Визначимо оператор $\mathcal{H} : c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \longrightarrow \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ співвідношенням

$$(\mathcal{H}\mathbf{x})_n = \begin{cases} \{nx_n\} \sin \pi\{nx_n\}, & \text{якщо} \quad \mathbf{x} \ne \mathbf{0} \quad \text{і} \quad n \in [-n_0(\mathbf{x}), n_0(\mathbf{x})], \\ 0, & \text{якщо} \quad \mathbf{x} \ne \mathbf{0} \quad \text{і} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus [-n_0(\mathbf{x}), n_0(\mathbf{x})], \\ 0, & \text{якщо} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{і} \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

де $\{nx_n\}$ означає дробову частину числа nx_n. Розглянемо у просторі $c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ довільні елементи $\mathbf{x}_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $k \geq 1$, і $\mathbf{a} = (a)_{n\in\mathbb{Z}}$, для яких $\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc, } c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \mathbf{a}$ при $k \to \infty$. Завдяки неперервності функції $\{x\}\sin\pi\{x\}$ на $\mathbb{R}$ справджується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc, } c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \mathcal{H}\mathbf{a}$$

при $k \to \infty$. Тому оператор $\mathcal{H} : c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ є c-неперервним і, отже, c-цілком неперервним (кожний c-неперервний оператор $A : c_0(\mathbb{Z},E) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z},E)$ у випадку скінченновимірного простору E є c-цілком неперервним). Однак для цього оператора відсутня неперервність у точці $\mathbf{0}$. Справді, якщо

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{\delta_{k,n}}{2n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad k \geq 1,$$

де

$$\delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k = n, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad k \neq n, \end{cases}$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k\|_{c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})} = 0, \tag{4}$$

$$(\mathcal{H}\mathbf{x}_k)_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad n = k, \\ \\ 0, & \text{якщо} \quad n \neq k, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mathcal{H}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

і тому

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k - \mathcal{H}\mathbf{0} \not\to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Із (4) і (5) випливає, що для оператора $\mathcal{H}$ не виконується властивість повної неперервності.

Приклад 2. Розглянемо оператор $\mathcal{K} : c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, що визначається за допомогою рівності

$$(\mathcal{K}\mathbf{x})_n = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_{c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})}, & \text{якщо} \quad n = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \end{cases}$$

і елементи

$$\mathbf{x}_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n = k, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \neq k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N},$$

простору $c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$.

Очевидно, що оператор $\mathcal{K}$ є неперервним і цілком неперервним на $c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$. Однак властивість c-неперервності для K не виконується, оскільки

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc, } c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \mathbf{0} \text{ при } k \to \infty,$$

$$\mathcal{K}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

і

$$(\mathcal{K}\mathbf{x}_k)_0 = 1$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ $\left(\text{тому } \mathcal{K}\mathbf{x}_k \overset{\mathrm{loc},\, c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})}{\not\longrightarrow} \mathbf{0} \text{ при } k \to \infty\right)$. Отже, оператор $\mathcal{K}$ також не є c-цілком неперервним.

Зазначимо, що поняття c-неперервного оператора (на мові ε, δ) та c-цілком неперервного оператора введено до розгляду Е. Мухамадієвим [2, 3]. Вивчення цих операторів було продовжено в [3 – 16] та інших роботах.

3. Формулювання основних теорем. Розглянемо оператори $\mathfrak{D} : \mathfrak{l}_\infty \to \mathfrak{l}_\infty$ і $\mathfrak{F} : \mathfrak{l}_\infty \to \mathfrak{l}_\infty$, що визначаються співвідношеннями

$$(\mathfrak{D}\mathbf{x})_n = x_n - A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

і

$$(\mathfrak{F}\mathbf{x})_n = F_n(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Також для кожного числа $r > 0$ розглянемо двосторонню числову послідовність

$$\mathbf{a}(r) = (a_n(r))_{n\in\mathbb{Z}},$$

де

$$a_n(r) = \sup_{x\in E_{n-1},\ \|x\|_{E_{n-1}}\le r} \|F_n(x)\|_{E_n}.$$

Завдяки (2) і (3) лінійний оператор $\mathfrak{D}$ є неперервним, оператор $\mathfrak{F}$ є обмеженим (цей оператор кожну обмежену множину відображає в обмежену множину) і $\mathbf{a}(r)$ є елементом простору $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ для кожного $r > 0$.

