УДК 517.929

ПРО СТРУКТУРУ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ОКОЛІ СТАНУ РІВНОВАГИ

А. А. Акбергенов, Г. П. Пелюх

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We construct a representation for a general continuous solution to a broad class of nonlinear difference systems in a neighborhood of an equilibrium. We also study the structure of the equilibrium.

Построено представление общего непрерывного решения широкого класса систем нелинейных разностных уравнений в окрестности состояния равновесия и исследована его структура.

Різницеві рівняння вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ — дійсна $(n \times n)$-матриця, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, були основним об'єктом дослідження у багатьох роботах (див. [1–8] і наведену в них бібліографію). При цьому найактивніше вивчалися системи рівнянь, в яких матриця A була сталою. Серед отриманих тут результатів особливої уваги заслуговують ті, що стосуються побудови загального розв'язку таких систем рівнянь в околі їх стану рівноваги і дослідження його структури [3–8]. Внаслідок цього природно виникло ряд питань про побудову загального неперервного розв'язку системи (1) і дослідження його структури у випадку, коли матриця A не є сталою. Саме ці питання вивчаються в даній роботі для системи рівнянь (1) у випадку, коли $A(t)$ є неперервною N-періодичною (N — ціле додатне число) матрицею такою, що $\det\, A(t) \neq 0$ при всіх $t \in \mathbb{R}$, а вектор-функція $f(t, x)$ є неперервною за всіма своїми змінними і N-періодичною по t.

Згідно з результатами [9] існує неперервна при $t \in \mathbb{R}$ заміна змінних

$$x(t) = C(t)y(t),$$

де $C(t)$ — неособлива, N — періодична $(n \times n)$-матриця, що зводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = B(t)y(t) + \bar{f}(t, y(t)), \tag{2}$$

де $B(t) = C^{-1}(t+1)A(t)C(t)$ — неперервна 1-періодична матриця, для якої виконується умова $\det\, B(t) \neq 0$, $\bar{f}(t, y(t)) = C^{-1}(t+1)f(t, C(t)y(t))$.

Позначимо через $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, корені рівняння

$$\det\,(B(t) - \lambda(t)E) = 0,$$

де E — одинична $(n \times n)$-матриця. Неважко показати, що $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, є неперервними при $t \in \mathbb{R}$ 1-періодичними функціями. Далі будемо припускати, що функції $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють наступні умови:

1) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, 0 < |\lambda_i(t)| < 1, i, j = 1, 2, \ldots, n, t \in [0, 1);$

2) для довільного набору $(i_1, \ldots, i_n)$ цілих невід'ємних чисел $\left(\sum_{j=1}^n i_j \geq 2\right)$ при $t \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_1^{i_1}(t)\, \lambda_2^{i_2}(t) \, \ldots \, \lambda_n^{i_n}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Згідно з умовою 1 існує неособлива заміна змінних

$$y(t) = \tilde{C}(t)\tilde{y}(t), \tag{3}$$

де $\tilde{C}(t)$ — неперервна при $t \in \mathbb{R}$ неособлива 1-періодична матриця, яка має неперервну 1-періодичну обернену матрицю $\tilde{C}^{-1}(t)$, що зводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$\tilde{y}(t+1) = \Lambda(t)\tilde{y}(t) + \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)). \tag{4}$$

Тут

$$\Lambda(t) = \tilde{C}^{-1}(t)B(t)\tilde{C}(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)),$$

$$\tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) = \tilde{C}^{-1}(t)\bar{f}(t, \tilde{C}(t)\tilde{y}(t)).$$

Відносно вектор-функції $\tilde{f}(t, \tilde{y})$ будемо припускати виконаними наступні умови:

3) вектор-функція $\tilde{f}(t, \tilde{y})$ розкладається в ряд

$$\tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) = \sum_{|i|=2}^{\infty} \tilde{f}_i(t)\tilde{y}^i(t),$$

