УДК 517.988.6

МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО НАБЛИЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ ОПЕРАТОРІВ СЛАБКО РЕГУЛЯРНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We find conditions for existence of bounded solutions to nonlinear difference equations by using a local linear approximation of these equations.

Получены условия существования ограниченных решений нелинейных разностных уравнений с использованием локальной линейной аппроксимации этих уравнений.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай E — скінченновимірний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, X і Y — довільні банахові простори і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y$. Позначимо через $l_\infty(\mathbb{Z},X)$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n\in X$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},X)}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x_n\|_X$. Цей простір будемо позначати через $\mathfrak{M}$, якщо $X=E$.

Розглянемо різницевий оператор $\mathcal{F}$, що діє у просторі $\mathfrak{M}$ і визначається формулою

$$(\mathcal{F}\mathbf{x})_n = x_n + f_n(x_{n-1},\ldots,x_{n-p}),$$

де $n\in\mathbb{Z}$, $p\in\mathbb{N}$ і відображення $f_n: E^p\to E$, $n\in\mathbb{Z}$, задовольняють наступну умову.

Умова А. *Відображення* $f_n: E^p\to E$, $n\in\mathbb{Z}$, *неперервні і для кожного числа* $r\in(0,+\infty)$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\|y_1\|_E\leqslant r,\ldots,\|y_p\|_E\leqslant r}\|f_n(y_1,\ldots,y_p)\|_E<+\infty. \tag{1}$$

Завдяки вимогам до відображень f_n, $n\in\mathbb{Z}$, оператор $\mathcal{F}$ є обмеженим, тобто цей оператор кожну обмежену множину відображає в обмежену множину. Оператор $\mathcal{F}$ є неперервним, якщо відображення f_n, $n\in\mathbb{Z}$, рівностепенево неперервні на кожній множині $\{(y_1,\ldots,y_p):\|y_1\|_E\leqslant r,\ldots,\|y_m\|_E\leqslant r\}$, $r>0$.

Метою цієї статті є знаходження умов, за яких множина значень $R(\mathcal{F})$ оператора $\mathcal{F}$ збігається з $\mathfrak{M}$. Зазначимо, що така задача для нелінійних різницевих рівнянь є складною (див., наприклад, [1 – 8]), яку розв'язати важко. Тому ми обмежимося розглядом лише достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношення $R(\mathcal{F})=\mathfrak{M}$ і в деяких окремих випадках збігаються з необхідними умовами виконання цього співвідношення.

В основу досліджень оператора $\mathcal{F}$ у цій статті покладено метод, що використовує локальну лінійну апроксимацію цього оператора слабко регулярними операторами. Випадок локального наближення нелінійних операторів регулярними операторами для різницевих рівнянь розглядався автором у [9, 10], для диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь — у [11] і [12] відповідно (детальний виклад цього методу та його застосування наведено у [13]).

2. Формулювання основного твердження. Оскільки у подальшому ми будемо використовувати слабко регулярні оператори, то спочатку приділимо увагу цим операторам.

Кожному елементу $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $l_\infty(\mathbb{Z}, L^p(E,E))$, де

$$L^p(E,E) = \underbrace{L(E,E) \times \ldots \times L(E,E)}_{p \text{ разів}},$$

поставимо у відповідність лінійний неперервний оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, що діє у просторі $\mathfrak{M}$ і визначається формулою

$$(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}\mathbf{x})_n = x_n + \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}x_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Оператор $\mathcal{R}_A$ називають *слабко регулярним*, якщо

$$R(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}) = \mathfrak{M}, \tag{3}$$

тобто для кожного $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ рівняння

$$\mathcal{R}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Множину всіх елементів $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}}$, для кожного з яких оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є слабко регулярним, позначимо через $\mathcal{G}_p$. Множину всіх слабко регулярних операторів $\mathcal{R}_{\mathbf{A}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ позначимо через $WR(\mathfrak{M})$. Якщо для $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ крім співвідношення (3) виконується і співвідношення

$$\ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}} = \{0\},$$

де $\ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ — ядро оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ ($\ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M} : \mathcal{R}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$), то оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ називають *регулярним* (у цьому випадку оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}$ за теоремою Банаха про обернений оператор [14]). Множину регулярних операторів $\mathcal{R}_{\mathbf{A}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ позначатимемо через $R(\mathfrak{M})$. Очевидно, що

$$R(\mathfrak{M}) \subset WR(\mathfrak{M})$$

і

$$WR(\mathfrak{M}) \setminus R(\mathfrak{M}) \neq \varnothing.$$

Прикладом нерегулярного але слабко регулярного оператора при $p = 1$ є оператор $\mathcal{R} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається формулою

$$(\mathcal{R}\mathbf{x})_n = x_n + \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{th} n\right)x_{n-1}, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $\mathcal{R}_{\mathbf{A}} \in WR(\mathfrak{M}) \setminus R(\mathfrak{M})$. Для цього оператора $\ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}} \neq \{0\}$. Оскільки простір E скінченновимірний, то ядро $\ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ також буде скінченновимірним простором (див. у п. 3 теорему 2). Тому існує доповняльний до $\ker \mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ підпростір $X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$ простору $\mathfrak{M}$ [15], тобто такий підпростір, що $\mathfrak{M}$ можна записати у вигляді прямої суми

$$\mathfrak{M} = \ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}} \dot{+} X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}} \tag{4}$$

