УДК 517.929.4

МАКСИМАЛЬНА МНОЖИНА ПОЧАТКОВИХ УМОВ У ЗАДАЧІ СЛАБКОЇ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

В. В. Пічкур

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: vpichkur@gmail.com

М. С. Сасонкіна

Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова
Україна, 23454, Одеса, вул. Дворянська, 2
e-mail: masonmas@gmail.com

We consider properties of a maximal set for practical weak stability of discrete inclusions. We prove properties of boundary and interior points, compactness of the set of initial data, and obtain the Minkovsky function, the inverse Minkovsky function, and a support function for discrete linear inclusions.

Рассмотрены свойства максимального множества для практической слабой устойчивости дискретных включений. Доказаны свойства граничных и внутренних точек, компактность множества начальных данных и получены функция Минковского, обратная функция Минковского и функция носителя для дискретных линейных включений.

Інтерес до дослідження дискретних систем пов'язаний з їх застосуванням до математичного і комп'ютерного моделювання процесів різної природи. Крім того, при побудові чисельних методів для знаходження наближених розв'язків широко застосовуються різницеві схеми. Звідси випливає актуальність дослідження якісної поведінки дискретних систем. Так, питання аналізу стійкості й асимптотичної поведінки висвітлено в работах [11, 12, 16, 18 – 21], в [2, 5 – 7, 21] одержано умови практичної стійкості дискретних систем. Якщо у правій частині дискретної системи наявні невизначені детерміновані параметри, то приходимо до дискретного включення. При апроксимації розв'язків систем із багатозначною правою частиною одержуємо різницеві схеми у формі дискретних включень [9, 14, 15, 17]. Слід зауважити, що задачі практичної стійкості дискретних включень досліджені на даний момент не повною мірою.

У статті висвітлюються властивості граничних і внутрішніх точок максимальної множини початкових умов, для яких існує хоча б один розв'язок дискретного включення, що залишається у фазових обмеженнях на заданому інтервалі часу. Подібно до випадку дослідження стійкості диференціальних включень такий вид практичної стійкості називається слабким [1]. Для лінійних дискретних включень одержано опорний функціонал максимальної множини, функцію Мінковського і функцію деформації.

В статті будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}^n$ — евклідовий n-вимірний простір, $\|\cdot\|$ — евклідова норма, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток, що породжує евклідову норму в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{int} A$ — множина внутрішніх точок, ∂A — границя, $[0, N] = \{0, 1, \ldots, N\}$ — множина індексів, $c(A, \psi) = \sup_{a\in A}\langle a, \psi\rangle$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ — опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$ —

одинична сфера, $\mathcal{K}_r(a)$ — замкнена куля радіуса r з центром у точці $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ ($\mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$) — множина непорожніх (опуклих) компактів з $\mathbb{R}^n$, $A^\sigma = A + \sigma\mathcal{K}_1(0)$ — σ-розширення множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $A^{<\sigma>} = \{a : a + \mathcal{K}_\sigma(0) \subset A\}$ — σ-звуження множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

1. Максимальна множина початкових умов. Розглянемо дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), \quad k \in [0, N], \tag{1}$$

де $f_k : D \to \mathrm{comp}\,(D)$ — напівнеперервне зверху багатозначне відображення, визначене в області $D \subset \mathbb{R}^n$. Позначимо через $x(k, x_0)$ розв'язок включення (1), який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$, через $X(k, X_0)$ множину досяжності (1) за умови, що $x(0) \in \in X_0$, $X_0 \subset D$. Дискретне рівняння вигляду

$$X(k+1) = f_k(X(k)), \quad k \in [0, N], \tag{2}$$

описує динаміку множини досяжності $X(k, X_0)$ за умови $X(0) = X_0$.

Нехай $G_0 \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ — деяка множина, $\Phi(k) \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ — множина фазових обмежень, $0 \in \mathrm{int}\,\Phi(k)$, $0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 1. *Нульовий розв'язок дискретного включення (1) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$-слабко стійким, якщо яким би не було $x_0 \in G_0$, існує розв'язок $x(k, x_0)$ включення (1) такий, що виконується $x(k, x_0) \in \Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$.*

Позначимо через $I_* \subseteq \Phi(t_0)$ максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких має місце означення 1. Для всіх точок $x_0 \in I_*$ та довільного $k \in [0, N]$ виконується співвідношення $X(k, x_0) \cap \Phi(k) \neq \varnothing$.