Справджуються наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай:*

1) оператор $\mathfrak{D} : \mathfrak{l}_\infty \to \mathfrak{l}_\infty$ має обернений неперервний оператор;

2) оператор $\mathfrak{F} : \mathfrak{l}_\infty \to \mathfrak{l}_\infty$ є обмеженим і c-цілком неперервним;

3) справджується нерівність

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty}\le r} \|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty}}{r} < \frac{1}{\|\mathfrak{D}^{-1}\|_{L(\mathfrak{l}_\infty,\mathfrak{l}_\infty)}}. \tag{8}$$

Тоді для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{l}_\infty$ рівняння (4) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{l}_\infty$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді:

1) якщо $\mathbf{a}(r) \in l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ для кожного $r > 0$ і $\mathbf{h} \in \mathfrak{l}_p$, де $p \in [1,\infty)$, то рівняння (1) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{l}_p$;

2) якщо $\mathbf{a}(r) \in c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ *для кожного* $r > 0$ *і* $\mathbf{h} \in \mathfrak{C}_0$, *то рівняння (1) має хоча б один розв'язок* $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}_0$.

Зазначимо, що *перша умова теореми* 1 *виконується тоді і тільки тоді, коли рівняння*

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

експоненціально дихотомічне на $\mathbb{Z}$ [1].

Нагадаємо, що для розв'язків рівняння (9) має місце *експоненціальна дихотомія* на $\mathbb{Z}$ (*рівняння* е-*дихотомічне*) [1], якщо для кожного $m \in \mathbb{Z}$ простір E_m розпадається в пряму суму замкнених підпросторів $E_m = E_m^+ + E_m^-$ і виконуються наступні умови:

а) проектори P_m^+ і P_m^- на підпростори E_m^+ і E_m^- відповідно рівномірно обмежені, тобто

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \|P_m^+\|_{L(E_m,E_m)} + \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|P_m^-\|_{L(E_m,E_m)} < \infty;$$

б) для кожного $z \in E_m^+$ для розв'язку y_n задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n \geq m,$$

$$y_m = z,$$

виконується співвідношення $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-m} \|z\|_{E_m}$, $n \geq m$, з деякими $N_1 > 0$ і $q_1 \in \in (0,1)$, що не залежать від n і m;

в) для кожного $z \in E_m^-$ для розв'язку y_n задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n < m,$$

$$y_m = z,$$

виконується співвідношення $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{m-n} \|z\|_{E_m}$, $n \leq m$, з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in \in (0,1)$, що не залежать від n і m.

Друга умова теореми 1 *виконується, якщо відображення* $F_n : E_{n-1} \to E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, *цілком неперервні або неперервні і простори* E_n, $n \in \mathbb{Z}$, *скінченновимірні* (*тоді ці відображення цілком неперервні*) *та задовольняють співвідношення* (3) *і навпаки*.

Очевидно, що окремим випадком співвідношення (8) є співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty} \leq r} \|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty}}{r} = 0.$$

4. Допоміжні результати. Наведемо теореми про зображення оператора $\mathfrak{D}^{-1}$, про існування нерухомих точок у c-цілком неперервних операторів та про інваріантність просторів обмежених числових послідовностей відносно лінійних c-неперервних автономних операторів, необхідні для доведення теорем 1 і 2.

4.1. Зображення оператора $\mathfrak{D}^{-1}$***.*** У статті [1] встановлено наступне твердження.