(норми у просторах $\ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ і $X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$ розглядаємо такі, як і в просторі $\mathfrak{M}$). Рівність (4) означає, що кожний вектор $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ єдиним чином записується у вигляді

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,$$

де $\mathbf{x}_1 \in \ker \mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ і $\mathbf{x}_2 \in X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$.

Розглянемо звуження $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}$ оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ на підпростір $X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$. Цей оператор взаємно однозначно відображає $X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$ на $\mathfrak{M}$ і тому має обернений неперервний оператор $\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1} : \mathfrak{M} \to X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$.

Основним результатом статті є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується умова А. Якщо для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_p$, що*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_p\|_E \leqslant r} \left\| f_n(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k} x_k \right\|_E \leqslant \frac{r}{a} - H, \tag{5}$$

де

$$a = \begin{cases} \left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}, & \text{якщо } \mathcal{R}_{\mathbf{A}} \in R(\mathfrak{M}), \\ \left\|\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}, & \text{якщо } \mathcal{R}_{\mathbf{A}} \in WR(\mathfrak{M}) \setminus R(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

то для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ рівняння

$$\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{h} \tag{6}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Цю теорему покладено в основу методу, за допомогою якого знаходять умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь. Ми доведемо це твердження, використавши ряд допоміжних результатів.

Зазначимо, що при використанні на практиці теореми 1 потрібно знати норми операторів $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}$ і $\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}$ або оцінки зверху для цих норм. Наведемо деяку інформацію про оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}$, норма якого знаходиться легше, ніж норма оператора $\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}$. Нагадаємо, що оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}$ можна записати за допомогою рівності

$$\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{h}\right)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} h_m,$$

в якій $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ і для $G_{n,m} \in L(E,E)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_{n,m}\|_{L(E,E)} < +\infty$$

(див. [16, 17]). Отже, для норми оператора $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$ справджується оцінка

$$\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_{n,m}\|_{L(E,E)},$$

яку можна використати в (5).

3. Допоміжні твердження. Наведемо ряд результатів про розмірність ядра оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ і про c-неперервні оператори, потрібні для доведення теореми 1.

3.1. Обґрунтування скінченної розмірності ядра оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$**.** З'ясування розмірності ядра оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ є нетривіальним, оскільки у співвідношенні (2) оператори $A_{n,p}$, $n \in \mathbb{Z}$, можуть не мати обернених неперервних операторів.

Теорема 2. *Якщо* $\dim E < \infty$, *то* $\dim\ker\mathcal{R}_{\mathbf{A}} \leqslant p\dim E$.

Доведення. Для кожного числа $m \in \mathbb{Z}$ визначимо лінійні неперервні оператори $\mathcal{S}_m : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ і $\mathcal{T}_m : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ за допомогою рівностей

$$(\mathcal{S}_m\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad n \in \{m-p, m-p+1, \ldots, m-1\}, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{m-p, m-p+1, \ldots, m-1\}, \end{cases}$$

$$(\mathcal{T}_m\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{Z} \cap [m, +\infty), \\ 0, & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, m), \end{cases}$$

де $n \in \mathbb{Z}$ і $\mathbf{x}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{M}$.

Розглянемо натуральне число $\nu = p\dim E$.

Зафіксуємо довільні $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(\nu+1)} \in \ker\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$. Припустимо, що $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(\nu+1)}$ лінійно незалежні. Покажемо, що існує таке число $n_0 \in \mathbb{Z}$, що елементи $\mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(\nu+1)}$ також є лінійно незалежними.