Має місце таке твердження.

Лема 1. *Нехай задано послідовність розв'язків $x_m(k)$ дискретного включення (1) таку, що $\lim_{m\to\infty} x_m(k) = x(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. Тоді $x(k)$, $k \in [0, N]$, є розв'язком дискретного включення (1).*

Доведення. При $k = 1$ маємо $\lim_{m\to\infty} x_m(0) = x(0)$ і $\lim_{m\to\infty} x_m(1) = x(1)$. Покажемо, що $x(1)$ належить $f_0(x(0))$. За умовами леми $x_m(1)$ належить $f_0(x_m(0))$. Припустимо, що $x(1)$ не належить $f_0(x(0))$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що $x(1)$ не належить $(f_0(x(0)))^\varepsilon$. З напівнеперервності зверху багатозначної функції f_0 маємо, що для будь-якого $\varepsilon/2 > 0$ існує такий номер r, що для всіх $m > r$ виконується [3, 13]

$$f_0(x_m(0)) \subseteq (f_0(x(0)))^{\varepsilon/2}.$$

Звідси $(f_0(x_m(0)))^{\varepsilon/2} \subseteq (f_0(x(0)))^\varepsilon$, $m > r$. З іншого боку, оскільки

$$\lim_{m\to\infty} x_m(1) = x(1),$$

то для будь-якого $\varepsilon/2 > 0$ існує такий номер t, що для всіх $m > t$ точка $x(1)$ належить $(x_m(1))^{\varepsilon/2}$. Тоді, починаючи з $m > \max\{r, t\}$, маємо

$$x(1) \in (x_m(1))^{\varepsilon/2} \subseteq (f_0(x_m(0)))^{\varepsilon/2} \subseteq (f_0(x(0)))^\varepsilon.$$

Отримали суперечність.

Далі припускаємо, що лема справджується для всіх $k < q$. Покажемо, що лема має місце для $k = q$. Маємо $\lim_{m\to\infty} x_m(q-1) = x(q-1)$ і $\lim_{m\to\infty} x_m(q) = x(q)$. Покажемо, що $x(q)$ належить $f_{q-1}(x(q-1))$. За умовами леми $x_m(q)$ належить $f_{q-1}(x_m(q-1))$. Припустимо, що $x(q)$ не належить $f_{q-1}(x(q-1))$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що $x(q)$ не належить $(f_{q-1}(x(q-1)))^\varepsilon$. З напівнеперервності зверху функції f_{q-1} маємо, що для будь-якого $\varepsilon/2 > 0$ існує такий номер r, що для всіх $m > r$ виконується

$$f_{q-1}(x_m(q-1)) \subseteq (f_{q-1}(x(q-1)))^{\varepsilon/2}.$$

Звідси $(f_{q-1}(x_m(q-1)))^{\varepsilon/2} \subseteq (f_{q-1}(x(q-1)))^\varepsilon$. З іншого боку, оскільки $\lim_{m\to\infty} x_m(q) = x(q)$, то для будь-якого $\varepsilon/2 > 0$ знайдеться номер t такий, що для всіх $m > t$ справджується $x(q) \in (x_m(q))^{\varepsilon/2}$. Тоді, починаючи з $m > \max\{r, t\}$ маємо

$$x(q) \in (x_m(q))^{\varepsilon/2} \subseteq (f_{q-1}(x_m(q-1)))^{\varepsilon/2} \subseteq (f_{q-1}(x(q-1)))^\varepsilon.$$

Звідси випливає, що $x(q)$ належить $(f(x(q-1)))^\varepsilon$. Отримали суперечність. Отже, твердження справджується при $k = q$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай W — множина розв'язків включення (1) таких, що $x(k)$ належить $\Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. Тоді з послідовності $x_m \in W$ можна виділити збіжну підпослідовність, що збігається до розв'язку $x \in W$.*

