УДК 517.9

# ПРО НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ НА $\mathbb{R}^+$ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

**Н. Л. Денисенко**

*Ін-т математики НАН України*
*Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3*
*e-mail: natalia_den@bigmir.net*

*Conditions of existence of continuous on $\mathbb{R}^+$ solutions for a system of linear differential-functional equations with a linearly transformed argument are established.*

*Получены условия существования непрерывных на $\mathbb{R}^+$ решений системы линейных дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом.*

Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\lambda t), \tag{1}$$

де $0 < \lambda < 1$, $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $A(t), B(t)$ — $(n \times n)$-матричні функції.

Різні часткові випадки таких рівнянь були об'єктом дослідження багатьох математиків, і на даний час одержано велику кількість результатів щодо вивчення різних задач теорії таких рівнянь. При цьому активно вивчались питання існування різного роду розв'язків, поведінки розв'язків та ін. [1–5]. У даній роботі досліджується питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків системи рівнянь (1).

Має місце наступна теорема.

**Теорема 1.** *Якщо $A(t), B(t)$ — неперервні і обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ функції, то система рівнянь (1) має сім'ю неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, c)$, де $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $c_i, i = \overline{1, n}$, — довільні сталі.*

***Доведення.*** Розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$\overline{x}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \tag{2}$$

де $x_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — деякі, поки що невідомі, функції.

Підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k'(t) = A(t) \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t) + B(t) \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda t).$$

© Н. Л. Денисенко, 2007

Зрозуміло, що якщо $x_k(t)$ вибрати таким чином, що

$$\begin{aligned} &x_0'(t) = 0, \\ &x_k'(t) = A(t)x_{k-1}(t) + B(t)x_{k-1}(\lambda t), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком системи (1).

Безпосередньою підстановкою в (3) можна переконатися, що функції

$$\begin{aligned} &x_0(t) = c, \quad c = (c_1, \ldots, c_n), c_i, i = \overline{1, n}, \text{ — довільні сталі,} \\ &x_k(t) = \int\limits_0^t \big[A(\tau)x_{k-1}(\tau) + B(\tau)x_{k-1}(\lambda\tau)\big]d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняють відповідні системи рівнянь (3).

Доведемо, що ряд (2), члени якого визначено формулами (4), рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$.

Дійсно, оскільки всі елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ є неперервними і обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями, то $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |A(t)| \leq a$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |B(t)| \leq b$, де $a$, $b$ — деякі додатні числа і $|A(t)| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$. Тоді, беручи до уваги (4), за допомогою методу математичної індукції можна показати, що для функцій $x_k(t), k = 1, 2, \ldots,$ виконується оцінка

$$\begin{aligned} &|x_0(t)| = |c| = \tilde{c}, \\ &|x_k(t)| \leq a_k t^k, \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$a_0 = \tilde{c}, \quad a_k = a_{k-1}\frac{a + b\lambda^{k-1}}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Справді, на підставі (4) маємо

$$|x_1(t)| \leq \int\limits_0^t \Big[|A(\tau)||x_0(\tau)| + |B(\tau)||x_0(\lambda\tau)|\Big]d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \big[a\tilde{c} + b\tilde{c}\big]d\tau = \tilde{c}(a + b)t = a_1 t,$$

тобто при $k = 1$ оцінка (5) має місце. Припустимо, що оцінку (5) доведено для деякого $k \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від $k$ до $k + 1$. Дійсно, з огляду на

(4), (5) одержуємо

$$|x_{k+1}(t)| \leq \int_0^t \Big[|A(\tau)||x_k(\tau)| + |B(\tau)||x_k(\lambda\tau)|\Big] d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t \Big[a a_k \tau^k + b a_k (\lambda\tau)^k\Big] d\tau =$$

$$= a_k(a + b\lambda^k)\frac{t^{k+1}}{(k+1)} = a_{k+1}t^{k+1}.$$

Цим самим доведено, що оцінка (5) має місце для довільного $k \geq 1$.

Беручи до уваги умови теореми і співвідношення (4), (5), аналогічно можна показати, що виконуються оцінки

$$|x_k'(t)| \leq k a_k t^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$|x_0'(t)| = 0.$$

Оскільки на будь-якому відрізку $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$

$$|x_k(t)| \leq a_k T^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

і

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}T^{k+1}}{a_k T^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{a + b\lambda^k}{k+1} T = 0,$$

то ряди

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k t^{k-1}$$

рівномірно збігаються на будь-якому відрізку $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$. Тоді внаслідок (5) ряд (2) також рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$. Тим самим ми довели існування сім'ї неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, c)$ системи (1).