де $\tilde{f}_i(t)$ — N-періодичні вектор-функції, $i = (i_1, \ldots, i_n)$ — вектор, компонентами якого є невід'ємні цілі числа, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $\tilde{y}^i = \tilde{y}_1^{i_1}\tilde{y}_2^{i_2} \ldots \tilde{y}_n^{i_n}$, та підсумовування виконується за всіма i, для яких $|i| \geq 2$;

4) $|\tilde{f}_{ij}(t)| \leq F_{ij}$ при всіх $t \in \mathbb{R}$ та $|i| \geq 2$, $j = 1, 2, \ldots, n$, де $F_{ij} = \text{const} > 0$;

5) ряд $F(\tilde{y}) = \sum_{|i|=2}^{\infty} F_i\tilde{y}^i(t)$, $F_i = (F_{i1}, \ldots, F_{in})$, збігається при $|\tilde{y}| = \max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{y}_j| < \rho$, $\rho > 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1 – 5, то існує заміна змінних*

$$\tilde{y}(t) = \gamma(t, z(t)) = z(t) + \sum_{|i|=2}^{\infty} \gamma_i(t)z^i(t), \tag{5}$$

де $\gamma_i(t)$, $|i| = 2, 3, \ldots,$ — *вектор-функції, що задовольняють при* $t \in \mathbb{R}$ *умови* $|\gamma_{ij}(t)| \leq \Gamma_{ij}$, $|i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n$, $\Gamma_{ij} = \text{const} > 0$, $\Gamma_i = (\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{in})$, *та ряд* $z + \sum_{|i|=2}^{\infty} \Gamma_i z^i$ *збігається при* $|z| < \rho_1 < \rho$, *що зводить систему рівнянь (4) до лінійного вигляду*

$$z(t+1) = \Lambda(t)z(t). \tag{6}$$

Доведення. Для доведення існування заміни змінних (5), що зводить систему (4) до вигляду (6), достатньо показати, що коефіцієнти $\gamma_i(t)$, $|i| = 2, 3, \ldots$, можна підібрати так, що ряд (5) буде розв'язком системи рівнянь

$$\gamma(t+1, \Lambda(t)z(t)) = \Lambda(t)\gamma(t, z(t)) + \tilde{f}(t, \gamma(t, z(t))). \tag{7}$$

Підставляючи ряд (5) в (7), отримуємо

$$\Lambda(t)z(t) + \sum_{|i|=2}^{\infty} \gamma_i(t+1)(\Lambda(t)z(t))^i = \Lambda(t)z(t) + \Lambda(t)\sum_{|i|=2}^{\infty} \gamma_i(t)z^i(t) +$$
$$+ \sum_{|i|=2}^{\infty} \tilde{f}_i(t)\left(z(t) + \sum_{|j|=2}^{\infty} \gamma_j(t)z^j(t)\right)^i.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $z^i, i = 2, 3, \ldots$, одержуємо

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)\gamma_i(t+1) = \Lambda(t)\gamma_i(t) + P_i(t), \quad |i| = 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

де $P_i(t) = (P_{i1}(t), P_{i2}(t), \ldots, P_{in}(t))$, $P_{ij}(t)$ — деякі многочлени відносно компонент $\tilde{f}_{2j}(t), \ldots, \tilde{f}_{ij}(t)$, $\gamma_{2j}(t), \ldots, \gamma_{i-1j}(t)$, $j = 1, \ldots, n$, векторів $\tilde{f}_2(t), \ldots, \tilde{f}_i(t)$, $\gamma_2(t) \ldots, \gamma_{i-1}(t)$ з додатними коефіцієнтами, до того ж $P_i(t) = \tilde{f}_i(t)$, $|i| = 2$. Співвідношення (8) — це послідовність лінійних різницевих рівнянь відносно векторних функцій $\gamma_i(t)$.

