УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of solutions of the differential-functional equation $x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt)$.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння $x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt)$.

В данной работе рассматривается уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, его частные случаи исследовались многими математиками. Так, в [1] изучены асимптотические свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, в [2] найдены новые свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x)$, в [3] установлены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $|c| > 1$, в [5] получен ряд результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] исследовано поведение решений уравнения (1) в окрестности точки $t = 0$, в [7] доказано существование решений уравнения $x'(t) = F(x(2t))$ с периодическим модулем. Несмотря на это и на широкие приложения, которые находят такие уравнения в различных областях науки и техники (см. [8] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функционального уравнения (1) изучены мало. Это прежде всего касается асимптотических свойств решений этого уравнения в окрестности особой точки $t = +\infty$.

С помощью методов, примененных Т. Като и Дж. Б. МкЛеодом в статье [1], а также использовав [9], докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть:*
1) $a < 0, bc \neq 0$, *величина* v_1 *определяется из равенства* $a + bq^{v_1} = 0$;
2) параметры $\{m, j\} \subset N \bigcup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$q^{-\mathrm{Re}\, v_1 + m}\left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right|\right) < 1, \quad \left(\left|c^{-1}\right| + 2\left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right|\right) q^{-\mathrm{Re}\, v_1 + m} < 1$$

и

$$\left(\left|\frac{c}{q}\right| + \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{q}\right|\right) q^{\mathrm{Re}\, v_1 + j} < 1.$$

Тогда в случае $bc < 0$ *справедливы утверждения:*

1) для произвольной $m+1$ раз непрерывно дифференцируемой периодической функции $f_0(u)$ с периодом 1 существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1)

$$x(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t), \quad t > 0,$$

где $f_p(u), 1 \le p \le m,$ — периодические функции с периодом 1, определяемые рекуррентной формулой

$$f_{p+1}(u) = \frac{\left(bq^{p+1}+ac\right)}{ba\left(q^{p+1}-1\right)}\left((v_1-p)f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_p'(u)\right), \quad 0 \le p \le m-1;$$

$$z_1(t) = \left(bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right)e^{-bc^{-1}t}\int_t^{+\infty}\left[u^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]e^{bc^{-1}u}\,du,$$

$$z_{n+1}(t) = c^{-1}qz_n\left(q^{-1}t\right) + \left(ac^{-1}+qbc^{-2}\right)e^{-bc^{-1}t}\int_t^{+\infty} z_n\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}\,du, \quad n = 1,2,3,\ldots;$$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ непрерывно дифференцируем и имеет асимптотическое свойство $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) = O\left(t^{v_1-m-1}\right), t \to +\infty$;

2) каждое $m+j+3$ раза непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ уравнения (1) тождественно равно решению из предыдущего пункта, построенному на основе некоторой $m+1$ раз непрерывно дифференцируемой периодической функции $f_0(u)$ с периодом 1;

в случае $bc > 0$ имеют место утверждения:

1) для произвольной $m+1$ раз непрерывно дифференцируемой периодической функции $f_0(u)$ с периодом 1 существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1)

$$x(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) + \gamma\, x_*(t),$$

$$t \ge \rho > 0,$$

где ρ — достаточно большая и не зависящая от функции $f_0(u)$ постоянная; $f_p(u), 1 \le$ $\le p \le m,$ — периодические функции с периодом 1, определяемые рекуррентной формулой

$$f_{p+1}(u) = \frac{\left(bq^{p+1}+ac\right)}{ba\left(q^{p+1}-1\right)}\left((v_1-p)f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_p'(u)\right), \quad 0 \le p \le m-1;$$

$$z_1(t) = \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\left[e^{-bc^{-1}(t-\rho)}t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) - \right.$$

$$\left. -bc^{-1}\int_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}\left\{u^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\}du\right],$$

$$z_{n+1}(t) = c^{-1}qz_n\left(q^{-1}t\right) - \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right)\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)}z_n\left(q^{-1}u\right)\,du, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ непрерывно дифференцируем и имеет асимптотическое свойство $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t) = O\left(t^{v_1-m-1}\right)$, $t \to +\infty$; функция $x_*(t)$ является частным решением уравнения (1) и определяется формулой $x_*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-\frac{b}{c}q^{-k}t}$, где $x_k = \dfrac{ac + bq^{-k+1}}{bc(q^{-k} - 1)}\,x_{k-1}$, $k \geq 1$, $x_0 = 1$; γ — произвольная постоянная;

2) каждое $m + j + 3$ раза непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ уравнения (1) тождественно равно решению из предыдущего пункта, построенному на основе некоторой $m + 1$ раз непрерывно дифференцируемой периодической функции $f_0(u)$ с периодом 1 и с некоторой постоянной γ.

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$x'(t) = -bc^{-1}x(t) - ac^{-1}x\left(q^{-1}t\right) + c^{-1}x'\left(q^{-1}t\right).$$

Рассмотрим случай, когда $-bc^{-1} > 0$.

Предположим сначала, что непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) имеет асимптотическое свойство $x(t) = o\left(t^{v_1-m}\right)$, $t \to +\infty$, и определим для краткости параметр $v \overset{\mathrm{df}}{=} v_1 - m$. Чтобы исследовать такие решения, запишем последнее уравнение в интегральной форме. Для этого проинтегрируем вытекающее из него тождество

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{bc^{-1}t}\right) = -ac^{-1}x\left(q^{-1}t\right)e^{bc^{-1}t} + c^{-1}x'\left(q^{-1}t\right)e^{bc^{-1}t}$$

на бесконечном отрезке $[t, +\infty)$. Это можно сделать, так как $x(t) = o\left(t^{v}\right)$, $t \to +\infty$:

$$x(t) = c^{-1}qx\left(q^{-1}t\right) + \left(ac^{-1} + qbc^{-2}\right)e^{-bc^{-1}t}\int\limits_{t}^{+\infty} x\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}du. \qquad (2)$$

Определим функцию

$$K(R) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{t \geq R} t^{-\operatorname{Re} v}|x(t)|,$$

согласно предположению $K(R)$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. Использовав интегральное уравнение (2), оценим с помощью этой функции решение при $t \geq R \geq 1$:

$$|x(t)| \leq \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|aq^{-v}c^{-1} + bq^{-v+1}c^{-2}\right| e^{-bc^{-1}t}K\left(q^{-1}R\right)\int\limits_{t}^{+\infty} u^{\operatorname{Re} v}e^{bc^{-1}u}\,du. \qquad (3)$$

Чтобы продолжить неравенство, исследуем интеграл $\displaystyle\int_{t}^{+\infty} u^{\alpha}e^{-\beta u}\,du$, $\alpha \in R$, $\beta > 0$, на отрезке $t \geq 1$ с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_t^{+\infty} u^{\alpha} e^{-\beta u}\, du = \frac{1}{\beta}\, t^{\alpha} e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta^2}\, t^{\alpha-1} e^{-\beta t} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^3}\, t^{\alpha-2} e^{-\beta t} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{\beta^{n+1}}\, t^{\alpha-n} e^{-\beta t} + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{\beta^{n+1}} \int\limits_t^{+\infty} u^{\alpha-n-1} e^{-\beta u}\, du, \;\; n \geq 0.$$

Если $\alpha > 0$, $\alpha - n \geq 0$ и $\alpha - n - 1 < 0$, то

$$\int\limits_t^{+\infty} u^{\alpha-n-1} e^{-\beta u}\, du \leq t^{\alpha-n-1} \int\limits_t^{+\infty} e^{-\beta u}\, du = t^{\alpha-n-1} \frac{e^{-\beta t}}{\beta}$$

и

$$\int\limits_t^{+\infty} u^{\alpha} e^{-\beta u}\, du \leq \frac{1}{\beta}\, t^{\alpha} e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta^2}\, t^{\alpha-1} e^{-\beta t} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^3}\, t^{\alpha-2} e^{-\beta t} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{\beta^{n+1}}\, t^{\alpha-n} e^{-\beta t} + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{\beta^{n+1}}\, t^{\alpha-n-1} \frac{e^{-\beta t}}{\beta} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\left[1 + t^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^2}\, t^{-1} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{\beta^n}\, t^{-n+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \;\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{\beta^{n+1}} t^{-n}\right)\right] t^{\alpha} e^{-\beta t} \leq \frac{1}{\beta}\left[1 + \frac{M}{t}\right] t^{\alpha} e^{-\beta t}, \;\; t \geq 1,$$

где $M = M(\alpha, \beta) \geq 0$ — некоторая постоянная. Итак,

$$\int\limits_t^{+\infty} u^{\alpha} e^{-\beta u}\, du \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\alpha} e^{-\beta t}, \quad t \geq 1. \tag{4}$$

При $\alpha \leq 0$ эта оценка, очевидно, тоже справедлива. Таким образом, последнее неравенство выполняется для всех параметров $\alpha \in R$, $\beta > 0$ с постоянной M, зависящей от величин α, β.