Припустимо, що $\mathcal{T}_m\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_m\mathbf{x}^{(\nu+1)}$ — лінійно залежні елементи для кожного $m \in \mathbb{Z}$. Тоді існують числа $c_m^{(1)}, \ldots, c_m^{(\nu+1)}$, $m \in \mathbb{Z}$, для яких

$$\sum_{k=1}^{\nu+1} \left|c_m^{(k)}\right| = 1, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

і $\sum_{k=1}^{\nu+1} c_m^{(k)}\mathcal{T}_m\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$, $m \in \mathbb{Z}$. Із урахуванням того, що $\sum_{k=1}^{\nu+1} c_m^{(k)}\mathcal{T}_m\mathbf{x}^{(k)} = \mathcal{T}_m\sum_{k=1}^{\nu+1} c_m^{(k)}\mathbf{x}^{(k)}$, на підставі лінійності операторів $\mathcal{T}_m$, $m \in \mathbb{Z}$, отримуємо

$$\mathcal{T}_m \sum_{k=1}^{\nu+1} c_m^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Завдяки (7) існують числа $c^{(1)}, \ldots, c^{(\nu+1)}$ і послідовність цілих від'ємних чисел m_q, $q \in \in \mathbb{N}$, для яких $\lim_{q\to\infty} m_q = -\infty$, $\sum_{k=1}^{\nu+1} \left|c^{(k)}\right| = 1$ і $\lim_{q\to\infty} c_{m_q}^{(k)} = c^{(k)}$, $k = \overline{1, \nu+1}$. Тому згідно з (8) $\lim_{q\to\infty} \mathcal{T}_{m_q} \sum_{k=1}^{\nu+1} c^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$. Звідси випливає рівність $\sum_{k=1}^{\nu+1} c^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$, що суперечить лінійній незалежності елементів $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(\nu+1)}$.

Отже, існування числа $n_0 \in \mathbb{Z}$, для якого елементи $\mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(\nu+1)}$ є лінійно незалежними у випадку лінійно незалежних $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(\nu+1)}$, доведено.

Далі розглянемо елементи $\mathcal{S}_{n_0+p}\,\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathcal{S}_{n_0+p}\,\mathbf{x}^{(\nu+1)}$. Ці елементи лінійно залежні, оскільки вони є елементами підпростору $\mathcal{S}_{n_0+p}\,\mathfrak{M}$ простору $\mathfrak{M}$, $\dim \mathcal{S}_{n_0+p}\,\mathfrak{M} = p \dim E$ і $\nu + 1 > \dim \mathcal{S}_{n_0+p}\,\mathfrak{M}$. Тому існують числа $a^{(1)}, \ldots, a^{(\nu+1)}$, для яких $\sum_{k=1}^{\nu+1} \left|a^{(k)}\right| \neq 0$, такі, що $\sum_{k=1}^{\nu+1} a^{(k)} \mathcal{S}_{n_0+p}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$. На підставі означення оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ і його лінійності, а також того, що $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(\nu+1)}$ — елементи ядра оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, виконується рівність $\sum_{k=1}^{\nu+1} a^{(k)} \mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$, що суперечить лінійній незалежності $\mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_{n_0}\mathbf{x}^{(\nu+1)}$.

Отже, припущення, що елементи $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(\nu+1)}$ ядра оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ лінійно незалежні, є хибним.

Теорему 2 доведено.

3.2. Локально збіжні послідовності і c-неперервні оператори. Позначимо через $\mathcal{P}_m$, де $m \in \mathbb{Z}$, лінійний неперервний оператор, що діє у просторі $\mathfrak{M}$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{P}_m \mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad |n| \leqslant m, \\ 0, & \text{якщо} \quad |n| > m. \end{cases}$$

Послідовність $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ елементів простору $\mathfrak{M}$ називатимемо *локально збіжною* до $\mathbf{x} \in \in \mathfrak{M}$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathbf{x_k} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_k\|_{\mathfrak{M}} < +\infty$ і $\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_m(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\|_{\mathfrak{M}} = 0$ для кожного числа $m \in \mathbb{N}$.

Очевидним є наступне твердження.

Лема 1. *Для кожної обмеженої послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\geqslant 1}$ елементів простору $\mathfrak{M}$ існують такі елемент $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і зростаюча підпослідовність $(k_l)_{l\geqslant 1}$ послідовності натуральних чисел, що*

$$\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{x} \quad \textit{при} \quad l \to \infty$$

і

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} \leqslant \sup_{k\geqslant 1} \|\mathbf{x}_k\|_{\mathfrak{M}}.$$

Оператор $\mathcal{H} : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і $\mathbf{x_k} \in \mathfrak{M}$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathcal{H}\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора (на мові „ε, δ”) уведено до розгляду Е. Мухамадієвим [18]. Вивчення цих понять було продовжено в [19–24] та інших роботах.

Прикладами c-неперервних операторів є оператори $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, $\mathcal{S}_m$, $\mathcal{T}_m$ і $\mathcal{P}_m$. Також c-неперервним є оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}$ у випадку регулярного оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, що випливає з наступного твердження.