Покажемо тепер, що існують неперервні N-періодичні вектор-функції $\gamma_i(t)$, $|i| \geq 2$, що задовольняють систему рівнянь (8). Запишемо систему (8) у вигляді

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)\gamma_{ij}(t+1) = \lambda_j(t)\gamma_{ij}(t) + P_{ij}(t), \quad |i| = 2, 3, \ldots, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

При розв'язанні системи рівнянь (9) можливі два випадки:

а) $|\alpha_{ij}(t)| < 1 \; \forall t \in [0, 1)$,

б) $|\alpha_{ij}(t)| > 1 \; \forall t \in [0, 1)$, де $\alpha_{ij}(t) = \lambda_j^{-1}(t)\,\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)$, $|i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n$.

Оскільки векторів i, для яких $|\alpha_{ij}(t)| > 1$, може бути лише скінченна кількість, то можна вказати додатну сталу β таку, що $\lambda_*^{-1}(1 - \alpha^*)^{-1} \leq \beta$ у випадку а) та $\lambda_*^{-1}\alpha^{*N-1} \times (\alpha_* - 1)^{-1} \leq \beta$ у випадку б), де

$$\lambda_* = \min\left\{\min_t\{|\lambda_i(t)|, i = 1, \ldots, n\}\right\},$$

$$\alpha^* = \max\left\{\max_t\{|\alpha_{ij}(t)|, |i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n\}\right\},$$

$$\alpha_* = \min\left\{\min_t\{|\alpha_{ij}(t)|, |i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n\}\right\},$$

$$\beta = \max\{\lambda_*^{-1}(1 - \alpha^*)^{-1}, \lambda_*^{-1}\alpha^{*N-1}(\alpha_* - 1)^{-1}\},$$

$$|i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n.$$

Розглянемо спочатку випадок а) і побудуємо неперервні N-періодичні вектор-функції $\gamma_i(t)$, $|i| = 2, 3, \ldots$. Розв'язок системи рівнянь (9) при $|i| = 2$ будемо шукати у вигляді многочлена

$$\gamma_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k^{ij}(t)\tilde{f}_{ij}(t+k), \tag{10}$$

де $C_k^{ij}(t)$, $k = 0, \ldots, N-1$, $|i| = 2$, $j = 1, \ldots, n$, — деякі неперервні N-періодичні функції. Підставивши (10) в (9), матимемо

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)\sum_{k=0}^{N-1} C_k^{ij}(t+1)\tilde{f}_{ij}(t+k+1) = \lambda_j(t)\sum_{k=0}^{N-1} C_k^{ij}(t)\tilde{f}_{ij}(t+k) + \tilde{f}_{ij}(t). \tag{11}$$

Звідси випливає, що якщо функції $C_k^{ij}(t)$, $k = 0, \ldots, N-1$, $|i| = 2$, $j = 1, \ldots, n$, задовольняють послідовність рівнянь

$$\begin{gathered}
\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_0^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_1^{ij}(t),\\
\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_1^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_2^{ij}(t),\\
\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_2^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_3^{ij}(t),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_{N-1}^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_0^{ij}(t) + 1,
\end{gathered} \tag{12}$$

то многочлен (10) задовольняє систему рівнянь (9).

Беручи до уваги умови теореми та співвідношення (12), послідовно знаходимо

$$\begin{gathered}
C_1^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_0^{ij}(t+1),\\
C_2^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_1^{ij}(t+1) = [\alpha_{ij}(t)]^2 C_0^{ij}(t+2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_{N-1}^{ij}(t) = [\alpha_{ij}(t)]^{N-1} C_0^{ij}(t+N-1),\\
C_0^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_{N-1}^{ij}(t+1) - \lambda_j^{-1}(t) = [\alpha_{ij}(t)]^N C_0^{ij}(t) - \lambda_j^{-1}(t).
\end{gathered} \tag{13}$$