Теорема 3. *Оператор* $\mathfrak{D}$ *має неперервний обернений* $\mathfrak{D}^{-1}$ *тоді і тільки тоді, коли рівняння (9)* e*-дихотомічне на* $\mathbb{Z}$.

Експоненціальна дихотомія розв'язків рівняння (9) дає змогу (див. [1]) увести до розгляду функцію

$$G_{n,m} = \begin{cases} B_{n,m}, & \text{якщо} \quad n \geq m, \\ -C_{n,m}, & \text{якщо} \quad n < m, \end{cases}$$

де $B_{n,m}$ і $C_{n,m}$ — операторні розв'язки відповідно задач

$$Y_{n+1} = A_n Y_n, \quad n \geq m,$$

$$Y_m = P_m^+,$$

і

$$Z_{n+1} = A_n Z_n, \quad n < m,$$

$$Z_m = P_m^-,$$

що визначаються єдиним чином. Завдяки означенню e-дихотомічності рівняння (9) та теоремі Банаха – Штейнгауза [17] для $G_{n,m}$ справджується співвідношення

$$\|G_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)} \leq Nq^{|n-m|}, \quad (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \tag{10}$$

де $N = \max\{N_1, N_2\}$ і $q = \max\{q_1, q_2\}$. Тому можна розглянути лінійний неперервний оператор $\mathfrak{G}$, що діє у просторі $\mathfrak{l}_\infty$ і визначається рівністю

$$(\mathfrak{G}\mathbf{h})_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} h_m, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Згідно з [1] та теоремою 3 справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо оператор* $\mathfrak{D} : \mathfrak{l}_\infty \to \mathfrak{l}_\infty$ *має неперервний обернений оператор* $\mathfrak{D}^{-1}$, *то* $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{G}$ *і* $\left(\mathfrak{D}^{-1}\mathbf{h}\right)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n,m} h_m$, $n \in \mathbb{Z}$, *для всіх* $\mathbf{h} \in \mathfrak{l}_\infty$.

4.2. Теорема про існування нерухомих точок у c***-цілком неперервних операторів.*** Позначимо через $B[\mathbf{0}, r]$, $r \in (0, +\infty)$, замкнену кулю в $\mathfrak{l}_\infty$ радіуса r із центром у точці $\mathbf{0}$.

Справджується така теорема.

Теорема 5. *Якщо для c-цілком неперервного оператора* $\mathfrak{A} : B[\mathbf{0}, r] \longrightarrow B[\mathbf{0}, r]$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{A}B[\mathbf{0}, r] \subset B[\mathbf{0}, r] \cap \mathfrak{X}$, *де* $\mathfrak{X}$ *— будь-який із просторів* $\mathfrak{l}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, *і* $\mathfrak{C}_0$, *то оператор* $\mathfrak{A}$ *має хоча б одну нерухому точку* $\mathbf{x}_* \in B[\mathbf{0}, r] \cap \mathfrak{X}$.

Ця теорема є наслідком твердження: *кожний c-цілком неперервний оператор* $\mathfrak{A} : B[\mathbf{0}, r] \longrightarrow B[\mathbf{0}, r]$ *має хоча б одну нерухому точку* $\mathbf{x}_* \in B[\mathbf{0}, r]$, що є окремим випадком більш загального твердження, отриманого автором у [18, с. 52, 53].

4.3. Інваріантність просторів обмежених числових послідовностей відносно лінійних c-неперервних автономних операторів. Нехай $\mathbb{K}$ — множина $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ і визначимо лінійний c-неперервний оператор $\mathcal{A} : l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ за допомогою співвідношення

$$(\mathcal{A}\mathbf{x})_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n-m}x_m, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

де $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$. Очевидно, що співвідношення (11) можна подати у вигляді

$$(\mathcal{A}\mathbf{x})_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m x_{n-m}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Справджуються наступні два твердження.