Продолжим теперь оценку (3) с помощью неравенства (4):

$$|x(t)| \leq \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|aq^{-v}c^{-1} + bq^{-v+1}c^{-2}\right| K\left(q^{-1}R\right) \frac{1}{|bc^{-1}|}\left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\operatorname{Re} v}.$$

Отсюда получаем

$$|x(t)|t^{-\operatorname{Re} v} \leq \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}t\right)\right| \left(q^{-1}t\right)^{-\operatorname{Re} v} q^{-\operatorname{Re} v} +$$

$$+ \left|aq^{-v}c^{-1} + bq^{-v+1}c^{-2}\right| K\left(q^{-1}R\right) \frac{1}{|bc^{-1}|}\left(1+\frac{M}{t}\right) \leq$$

$$\leq \left|c^{-1}\right| qK\left(q^{-1}R\right) q^{-\operatorname{Re} v} + \left|aq^{-v}c^{-1} + bq^{-v+1}c^{-2}\right| K\left(q^{-1}R\right) \frac{1}{|bc^{-1}|}\left(1+\frac{M}{R}\right) =$$

$$= \left(q^{-\operatorname{Re} v}\left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) + \frac{\left|\frac{aq^{-v}}{b} + q^{-v+1}c^{-1}\right| M}{R}\right) K\left(q^{-1}R\right).$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$K(R) \leq \left(q^{-\operatorname{Re} v}\left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) + \frac{\left|\frac{aq^{-v}}{b} + q^{-v+1}c^{-1}\right| M}{R}\right) K\left(q^{-1}R\right).$$

Учитывая первое неравенство второго условия теоремы, последнюю оценку можно продолжить:

$$K(R) \leq \left(1 + \frac{\left|\frac{aq^{-v}}{b} + q^{-v+1}c^{-1}\right| M}{R}\right) K\left(q^{-1}R\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(1+\frac{M_1}{R}\right) K\left(q^{-1}R\right).$$

Применяя это неравенство несколько раз, получаем

$$K(R) \leq K\left(q^{-n}R\right) \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{M_1}{q^{-k}R}\right), \quad n \geq 1.$$

Поскольку произведение $\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\dfrac{M_1}{q^{-k}R}\right)$ сходится и $K\left(q^{-n}R\right) \to 0$, $n \to +\infty$, устремляя $n \to +\infty$ в последнем неравенстве, получаем $K(R) = 0$, т. е. $x(t) \equiv 0$.

Итак, непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), имеющее свойство $x(t) = o\left(t^{v_1 - m}\right)$, $t \to +\infty$, тождественно равно нулю.

Чтобы построить решение из первого пункта утверждения теоремы, выполним в уравнении (1) замену переменных

$$x(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots + t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z(t), \quad t \geq 1, \tag{5}$$

где $f_p(u)$, $0 \leq p \leq m$, — непрерывные периодические функции с периодом 1 такие, что $f_0(u) \in C^{m+1}(-\infty, +\infty)$ и

$$f_{p+1}(u) = \frac{\left(bq^{p+1}+ac\right)}{ba\left(q^{p+1}-1\right)}\left(\left(v_1 - p\right) f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_p'(u)\right), \quad 0 \leq p \leq m-1.$$

Для новой искомой функции $z(t)$ получаем равенство

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)e^{bc^{-1}t}\right) = -ac^{-1}z\left(q^{-1}t\right)e^{bc^{-1}t} + c^{-1}z'\left(q^{-1}t\right)e^{bc^{-1}t} +$$

$$+\left(c^{-1}q^{-v_1+m+1}-1\right)\frac{d}{dt}\left(t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right)e^{bc^{-1}t}. \qquad (6)$$

Предположим, что функция $z(t)$ помимо непрерывной дифференцируемости имеет свойство $z(t) = O\left(t^{\eta}\right), t \to +\infty, \eta \in R$. Тогда полученное уравнение (6) можно проинтегрировать на бесконечном отрезке $[t, +\infty)$:

$$z(t) = z_1(t) + c^{-1}qz\left(q^{-1}t\right) + \left(ac^{-1} + qbc^{-2}\right)e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty} z\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}\,du, \qquad (7)$$

где

$$z_1(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right)e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}\left[u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]e^{bc^{-1}u}\,du.$$

Оценим функцию $z_1(t)$. Для этого распишем разность

$$u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) =$$

$$= \left(u^{v_1-m} - t^{v_1-m}\right)f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + u^{v_1-m}\left[f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]. \qquad (8)$$

Оценим с помощью интегрирования по частям вклад в $z_1(t)$ первого слагаемого последней суммы

$$\left(bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right)e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}\left(u^{v_1-m} - t^{v_1-m}\right)f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)e^{bc^{-1}u}du =$$

$$= -(v_1 - m)\left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\int\limits_t^{+\infty} u^{v_1-m-1}e^{bc^{-1}(u-t)}\,du.$$

Из неравенства (4) для последней формулы получаем оценку

$$\left|(v_1 - m)\left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\int\limits_t^{+\infty} u^{v_1-m-1}e^{bc^{-1}(u-t)}\,du\right| \le L_1 t^{\mathrm{Re}\,v_1-m-1}, \quad t \ge 1,$$

где L_1 — некоторая постоянная.

Учитывая непрерывную дифференцируемость периодической функции $f_m(u)$, оценим вклад в функцию $z_1(t)$ второго слагаемого из правой части равенства (8):

$$\left|\left(bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right) e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} u^{v_1-m} \left[f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right] e^{bc^{-1}u} du\right| \le$$

$$\le \left|bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right| e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} u^{\operatorname{Re} v_1-m} L_2 \left|\frac{\ln u}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right| e^{bc^{-1}u}\, du =$$

$$= \left|bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right| \frac{L_2}{\ln q^{-1}}\, e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} u^{\operatorname{Re} v_1-m} \ln\left(1 + \frac{u-t}{t}\right) e^{bc^{-1}u}\, du \le$$

$$\le \left|bc^{-2}q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right| \frac{L_2}{\ln q^{-1}} e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} u^{\operatorname{Re} v_1-m} \frac{u-t}{t}\, e^{bc^{-1}u}\, du,$$

где L_2 — некоторая постоянная. Интегрируя по частям, записываем последнее выражение следующим образом:

$$-\left|c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right| \frac{L_2}{\ln q^{-1}}\, e^{-bc^{-1}t}\, \frac{1}{t} \times$$

$$\times \int\limits_t^{+\infty} \left((\operatorname{Re} v_1 - m + 1)\, u^{\operatorname{Re} v_1-m} - t\,(\operatorname{Re} v_1 - m)\, u^{\operatorname{Re} v_1-m-1}\right) e^{bc^{-1}u}\, du.$$

Из неравенства (4) следует, что данная функция ограничена сверху функцией $L_3 t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}$ при всех $t \ge 1$, где L_3 — некоторая постоянная.

На основании изложенного заключаем, что для функции $z_1(t)$ справедлива оценка

$$|z_1(t)| \le L_4 t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}, \quad t \ge 1,$$

где L_4 — некоторая постоянная.

Построим решение уравнения (7) в виде ряда $z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$, где

$$z_{n+1}(t) = c^{-1}qz_n\left(q^{-1}t\right) + \left(ac^{-1} + qbc^{-2}\right) e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} z_n\left(q^{-1}u\right) e^{bc^{-1}u}\, du, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{9}$$

Для этого докажем методом математической индукции оценку

$$|z_n(t)| \le L_4 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{q^{-1}M}{(q^{-1}-1)\,t}}, \quad t \ge 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

При $n = 1$ это неравенство, очевидно, выполняется. Предположим, что оно выполняется для некоторого $n \ge 1$, и оценим $z_{n+1}(t)$, исходя из его определения (9) и учитывая неравенство (4):

$$
\begin{aligned}
|z_{n+1}(t)| \le {} & \left|c^{-1}\right| q \left|z_n\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} \left|z_n\left(q^{-1}u\right)\right| e^{bc^{-1}u}\, du \le \\
& \le \left|c^{-1}\right| q L_4 q^{n-1} q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} t^{\operatorname{Re} v_1 - m-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}} + \\
& \quad + \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} L_4 q^{n-1} q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} u^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,u}} e^{bc^{-1}u}\, du \le \\
& \le \left|c^{-1}\right| q q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_4 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}} + \\
& \quad + \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_4 q^{n-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}} e^{-bc^{-1}t} \int\limits_t^{+\infty} u^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{bc^{-1}u}\, du \le \\
& \le \left|c^{-1}\right| q q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_4 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}} + \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} \times \\
& \times L_4 q^{n-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}}\, e^{-bc^{-1}t} \frac{1}{|bc^{-1}|} \left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{bc^{-1}t} \le \\
& \le \left|\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_4 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}} + \\
& \quad + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_4 q^{n-1} e^{\frac{q^{-1}M}{(q^{-1}-1)\,t}} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} \le \\
& \le \left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_4 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{q^{-1}M}{(q^{-1}-1)\,t}}.
\end{aligned}
$$

С учетом первого неравенства второго условия теоремы оценку $z_{n+1}(t)$ можно продолжить:

$$
|z_{n+1}(t)| \le L_4 q^n t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{q^{-1}M}{(q^{-1}-1)\,t}}, \quad t \ge 1.
$$

Таким образом, неравенство (10) доказано.

Из теоремы о почленном интегрировании функционального ряда на бесконечном отрезке [10, с. 727] и неравенства (10) следует, что ряд $z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ является непрерывным решением уравнения (7).