Із (13) безпосередньо отримуємо

$$\begin{gathered}
C_0^{ij}(t) = -\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1} \lambda_j^{-1}(t),\\
C_1^{ij}(t) = -\alpha_{ij}(t)\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1} \lambda_j^{-1}(t),
\end{gathered}$$

$$C_2^{ij}(t) = -\alpha_{ij}^2(t)\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1}\lambda_j^{-1}(t), \tag{14}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_{N-1}^{ij}(t) = -[\alpha_{ij}(t)]^{N-1}\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1}\lambda_j^{-1}(t).$$

Отже, розв'язок $\gamma_i(t)$ при $|i| = 2$ системи (9) матиме вигляд

$$\gamma_{ij}(t) = -\sum_{k=0}^{N-1}[\alpha_{ij}(t)]^k\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1}\lambda_j^{-1}(t)\tilde{f}_{ij}(t+k). \tag{15}$$

Використовуючи умови теореми, умову а) та (14), можна отримати оцінки

$$|\gamma_{ij}(t)| = \left|-\sum_{k=0}^{N-1}[\alpha_{ij}(t)]^k\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1}\lambda_j^{-1}(t)\tilde{f}_{ij}(t+k)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\lambda_j^{-1}(t)|}{1 - |\alpha_{ij}(t)|}\sum_{k=0}^{N-1}|\tilde{f}_{ij}(t+k)| \leq \frac{\lambda_*^{-1}}{1-\alpha^*}\sum_{k=0}^{N-1}|\tilde{f}_{ij}(t+k)| \leq$$

$$\leq \beta N F_{ij} = \Gamma_{ij}, |i| = 2, j = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Розглядаючи послідовно системи (9) при $|i| = 3, 4, \dots$, аналогічно можна довести існування неперервних N-періодичних розв'язків системи (9) у випадках $|i| = 3, 4, \dots$. Більш цього, розв'язки даної системи при $|i| = 3, 4, \dots$ визначаються співвідношеннями

$$\gamma_{ij}(t) = -\sum_{k=0}^{N-1}[\alpha_{ij}(t)]^k\left[1 - [\alpha_{ij}(t)]^N\right]^{-1}\lambda_j^{-1}(t)P_{ij}(t+k), \tag{17}$$

де $P_{ij}(t)$ — деякі многочлени відносно компонент векторів $\tilde{f}_2(t), \dots, \tilde{f}_i(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_{i-1}(t)$.

Використовуючи умову 4 і (16), (17), методом математичної індукції отримуємо

$$|\gamma_{ij}(t)| \leq \beta P_{ij}\left(F_{2j}, \dots, F_{ij}, \Gamma_{2j}, \dots, \Gamma_{i-1j}\right) = \Gamma_{ij}, \quad |i| = 2, 3\dots, \quad j = 1, \dots, n. \tag{18}$$

Розглянемо тепер випадок б). Необхідно зауважити, що векторів i, для яких виконується дана умова, може бути лише скінченна кількість, тобто знайдеться таке m, що для $|i| > m$ вже матимемо випадок а).

Неперервні N-періодичні функції $\gamma_{ij}(t)$ при $|i| = 2$ у випадку б) будемо шукати у вигляді многочлена

$$\gamma_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^{ij}(t)\tilde{f}_{ij}(t-k), \tag{19}$$

де $C_k^{ij}(t)$, $k = 1, \dots, N$, $|i| = 2$, $j = 1, \dots, n$, — деякі, поки що не визначені, неперервні N-періодичні функції. Для цього підставимо (19) у систему (9). В результаті отримаємо співвідношення

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)\sum_{k=1}^{N}C_k^{ij}(t+1)\tilde{f}_{ij}(t-k+1) =$$

$$= \lambda_j(t)\sum_{k=1}^{N}C_k^{ij}(t)\tilde{f}_{ij}(t-k)+\tilde{f}_{ij}(t). \tag{20}$$