Теорема 3 [17, 20]. *Нехай лінійний неперервний і c-неперервний оператор $\mathcal{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тоді оператор $\mathcal{A}^{-1}$ є c-неперервним.*

Легко перевірити, що якщо $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — c-неперервні оператори, то для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ оператори $\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}$ і $\mathcal{A}\mathcal{B}$ також є c-неперервними. Також легко перевірити, що якщо збіжна послідовність $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 1}$ c-неперервних елементів простору $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ збігається до оператора $\mathcal{A} \in L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{A}_k - \mathcal{A}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} = 0,$$

то оператор $\mathcal{A}$ є c-неперервним. Отже, множина $\mathfrak{A}$ всіх c-неперервних елементів банахової алгебри $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ є банаховою підалгеброю цієї алгебри.

При дослідженні нелінійних операторів, що діють у просторі $\mathfrak{M}$, потрібно мати на увазі, що ні c-неперервність не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає із c-неперервності (див. [6]).

4. Доведення теореми 1. Розглянемо у просторі $\mathfrak{M}$ замкнену кулю $\mathcal{B}_R = \{x : \|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant R\}$ радіуса R із центром у точці $\mathbf{0}$.

Доведемо твердження, з якого випливатиме теорема 1.

Лема 2. *Нехай виконується умова А. Якщо для деяких чисел $H > 0, r > 0$ і елемента $\mathbf{A} = ((A_{n,1},\ldots,A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_p$ справджується нерівність (5) і $\mathbf{h} \in \mathcal{B}_H$, то рівняння (6) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r$.*

Доведення. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо різницеве рівняння

$$(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}\mathbf{x})_n = (\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{x})_n + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

де $\mathcal{A}$ і $\mathcal{G}$ — різницеві оператори, що діють у просторі $\mathfrak{M}$ і визначаються співвідношеннями

$$(\mathcal{A}\mathbf{x})_n = \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}x_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$(\mathcal{G}\mathbf{x})_n = f_n(x_{n-1},\ldots,x_{n-p}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Це рівняння у випадку регулярного оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ (випадок А) рівносильне рівнянню

$$x_n = \left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\left(\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{x}+\mathbf{h}\right)\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

У випадку нерегулярного оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, але слабко регулярного оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ (випадок Б) рівняння (9) у просторі $X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}$ рівносильне рівнянню

$$x_n = \left(\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}\left(\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{x}+\mathbf{h}\right)\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Також розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{W}_m$, що діє у просторі $\mathfrak{M}$ і визначається формулою

$$(\mathcal{W}_m\mathbf{x})_n = (\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{x}+\mathbf{h})_n\,, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Завдяки означенню операторів $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ і умові A оператор $\mathcal{W}_m$ є цілком неперервним. Тому цілком неперервними є оператори $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}_m$ (у випадку A) і $\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}\mathcal{W}_m$ (у випадку Б).

Зазначимо, що

$$\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}_m\,\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$$

(у випадку A) і

$$(\mathcal{R}_{\mathbf{A}})^{-1}\,|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\mathcal{W}_m\,\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$$

(у випадку Б). Справді, якщо $\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}\leqslant r$ і $\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}\leqslant H$, то згідно з нерівністю (5) у випадку A

$$\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}_m\mathbf{y}\right\|_{\mathfrak{M}} \leqslant \left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}\|\mathcal{W}_m\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \leqslant a\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}\leqslant r}\|(\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{y}+\mathbf{h})_n\|_E \leqslant$$

$$\leqslant a\left(\sup_{\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}\leqslant r}\|(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{y}\|_E+\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}\right) \leqslant a\left(\left(\frac{r}{a}-H\right)+H\right) = r.$$

Аналогічно у випадку Б

$$\left\|\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}\mathcal{W}_m\mathbf{y}\right\|_{\mathfrak{M}} \leqslant \left\|\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}\|\mathcal{W}_m\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \leqslant$$

$$\leqslant a\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}}\leqslant r}\|(\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{y}+\mathbf{h})_n\|_E \leqslant a\left(\left(\frac{r}{a}-H\right)+H\right) = r.$$

Тому за теоремою Шаудера про нерухому точку [25] для кожного $m\in\mathbb{N}$ оператори $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}_m$ і $\left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}}}}\right)^{-1}\mathcal{W}_m$ мають у кулі $\mathcal{B}_r$ хоча б одну нерухому точку.