Продифференцируем функцию $z_1(t)$:

$$
z_1'(t) = -\left(bc^{-2} q^{-v_1+m+1} - bc^{-1}\right) bc^{-1} e^{-bc^{-1}t} \times
$$

$$\times \int\limits_t^{+\infty} e^{bc^{-1}u}\left[u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right)-t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]du+$$

$$+\left(\frac{q^{-v_1+m+1}}{c}-1\right)\left[(v_1-m)t^{v_1-m-1}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+\frac{t^{v_1-m-1}}{\ln q^{-1}}f'_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right].$$

Для производной $z'_1(t)$ с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше для первообразной $z_1(t)$, получаем оценку

$$\left|z'_1(t)\right| \le L_5 t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}, \quad t\ge 1,$$

где L_5 — некоторая постоянная. Из непрерывной дифференцируемости функции $z_1(t)$ и рекуррентной формулы (9) следует непрерывная дифференцируемость всех функций $z_n(t), n\ge 1$. Определим коэффициент $L_6 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\{L_4, L_5\}$ и докажем методом математической индукции неравенство

$$\left|z'_n(t)\right| \le L_6 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{q^{-1}M}{(q^{-1}-1)\,t}}, \quad t\ge 1, \quad n=1,2,3,\ldots. \tag{11}$$

При $n=1$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется для некоторого $n\ge 1$, и оценим $z'_{n+1}(t)$, продифференцировав тождество (9) с учетом неравенств (4), (10):

$$z'_{n+1}(t) = c^{-1}z'_n\left(q^{-1}t\right)-\left(ac^{-1}+qbc^{-2}\right)bc^{-1}e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty} z_n\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}\,du-$$

$$-\left(ac^{-1}+qbc^{-2}\right)z_n\left(q^{-1}t\right), \quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$\left|z'_{n+1}(t)\right| \le \left|c^{-1}\right|\left|z'_n\left(q^{-1}t\right)\right|+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right|\left|bc^{-1}\right|e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}\left|z_n\left(q^{-1}u\right)\right|e^{bc^{-1}u}\,du+$$

$$+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right|\left|z_n\left(q^{-1}t\right)\right| \le \left|c^{-1}\right|L_6q^{n-1}q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}}+$$

$$+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right|\left|bc^{-1}\right|e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}L_6q^{n-1}q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}u^{\operatorname{Re} v_1-m-1}e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,u}}e^{bc^{-1}u}du+$$

$$+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right|L_6q^{n-1}q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}} \le$$

$$\le \left|c^{-1}\right|q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_6q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}}+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right|q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}\times$$

$$\times L_6q^{n-1}e^{\frac{M}{(q^{-1}-1)\,t}}\left|bc^{-1}\right|e^{-bc^{-1}t}\int\limits_t^{+\infty}u^{\operatorname{Re} v_1-m-1}e^{bc^{-1}u}\,du+$$

$$+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_6 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{\left(q^{-1}-1\right) t}} \leq$$

$$\leq\left|c^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_6 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{\left(q^{-1}-1\right) t}}+$$

$$+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_6 q^{n-1} e^{\frac{M}{\left(q^{-1}-1\right) t}}\left(1+\frac{M}{t}\right) t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}+$$

$$+\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_6 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{M}{\left(q^{-1}-1\right) t}} \leq$$

$$\leq\left(\left|c^{-1}\right|+2\left|ac^{-1}+qbc^{-2}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} L_6 q^{n-1} t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{q^{-1}}{M}\left(q^{-1}-1\right) t}.$$

Учитывая второе неравенство второго условия теоремы, оценку $z_{n+1}'(t)$ можно продолжить:

$$\left|z_{n+1}'(t)\right| \leq L_6 q^n t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} e^{\frac{q^{-1} M}{\left(q^{-1}-1\right) t}}, \quad t \geq 1.$$

Таким образом, неравенство (11) доказано.

Эта оценка позволяет утверждать абсолютную и равномерную на конечном отрезке сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n'(t)$, а следовательно, $z(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и справедливо равенство $z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n'(t)$. Дифференцируя уравнение (7), можно непосредственно убедиться, что сумма функций (5) является решением уравнения (1), где функция $z(t)$ согласно построению имеет свойство $z(t) = O(t^{v_1-m-1})$, $t \to +\infty$. Первый пункт теоремы доказан.

Из теоремы 5 второго параграфа [9] следует, что для $m+j+3$ раза непрерывно дифференцируемого решения $x(t)$ уравнения (1) имеет место представление

$$x(t)=t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+t^{v_1-2} f_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+t^{v_1-m+1} f_{m-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+t^{v_1-m-1} d_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \geq 1, \tag{12}$$

где $f_p(u)$, $0 \leq p \leq m$, — непрерывные периодические функции с периодом 1 такие, что $f_0(u) \in C^{m+1}(R)$ и $f_{p+1}(u) = \dfrac{\left(bq^{p+1}+ac\right)}{ba\left(q^{p+1}-1\right)}\left(\left(v_1-p\right) f_p(u)+\dfrac{1}{\ln q^{-1}} f_p'(u)\right)$, $0 \leq p \leq m-1$; $d_{m+1}(u)$ — непрерывно дифференцируемая ограниченная функция. Согласно изложенному выше методу для данной функции $f_0(u)$ строится непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1):

$$x_1(t)=t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+\ldots+t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+z(t), \quad t \geq 1,$$

где функция $z(t)$ является функциональным рядом и имеет свойство $z(t) = O\left(t^{v_1-m-1}\right)$, $t \to +\infty$. Разность двух решений $x(t)-x_1(t)$ линейного уравнения также является решением и имеет асимптотическое поведение

$$x(t)-x_1(t)=t^{v_1-m-1}\left[d_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)-t^{-v_1+m+1} z(t)\right]=o\left(t^{v_1-m}\right), \quad t \to +\infty.$$

Отсюда непосредственно следует тождество $x(t) \equiv x_1(t)$. Второй пункт теоремы доказан.

Рассмотрим случай $-bc^{-1} > 0$.

Сначала для действительных постоянных $\alpha, \beta > 0$ докажем неравенство

$$\int\limits_1^t u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du \le \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\alpha} e^{\beta\, t} \;\; \forall t \ge 1, \tag{13}$$

где $M = M(\alpha, \beta)$ — некоторая постоянная, необходимое нам в дальнейшем. Для этого продифференцируем функцию в правой части неравенства:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\alpha} e^{\beta\, t}\right) = \left[1 + \frac{M}{t} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta\, M} + (\alpha - 1)\frac{1}{\beta\, t}\right)\right] t^{\alpha} e^{\beta\, t}.$$

Если постоянная $M > 0$ достаточно велика, то сумма $1 + \dfrac{\alpha}{\beta\, M} > 0$, и, следовательно, при достаточно большом $t \ge T$ имеем $1 + \dfrac{\alpha}{\beta\, M} + (\alpha - 1)\dfrac{1}{\beta\, t} > 0$. Последнее неравенство означает, что

$$\frac{d}{dt} \left(\int\limits_T^t u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du\right) = t^{\alpha} e^{\beta\, t} < \left[1 + \frac{M}{t} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta\, M} + (\alpha - 1)\frac{1}{\beta\, t}\right)\right] t^{\alpha} e^{\beta\, t} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\alpha} e^{\beta\, t}\right), \quad t \ge T,$$

и

$$\left.\int\limits_T^t u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du\right|_{t=T} = 0 < \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M}{T}\right) T^{\alpha}\, e^{\beta\, T}.$$

Из двух последних неравенств следует оценка

$$\int\limits_T^t u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du < \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M}{t}\right) t^{\alpha} e^{\beta\, t}, \quad t \ge T.$$

Поскольку при достаточно большом M_0 выполняется неравенство

$$\int\limits_1^T u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du \le \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M_0}{t}\right) t^{\alpha} e^{\beta\, t}, \quad t \ge 1,$$

при $1 \le t \le T$ получаем

$$\int\limits_1^t u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du \le \int\limits_1^T u^{\alpha} e^{\beta\, u}\, du \le \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M_0 + M}{t}\right) t^{\alpha}\, e^{\beta\, t},$$

и, следовательно, при $t \geq T$ имеем

$$\int\limits_1^t u^\alpha e^{\beta u}\,du = \int\limits_1^T u^\alpha e^{\beta u}\,du + \int\limits_T^t u^\alpha e^{\beta u}\,du \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{M_0+M}{t}\right) t^\alpha e^{\beta t}.$$

Таким образом, имеет место оценка $\int_1^t u^\alpha e^{\beta u}\,du \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{M_0+M}{t}\right) t^\alpha e^{\beta t}$ для любого $t \geq 1$. Переходя к первоначальным обозначениям, получаем искомое неравенство (13).