Теорема 6. *Якщо* $p \in [1,\infty)$ *і* $\mathbf{x} \in l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, *то* $\mathcal{A}\mathbf{x} \in l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ *і*

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} \le \|\mathbf{a}\|_{l_1(\mathbb{Z},\mathbb{K})}\|\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})}.$$

Доведення. Визначимо оператор зсуву $\mathcal{S}_m : l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ за допомогою формули

$$\mathcal{S}_m\mathbf{x} = \mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

де $y_n = x_{n+m}$. На підставі (12)

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\mathcal{S}_{-m}\mathbf{x}.$$

Із цієї рівності, нерівності трикутника для векторів банахового простору (див., наприклад, [17]) та того, що $\|\mathcal{S}_{-m}\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} = \|\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})}$, випливає

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} = \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\mathcal{S}_{-m}\mathbf{x}\right\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|\|\mathcal{S}_{-m}\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|\|\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} = \|\mathbf{a}\|_{l_1(\mathbb{Z},\mathbb{K})}\|\mathbf{x}\|_{l_p(\mathbb{Z},\mathbb{K})} < \infty.$$

Отже, теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Якщо* $\mathbf{x} \in c_0(\mathbb{Z},\mathbb{K})$, *то* $\mathcal{A}\mathbf{x} \in c_0(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.

Доведення. Використаємо співвідношення (12). Зафіксуємо довільні число $\varepsilon > 0$ і елемент $\mathbf{x} \in c_0(\mathbb{Z},\mathbb{K})$. Завдяки включенню $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ існує таке натуральне число n_0, що

$$\sum_{|m|>n_0} |a_m| \le \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}\|_{c_0(\mathbb{Z},\mathbb{K})}}.$$

Тому

$$\left|\sum_{|m|>n_0} a_m x_{n-m}\right| \le \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Оскільки $\lim_{|n|\to+\infty} x_{n-m} = 0$ для кожного $m \in \mathbb{Z}$, то на підставі (13)

$$\overline{\lim_{|n|\to+\infty}} \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m x_{n-m}\right| \le \overline{\lim_{|n|\to+\infty}} \left(\left|\sum_{|m|\leqslant n_0} a_m x_{n-m}\right| + \left|\sum_{|m|>n_0} a_m x_{n-m}\right|\right) =$$

$$= \overline{\lim_{|n|\to+\infty}} \left|\sum_{|m|>n_0} a_m x_{n-m}\right| \le \varepsilon.$$

Із довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ випливає, що $\mathcal{A}\mathbf{x} \in c_0(\mathbb{Z},\mathbb{K})$.

Теорему 7 доведено.

Зазначимо, що оператор $\mathcal{A} : l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{K})$ є автономним, оскільки $\mathcal{S}_{-k}\mathcal{A}\mathcal{S}_k = \mathcal{A}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$ [19].

5. Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{l}_\infty$ і подамо рівняння (1) у вигляді

$$\mathfrak{D}\mathbf{x} = \mathfrak{F}\mathbf{x} + \mathbf{h}, \tag{14}$$

де $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{F}$ — оператори, що визначені рівностями (6) і (7). Завдяки першій умові теореми 1 кожний обмежений розв'язок рівняння (14) є розв'язком рівняння

$$\mathbf{x} = \mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{F}\mathbf{x} + \mathbf{h})$$

і навпаки. Розглянемо оператор $\mathfrak{B} : \mathfrak{l}_\infty \to \mathfrak{l}_\infty$, що визначається співвідношенням

$$\mathfrak{B}\mathbf{x} = \mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{F}\mathbf{x} + \mathbf{h}), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{l}_\infty, \tag{15}$$

і замкнену кулю $B[\mathbf{0}, R] \subset \mathfrak{l}_\infty$, де R — таке число, що виконуються нерівності

$$R > \left\|\mathfrak{D}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{l}_\infty,\mathfrak{l}_\infty)} \|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{l}_\infty} \tag{16}$$

і

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty}\le R} \|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty} \le \frac{R}{\|\mathfrak{D}^{-1}\|_{L(\mathfrak{l}_\infty,\mathfrak{l}_\infty)}} - \|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{l}_\infty}. \tag{17}$$

Таке R існує завдяки третій умові теореми.