Доведення. Розглянемо послідовність розв'язків $x_m \in W$. Тоді $x_m(0)$ належить $\Phi(0)$. Оскільки $\Phi(0)$ належить $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, то з послідовності $x_m(0)$ можна виділити підпослідовність $x_{m_0}(0)$ таку, що $\lim_{m_0\to\infty} x_{m_0}(0) = x(0)$, $x(0) \in \Phi(0)$. Розглянемо підпослідовність $x_{m_0}(1)$, $x_{m_0}(1) \in \Phi(1)$. З неї можна виділити підпослідовність $x_{m_1}(1)$ таку, що

$$\lim_{m_1\to\infty} x_{m_1}(1) = x(1), \quad x(1) \in \Phi(1).$$

Будемо продовжувати процедуру виділення підпослідовності далі. Тоді для довільного $k \in [1, N]$ матимемо послідовність $x_{m_{k-1}}(k)$. З цієї послідовності можна виділити підпослідовність $x_{m_k}(k)$ таку, що $\lim_{m_k\to\infty} x_{m_k}(k) = x(k)$, $x(k) \in \Phi(k)$. Отримали послідовність $x_{m_N}(k)$ таку, що $\lim_{m_N\to\infty} x_{m(N)}(k) = x(k)$ для всіх $k \in [1, N]$. Тоді з леми 1 маємо, що $x(\cdot)$ є розв'язком дискретного включення (1). Отже, отримали $x \in W$.

Лему 2 доведено.

Теорема 1. *Множина I_* є компактом.*

Доведення. Обмеженість I_* випливає з того, що $I_* \subseteq \Phi(0) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Покажемо, що для будь-якої послідовності $x_i(0)$ такої, що $x_i(0)$ належить I_*, $\lim_{i\to\infty} x_i(0) = x(0)$, точка $x(0)$ належить I_*. За означенням множини I_* маємо, що для кожної точки $x_i(0) \in I_*$ існує розв'язок $x_i(\cdot, x_i(0))$ такий, що $x_i(\cdot, x_i(0))$ належить W, $i \in 1, 2, 3 \ldots$. З леми 2 випливає, що з послідовності x_i розв'язків включення (1) можна виділити збіжну підпослідовність, що збігається до розв'язку $x \in W$. Оскільки $x(k)$ належить $\Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$, то $x(0)$ належить I_*. Отже, $\lim_{i\to\infty} x_i(0) = x(0)$, де $x(0)$ належить I_*.

Теорема 2. *Нехай точка x_0 належить ∂I_*. Тоді для всіх розв'язків $x(k, x_0)$ включення (1) таких, що $x(k, x_0) \in \partial\Phi(k)$, $k \in [0, N]$, існує такий індекс $\hat{k} \in [0, N]$, що*

$$x(\hat{k}, x_0) \in \partial\Phi(\hat{k}).$$

Доведення проведемо від супротивного. Нехай знайдеться розв'язок $x(k, x_0)$ включення (1) такий, що $x(k, x_0)$ належить $\operatorname{int}\Phi(k)$ для будь-якого $k \in [0, N]$. Для цього розв'язку існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x(k, x_0))^{\varepsilon} \subseteq \Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. Оскільки x_0 належить ∂I_*, можна вибрати послідовність $x_s \to x_0$ таку, що $x_s \notin I_*$ для всіх $s = 1, 2, 3, \ldots$. Це означає, що для кожного розв'язку включення (1) існує таке $k \in [0, N]$, що $x(k, x_s)$ не належить $\Phi(k)$. Тому знайдеться $k \in [0, N]$ таке, що

$$\|x(k, x_0) - x(k, x_s)\| > \varepsilon.$$

З іншого боку, оскільки f_k — напівнеперервне зверху багатозначне відображення, то за теоремою про неперервну залежність розв'язків дискретного включення від початкових умов [8] для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|x_0 - x_s\| \leq \delta$ для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1) існує розв'язок $x(k, x_s)$ такий, що

$$x(k, x_0) \in \mathcal{K}_{\varepsilon}(x(k, x_s)).$$

Отримали суперечність.