Із (20) випливає, що якщо виконуються рівності

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_1^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_N^{ij}(t)+1,$$

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_2^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_1^{ij}(t),$$

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_3^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_2^{ij}(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_{N-1}^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_{N-2}^{ij}(t),$$

$$\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)C_N^{ij}(t+1) = \lambda_j(t)C_{N-1}^{ij}(t),$$

то многочлен (19) є розв'язком системи (9). Беручи до уваги отримані співвідношення, послідовно знаходимо

$$\begin{gathered}
C_{N-1}^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_N^{ij}(t+1),\\
C_{N-2}^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_{N-1}^{ij}(t+1) = [\alpha_{ij}(t)]^2C_N^{ij}(t+2),\\
C_{N-3}^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_{N-2}^{ij}(t+1) = [\alpha_{ij}(t)]^3C_N^{ij}(t+3),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1^{ij}(t) = \alpha_{ij}(t)C_2^{ij}(t+1) = [\alpha_{ij}(t)]^{N-1}C_N^{ij}(t+N-1),\\
[\alpha_{ij}(t)]^NC_N^{ij}(t+N) = C_N^{ij}(t)+\lambda_j^{-1}(t).
\end{gathered} \tag{21}$$

Із останніх співвідношень отримуємо

$$
\begin{aligned}
C_N^{ij}(t) &= \frac{\lambda_j^{-1}(t)}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1},\\
C_1^{ij}(t) &= \frac{\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]^{N-1}}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1},\\
C_2^{ij}(t) &= \frac{\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]^{N-2}}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
C_{N-1}^{ij}(t) &= \frac{\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Отже, многочлен (19), коефіцієнти якого визначаються за допомогою співвідношень (22), є розв'язком системи рівнянь (9) і має вигляд

$$
\gamma_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]^{N-k}}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1}\tilde{f}_{ij}(t-k). \tag{23}
$$

Використовуючи умови теореми, умову б) та (22), маємо

$$
\begin{aligned}
|\gamma_{ij}(t)| &= \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]^{N-k}}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1}\,\tilde{f}_{ij}(t-k)\right| \le\\
&\le \frac{|\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]^{N-1}|}{|\alpha_{ij}(t) - 1|}\,\sum_{k=1}^{N}|\tilde{f}_{ij}(t-k)| \le\\
&\le \frac{\lambda_*^{-1}\,\alpha^{*N-1}}{\alpha_* - 1}\,\sum_{k=1}^{N}|\tilde{f}_{ij}(t-k)| \le \beta N F_{ij} = \Gamma_{ij}, \quad |i| = 2, j = 1,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Розглядаючи послідовно системи (9) при $|i| = 3, 4, \ldots, m$, аналогічно можна довести існування неперервних N-періодичних розв'язків системи (9) у випадках $|i| = 3, 4, \ldots, m$. Більш цього, розв'язки даної системи при $|i| = 3, 4, \ldots, m$ визначаються співвідношенням

$$
\gamma_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_j^{-1}(t)\,[\alpha_{ij}(t)]^{N-k}}{[\alpha_{ij}(t)]^N - 1}\,P_{ij}(t-k), \tag{25}
$$

де $P_i(t) = (P_{i1}(t), P_{i2}(t), \ldots, P_{in}(t))$, $P_{ij}(t)$ — деякі многочлени відносно компонент векторів $\tilde{f}_2(t), \ldots, \tilde{f}_i(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_{i-1}(t)$.

Використовуючи умову 4 і (24), (25), методом математичної індукції отримуємо

$$
|\gamma_{ij}(t)| \le \beta P_{ij}\left(F_{2j}, \ldots, F_{ij}, \Gamma_{2j}, \ldots, \Gamma_{i-1j}\right) = \Gamma_{ij}, \quad |i| = 2, 3, \ldots, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{26}
$$

Тепер покажемо, що ряд (5), який є формальним розв'язком системи рівнянь (7), рівномірно збігається при $|z| < \rho_1 < \rho$. Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\chi(z) - z - \beta F(\chi(z)) = 0, \tag{27}$$

де ряд $F(\tilde{y}) = \sum_{|i|=2}^{\infty} F_i \tilde{y}^i(t)$ збігається при $|\tilde{y}| < \rho$, $\rho > 0$.