Куля $B[\mathbf{0}, R]$ є інваріантною по відношенню до оператора $\mathfrak{B}$. Справді, якщо $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty)} \leq$ $\leq R$, то завдяки (15) – (17)

$$\|\mathfrak{B}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty} = \left\|\mathfrak{D}^{-1}(\mathfrak{F}\mathbf{x} + \mathbf{h})\right\|_{\mathfrak{l}_\infty} \leq \left\|\mathfrak{D}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{l}_\infty, \mathfrak{l}_\infty)} (\|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty} + \|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{l}_\infty}) \leq$$

$$\leq \left\|\mathfrak{D}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{l}_\infty, \mathfrak{l}_\infty)} \left(\left(\frac{R}{\left\|\mathfrak{D}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{l}_\infty, \mathfrak{l}_\infty)}} - \|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{l}_\infty} \right) + \|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{l}_\infty} \right) \leq R.$$

Далі покажемо, що оператор $\mathfrak{B}$ є c-цілком неперервним. Використаємо теорему 1. Завдяки цій теоремі та рівності (15) для кожного $\mathbf{y} = (y_n)_{\mathbb{Z}} \in \mathfrak{l}_\infty$

$$(\mathfrak{B}\mathbf{y})_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m}(F_m(y_{m-1}) + h_m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки оператори $G_{n,m}$, $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, неперервні і задовольняють співвідношення (10), де $q \in (0, 1)$, а оператори $F_m : E_{m-1} \to E_m$, $m \in \mathbb{Z}$, цілком неперервні на підставі другої умови теореми, то оператор $\mathfrak{B}$ є c-цілком неперервним.

Таким чином, завдяки теоремі 2 оператор $\mathfrak{B}$ має хоча б одну нерухому точку $\mathbf{x}^* \in$ $\in B[\mathbf{0}, R]$ і, отже, рівняння (1) має розв'язок $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}} \in B[\mathbf{0}, R]$.

На підставі довільності вибору $\mathbf{h} = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{l}_\infty$ теорему 1 доведено.

Зауваження 1. У теоремах 1 і 2 оператор $\mathfrak{F}$ може бути таким, що

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty} \leq r} \|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{l}_\infty}}{r} = \infty.$$

Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 3. Розглянемо числові послідовності $(\alpha_m)_{m \geq 1}$ і $(\beta_m)_{m \geq 1}$, де $\alpha_m = m!$ і $\beta_m =$ $= \alpha_m + 1$. Також розглянемо неперервні функції $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m \geq 1$, для яких $\operatorname{supp} \varphi_m =$ $= [\alpha_m, \beta_m]$ ($\operatorname{supp} \varphi_m$ — носій функції φ_m) і $\max_{x \in [\alpha_m, \beta_m]} |\varphi_m(x)| = m!\sqrt{m}$ для всіх $m \geq 1$. Визначимо цілком неперервне відображення $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за допомогою рівності $F(x) =$ $= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x)$. Очевидно, що

$$\frac{\max\limits_{|x| \leq \beta_m} |F(x)|}{\beta_m} = \frac{m!\sqrt{m}}{m! + 1} \quad \text{і} \quad \frac{\max\limits_{|x| \leq \alpha_{m+1}} |F(x)|}{\alpha_{m+1}} = \frac{m!\sqrt{m}}{(m+1)!}.$$

Із цих співвідношень і рівності $\lim_{m \to \infty} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m} = 1$ випливає, що

$$\underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\max\limits_{|x| \leq r} |F(x)|}{r} = 0 \quad \text{і} \quad \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\max\limits_{|x| \leq r} |F(x)|}{r} = \infty. \tag{18}$$

Далі розглянемо різницеве рівняння

$$x_n = F(x_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, та оператори $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{F}$, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ і визначаються формулами

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \\ &\mathfrak{F}\mathbf{x} = (F(x_{n-1}))_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Оператор $\mathfrak{D}$, як тотожний оператор, є оборотним, а оператор $\mathfrak{F}$ є c-цілком неперервним.