Теорему 2 доведено.

2. Випадок лінійного дискретного включення. Розглянемо лінійне дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k), \tag{3}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, A_k — невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, $k \in [0, N-1]$, $\Phi(k) \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — множина фазових обмежень, $k \in [0, N]$, $0 \in \operatorname{int} I_*$.

З включення (3) випливає, що множина досяжності задовольняє рівняння

$$X(k+1) = A_k X(k) + U(k), \quad X(0) = X_0, \quad X_0 \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n).$$

Запишемо множину досяжності у вигляді

$$X(k, X_0) = \Theta(k) X_0 + \Omega(k),$$

де

$$\Theta(k) = A_{k-1} \ldots A_1 A_0, \quad \Omega(k) = \sum_{i=1}^{k} P(i, k-1)\, U(i-1). \tag{4}$$

Тут $P(i, k) = A_k \ldots A_{i+1} A_i$, $i \leq k$, $P(k+1, k) = E$, E — одинична матриця розмірності $n \times n$.

Має місце таке твердження.

Теорема 3. *Якщо $\Phi(k)$ і $U(k)$ — симетричні відносно 0 множини, то I_* — симетрична відносно 0 множина.*

Доведення. Покажемо, що якщо $U(k)$ — симетрична множина, то $\Omega(k)$ буде симетричною. З (4) маємо

$$(-1)\,\Omega(k) = (-1)\sum_{i=1}^{k} P(i,k-1)U(i-1) = \sum_{i=1}^{k} P(i,k-1)(-1)\,U(i-1).$$

З того, що $U(k) = (-1)\,U(k)$, отримуємо $(-1)\,\Omega(k) = \Omega(k)$. Покажемо, що для всіх $x_0 \in \in I_*$ виконується $(-x_0) \in I_*$. Якщо x_0 належить I_*, то існує таке $z(k) \in \Omega(k)$, що

$$x(k+1,x_0) = \Theta(k)x_0 + z(k) \in \Phi(k).$$

Внаслідок симетричності множини $\Phi(k)$ маємо

$$(-1)\ (\Theta(k)x_0 + z(k)) \in \Phi(k).$$

Звідси

$$\Theta(k)(-x_0) + (-1)\,z(k) \in \Phi(k).$$

Оскільки $z(k) \in \Omega(k)$, то $(-1)\,z(k) \in \Omega(k)$. Звідси випливає, що

$$\Theta(k)(-x_0) + (-1)\,z(k) \in \Phi(k)$$

є розв'язком включення (3). Це означає, що $-x_0$ належить I_*.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Якщо* $\Phi(k)$ *належить* $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, $k \in [0,N]$, *то* I_* *належить* $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. Виберемо довільні точки $x_0^{(1)} \in I_*$, $x_0^{(2)} \in I_*$. Нам потрібно показати, що при $\lambda \in [0,1]$ виконується $\lambda x_0^{(1)} + (1-\lambda)x_0^{(2)} \in I_*$, тобто існує такий розв'язок $x_\lambda(k) = = x(k, \lambda x_0^{(1)} + (1-\lambda)x_0^{(2)})$ включення (3), що $x_\lambda(k)$ належить $\Phi(k)$ для всіх $k \in [0,N]$, $\lambda \in [0,1]$. Оскільки $x_0^{(1)} \in I_*$, $x_0^{(2)} \in I_*$, то з означення множини I_* випливає, що знайдуться розв'язки $x(k,x_0^{(1)})$ та $x(k,x_0^{(2)})$ включення (3) такі, що виконується $x(k,x_0^{(1)}) \in \Phi(k)$, $x(k,x_0^{(2)}) \in \Phi(k)$ для всіх $k \in [0,N]$. Тоді

$$x(k,x_0^{(1)}) \in \Theta(k)x_0^{(1)} + \Omega(k), \quad x(k,x_0^{(2)}) \in \Theta(k)x_0^{(2)} + \Omega(k), \quad k \in [0,N].$$