Предположим теперь, что непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) имеет асимптотическое свойство $x(t) = o\left(t^{v_1 - m}\right)$, $t \to +\infty$, и определим для краткости параметр $v \overset{\mathrm{df}}{=} v_1 - m$. Чтобы исследовать такие решения, запишем уравнение

$$x'(t) = -bc^{-1}x(t) - ac^{-1}x\left(q^{-1}t\right) + c^{-1}x'\left(q^{-1}t\right)$$

с помощью формулы вариации произвольных постоянных в интегральной форме

$$x(t) = \left(x(\rho) - c^{-1}qx\left(q^{-1}\rho\right)\right)e^{-bc^{-1}(t-\rho)} +$$
$$+ c^{-1}qx\left(q^{-1}t\right) - \left(ac^{-1} + bc^{-2}q\right)\int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}x\left(q^{-1}u\right)\,du, \quad t \geq \rho \geq 1. \qquad (14)$$

Снова определим функцию $K(R) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{t \geq R}\left|t^{-v}x(t)\right|$. Согласно предположению $K(R)$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. С помощью этой функции, тождества (14) и неравенства (13) оценим решение при $t \geq \rho$:

$$|x(t)| \leq \left(|x(\rho)| + \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}\rho\right)\right|\right)e^{-bc^{-1}(t-\rho)} +$$
$$+ \left|c^{-1}\right| q\left|x\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right|\int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}\left|x\left(q^{-1}u\right)\right|\,du \leq$$
$$\leq \left(K(\rho)\rho^{\mathrm{Re}\,v} + \left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right)q^{-\mathrm{Re}\,v+1}\rho^{\mathrm{Re}\,v}\right)e^{-bc^{-1}(t-\rho)} + \left|c^{-1}\right| qK\left(q^{-1}t\right)q^{-\mathrm{Re}\,v}t^{\mathrm{Re}\,v} +$$
$$+ \left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right|\int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}K\left(q^{-1}u\right)q^{-\mathrm{Re}\,v}u^{\mathrm{Re}\,v}\,du \leq$$
$$\leq \left(K(\rho) + \left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right)q^{-\mathrm{Re}\,v+1}\right)\rho^{\mathrm{Re}\,v}e^{-bc^{-1}(t-\rho)} + \left|c^{-1}\right| q^{-\mathrm{Re}\,v+1}K\left(q^{-1}\rho\right)t^{\mathrm{Re}\,v} +$$
$$+ \left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right| q^{-\mathrm{Re}\,v}K\left(q^{-1}\rho\right)\int\limits_\rho^t e^{-bc^{-1}(t-u)}u^{\mathrm{Re}\,v}\,du \leq$$
$$\leq \left(K(\rho) + \left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right)q^{-\mathrm{Re}\,v+1}\right)\rho^{\mathrm{Re}\,v}e^{-bc^{-1}(t-\rho)} +$$

$$+\left|c^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v+1} K\left(q^{-1}\rho\right) t^{\operatorname{Re} v}+\left|ac^{-1}+bc^{-2}q\right| q^{-\operatorname{Re} v} K\left(q^{-1}\rho\right) \frac{1}{bc^{-1}}\left(1+\frac{M}{t}\right) t^{\operatorname{Re} v}=$$

$$=\left(K(\rho)+\left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) \rho^{\operatorname{Re} v} e^{-bc^{-1}(t-\rho)}+$$

$$+\left(\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v}+\frac{\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{t}\right) K\left(q^{-1}\rho\right) t^{\operatorname{Re} v}.$$

Отсюда получаем

$$|x(t)| t^{-\operatorname{Re} v} \leq\left(K(\rho)+\left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) \rho^{\operatorname{Re} v} t^{-\operatorname{Re} v} e^{-bc^{-1} t} e^{bc^{-1}\rho}+$$

$$+\left(\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v}+\frac{\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{t}\right) K\left(q^{-1}\rho\right).$$

С помощью соотношения $t^{-\operatorname{Re} v} e^{-bc^{-1} t} \leq L_7 e^{-b_1 t}$ $\forall t \geq 1$, где $b_1 < bc^{-1}$ и сколь угодно близко к bc^{-1}, а L_7 — некоторая постоянная, продолжим последнее неравенство:

$$|x(t)| t^{-\operatorname{Re} v} \leq\left(K(\rho)+\left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) \rho^{\operatorname{Re} v} L_7 e^{-b_1 t+bc^{-1}\rho}+$$

$$+\left(\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v}+\frac{\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{t}\right) K\left(q^{-1}\rho\right).$$

Предположим, что $t \geq \sigma \geq \rho$, тогда

$$|x(t)| t^{-\operatorname{Re} v} \leq\left(K(\rho)+\left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) \rho^{\operatorname{Re} v} L_7 e^{-b_1 \sigma+bc^{-1}\rho}+$$

$$+\left(\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v}+\frac{\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{\sigma}\right) K\left(q^{-1}\rho\right).$$

Переходя к максимуму по $t \geq \sigma$ в левой части, получаем

$$K(\sigma) \leq\left(K(\rho)+\left|c^{-1}\right| K\left(q^{-1}\rho\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) \rho^{\operatorname{Re} v} L_7 e^{-b_1 \sigma+bc^{-1}\rho}+$$

$$+\left(\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v}+\frac{\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{\sigma}\right) K\left(q^{-1}\rho\right).$$

Полагая $1 \leq \rho=\sigma q^{\frac{1}{2}} \leq \sigma$, получаем

$$K(\sigma) \leq\left(K\left(\sigma q^{\frac{1}{2}}\right)+\left|c^{-1}\right| K\left(\sigma q^{-\frac{1}{2}}\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) q^{\frac{1}{2}\operatorname{Re} v} \sigma^{\operatorname{Re} v} L_7 e^{-\left(b_1-bc^{-1} q^{\frac{1}{2}}\right)\sigma}+$$

$$+\left(\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v}+\frac{\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{\sigma}\right) K\left(\sigma q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \sigma \geq q^{-\frac{1}{2}}.$$

Выбирая b_1 достаточно близким к bc^{-1}, можем считать, что $-(b_1 - bc^{-1}q^{\frac{1}{2}}) = -2\varepsilon < 0$. Тогда первое слагаемое в правой части последнего неравенства можно оценить следующим образом:

$$\left(K\left(\sigma q^{\frac{1}{2}}\right) + \left|c^{-1}\right| K\left(\sigma q^{-\frac{1}{2}}\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) q^{\frac{1}{2}\operatorname{Re} v}\sigma^{\operatorname{Re} v} L_7 e^{-\left(b_1 - bc^{-1}q^{\frac{1}{2}}\right)\sigma} =$$

$$= \left(K\left(\sigma q^{\frac{1}{2}}\right) + \left|c^{-1}\right| K\left(\sigma q^{-\frac{1}{2}}\right) q^{-\operatorname{Re} v+1}\right) q^{\frac{1}{2}\operatorname{Re} v}\sigma^{\operatorname{Re} v} L_7 e^{-2\varepsilon\sigma} \le L_8 e^{-\varepsilon\sigma}, \quad \sigma \ge q^{-\frac{1}{2}},$$

где L_8 — некоторая постоянная. Тогда оценку $K(\sigma)$ можно продолжить:

$$K(\sigma) \le L_8 e^{-\varepsilon\sigma} + \left(\left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v} + \frac{\left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M}{\sigma}\right) K\left(\sigma q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \sigma \ge q^{-\frac{1}{2}}.$$

В силу второго условия теоремы из последней оценки получаем

$$K(\sigma) \le L_8 e^{-\varepsilon\sigma} + \left(1 + \frac{M_1}{\sigma}\right) K\left(\sigma q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \sigma \ge q^{-\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

где $M_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| q^{-\operatorname{Re} v} M$.

Докажем методом математической индукции неравенство

$$K(\sigma) \le \exp\left\{\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}} - 1}\,\frac{M_1}{\sigma}\right\}\left[L_8 \sum_{n=0}^{l-1} e^{-\varepsilon\, q^{-\frac{n}{2}}\sigma} + K\left(q^{-\frac{l}{2}}\sigma\right)\right], \quad \sigma \ge q^{-\frac{1}{2}}, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Из оценки (15) следует выполнение данного неравенства при $l = 1$. Предположим, что неравенство (16) выполняется для некоторого $l \ge 1$, и заменим в нем аргумент σ на произведение $q^{-\frac{1}{2}}\sigma$:

$$K\left(q^{-\frac{1}{2}}\sigma\right) \le \exp\left\{\frac{1}{q^{-\frac{1}{2}} - 1}\,\frac{M_1}{\sigma}\right\}\left[L_8 \sum_{n=1}^{l} e^{-\varepsilon\, q^{-\frac{n}{2}}\sigma} + K\left(q^{-\frac{l+1}{2}}\sigma\right)\right].$$

С помощью этого неравенства продолжим оценку (15):

$$K(\sigma) \le L_8 e^{-\varepsilon\sigma} + \left(1 + \frac{M_1}{\sigma}\right) K\left(q^{-\frac{1}{2}}\sigma\right) \le$$

$$\le L_8 e^{-\varepsilon\sigma} + \left(1 + \frac{M_1}{\sigma}\right) \exp\left\{\frac{1}{q^{-\frac{1}{2}} - 1}\,\frac{M_1}{\sigma}\right\}\left[L_8 \sum_{n=1}^{l} e^{-\varepsilon\, q^{-\frac{n}{2}}\sigma} + K\left(q^{-\frac{l+1}{2}}\sigma\right)\right] \le$$

$$\le L_8 e^{-\varepsilon\sigma} + \exp\left\{\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}} - 1}\,\frac{M_1}{\sigma}\right\}\left[L_8 \sum_{n=1}^{l} e^{-\varepsilon\, q^{-\frac{n}{2}}\sigma} + K\left(q^{-\frac{l+1}{2}}\sigma\right)\right] \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}} - 1}\,\frac{M_1}{\sigma}\right\}\left[L_8 \sum_{n=0}^{l} e^{-\varepsilon\, q^{-\frac{n}{2}}\sigma} + K\left(q^{-\frac{l+1}{2}}\sigma\right)\right].$$

Неравенство (16) доказано.