Завдяки (18) і (19) для $\mathfrak{F}$ справджуються співвідношення

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\max\limits_{\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}\le r} \|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{r} = 0 \quad \text{і} \quad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\max\limits_{\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}\le r} \|\mathfrak{F}\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})}}{r} = \infty.$$

Зауваження 2. У випадку простих різницевих рівнянь виконання співвідношення (8) є не лише достатньою, але і необхідною умовою, щоб справджувалася теорема 1. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 4. Для різницевого рівняння

$$x_n + \frac{1}{2}\,x_{n-1} + \mu x_{n-1} = h_n, \quad \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$, оператор $(\mathfrak{D}\mathbf{x})_n = x_n + \dfrac{1}{2}\,x_{n-1}$ є регулярним, $\left\|\mathfrak{D}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))} = 2$ і співвідношення (8) має вигляд $|\mu| < 1/2$. При $\mu = 1/2$ рівняння (20) не для кожної обмеженої правої частини має обмежений розв'язок, оскільки оператор $(\mathfrak{S}\mathbf{x})_n = x_n + x_{n-1}$ не є регулярним.

6. Доведення теореми 2. Нехай $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{X}$, де $\mathfrak{X}$ — або один із просторів $\mathfrak{l}_p$, $p \in [1,+\infty)$, або $\mathfrak{C}_0$. Оскільки $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{l}_\infty$, то за теоремою 1 різницеве рівняння (1) має розв'язок $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{l}_\infty$. Розглянемо число $r = \|\mathbf{x}^*\|_{\mathfrak{l}_\infty}$ і елемент $\mathbf{a}(r) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, де $a_n = \sup_{\|x\|_{E_{n-1}}\le r} \|F_n(x)\|_{E_n}$. Згідно з теоремою 4 для $\mathbf{x}^*$ виконується співвідношення

$$x_n^* = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n,m}(F_m(x_{m-1}^*) + h_m), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тому завдяки (10)

$$0 \le \|x_n^*\|_{E_n} \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} Nq^{|n-m|}(a_m + \|h_m\|_{E_m}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси, із включення $\mathbf{q} = (Nq^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ та з теорем 6 і 7 випливає, що $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{l}_p$, $p \in [1,+\infty)$, якщо $\mathbf{a}(r) \in l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ і $\mathbf{h} \in \mathfrak{l}_p$, і $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{C}_0$, якщо $\mathbf{a}(r) \in c_0(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ і $\mathbf{h} \in \mathfrak{C}_0$.

Теорему 2 доведено.

1. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 368 – 378.
2. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
3. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443 – 460.
4. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116(158)**, № 4(12). — С. 483 – 501.
5. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 34 – 37.
6. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130(172)**, № 1(5). — С. 86 – 104.
7. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.
8. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 2. — С. 201 – 205.
9. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 168 с.
10. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2010. — **201**, № 8. — С. 103 – 126.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 536 – 555.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 12. — С. 1685 – 1698.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 1. — С. 112 – 126.
14. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2012. — **203**, № 5. — С. 135 – 160.
15. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. — Душанбе, 1987. — С. 102 – 103.
16. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейная механика. — 1991. — Вып. 15(49). — С. 32 – 35.
17. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
18. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь. — Рівне: Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2011. — 342 с.
19. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 2. — С. 210 – 215.

Одержано 17.05.12