Згідно з умовою 5 система (27) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\chi(z) = z + \sum_{|i|=2}^{\infty} \chi_i z^i, \tag{28}$$

де коефіцієнти χ_i визначаються єдиним чином формулами

$$\chi_{ij} = \beta P_{ij} \left(F_{2j}, \ldots, F_{ij}, \chi_{2j}, \ldots, \chi_{i-1j} \right), \quad |i| \geq 2, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Тут $P_i(t) = (P_{i1}(t), P_{i2}(t), \ldots, P_{in}(t))$, $P_{ij}(t)$ — деякі многочлени відносно компонент векторів $\tilde{f}_2(t), \ldots, \tilde{f}_i(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_{i-1}(t)$, до того ж $P_{ij}(t) = F_{ij}(t)$ при $|i| = 2, j = 1, \ldots, n$. З іншого боку, оскільки $\left.\dfrac{\partial F}{\partial \chi}\right|_{\chi=0} = 0$, то система рівнянь (27) має єдиний голоморфний розв'язок, що задовольняє умову $\chi(0) = 0$. Звідси випливає, що степеневий ряд, в який розкладається цей розв'язок, співпадає з рядом (28). Отже, ряд (28) збігається при достатньо малих $|z| < \rho_1 < \rho$.

Оскільки безпосередньо з (29) випливає $\chi_{ij} = \Gamma_{ij}$, $|i| \geq 2$, $j = 1, \ldots, n$, то згідно з (18), (26) ряд (5) також рівномірно збігається при $|z| < \rho_1 < \rho$.

Теорему доведено.

Таким чином, при виконанні умов 1 – 5 за допомогою перетворення (5) дослідження системи рівнянь (4) зводиться до дослідження лінійної системи (6), загальний розв'язок якої при $t \in \mathbb{R}^+$ має вигляд

$$y_i(t) = |\lambda_i|^t \omega_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

де $\omega_i(t)$ — довільні 1-періодичні при $t \in \mathbb{R}^+$ функції, що задовольняють умову

$$\omega_i(t+1) = \omega_i(t) \operatorname{sign} \lambda_i.$$

Розглянемо тепер систему різницевих рівнянь (4) у випадку, коли функції $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, не задовольняють умову 2. Далі, використовуючи умову 1, будемо вважати, що $|\lambda_1(t)| \geq |\lambda_2(t)| \geq \ldots \geq |\lambda_n(t)|$. Тоді для функцій $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можливі лише співвідношення

$$\lambda_i(t) = \lambda_1^{j_1}(t)\, \lambda_2^{j_2}(t) \, \ldots \, \lambda_{i-1}^{j_{i-1}}(t), \quad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{30}$$

Легко помітити, що векторів $j = (j_1, \ldots, j_{i-1})$, що задовольняють умову (30), буде скінченна кількість. Зазначимо, що в такому випадку не існує аналітичного перетворення вигляду (5), що зводить систему рівнянь (4) до лінійного вигляду, але має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 3–5 і (30). Тоді існує перетворення вигляду (5), що зводить систему рівнянь (4) до трикутного вигляду*

$$z_i(t+1) = \lambda_i(t)z_i(t) + \sum_{j_1+\ldots+j_{i-1}=2}^{k} f^*_{j_1\ldots j_{i-1}}(t) z_1^{j_1}(t)\, z_2^{j_2}(t)\,\ldots\, z_{i-1}^{j_{i-1}}(t), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{31}$$

де k — найбільша довжина ($|j| = j_1 + \ldots + j_{i-1}$) векторів $j = (j_1,\ldots,j_{i-1})$, що задовольняють умову (30), $f^*_{j_1\ldots j_{i-1}}(t)$ — деякі неперервні N-періодичні функції.