Устремляя в (16) $l \to +\infty$ и учитывая, что $K(R) \to 0$ при $R \to +\infty$, в пределе находим

$$K(\sigma) \leq \exp\left\{\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}}-1}\,\frac{M_1}{\sigma}\right\} L_8 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\varepsilon\, q^{-\frac{n}{2}}\sigma}, \quad \sigma \geq q^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, $K(\sigma) = O\left(e^{-\varepsilon\sigma}\right)$, $\sigma \to +\infty$.

Отсюда получаем, что $x(t) = O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\right)$, $t \to +\infty$. Для простоты обозначений запишем $x(t) = O\left(e^{-\varepsilon\, t}\right)$, $t \to +\infty$.

Подставим полученную оценку в интегральное уравнение (14):

$$\begin{aligned}|x(t)| \leq & \left(|x(\rho)| + \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}\rho\right)\right|\right) e^{-bc^{-1}(t-\rho)} + \\ & + \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right| \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} \left|x\left(q^{-1}u\right)\right| du \leq \\ \leq & \left(|x(\rho)| + \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}\rho\right)\right|\right) e^{-bc^{-1}(t-\rho)} + \\ & + \left|c^{-1}\right| q L_9 e^{-\varepsilon\, q^{-1}t} + \left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right| \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} L_9 e^{-\varepsilon\, q^{-1}u}\, du = \\ = & \left(|x(\rho)| + \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}\rho\right)\right|\right) e^{-bc^{-1}t} e^{bc^{-1}\rho} + \\ & + \left|c^{-1}\right| q L_9 e^{-\varepsilon\, q^{-1}t} + \left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right| L_9 e^{-\varepsilon\, q^{-1}t} \frac{1 - e^{-\left(bc^{-1} - \varepsilon\, q^{-1}\right)(t-\rho)}}{bc^{-1} - \varepsilon\, q^{-1}},\end{aligned}$$

где L_9 — некоторая постоянная. Предполагая, что $bc^{-1} > \varepsilon\, q^{-1}$, последнее неравенство можно продолжить:

$$|x(t)| \leq \left[\left(|x(\rho)| + \left|c^{-1}\right| q \left|x\left(q^{-1}\rho\right)\right|\right) e^{bc^{-1}\rho} + \left|c^{-1}\right| q L_9 + \frac{\left|ac^{-1} + bc^{-2}q\right| L_9}{bc^{-1} - \varepsilon\, q^{-1}}\right] e^{-\varepsilon\, q^{-1}t}.$$

Таким образом, из неравенства $|x(t)| \leq L_9 e^{-\varepsilon\, t}$ и предположения $bc^{-1} > \varepsilon\, q^{-1}$ следует оценка $|x(t)| \leq L_{10} e^{-\varepsilon\, q^{-1}t}$, где L_{10} — некоторая постоянная. Повторяя эти рассуждения конечное число раз, убеждаемся, что из условия $bc^{-1} > \varepsilon\, q^{-n}$ следует неравенство $|x(t)| \leq$ $\leq L_{11} e^{-\varepsilon\, q^{-n}\, t}$, $t \geq \rho$, где L_{11} — некоторая постоянная. Выберем ε и n так, что $\varepsilon\, q^{-n} <$ $< bc^{-1}$, в то время как $\varepsilon\, q^{-(n+1)} > bc^{-1}$.

Итак, выполняются неравенства

$$\varepsilon\, q^{-n} < bc^{-1}, \quad |x(t)| \leq L_{11} e^{-\varepsilon\, q^{-n}\, t}, \quad t \geq \rho, \quad \varepsilon\, q^{-(n+1)} > bc^{-1}. \tag{17}$$

Проинтегрируем тождество

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) e^{bc^{-1}t}\right) = -ac^{-1} x\left(q^{-1}t\right) e^{bc^{-1}t} + c^{-1} x'\left(q^{-1}t\right) e^{bc^{-1}t}$$

на конечном отрезке $[1,T]$:

$$x(T)e^{bc^{-1}T} = \left[x(1) - c^{-1}qx\left(q^{-1}\right)\right]e^{bc^{-1}} + c^{-1}qe^{bc^{-1}T}x\left(q^{-1}T\right) -$$

$$- \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right)\int\limits_1^T e^{bc^{-1}u}x\left(q^{-1}u\right)\,du.$$

С учетом неравенства (17) оценим подынтегральное выражение:

$$\left|e^{bc^{-1}u}x\left(q^{-1}u\right)\right| \le e^{bc^{-1}u}L_{11}e^{-\varepsilon\, q^{-n}\, q^{-1}u} =$$

$$= L_{11}e^{bc^{-1}u}e^{-\varepsilon\, q^{-(n+1)}u} = L_{11}e^{-\left(\varepsilon\, q^{-(n+1)} - bc^{-1}\right)u}.$$

Поскольку $\varepsilon\, q^{-(n+1)} - bc^{-1} > 0$, функция от T в правой части последнего равенства имеет предел при $T \to +\infty$:

$$\lim_{T\to+\infty}\left(x(T)e^{bc^{-1}T}\right) = \left[x(1) - c^{-1}qx\left(q^{-1}\right)\right]e^{bc^{-1}} -$$

$$- \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right)\int\limits_1^{+\infty} e^{bc^{-1}u}x\left(q^{-1}u\right)\,du \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma.$$

Обозначим $z(t) \overset{\mathrm{df}}{=} x(t) - \gamma\, x_*(t)$. Функция $z(t)$ является решением уравнения (1) и имеет свойство $z(t) = o\left(e^{-bc^{-1}t}\right)$, $t \to +\infty$. Интегрируя на отрезке $[t,T]$ тождество

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)e^{bc^{-1}t}\right) = -ac^{-1}z\left(q^{-1}t\right)\,e^{bc^{-1}t} + c^{-1}z'\left(q^{-1}t\right)\,e^{bc^{-1}t},$$

имеем

$$z(T)e^{bc^{-1}T} - c^{-1}qe^{-bc^{-1}(q^{-1}-1)T}e^{bc^{-1}q^{-1}T}z\left(q^{-1}T\right) - z(t)e^{bc^{-1}t} =$$

$$= -c^{-1}qe^{bc^{-1}t}z\left(q^{-1}t\right) - \left(ac^{-1} + qbc^{-2}\right)\int\limits_t^T z\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}\,du.$$

Устремляя $T \to +\infty$ в последнем выражении, получаем равенство

$$z(t)e^{bc^{-1}t} = c^{-1}qe^{bc^{-1}t}z\left(q^{-1}t\right) + \left(ac^{-1} + qbc^{-2}\right)\int\limits_t^{+\infty} z\left(q^{-1}u\right)e^{bc^{-1}u}\,du.$$

Определим функцию $K_1(R) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\limits_{t\geq R}\left(e^{bc^{-1}t}\,|z(t)|\right)$ и заметим, что $K_1(R)$ стремится к нулю при $R \to +\infty$. Из последнего равенства для $t \geq R$ получаем оценку

$$|z(t)|e^{bc^{-1}t} \leq \left|c^{-1}\right| q e^{bc^{-1}t}\left|z\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| \int\limits_t^{+\infty} \left|z\left(q^{-1}u\right)\right| e^{bc^{-1}u}\,du =$$

$$= \left|c^{-1}\right| q e^{-bc^{-1}\left(q^{-1}-1\right)t} e^{bc^{-1}q^{-1}t}\left|z\left(q^{-1}t\right)\right| +$$

$$+ \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| \int\limits_t^{+\infty} \left|z\left(q^{-1}u\right)\right| e^{bc^{-1}q^{-1}u} e^{-bc^{-1}\left(q^{-1}-1\right)u}\,du \leq$$

$$\leq \left|c^{-1}\right| q e^{-bc^{-1}\left(q^{-1}-1\right)R} K_1\left(q^{-1}R\right) +$$

$$+ \left|ac^{-1} + qbc^{-2}\right| K_1\left(q^{-1}R\right) \int\limits_R^{+\infty} e^{-bc^{-1}\left(q^{-1}-1\right)u}\,du =$$

$$= \left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| \frac{1}{\left(q^{-1}-1\right)}\right) e^{-bc^{-1}\left(q^{-1}-1\right)R} K_1\left(q^{-1}R\right).$$

Переходя к максимуму по $t \geq R$ в левой части неравенства, находим

$$K_1(R) \leq \left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| \frac{1}{\left(q^{-1}-1\right)}\right) e^{bc^{-1}R - bc^{-1}q^{-1}R} K_1\left(q^{-1}R\right).$$

Отсюда следует неравенство

$$K_1(R) \leq \left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| \frac{1}{\left(q^{-1}-1\right)}\right)^n e^{bc^{-1}R - bc^{-1}q^{-n}R} K_1\left(q^{-n}R\right), \quad n \geq 1.$$

Устремляя в нем $n \to +\infty$, получаем $K_1(R) = 0$, т. е. $z(t) \equiv 0$ или $x(t) = \gamma\, x_*(t)$.