Існують такі $z_1(k) \in \Omega(k)$, $z_2(k) \in \Omega(k)$, $k \in [0,N]$, що

$$x(k,x_0^{(1)}) = \Theta(k)x_0^{(1)} + z_1(k), \quad x(k,x_0^{(2)}) = \Theta(k)x_0^{(2)} + z_2(k), \quad k \in [0,N].$$

Розглянемо

$$x_\lambda(k) = \Theta(k)(\lambda x_0^{(1)}) + (1-\lambda)x_0^{(2)}) + \lambda z_1(k) + (1-\lambda)z_2(k), \quad k \in [0,N].$$

Оскільки $\Omega(k)$ належить $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, то $\lambda z_1(k) + (1-\lambda)z_2(k) \in \Omega(k)$, $k \in [0,N]$. Отримали, що $x_\lambda(\cdot)$ — розв'язок включення (3). Одержаний розв'язок належить фазовим обмеженням як опукла комбінація розв'язків, оскільки фазові обмеження є опуклими.

Теорему 4 доведено.

Селектором багатозначної функції $U : [0, N-1] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ є однозначна функція $u : [0, N-1] \to \mathbb{R}^n$ така, що $u(i)$ належить $U(i)$ для всіх $i \in [0, N-1]$. Позначимо через $\Sigma(U)$ множину селекторів відображення $U : [0, N-1] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5. *Опорна функція множини I_* виражається співвідношенням*

$$c(I_*, \eta) = \overline{\operatorname{co}} \min_{k \in [0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \Theta^*(k))^{-1}\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення. Якщо x_0 належить I_*, то за означенням 1 існує $u \in \Sigma(U)$, для якого

$$\Theta(k)x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} P(i, k-1)u(i-1) \in \Phi(k), \quad k \in [0, N].$$

Це означає, що

$$\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \langle P(i, k-1)u(i-1), \psi \rangle \le c(\Phi(k), \psi),$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$, $k \in [0, N]$ [3]. З останньої нерівності випливає

$$\inf_{u \in \Sigma(U)} \left(\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \langle P(i, k-1)u(i-1), \psi \rangle \right) \le c(\Phi(k), \psi).$$

Звідси

$$\min_{u(i-1) \in U(i-1)} \left(\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle + \sum_{i=1}^{k-1} \langle P(i, k-1)u(i-1), \psi \rangle \right) \le c(\Phi(k), \psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad k \in [0, N].$$

Тоді справджується рівність

$$\min_{u(i-1) \in U(i-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \langle P(i, k-1)u(i-1), \psi \rangle = - \max_{u(i-1) \in U(i-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \langle P(i, k-1)u(i-1), -\psi \rangle =$$

$$= - \sum_{i=1}^{k-1} c(P(i, k-1)U(i-1), -\psi) = -c(\Omega(k), -\psi).$$

Отримали $\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle \le c(\Phi(k), \psi) + c(\Omega(k), -\psi)$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$, $k \in [0, N]$. Виконаємо заміну $\eta = \Theta^*(k)\psi$, $(\Theta^*(k))^{-1}\eta = \psi$, де $*$ — знак транспонування. Тоді

$$\langle x_0, \eta \rangle \le c(\Phi(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta) + c(\Omega(k), -(\Theta^*(k))^{-1}\eta) =$$

$$= c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad k \in [0, N].$$

Останню нерівність можна записати так:

$$\langle x_0, \eta\rangle \le \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta), \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Функція $F(\eta) = \langle x_0, \eta\rangle$ є опуклою, тому за означенням обопуклення функції [10]

$$\langle x_0, \eta\rangle \le \overline{\text{co}} \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Якщо x_0 не належить I_*, то для всіх селекторів u відображення U існує $k \in [0, N]$ таке, що

$$\Theta(k)x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} P(i, k-1)u(i-1) \notin \Phi(k).$$

Тоді знайдуться $\psi \in \mathbb{R}^n$, $k \in [0, N]$, для яких

$$\langle\Theta(k)x_0, \psi\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}\langle P(i, k-1)u(i-1), \psi\rangle > c(\Phi(k), \psi).$$