Отже, рівняння (9) для кожного $m\in\mathbb{N}$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}\in\mathcal{B}_r$. Позначимо один із цих розв'язків через $\mathbf{x}_m$. Тоді

$$(\mathcal{R}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}_m)_n = (\mathcal{P}_m(\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{x}_m)_n + h_n, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{10}$$

За лемою 1 існують такі елемент $\mathbf{z}\in\mathcal{B}_r$ і зростаюча підпослідовність $(m_l)_{l\geqslant 1}$ послідовності натуральних чисел, що

$$\mathbf{x}_{m_l}\xrightarrow{\text{loc.},\,\mathfrak{M}}\mathbf{z} \quad \text{при} \quad l\to\infty.$$

Тому на підставі (10) при $m=m_l$ та c-неперервності операторів $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, $\mathcal{A}$ і $\mathcal{G}$

$$\mathcal{R}_{\mathbf{A}}\mathbf{z} = (\mathcal{A}-\mathcal{G})\mathbf{z}+\mathbf{h}.$$

Ця рівність збігається з рівністю

$$\mathcal{F}\mathbf{z} = \mathbf{h}.$$

Отже, рівняння (6) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r$.

Лему 2 доведено.

Очевидно, що твердження теореми 1 випливає з леми 2.

5. Обширність множини рівнянь, до яких застосовна теорема 1. Покажемо, що множина нелінійних різницевих рівнянь, до яких застосовна теорема 1, є достатньо широкою множиною.

Теорема 4. *Для кожних чисел $H_m > 0$, $m \geqslant 1$, для яких $\lim_{m\to\infty} H_m = +\infty$, і елементів $\mathbf{A}^{(m)} = \left(\left(A_{n,1}^{(m)}, A_{n,2}^{(m)}, \ldots, A_{n,p}^{(m)}\right)\right)_{m\geqslant 1} \in \mathcal{G}_p$, $m \geqslant 1$, існують відображення $g_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, що задовольняє умову A, і числа $r_m > 0$, $m \geqslant 1$, для яких виконується співвідношення*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_1\|_E\leqslant r_m,\ldots,\|x_m\|_E\leqslant r_m} \left\| g_n(x_1,\ldots,x_m) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(m)} x_k \right\|_E \leqslant \frac{r_m}{a_m} - H_m, \quad m \geqslant 1, \tag{11}$$

де

$$a_m = \begin{cases} \left\| \mathcal{R}_{\mathbf{A}^{(m)}}^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}, & \textit{якщо} \quad \mathcal{R}_{\mathbf{A}^{(m)}} \in R(\mathfrak{M}), \\ \left\| \left(\mathcal{R}_{\mathbf{A}^{(m)}}|_{X_{\mathcal{R}_{\mathbf{A}^{(m)}}}} \right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}, & \textit{якщо} \quad \mathcal{R}_{\mathbf{A}^{(m)}} \in WR(\mathfrak{M}) \setminus R(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо довільну послідовність додатних чисел r_m, $m \geqslant 1$, для якої $r_1 \geqslant 1$ і $r_{m+1} > r_m + 3$, $m \geqslant 1$ (значення r_m уточнимо пізніше). Для кожного $m \geqslant 1$ визначимо відображення

$$\omega_{1,m} : \{x \in \mathfrak{M} : r_m \leqslant \|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant r_m + 1\} \to [0,1]$$

і

$$\omega_{2,m} : \{x \in \mathfrak{M} : r_m + 1 \leqslant \|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant r_m + 2\} \to [0,1]$$

за допомогою рівностей

$$\omega_{1,m}(x) = r_m \left\| \left(\frac{r_m + 1}{\|x\|_{\mathfrak{M}}} - 1 \right)^2 x \right\|_{\mathfrak{M}}$$

і

$$\omega_{1,m}(x) = (r_m + 2) \left\| \left(\frac{r_m + 1}{\|x\|_{\mathfrak{M}}} - 1 \right)^2 x \right\|_{\mathfrak{M}}.$$

Очевидно, що відображення $\omega_{1,m}$ і $\omega_{2,m}$ неперервні,

$$\omega_{1,m}(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{\mathfrak{M}} = r_m, \tag{12}$$

$$\omega_{2,m}(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{\mathfrak{M}} = r_m + 2, \tag{13}$$

$$\omega_{1,m}(x) = \omega_{2,m}(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad \|x\|_{\mathfrak{M}} = r_m + 1, \tag{14}$$

і

$$R(\omega_{1,m}) = R(\omega_{2,m}) = [0,1]. \tag{15}$$

Відображення $g_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, і числа r_m, $m \geqslant 1$, визначимо таким чином.