Теорему доведено.

Дослідимо тепер питання про існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків неоднорідної системи рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\lambda t) + f(t), \tag{7}$$

де $0 < \lambda < 1$, $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $A(t), B(t)$ — $(n \times n)$-матричні функції, $f(t)$ — вектор-функція розмірності $n$.

Для системи рівнянь (7) має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** *Якщо $A(t), B(t)$ і $f(t)$ — неперервні і обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ функції, то система рівнянь (7) має принаймні один неперервний при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $\tilde{x}(t)$.*

***Доведення.*** Розв'язок рівняння (7) шукатимемо у вигляді

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \tag{8}$$

де $x_k(t), k = 0, 1, 2, \ldots$, — деякі, поки що невідомі, функції.

Підставляючи (8) в (7), одержуємо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k'(t) = A(t) \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t) + B(t) \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(\lambda t) + f(t).$$

Звідси випливає, що якщо $x_k(t)$ вибрати таким чином, що

$$\begin{aligned} &x_0'(t) = f(t), \\ &x_k'(t) = A(t)x_{k-1}(t) + B(t)x_{k-1}(\lambda t), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{9}$$

то ряд (8) буде формальним розв'язком системи (7).

Можна послідовно показати, що векторні функції

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \int_0^t f(\tau) d\tau, \\ x_k(t) &= \int_0^t \big[A(\tau)x_{k-1}(\tau) + B(\tau)x_{k-1}(\lambda\tau)\big] d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{10}$$

є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язками відповідних рівнянь системи (9).

Доведемо, що ряд (8), члени якого визначено формулами (10), рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$. Дійсно, оскільки $A(t), B(t)$ і $f(t)$ — неперервні і обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ функції, то $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |A(t)| \le a$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |B(t)| \le b$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)| \le f^*$, де $a$, $b$, $f^*$ — деякі додатні числа.

Міркуючи за індукцією, можна показати, що для функцій $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |x_0(t)| &\le \int_0^t |f(\tau)| d\tau \le f^* t = \widetilde{a}_0 t, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |x_k(t)| &\le \widetilde{a}_k t^{k+1}, k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\tilde{a}_0 = f^*,$$

$$\tilde{a}_k = \frac{f^*(a+b\lambda)(a+b\lambda^2)\dots(a+b\lambda^k)}{(k+1)!} = \tilde{a}_{k-1}\frac{a+b\lambda^k}{k+1}, \quad k = 1,2,\dots,$$

і

$$|x_k'(t)| \leq (k+1)\tilde{a}_k t^k, \quad k = 1,2,\dots,$$

$$|x_0'(t)| \leq \tilde{a}_0.$$

Оскільки на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$

$$|x_k(t)| \leq \tilde{a}_k T^{k+1}, \quad k = 1,2,\dots,$$

і

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\tilde{a}_{k+1}T^{k+2}}{\tilde{a}_k T^{k+1}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{a+b\lambda^{k+1}}{k+2}T = 0,$$

то ряди

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\tilde{a}_k t^{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\tilde{a}_k t^k$$

рівномірно збігаються на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$. Тоді внаслідок (11) ряд (8) також рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[0,T] \subset \mathbb{R}^+$. Тим самим доведено існування неперервно диференційовного при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язку $\tilde{x}(t)$ системи рівнянь (7).

Із теорем 1 і 2 випливає наступна теорема.

**Теорема 3.** *Якщо $A(t), B(t)$ і $f(t)$ — неперервні і обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ функції, то система рівнянь (7) має сім'ю неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = \overline{x}(t) + \tilde{x}(t)$, де $\overline{x}(t)$ визначено співвідношеннями (2), (4), а $\tilde{x}(t)$ — співвідношеннями (8), (10).*

Аналогічні результати можна отримати і для більш загальних систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\varphi(t)) + f(t). \tag{12}$$

Зокрема, доведено наступну теорему.

**Теорема 4.** *Якщо матричні функції $A(t), B(t)$ і вектор-функція $f(t)$ задовольняють умови теореми 3, а $\varphi(t)$ є неперервною при $t \in \mathbb{R}^+$ функцією такою, що $0 \leq \varphi(t) \leq t$, то система рівнянь (12) має сім'ю неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $x(t) = x(t,c)$, де $c = (c_1,\dots,c_n)$, $c_i$, $i = \overline{1,n}$, — довільні сталі.*


1. *Kato T., McLeod J.B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.
2. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-differential equation // Ann. pol. math. — 1975. — **31**, № 1. — P. 23–41.

3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737 – 747.

4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 412 с.

*Одержано 20.06.2006,*
*після доопрацювання — 05.04.2007*