Беручи до уваги рівність

$$\min_{u(i-1)\in U(i-1)} \sum_{i=1}^{k-1}\langle P(i, k-1)U(i-1), \psi\rangle = -c(\Omega(k), -\psi),$$

отримуємо

$$\langle\Theta(k)x_0, \psi\rangle - c(\Omega(k), -\psi) > c(\Phi(k), \psi)$$

для деяких $k \in [0, N]$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. Заміна $\eta = \Theta^*(k)\psi$ приводить до нерівності

$$\langle x_0, \eta\rangle > c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta),$$

яку можна записати так:

$$\langle x_0, \eta\rangle > \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta) \ge \overline{\text{co}}_\eta \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta).$$

Отже,

$$I_* = \bigcap_{\eta\in S}\{x_0 \in \mathbb{R}^n : \langle x_0, \eta\rangle \le f(\eta)\},$$

де $f(\eta) = \overline{co}_\eta \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \Theta^*(k))^{-1}\eta)$. Функція $f(\eta)$ є опуклою. З теореми про взаємозв'язок між опорною функцією та опуклою множиною [10] випливає, що $f(\eta)$ — опорна функція множини I_*.

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Нехай точка x_0 належить I_*. Якщо для всіх розв'язків $x(k, x_0)$ включення (3), для яких $x(k, x_0) \in \Phi(k)$, $k \in [0, N]$, існує таке $\hat{k} \in [0, N]$, що $x(\hat{k}, x_0) \in \partial\Phi(\hat{k})$, то x_0 належить ∂I_*.*

Доведення. Позначимо через $I(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ максимальну за включенням множину слабкої практичної стійкості включення (3) за обмежень $\Psi(k,\varepsilon) = (\Phi(k))^{<\varepsilon>}$, $k \in [0,N]$. Тут $\varepsilon > 0$ вибирається з інтервалу $\varepsilon \in (0,\sigma)$ так, щоб $(\Phi(k))^{<\varepsilon>} \neq \varnothing$. Можливі два випадки: або x_0 належить ∂I_*, або x_0 поглинається монотонно незростаючим відображенням $h : \varepsilon \to I(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, у точці 0 так, що x_0 належить $\operatorname{int} I_*$ [1]. З того, що $x(\hat{k}, x_0)$ належить $\partial\Phi(\hat{k})$, випливає, що $x(\hat{k}, x_0)$ не належить $\partial(\Phi(\hat{k}))^{<\varepsilon>}$. Звідси маємо, що x_0 не належить $I(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. За теоремою 5 опорна функція множини $I(\varepsilon)$ виражається співвідношенням

$$c(I(\varepsilon),\psi) = \overline{\mathrm{co}} \min_{k\in[0,N]} c((\Phi(k))^{<\varepsilon>} + (-1)\Omega(k),\psi) =$$

$$= \overline{\mathrm{co}} \min_{k\in[0,N]} \{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k),\psi) - \varepsilon\|\psi\|\}, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Оскільки $I(0) = I_*$ і функція $c(I(\varepsilon),\psi)$ неперервна по $\varepsilon \in [0,\sigma]$ для кожного фіксованого $\psi \in \mathbb{R}^n$, то відображення $h : \varepsilon \to I(\varepsilon)$ є неперервним на інтервалі $[0,\sigma]$. Тут $\sigma > 0$ вибирається з умови $\Psi(k,\varepsilon) = (\Phi(k))^{<\varepsilon>} \neq \varnothing$, $k \in [0,N]$, $\varepsilon \in [0,\sigma]$. Оскільки $I(\varepsilon)$ — опуклозначна і неперервна по ε функція, то вона є квазівідкритою [4]. Це означає, що з того, що x_0 належить $\operatorname{int} I(0)$, випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що x_0 належить $\operatorname{int} I(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0,\delta]$. Одержали суперечність. Остаточно маємо $x_0 \in \partial I(0)$.

Теорему 6 доведено.