Спочатку розглянемо відображення $g_n^{(1)} : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, що визначаються співвідношенням

$$g_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(1)} x_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_1\|_E \leqslant r, \ldots, \|x_p\|_E \leqslant r} \left\| g_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(1)} x_k \right\|_E = 0.$$

Виберемо число $r_1 \geqslant 1$ так, щоб

$$\frac{r_1}{a_1} - H_1 \geqslant 0.$$

Далі розглянемо відображення $g_n^{(2)} : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, що визначаються співвідношенням

$$g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{cases} g_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо} \quad \|x_l\|_E \leqslant r_1,\ l = \overline{1,p}, \\ \omega_{1,1}(x) g_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо} \quad r_1 < \|x_l\|_E \leqslant r_1 + 1,\ l = \overline{1,p}, \\ \omega_{2,1}(x) \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(2)} x_k, & \text{якщо} \quad r_1 + 1 < \|x_l\|_E \leqslant r_1 + 2,\ l = \overline{1,p}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(2)} x_k, & \text{якщо} \quad \|x_l\|_E > r_1 + 2,\ l = \overline{1,p}. \end{cases}$$

Для $g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p)$ виконується умова A на підставі неперервності $\omega_{1,1}$ і $\omega_{2,1}$, співвідношень (12) – (15) та того, що $\mathbf{A}^{(l)} \in \mathcal{G}_p$, $l = \overline{1,2}$. Легко перевірити, що

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}, x_1 \in E, \ldots, x_p \in E} \left\| g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(2)} x_k \right\|_E < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_2 > r_1 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_1\|_E \leqslant r_2, \ldots, \|x_p\|_E \leqslant r_2} \left\| g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(2)} x_k \right\|_E \leqslant \frac{r_2}{a_2} - H_2.$$

Далі визначимо відображення $g_n^{(3)} : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, за допомогою співвідношення

$$g_n^{(3)}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{cases} g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо} \;\; \|x_l\|_E \leqslant r_2, \; l = \overline{1,p}, \\ \omega_{1,2}(x) g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо} \;\; r_2 < \|x_l\|_E \leqslant r_2 + 1, \; l = \overline{1,p}, \\ \omega_{2,2}(x) \sum\limits_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(3)} x_k, & \text{якщо} \;\; r_2 + 1 < \|x_l\|_E \leqslant r_2 + 2, \; l = \overline{1,p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(3)} x_k, & \text{якщо} \;\; \|x_l\|_E > r_2 + 2, \; l = \overline{1,p}. \end{cases}$$

Для $g_n^{(3)}(x_1, \ldots, x_p)$ виконується умова A на підставі неперервності $\omega_{1,2}$ і $\omega_{2,2}$, співвідношень (12) – (15) та того, що для $g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p)$ виконується умова A і $\mathbf{A}^{(3)} \in \mathcal{G}_p$. Очевидно, що

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}, \; x_1 \in E, \ldots, x_m \in E} \left\| g_n^{(3)}(x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(3)} x_k \right\|_E < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_3 > r_2 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}, \; \|x_1\|_E \leqslant r_3, \ldots, \|x_m\|_E \leqslant r_3} \left\| g_n^{(3)}(x_1, \ldots, x_m) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(3)} x_k \right\|_E \leqslant \frac{r_3}{a_3} - H_3.$$

Аналогічним чином визначаємо відображення $g_n : \mathbb{R} \times E^m \to E$, $n \geqslant 4$, і числа $r_n > r_{n-1} + 3$, $n \geqslant 4$.

Зазначимо, що відображення $g_n^{(m)} : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, визначаються за допомогою співвідношення

$$g_n^{(m)}(x_1, \ldots, x_p) =$$

$$= \begin{cases} g_n^{(m-1)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо} \;\; \|x_l\|_E \leqslant r_{m-1}, \; l = \overline{1,p}, \\ \omega_{1,n-1}(x) g_n^{(m-1)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо} \;\; r_{m-1} < \|x_l\|_E \leqslant r_{m-1} + 1, \; l = \overline{1,p}, \\ \omega_{2,n-1}(x) \sum\limits_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(m)} x_k, & \text{якщо} \;\; r_{m-1} + 1 < \|x_l\|_E \leqslant r_{m-1} + 2, \; l = \overline{1,p}, \\ \sum\limits_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(m)} x_k, & \text{якщо} \;\; \|x_l\|_E > r_{m-1} + 2, \; l = \overline{1,p}. \end{cases}$$

Завдяки співвідношенню

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}, x_1 \in E, \ldots, x_m \in E} \left\| g_n^{(m)}(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(m)} x_k \right\|_E < +\infty$$

існує таке число $r_m > r_{m-1} + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}, \; \|x_1\|_E \leqslant r_m, \ldots, \|x_p\|_E \leqslant r_m} \left\| g_n^{(m)}(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}^{(m)} x_k \right\|_E \leqslant \frac{r_m}{a_m} - H_m. \tag{16}$$