Доведення. Запишемо систему рівнянь (31) у векторній формі $z(t+1) = \Lambda(t)z(t) + \sum_{|j|=2}^{k} f^*_j(t)z^j(t)$ і покажемо, що існує формальна заміна змінних у вигляді ряду (5), яка зводить систему (4) до вигляду (31). Для цього достатньо показати, що існує формальний розв'язок у вигляді (5) системи рівнянь

$$\gamma\left(t+1, \Lambda(t)z(t) + \sum_{|j|=2}^{k} f^*_j(t)z^j(t)\right) = \Lambda(t)\gamma(t,z(t)) + \tilde{f}(t,\gamma(t,z(t))). \tag{32}$$

Дійсно, підставляючи (5) в (32) та беручи до уваги умову 3, маємо

$$\Lambda(t)z(t) + \sum_{|i|=2}^{k} f^*_i(t)z^i(t) + \sum_{|i|=2}^{\infty} \gamma_i(t+1)\left(\Lambda(t)z(t) + \sum_{|j|=2}^{k} f^*_j(t)z^j(t)\right)^i =$$

$$= \Lambda(t)z(t) + \Lambda(t)\sum_{|i|=2}^{\infty}\gamma_i(t)z^i(t) +$$

$$+ \sum_{|i|=2}^{\infty}\tilde{f}_i(t)\left(z(t) + \sum_{|j|=2}^{\infty}\gamma_j(t)z^j(t)\right)^i. \tag{33}$$

Зрівнюючи в (33) коефіцієнти при відповідних степенях z^i, $i = 2, 3, \ldots$, отримуємо рівняння для визначення векторів $\gamma_i(t)$, $|i| \geq 2$:

$$\begin{gathered}\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)\gamma_{ij}(t+1) = \lambda_j(t)\gamma_{ij}(t) + P_{ij}(t)\\ \text{при}\quad \lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t) \neq \lambda_j(t),\end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t)\gamma_{ij}(t+1) + f^*_{ij}(t) = \lambda_j(t)\gamma_{ij}(t) + P_{ij}(t)\\ \text{при}\quad \lambda_1^{i_1}(t)\,\lambda_2^{i_2}(t)\,\ldots\,\lambda_n^{i_n}(t) = \lambda_j(t), \quad |i| = 2,3,\ldots, \quad j = 1,\ldots,n,\end{gathered} \tag{35}$$

де $P_{ij}(t)$ — многочлени відносно $\gamma_l(t)$, $\gamma_l(t+1)$, $|l| < |i|$, з коефіцієнтами, що залежать від t.

Рівняння (34) нічим не відрізняються від рівнянь (9), тому існує послідовність неперервних N-періодичних функцій $\gamma_{ij}(t)$, $|i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n$, що задовольняють (34), (18) та (26). Якщо в (35) покласти $f^*_{ij}(t) = P_{ij}(t)$, то в якості $\gamma_{ij}(t)$ можна вибрати довільну 1-періодичну функцію. Для простоти будемо припускати $\gamma_{ij}(t) \equiv 0$.

Таким чином, існує формальний розв'язок системи (32) у вигляді ряду (5). Доведемо рівномірну збіжність побудованого ряду.

Нехай $\sup_t \left| f^*_{ij}(t) \right| \leq \tilde{f}^*_{ij}, 2 \leq |i| \leq k, j = 1, \ldots, n$, де $\tilde{f}^*_{ij} = \mathrm{const} > 0$, $\tilde{f}^*_i = \left(\tilde{f}^*_{i1}, \ldots, \tilde{f}^*_{in}\right)$ ($\tilde{f}^*_{ij} = 0$ при всіх $2 \leq |i| \leq k, j = 1, \ldots, n$, для яких не виконується умова (30)).