Наслідок 1. *Точка $x_0 \in I_*$ належить множині ∂I_* тоді і тільки тоді, коли для будь-якого розв'язку $x(k,x_0)$ включення (3) такого, що $x(k,x_0)$ належить $\Phi(k)$, $k \in [0,N]$, існує таке $\hat{k} \in [0,N]$, що виконується $x(\hat{k},x_0) \in \partial\Phi(\hat{k})$.*

Наслідок 2. *Точка $x_0 \in I_*$ належить множині $\operatorname{int} I_*$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться розв'язок $x(k,x_0)$ включення (3) такий, що $x(k,x_0)$ належить $\operatorname{int}\Phi(k)$, $k \in [0,N]$.*

Теорема 7. *Для того щоб x_0 належало ∂I_*, необхідно і достатньо, щоб*

$$\max_{\psi\in S} \max_{k\in[0,N]} \frac{\langle \Theta^*(k)x_0,\psi\rangle}{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k),\psi)} = 1 \tag{6}$$

за умови, що $c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k),\psi) > 0$, $k \in [0,N]$, $\psi \in S$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай x_0 належить ∂I_*. Тоді за означенням 1 існує $u \in \Sigma(U)$, для якого

$$\Theta(k)x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} P(i,k-1)u(i-1) \in \Phi(k), \quad k \in [0,N].$$

Це означає, що

$$\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}\langle P(i,k-1)u(i-1),\psi\rangle \le c(\Phi(k),\psi), \quad \psi \in S, \quad k \in [0,N].$$

З останньої нерівності випливає

$$\inf_{u\in\Sigma(U)} \left(\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle + \sum_{i=1}^{k-1}\langle P(i,k-1)u(i-1),\psi\rangle \right) \le c(\Phi(k),\psi).$$

Звідси

$$\min_{u(i-1)\in U(i-1)}\left(\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle+\sum_{i=1}^{k-1}\langle P(i,k-1)u(i-1),\psi\rangle\right)\le c(\Phi(k),\psi),\ \ \psi\in S,\ \ k\in[0,N].$$

Тоді справджується рівність

$$\min_{u(i-1)\in U(i-1)}\sum_{i=1}^{k-1}\langle P(i,k-1)u(i-1),\psi\rangle=-c(\Omega(k),-\psi).$$

Отримуємо

$$\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle\le c(\Phi(k)+(-1)\Omega(k),\psi),\quad \psi\in S,\quad k\in[0,N]. \tag{7}$$

Звідси маємо нерівність

$$\max_{\psi\in S}\max_{k\in[0,N]}\frac{\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle}{c(\Phi(k)+(-1)\Omega(k),\psi)}\le 1.$$

Оскільки x_0 належить ∂I_*, то за теоремою 2 існують такий розв'язок $x(k,x_0)\in\Phi(k)$ включення (3) і таке $k\in[0,N]$, що $x(k,x_0)$ належить $\partial\Phi(k)$. Звідси з урахуванням властивостей опорної функції маємо, що знайдуться такі $\psi\in S$ і $k\in[0,N]$, що в нерівності (7) буде мати місце рівність. Тоді

$$\max_{\psi\in S}\max_{k\in[0,N]}\frac{\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle}{c(\Phi(k)+(-1)\Omega(k),\psi)}=1.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконується співвідношення (7). Звідси маємо

$$\langle\Theta(k)x_0,\psi\rangle\le c(\Phi(k)+(-1)\Omega(k),\psi),\quad \psi\in S,\quad k\in[0,N].$$

Виконаємо заміну $\eta=\Theta^*(k)\psi$. Застосовуючи теореми 4–6, отримуємо

$$\langle x_0,\eta\rangle\le\overline{\mathrm{co}}\min_{k\in[0,N]}c(\Phi(k)+(-1)\Omega(k),\Theta^*(k))^{-1}\eta)=c(I_*,\eta),\quad \eta\in\mathbb{R}^n,$$

звідки $x_0\in I_*$ [3]. Оскільки в (7) має місце рівність, то знайдеться $\eta\in\mathbb{R}^n$ таке, що

$$\langle x_0,\eta\rangle=c(I_*,\eta).$$

Отже, x_0 належить ∂I_* [3].

Теорему 7 доведено.