Відображення $g_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, визначимо за допомогою формули

$$g_n(x_1, \ldots, x_p) = \begin{cases} g_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо } \|x_l\|_E \leqslant r_1,\ l = \overline{1,p}, \\ g_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо } r_1 < \|x_l\|_E \leqslant r_2,\ l = \overline{1,p}, \\ g_n^{(3)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо } r_2 < \|x_l\|_E \leqslant r_3,\ l = \overline{1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n^{(m)}(x_1, \ldots, x_p), & \text{якщо } r_{m-1} < \|x_l\|_E \leqslant r_m,\ l = \overline{1,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Для g_n, очевидно, виконуються співвідношення (11) і умова A, оскільки

$$g_n(x_1, \ldots, x_p) = g_n^{(m)}(x_1, \ldots, x_p),$$

якщо $\|x_l\|_E \leqslant r_m$, $l = \overline{1,p}$ (співвідношення (11) випливає із співвідношення (16)).

Теорему 4 доведено.

6. Застосування теореми 1. Наведемо застосування теореми 1 до дослідження лінійних і нелінійних різницевих рівнянь.

6.1. Випадок лінійних різницевих рівнянь. Зафіксуємо довільний елемент

$$\mathbf{Q} = ((Q_{n,1}, \ldots, (Q_{n,p}))_{n \in \mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, L^p(E, E)).$$

Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} Q_{n,k} x_{n-k} = h_n,$$

де $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$, та відповідний різницевий оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}} \mathbf{x})_n = x_n + \sum_{k=1}^{p} Q_{n,k} x_{n-k}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 5. *Для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і послідовність $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_p$, що*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z},\ \|x_1\|_E \leqslant r,\ \ldots\ ,\|x_p\|_E \leqslant r} \left\| \sum_{k=1}^{p} (Q_{n,k} - A_{n,k}) x_k \right\|_E \leqslant \frac{r}{\left\| \mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}} - H, \tag{17}$$

тоді і тільки тоді, коли різницевий оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ є слабко регулярним.

Очевидно, що нерівність (17) рівносильна нерівності

$$\sup_{n \in \mathbb{Z},\ \|x_1\|_E \leqslant 1,\ \ldots\ ,\|x_p\|_E \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^{p} (Q_{n,k} - A_{n,k}) x_k \right\|_E \leqslant \frac{1}{\left\| \mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}} - \frac{H}{r}. \tag{18}$$

Тут і в теоремі 5 $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ — оператор, що визначається рівністю (2).

Доведення. *Необхідність.* Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_p$, що виконується нерівність (17). Тоді згідно з теоремою 1 для оператора $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ виконується співвідношення

$$R(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}) = \mathfrak{M}.$$

Отже, оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ є слабко регулярним.

Достатність. Нехай оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ є слабко регулярним. Тоді $\mathbf{Q}$ є елементом множини $\mathcal{G}_p$. Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{r}{\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}} - H > 0.$$

Поклавши $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$, отримаємо нерівність (17).

Теорему 5 доведено.

Наслідок 1. *Різницевий оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ є слабко регулярним тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, (A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_p$, для якого*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_1\|_E\leqslant 1,\ \ldots,\ \|x_p\|_E\leqslant 1} \left\|\sum_{k=1}^{p}(Q_{n,k} - A_{n,k})x_k\right\|_E < \frac{1}{\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}}. \tag{19}$$

Доведення. Нехай для деякого $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_p$ виконується нерівність (19). Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{1}{\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}} - \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_1\|_E\leqslant 1,\ \ldots,\ \|x_p\|_E\leqslant 1} \left\|\sum_{k=1}^{p}(Q_{n,k} - A_{n,k})x_k\right\|_E > \frac{H}{r}.$$

Тоді справджуватиметься нерівність (18), а отже, і нерівність (17). Тому за теоремою 5 оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ є слабко регулярним.

Навпаки, якщо оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ є слабко регулярним, то на підставі теореми 5 для кожного $H > 0$ існують $r > 0$ і $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_p$, для яких виконуватиметься нерівність (17), а отже, і нерівність (18). Із (18) випливає (19).

Наслідок 1 доведено.

Зазначимо, що наведені умови слабкої регулярності різницевих операторів є новими.

6.2. Малі на нескінченності збурення лінійних різницевих рівнянь. Наведемо ще одне твердження, яке можна отримати за допомогою теореми 1.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n + \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}x_{n-k} + f_n(x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}) = h_n, \tag{20}$$

де $\mathbf{A} = ((A_{n,1}, \ldots, A_{n,p}))_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, L(E,E))$, $f_n : E^p \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, — неперервні відображення, що задовольняють співвідношення (1), і $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Використаємо лінійний оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$, що визначається формулою (2).

Окремим випадком теореми 1 є наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай оператор $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ є слабко регулярним і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_i\|_E\leqslant r,\ i=\overline{1,p}}\|f_n(x_1,\ldots,x_p)\|_E}{r}<\frac{1}{\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}}. \tag{21}$$

Тоді рівняння (20) для кожної послідовності $\mathbf{h}=(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{M}$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{M}$.