Итак, непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), имеющее свойство $x(t) = o\left(t^{v_1-m}\right)$, $t \to +\infty$, тождественно равно произведению $\gamma\, x_*(t)$ с некоторой постоянной γ.

Чтобы построить решение из первого пункта теоремы, снова выполним в уравнении (1) замену переменных (5):

$$z'(t) = -bc^{-1}z(t) - ac^{-1}z\left(q^{-1}t\right) + c^{-1}z'\left(q^{-1}t\right) +$$

$$+ \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right) \frac{d}{dt}\left(t^{v_1-m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right).$$

Запишем это уравнение в интегральной форме с помощью формулы вариации произвольных постоянных:

$$z(t) = \left[z(\rho) - c^{-1}qz\left(q^{-1}\rho\right) - \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\rho^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln\rho}{\ln q^{-1}}\right)\right] e^{-bc^{-1}(t-\rho)} +$$

$$+ c^{-1}qz\left(q^{-1}t\right) - \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right)\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)}z\left(q^{-1}u\right)\,du +$$

$$+ \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\left[e^{-bc^{-1}(t-\rho)}t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) - \right.$$

$$\left. - bc^{-1}\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)}\left\{u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\}du\right].$$

Предположим, что

$$z(\rho) - c^{-1}qz\left(q^{-1}\rho\right) - \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\rho^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln\rho}{\ln q^{-1}}\right) = 0,$$

и решим уравнение

$$z(t) = z_1(t) + c^{-1}qz\left(q^{-1}t\right) - \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right)\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)}z\left(q^{-1}u\right)\,du, \quad t \geq \rho, \qquad (18)$$

где

$$z_1(t) \stackrel{\text{df}}{=} \left(c^{-1}q^{-v_1+m+1} - 1\right)\left[e^{-bc^{-1}(t-\rho)}t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) - \right.$$

$$\left. - bc^{-1}\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)}\left\{u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\}du\right].$$

Запишем подынтегральную разность в формуле $z_1(t)$ следующим образом:

$$u^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = \left(u^{v_1-m} - t^{v_1-m}\right)f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$+ u^{v_1-m}\left[f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right]. \qquad (19)$$

Оценим вклад в функцию $z_1(t)$ первого слагаемого из правой части последнего равенства. Для этого проинтегрируем по частям интеграл

$$\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} \left(u^{v_1-m} - t^{v_1-m}\right) f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) du =$$

$$= f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\left(\left(t^{v_1-m} - \rho^{v_1-m}\right)\left(\frac{e^{-bc^{-1}(t-\rho)}}{bc^{-1}}\right) - \frac{v_1-m}{bc^{-1}}\int\limits_{\rho}^{t} u^{v_1-m-1} e^{-bc^{-1}(t-u)}\, du\right).$$

Из неравенств (13), $-bc^{-1} < 0$ и последнего выражения следует оценка

$$\left|\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} \left(u^{v_1-m} - t^{v_1-m}\right) f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) du\right| \leq L_{12} t^{\mathrm{Re}\, v_1-m-1}, \quad t \geq \rho \geq 1,$$

где L_{12} — некоторая постоянная.

Теперь оценим вклад в функцию $z_1(t)$ второго слагаемого из правой части равенства (19), т. е. интеграл

$$\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} u^{v_1-m} \left\{f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\} du.$$

Поскольку функция $f_m(u)$ периодическая и непрерывно дифференцируемая, выполняется неравенство $|f_m(u) - f_m(s)| \leq L_{13}|u-s|$ для $\{u, s\} \subset R$ и некоторой постоянной L_{13}. Отсюда получаем

$$\left|\int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} u^{v_1-m} \left\{f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right\} du\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} u^{\mathrm{Re}\, v_1-m} L_{13}\left|\frac{\ln u}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right| du =$$

$$= \frac{L_{13}}{\ln q^{-1}} \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} u^{\mathrm{Re}\, v_1-m} \left|\ln\left(1 + \frac{t-u}{u}\right)\right| du \leq$$

$$\leq \frac{L_{13}}{\ln q^{-1}} \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} u^{\mathrm{Re}\, v_1-m} \frac{t-u}{u}\, du = \frac{L_{13}}{\ln q^{-1}} \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} u^{\mathrm{Re}\, v_1-m-1}(t-u)\, du.$$

Интегрируя по частям формулу в правой части этого неравенства, получаем выражение

$$\frac{L_{13}}{\ln q^{-1}}\left\{-\rho^{\operatorname{Re} v_1-m-1}(t-\rho)\frac{e^{-bc^{-1}(t-\rho)}}{bc^{-1}}-\frac{(\operatorname{Re} v_1-m-1)\,t}{bc^{-1}}\int\limits_{\rho}^{t}u^{\operatorname{Re} v_1-m-2}e^{-bc^{-1}(t-u)}\,du+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{Re} v_1-m}{bc^{-1}}\int\limits_{\rho}^{t}u^{\operatorname{Re} v_1-m-1}e^{-bc^{-1}(t-u)}\,du\right\}.$$

В силу неравенств (13) и $-bc^{-1}<0$ данная функция ограничена сверху произведением $L_{14}t^{v_1-m-1}$ на отрезке $t\geq\rho$, где L_{14} — некоторая постоянная.

Суммируя изложенное выше и учитывая неравенство $-bc^{-1}<0$, заключаем, что для функции $z_1(t)$ справедлива оценка

$$|z_1(t)|\leq L_{15}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1},\quad t\geq\rho,$$

где L_{15} — некоторая постоянная.

Определим функции

$$z_{n+1}(t)=c^{-1}qz_n\left(q^{-1}t\right)-\left(qbc^{-2}+ac^{-1}\right)\int\limits_{\rho}^{t}e^{-bc^{-1}(t-u)}z_n\left(q^{-1}u\right)\,du,\ \ n=1,2,3,\ldots,\tag{20}$$

и докажем методом математической индукции неравенство

$$|z_n(t)|\leq L_{15}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1},\quad n=1,2,3,\ldots.\tag{21}$$

При $n=1$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется для некоторого $n\geq1$, и оценим функцию $z_{n+1}(t)$, исходя из ее определения и учитывая неравенство (13):

$$|z_{n+1}(t)|\leq\left|c^{-1}\right|q\left|z_n\left(q^{-1}t\right)\right|+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|\int\limits_{\rho}^{t}e^{-bc^{-1}(t-u)}\left|z_n\left(q^{-1}u\right)\right|\,du\leq$$

$$\leq\left|c^{-1}\right|qq^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{15}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}+$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{15}q^{n-1}\int\limits_{\rho}^{t}e^{-bc^{-1}(t-u)}u^{\operatorname{Re} v_1-m-1}\,du\leq$$

$$\leq\left|c^{-1}\right|qq^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{15}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}+$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{15}q^{n-1}\frac{1}{bc^{-1}}\left(1+\frac{M}{\rho}\right)t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}=$$

$$=\left(\left|\frac{q}{c}\right|+\left|\frac{a}{b}+\frac{q}{c}\right|\left(1+\frac{M}{\rho}\right)\right)q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{15}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}.$$

Поскольку из второго условия теоремы следует, что при достаточно большом ρ выполняется неравенство

$$\left(\left|\frac{q}{c}\right| + \left|\frac{a}{b} + \frac{q}{c}\right| \left(1 + \frac{M}{\rho}\right)\right) q^{-\mathrm{Re}\, v_1 + m + 1} < q,$$

для функции $z_{n+1}(t)$ получаем оценку

$$|z_{n+1}(t)| \le L_{15} q^n t^{\mathrm{Re}\, v_1 - m - 1}, \quad t \ge \rho.$$

Неравенство (21) доказано.

Из неравенства (21) следует, что ряд $z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ является непрерывным решением уравнения (18).