Знайдемо функціонал Мінковського для множини I_*. За означенням функції Мінковського [10]

$$m_*(x_0)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{x_0}{\lambda}\in I_*\right\},$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Нехай $\dfrac{x_0}{\lambda} \in I_*$. Тоді з нерівності (5) маємо

$$\left\langle \Theta(k)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi), \quad k \in [0,N], \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси

$$\max_{k\in[0,N]} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi\rangle}{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)} \leq \lambda, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

За означенням функції Мінковського

$$m_*(x_0) = \max_{\psi\in S} \max_{k\in[0,N]} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi\rangle}{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)}.$$

Запишемо функцію деформації множини I_*. За означенням функції деформації [1]

$$d_*(x_0) = \sup\{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in I_*\},$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Нехай λx_0 належить I_*, тоді з нерівності (5) маємо

$$\langle \lambda\Theta(k)x_0, \psi\rangle \leq \min_{k\in[0,N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi), \quad k \in [0,N], \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси

$$\lambda \leq \min_{k\in[0,N]} \frac{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)}{\langle \Theta(k)x_0, \psi\rangle}, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

За означенням

$$d_*(x_0) = \min_{\psi\in P} \min_{k\in[0,N]} \frac{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)}{\langle \Theta(k)x_0, \psi\rangle},$$

де множина $P \subset S$ складається з точок $\psi \in S$, для яких $\langle \Theta(k)x_0, \psi\rangle > 0$.

3. Висновки. В роботі обґрунтовано теорему про граничні точки максимальної множини початкових умов слабкої практичної стійкості дискретного включення. У випадку лінійного включення теорема має необхідний і достатній характер. Показано, що для лінійного дискретного включення з опуклими фазовими обмеженнями максимальна множина є опуклою. Це дозволило одержати опорну функцію такої множини, її функцію Мінковського і функцію деформації.

1. *Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г, Пічкур В. В.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація. — Київ: Київ. ун-т, 2008. — 383 с.
2. *Башняков А. Н., Пичкур В. В., Хитько И. В.* О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 5 – 11.
3. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. шк., 2001. — 239 с.
4. *Борисович Ю. Г, Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский Б. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: КомКнига, 2005. — 216 с.

5. *Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Киев: Наук. думка, 1985. — 304 с.
6. *Гаращенко Ф. Г., Башняков А. Н.* Анализ сходимости итерационных процедур на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 2. — С. 15 – 25.
7. *Гаращенко Ф. Г., Куценко И. А.* Практическая устойчивость дискретных процессов, оценки и их оптимизация // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 5. — С. 50 – 61.
8. *Пічкур В. В., Сасонкіна М. С.* Про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов // Тавр. вестн. информатики и математики. — 2011. — С. 73 – 80.
9. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.
10. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.
11. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 309 с.
12. *Agarwal R. P.* Difference equations and inequalities. Theory, methods, and applications. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 988 p.
13. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston: Birkhäuser, 1990. — 462 p.
14. *Dontchev A. L., Farkhi E. M.* Error estimates for discretized differential inclusions // Computing. — 1989. — **41**. — P. 349 – 358.
15. *Asen Dontchev, Frank Lempio.* Difference methods for differential inclusions: A survey // SIAM Rev. — 1992. — **34**, № 2. — P. 263 – 294.
16. *Galor O.* Discrete dynamical systems. — Berlin: Springer, 2007. — 158 p.
17. *Grammel G.* Towards fully discretized differential inclusions // Set-Valued Analysis. — 2003. — **11**, № 1 – 8. — P. 1 – 8.
18. *Lakshmikantham V., Trigiante D.* Theory of difference equations. Numerical methods and applications. — Boston: Acad. Press Inc., 1988. — 246 p.
19. *LaSalle J. P.* The stability and control of discrete processes. — New York: Springer, 1986. — 160 p.
20. *LaSalle J. P., Artstein Z.* Stability of dynamical systems. — Philadelphia: SIAM, 1987. — 88 p.
21. *Martynyuk A. A.* Stability analysis of discrete systems // Int. Appl. Mech. — 2000. — **36**, № 7. — P. 3 – 34.

Одержано 23.02.12