Справді, завдяки умовам теореми для кожного числа $H>0$ існує таке число $r>0$, що виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x_i\|_E\leqslant r,\ i=\overline{1,p}}\|f_n(x_1,\ldots,x_p)\|_E\leqslant\frac{r}{\left\|\mathcal{R}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}}-H,$$

аналогічне нерівності (5). Тому на підставі теореми 1 справджується твердження теореми 6.

Наслідок 2. *Нехай $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$ — слабко регулярний оператор і $f_n:E^p\to E$, $n\in\mathbb{Z}$, — неперервні відображення, для яких*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ (x_1,\ldots,x_p)\in E^p}\|f_n(x_1,\ldots,x_p)\|_E<+\infty.$$

Тоді різницеве рівняння (20) для кожної послідовності $\mathbf{h}=(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{M}$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathfrak{M}$.

Зауваження 1. У теоремі 6 нерівність (21) не можна покращити навіть у випадку лінійного різницевого рівняння (20), що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Для різницевого рівняння

$$x_n+\frac{1}{2}x_{n-1}+\mu x_{n-1}=h_n, \tag{22}$$

де $\mu\in\mathbb{R}$, оператор $(\mathcal{R}\mathbf{x})_n=x_n+\dfrac{1}{2}x_{n-1}$ є регулярним, $\left\|\mathcal{R}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))}=2$ і співвідношення (21) має вигляд

$$|\mu|<\frac{1}{2}.$$

При $\mu=\dfrac{1}{2}$ рівняння (22) не для кожної обмеженої правої частини має обмежений розв'язок, оскільки оператор $(\mathcal{S}\mathbf{x})_n=x_n+x_{n-1}$ не є регулярним.

Зауваження 2. c-Неперервний оператор $F:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$, що визначається формулою

$$(F\mathbf{x})_n=f_n(x_{n-1},\ldots,x_{n-p}),\quad n\in\mathbb{Z},$$

де f_n — відображення, що й у рівнянні (20), може бути розривним у кожній точці простору $\mathfrak{M}$. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 2. Будемо вважати, що $p = 1$ і $E = \mathbb{R}$. c-Неперервний оператор $F : l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \to \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, визначимо співвідношенням

$$(F\mathbf{x})_n = \omega_{n-1}\left(\{(n-1)x_{n-1}\}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\{(n-1)x_{n-1}\}$ — дробова частина числа $(n-1)x_{n-1}$ і $\omega_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — періодична функція з періодом 1, що на проміжку $(0, 1]$ подається рівністю

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < t \leqslant \dfrac{|n|+1}{|n|+2}, \\ 1 - (|n|+2)\left(t - \dfrac{|n|+1}{|n|+2}\right), & \text{якщо } \dfrac{|n|+1}{|n|+2} < t \leqslant 1. \end{cases} \tag{23}$$

Очевидно, що для кожного $n \in \mathbb{Z}$ функція $\omega_n(\{nx\})$ неперервна на $\mathbb{R}$. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Кожному дійсному числу δ поставимо у відповідність елемент $\mathbf{z}_\delta = (z_n + \delta)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Використовуючи (23) та рівність

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \|F\mathbf{z}_\delta - F\mathbf{z}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\omega_n(\{nz_n + n\delta\}) - \omega_n(\{nz_n\})|,$$

отримуємо

$$\frac{1}{2} \leqslant \overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \|F\mathbf{z}_\delta - F\mathbf{z}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})} \leqslant 1.$$

Звідси випливає, що оператор F не є неперервним у точці $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Завдяки довільності вибору $\mathbf{z}$ цей оператор є розривним у всіх точках простору $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 311 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев.: Наук. думка, 1972. — 246 с.
3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.
5. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах // Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2008. — **72**. — 496 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. — Рівне: Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2006. — 233 с.
7. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 660 – 662.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Теорема про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів у просторах обмежених на зліченній групі функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2008. — Вип. 421. — С. 105 – 108.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2009. — Вип. 454. — С. 88 – 94.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 109 – 115.

11. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1541 – 1556.

12. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2010. — **201**, № 8. — С. 103 – 126.

13. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь. — Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2011. — 342 с.

14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

15. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

16. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 109 – 115.

17. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 2. — С. 210 – 215.

18. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.

19. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443 – 460.

20. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116** (158), № 4 (12). — С. 483 – 501.

21. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 34 – 37.

22. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130** (172), № 1 (5). — С. 86 – 104.

23. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.

24. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 2. — С. 201 – 205.

25. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 233 с.

Одержано 16.06.11