Розглянемо систему рівнянь

$$\chi(z) = \chi\left(\lambda^* z + \sum_{|j|=2}^{k} \tilde{f}^*_j z^j\right) + \beta F(\chi(z)) + (1 - \lambda^*)\, z, \tag{36}$$

де $\lambda^* = \max\left\{\max_t\{|\lambda_i(t)|, i = 1, \ldots, n\}\right\}$, та покажемо, що вона має розв'язок у вигляді ряду

$$\chi(z) = z + \sum_{|i|=2}^{\infty} \chi_i z^i. \tag{37}$$

Дійсно, підставляючи (37) у рівняння (36), отримуємо

$$z + \sum_{|i|=2}^{\infty} \chi_i z^i = \lambda^* z + \sum_{|j|=2}^{k} \tilde{f}^*_j z^j + \sum_{|i|=2}^{\infty} \chi_i \left(\lambda^* z + \sum_{|j|=2}^{k} \tilde{f}^*_j z^j\right)^i +$$

$$+ \beta \sum_{|i|=2}^{\infty} F_i \left(z + \sum_{|j|=2}^{\infty} \chi_j z^j\right)^i + (1 - \lambda^*)\ z.$$

Звідси випливає

$$\chi_{ij} = \lambda^{*|i|} \chi_{ij} + \beta \bar{P}_{ij}, \quad |i| = 2, 3, \ldots, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{38}$$

де $\bar{P}_{ij}$ — деякі многочлени відносно χ_l, $|l| < |i|$, що мажорують многочлени P_{ij}, тобто якщо $A_{ij}(t)\gamma_{ij}(t)$ — деякий доданок многочлена P_{ij}, $\bar{A}_{ij}(t)\chi_{ij}$ — відповідний йому доданок многочлена $\bar{P}_{ij}$, то $\sup_t |A_{ij}(t)| \leq \bar{A}_{ij}$, до того ж $\bar{P}_{ij} = F_{ij}$, $|i| = 2$, $j = 1, \ldots, n$.

Таким чином, коефіцієнти χ_i, $|i| = 2, 3, \ldots$, визначаються єдиним чином формулами

$$\chi_{ij} = \beta\left(1 - \lambda^{*|i|}\right)^{-1} \bar{P}_{ij}, \quad |i| = 2, 3, \ldots, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{39}$$

Беручи до уваги (18), (26), (34) та (39), послідовно знаходимо $|\gamma_{ij}(t)| \leq \chi_{ij}$, $|i| = 2, 3, \ldots, j = 1, \ldots, n$. Звідси випливає, що для доведення збіжності ряду (5) достатньо довести збіжність ряду (37). Згідно з результатами [1], система рівнянь (36) має єдиний аналітичний в деякій області $|z| < \rho_1 < \rho$ розв'язок. Звідси випливає, що ряд (37) також рівномірно збігається в області $|z| < \rho_1 < \rho$.

Теорему доведено.

1. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative functional equations. — CUP, 1990.
2. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 192 с.
3. *Harris W. A. (Jr.), Sibuya Y.* General solution of nonlinear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — № 115. — P. 62–75.
4. *Takano K.* General solution of a nonlinear difference equation of Briot–Bouquet type // Funkc. ekvacioj. — 1971. — **13**, № 3. — P. 179–198.
5. *Takano K.* Solution containing arbitrary periodic functions of systems of nonlinear difference equations // Funkc. ekvacioj. — 1973. — **13**, № 2. — P. 137–164.
6. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. — 1996. — **32**, № 2. — С. 304–312.
7. *Пелюх Г. П.* О структуре общего решения систем нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 10. — С. 1368–1378.
8. *Пелюх Г. П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 7. — С. 936–953.
9. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН РАН. — 1994. — **336**, № 4. — С. 451–452.

Одержано 13.09.11,
після доопрацювання — 06.01.12