Продифференцируем $z_1(t)$:

$$z_1'(t) = \left(c^{-1} q^{-v_1 + m + 1} - 1\right) \left[(v_1 - m)\, t^{v_1 - m - 1} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{t^{v_1 - m - 1}}{\ln q^{-1}} f_m'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \right.$$

$$+ b^2 c^{-2} \int\limits_{\rho}^{t} e^{-bc^{-1}(t-u)} \left\{ u^{v_1 - m} f_m\left(\frac{\ln u}{\ln q^{-1}}\right) - t^{v_1 - m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) \right\} du -$$

$$\left. - bc^{-1} e^{-bc^{-1}(t-\rho)} t^{v_1 - m} f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) \right].$$

С помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше для функции $z_1(t)$, для производной $z_1'(t)$ получаем оценку

$$\left|z_1'(t)\right| \le L_{16} t^{\mathrm{Re}\, v_1 - m - 1}, \quad t \ge \rho,$$

где L_{16} — некоторая постоянная. Из непрерывной дифференцируемости функции $z_1(t)$ и рекуррентной формулы (20) следует непрерывная дифференцируемость всех функций $z_n(t)$, $n \ge 1$. Определим коэффициент $L_{17} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\{L_{15}, L_{16}\}$ и докажем методом математической индукции неравенство

$$\left|z_n'(t)\right| \le L_{17} q^{n-1} t^{\mathrm{Re}\, v_1 - m - 1}, \quad t \ge \rho, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{22}$$

При $n = 1$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется для некоторого $n \ge 1$, и оценим $z_{n+1}'(t)$, продифференцировав тождество (20), с учетом неравенств (13), (21):

$$z_{n+1}'(t) = c^{-1} z_n'\left(q^{-1}t\right) + \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right) bc^{-1} e^{-bc^{-1}t} \int\limits_{\rho}^{t} e^{bc^{-1}u} z_n\left(q^{-1}u\right) du -$$

$$- \left(qbc^{-2} + ac^{-1}\right) z_n\left(q^{-1}t\right),$$

$$\left|z'_{n+1}(t)\right| \le \left|c^{-1}\right|\left|z'_n\left(q^{-1}t\right)\right| + \left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right| bc^{-1}e^{-bc^{-1}t}\int\limits_{\rho}^{t} e^{bc^{-1}u}\left|z_n\left(q^{-1}u\right)\right| du +$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|\left|z_n\left(q^{-1}t\right)\right| \le \left|c^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}+$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}bc^{-1}e^{-bc^{-1}t}\int\limits_{\rho}^{t} e^{bc^{-1}u}u^{\operatorname{Re} v_1-m-1}du+$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} \le$$

$$\le \left|c^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}+$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}\left(1+\frac{M}{\rho}\right)t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}+$$

$$+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right| q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1} =$$

$$=\left[\left|c^{-1}\right|+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|\left(1+\frac{M}{\rho}\right)+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|\right] q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1}L_{17}q^{n-1}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}.$$

Так как из второго условия теоремы следует, что при достаточно большом ρ выполняется неравенство

$$\left[\left|c^{-1}\right|+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|\left(1+\frac{M}{\rho}\right)+\left|qbc^{-2}+ac^{-1}\right|\right] q^{-\operatorname{Re} v_1+m+1} < q,$$

для производной $z'_{n+1}(t)$ получаем оценку

$$\left|z'_{n+1}(t)\right| \le L_{17}q^{n}t^{\operatorname{Re} v_1-m-1}, \quad t \ge \rho.$$

Неравенство (22) доказано.

Отсюда получаем непрерывную дифференцируемость решения $z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(t)$ уравнения (18) и равенство $z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z'_n(t)$. Дифференцируя уравнение (18), непосредственной проверкой убеждаемся, что сумма функций (5) является решением уравнения (1), где функция $z(t)$ согласно построению имеет свойство $z(t) = O(t^{v_1-m-1})$, $t \to +\infty$. Первый пункт теоремы доказан.

Из теоремы 5 второго параграфа [9] следует, что для $m+j+3$ раза непрерывно дифференцируемого решения $x(t)$ уравнения (1) имеет место представление (12). Согласно изложенному методу для функции $f_0(u)$ из формулы (12) строится непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1):

$$x_1(t) = t^{v_1}f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+t^{v_1-1}f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+\ldots+t^{v_1-m}f_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)+z(t), \quad t \ge \rho,$$

где функция $z(t)$ является функциональным рядом и имеет свойство $z(t) = O(t^{v_1-m-1})$, $t \to +\infty$. Разность двух решений $x(t) - x_1(t)$ линейного уравнения также является решением и имеет следующее асимптотическое поведение:

$$x(t) - x_1(t) = t^{v_1-m-1}\left[d_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) - t^{-v_1+m+1}z(t)\right] = o\left(t^{v_1-m}\right), \quad t \to +\infty.$$

Отсюда, согласно полученному для случая $-bc^{-1} > 0$ результату, следует тождество $x(t) \equiv x_1(t) + \gamma\, x_*(t)$ с некоторой постоянной γ. Второй пункт утверждения теоремы доказан.

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим уравнение

$$x(t) = a_1 x\left(t - r_1\right) + \ldots + a_{n_0} x\left(t - r_{n_0}\right) + bx(qt), \tag{23}$$

где $\{a_k, b_k\} \subset R$, $r_k > 0$, $0 < q < 1$, которое изучалось в [9]. Следующая лемма является необходимым логическим завершением полученных там результатов.

Лемма. *Пусть:*

1) $\sup\left\{\operatorname{Re}\lambda \left|1 - a_1 e^{-\lambda r_1} - \ldots - a_n e^{-\lambda r_{n_0}} = 0\right.\right\} < 0$, $r(t_0) \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{t_0 - r_k, qt_0\} > 0$, $b \neq 0$, *величина* v_1 *определяется из равенства* $\dfrac{bq^{v_1}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} = 1$;

2) параметры $\{M, j\} \subset N \bigcup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\left(\left|b^{-1}\right| + \left|a_1 b^{-1}\right| + \ldots + \left|a_{n_0} b^{-1}\right|\right) q^{-\operatorname{Re} v_1 + M} < 1 \quad \text{и} \quad \left(\underset{s\in[0,+\infty)}{\operatorname{var}} Y(s) + 1\right)\left|bq^{j+\operatorname{Re} v_1}\right| < 1.$$

Тогда для $M + j + 1$ *раз непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения (23) из условия* $x(t) = o(t^{v_1})$, $t \to +\infty$, *следует тождество* $x(t) \equiv 0$.

Доказательство. Из условия данной теоремы и теоремы 3 первого параграфа [9] следует, что для $M + j + 1$ раз непрерывно дифференцируемого решения $x(t)$ уравнения (23) выполняются неравенства

$$\left|t^{-(v_1-k)} x^{(k)}(t) - f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right| \leq K(t_0)\frac{1}{t}\times$$
$$\times \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(k)}(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(k+j+1)}(s)\right|\right\}, \; t \geq r(t_0), \; 0 \leq k \leq M, \tag{24}$$

где $K(t_0)$ — некоторая постоянная, $f_{k,0}(u)$ — непрерывные периодические функции с периодом 1.

Изучим свойства предельных функций $f_{k,0}(u)$, $0 \leq k \leq M$. С этой целью для производных $x^{(k)}(t)$ выполним замену переменных

$$x^{(k)}(t) = t^{v_1-k} z_k\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad 0 \leq k \leq M.$$

Тогда получим тождества

$$z_k'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)z_k\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z_{k+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right), \quad 0 \le k \le M-1,$$

или

$$z_k'(u) = \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)z_k(u) + z_{k+1}(u)\right).$$

Из этой формулы и неравенства (24) следует

$$z_k'(u+n) \to \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)f_{k,0}(u) + f_{k+1,0}(u)\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi_k(u) \in C(R), \quad n \in N, \quad n \to +\infty.$$

Отметим, что функция $\psi_k(u)$ периодическая с периодом 1. С помощью теоремы Лагранжа запишем тождество

$$\operatorname{Re} z_k(u_2+n) - \operatorname{Re} z_k(u_1+n) = \operatorname{Re} z_k'(u_1+\theta(n)(u_2-u_1)+n)(u_2-u_1), \;\; 0 < \theta(n) < 1. \tag{25}$$

Из ограниченной последовательности $\theta(n)$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\theta(n(m)) \to \theta_* \in [0,1]$, $m \to +\infty$, и запишем равенство

$$\operatorname{Re} z_k'(u_1+\theta(n(m))(u_2-u_1)+n(m)) - \operatorname{Re}\psi_k(u_1+\theta_*(u_2-u_1)) =$$

$$= \operatorname{Re} z_k'(u_1+\theta(n(m))(u_2-u_1)+n(m)) -$$

$$- \operatorname{Re}\psi_k(u_1+\theta(n(m))(u_2-u_1)+n(m)) +$$

$$+ \operatorname{Re}\psi_k(u_1+\theta(n(m))(u_2-u_1)) - \operatorname{Re}\psi_k(u_1+\theta_*(u_2-u_1)).$$

Поскольку согласно неравенству (24) имеет место оценка

$$\left|\operatorname{Re} z_k'(u) - \operatorname{Re}\psi_k(u)\right| \le \left|z_k'(u) - \psi_k(u)\right| =$$

$$= \left|\ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)\left(z_k(u)-f_{k,0}(u)\right)+\left(z_{k+1}(u)-f_{k+1,0}(u)\right)\right)\right| \le q^u L_k,$$

где L_k — некоторая постоянная, и $\psi_k(u) \in C(R)$, из последнего равенства следует

$$\operatorname{Re} z_k'(u_1+\theta(n(m))(u_2-u_1)+n(m)) \to \operatorname{Re}\psi_k(u_1+\theta_*(u_2-u_1)), \quad m \to +\infty.$$

Переходя к пределу в формуле (25) при $n(m) \to +\infty$, получаем

$$\operatorname{Re} f_{k,0}(u_2) - \operatorname{Re} f_{k,0}(u_1) = \operatorname{Re}\psi_k(u_1+\theta_*(u_2-u_1))(u_2-u_1),$$

т. е. $\dfrac{d}{du}\operatorname{Re} f_{k,0}(u) = \operatorname{Re}\psi_k(u)$. Аналогично показываем, что $\dfrac{d}{du}\operatorname{Im} f_{k,0}(u) = \operatorname{Im}\psi_k(u)$. Отсюда следует, что

$$f_{k,0}'(u) = \psi_k(u) = \ln(q^{-1})(-(v_1-k)f_{k,0}(u) + f_{k+1,0}(u))$$

или

$$f_{k+1,0}(u) = (v_1 - k) f_{k,0}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k,0}(u), \quad 0 \leq k \leq M-1. \tag{26}$$

При $k = M-1$ из последнего равенства следует, что $f_{M-1,0}(u) \in C^1(R)$, поэтому при $k = M-2$ эта же формула позволяет утверждать, что $f_{M-2,0}(u) \in C^2(R)$, и через конечное число шагов получаем $f_{M-k,0}(u) \in C^k(R)$, $0 \leq k \leq M$.

Если $x(t) = o(t^{v_1})$, $t \to +\infty$, т. е. $f_{0,0}(u) \equiv 0$, то из формулы (26) следуют тождества $f_{k,0}(u) \equiv 0$, $0 \leq k \leq M$. Отсюда с учетом оценки (24) получаем

$$\left| x^{(M)}(t) \right| \leq L_M t^{\operatorname{Re} v_1 - M - 1}, \quad t \geq r(t_0),$$

где L_M — некоторая постоянная. Предположим, что для k-й, $1 \leq k \leq M$, производной выполняется аналогичное неравенство

$$\left| x^{(k)}(t) \right| \leq L_k t^{\operatorname{Re} v_1 - M - 1}, \quad t \geq r(t_0), \tag{27}$$

где L_k — некоторая постоянная. Оценим производную $x^{(k-1)}(t)$. Для этого, продифференцировав уравнение (23) $k-1$ раз, запишем уравнение производной $x^{(k-1)}(t)$ следующим образом:

$$x^{(k-1)}(t) = \frac{bq^{k-1} x^{(k-1)}(qt)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} +$$

$$+ \frac{a_1 \left(x^{(k-1)}(t - r_1) - x^{(k-1)}(t) \right) + \ldots + a_{n_0} \left(x^{(k-1)}(t - r_{n_0}) - x^{(k-1)}(t) \right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}}.$$

Вводя обозначение

$$f(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{a_1 \left(x^{(k-1)}(t - r_1) - x^{(k-1)}(t) \right) + \ldots + a_{n_0} \left(x^{(k-1)}(t - r_{n_0}) - x^{(k-1)}(t) \right)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}},$$

получаем

$$x^{(k-1)}(t) = \frac{bq^{k-1} x^{(k-1)}(qt)}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}} + f(t). \tag{28}$$

Для последующей оценки функции $f(t)$ представим ее с помощью теоремы Лагранжа в виде

$$f(t) = \frac{-a_1 x^{(k)}(t - \theta_1(t) r_1)\, r_1 - \ldots - a_{n_0} x^{(k)}(t - \theta_{n_0}(t) r_{n_0})\, r_{n_0}}{1 - a_1 - \ldots - a_{n_0}},$$

где $0 < \theta_l(t) < 1$, $l = \overline{1, n_0}$. Выполняя в уравнении (28) замену переменных $x^{(k-1)}(t) = t^{v_1 - k + 1} z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right)$, получаем уравнение

$$z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1 \right) + t^{-v_1 + k - 1} f(t).$$

Из предположения (27) следует оценка

$$|t^{-v_1+k-1}f(t)| \le Dt^{k-M-2}, \quad t \ge r(t_0), \tag{29}$$

где D — некоторая постоянная. Выполним в последнем уравнении замену независимой переменной $u = \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}$:

$$z(u) = z(u-1) + q^{u(v_1-k+1)}f(q^{-u}).$$

Для краткости обозначим $g(u) \overset{\mathrm{df}}{=} q^{u(v_1-k+1)}f(q^{-u})$. Из оценки (29) следует неравенство

$$|g(u)| \le Dq^{u(M+2-k)}, \quad u \ge \frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}.$$

Из тождества $f_{k-1,0}(u) \equiv 0$, уравнения для функции $z(u)$ и оценки функции $g(u)$ получаем

$$\begin{aligned} z(u) &= z(u) - f_{k-1,0}(u) = \\ &= z(u) - z(u+1) + z(u+1) - z(u+2) + z(u+2) + \ldots \\ &\quad \ldots + z(u+n-1) - z(u+n) + z(u+n) - f_{k-1,0}(u) = \\ &= z(u) - z(u+1) + z(u+1) - z(u+2) + z(u+2) + \ldots \\ &\quad \ldots + z(u+n-1) - z(u+n) + z(u+n) - z(u+n+1) + \ldots = \\ &= -g(u+1) - g(u+2) - \ldots - g(u+n) - g(u+n+1) - \ldots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |z(u)| &\le |g(u+1)| + |g(u+2)| + \ldots + |g(u+n)| + |g(u+n+1)| + \ldots \le \\ &\le Dq^{(u+1)(M+2-k)} + Dq^{(u+2)(M+2-k)} + \ldots + Dq^{(u+n)(M+2-k)} + \ldots = \\ &= \left(1 + q^{M+2-k} + \ldots + q^{(M+2-k)n} + \ldots\right) Dq^{(u+1)(M+2-k)} \overset{\mathrm{df}}{=} L_{k-1}q^{u(M+2-k)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left|x^{(k-1)}(t)\right| &= \left|t^{v_1-k+1}z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right| \le \\ &\le L_{k-1}t^{\mathrm{Re}\,v_1-M-1}, \quad t \ge r(t_0). \end{aligned}$$

Повторяя эти рассуждения конечное число раз, находим

$$|x(t)| \le L_0 t^{\mathrm{Re}\, v_1 - M - 1}, \quad t \ge r(t_0), \tag{30}$$

где L_0 — некоторая постоянная.

Заменив в уравнении (23) аргумент t на произведение $q^{-1}t$, перейдем к уравнению

$$x(t) = b^{-1}x(q^{-1}t) - a_1 b^{-1} x(q^{-1}t - r_1) - \ldots - a_{n_0} b^{-1} x(q^{-1}t - r_{n_0}).$$

Определим функцию $K(R) \stackrel{\mathrm{d}f}{=} \sup_{t \ge R} |x(t)| t^{-v_2}$, где $v_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Re}\, v_1 - M$, которая в силу неравенства (30) стремится к нулю при $R \to +\infty$, и оценим с ее помощью решения для $t \ge R$:

$$|x(t)| \le |b^{-1}| \left| x(q^{-1}t) \right| + |a_1 b^{-1}| \left| x(q^{-1}t - r_1) \right| + \ldots + |a_{n_0} b^{-1}| \left| x(q^{-1}t - r_{n_0}) \right| \le$$

$$\le \left| b^{-1} \right| K\left(q^{-1}R\right) q^{-v_2} t^{v_2} + \left| a_1 b^{-1} \right| K\left(q^{-1}R - r_1\right) \left(1 - \frac{r_1}{q^{-1}t}\right)^{v_2} q^{-v_2} t^{v_2} + \ldots$$

$$\ldots + \left| a_{n_0} b^{-1} \right| K\left(q^{-1}R - r_{n_0}\right) \left(1 - \frac{r_{n_0}}{q^{-1}t}\right)^{v_2} q^{-v_2} t^{v_2}.$$

Выберем число d из интервала $(q, 1)$. Тогда для достаточно больших R выполняются неравенства $R \le dq^{-1}R \le q^{-1}R - r_k$, $k = \overline{1, n_0}$, и оценку $x(t)$ можно продолжить:

$$|x(t)| \le \left[|b^{-1}| + |a_1 b^{-1}| \left(1 - \frac{r_1}{q^{-1}t}\right)^{v_2} + \ldots + \left| a_{n_0} b^{-1} \right| \left(1 - \frac{r_{n_0}}{q^{-1}t}\right)^{v_2} \right] q^{-v_2} K\left(dq^{-1}R\right) t^{v_2}.$$

Из первого неравенства второго условия леммы следует, что при достаточно больших R выполняется неравенство

$$\left[\left| b^{-1} \right| + \left| a_1 b^{-1} \right| \left(1 - \frac{r_1}{q^{-1}t}\right)^{v_2} + \ldots + \left| a_{n_0} b^{-1} \right| \left(1 - \frac{r_{n_0}}{q^{-1}t}\right)^{v_2} \right] q^{-v_2} \le 1$$

и $|x(t)| \le K(dq^{-1}R)t^{v_2}$, $|x(t)|t^{-v_2} \le K(dq^{-1}R)$. Переходя к максимуму по $t \ge R$ в левой части последнего неравенства, получаем $K(R) \le K(dq^{-1}R)$, откуда следует оценка

$$K(R) \le K((dq^{-1})^n R) \to 0, \qquad n \to +\infty,$$

т. е. $K(R) = 0$ и $x(t) \equiv 0$.

Лемма доказана.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.

2. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$ I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56-Indag. Math. — 1953. — **15**. — P. 449–464.

3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes. Math. — 1971. — **243**. — P. 249–254.

4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 120 с.

5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1483 – 1491.

6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627 – 1645.

7. *Frederickson P. O.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1971. — **33**. — P. 355 – 358.

8. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes. Math. — 1980. — **809**. — 267 p.

9. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений функциональных и дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом. — Киев, 2011. — 94 с. — (Препринт / НАН Украины; Ин-та математики).

10. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций: В 2 т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — Т. 1. — 787 с.

Получено 18.05.11,
после доработки — 25.07.12