УДК 517.968

АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

А. Ю. Лучка, В. Ф. Мельничук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We substantiate an approximation-iteration method for quasilinear integral equations.

Обосновано применение аппроксимационно-итеративного метода к слабонелинейным интегральным уравнениям с ограничениями.

У даній статті узагальнюються результати роботи [1], в якій встановлено умови існування розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь зі слабконелінійними обмеженнями та обґрунтовано застосування до них ітераційного методу, і запропоновано застосовувати для побудови наближених розв'язків вказаних задач апроксимаційно-ітеративний метод [2], окремим випадком якого є методи проекційно-ітеративного типу [3–7].

1. Об'єкт дослідження. Будемо розглядати квазілінійне інтегральне рівняння вигляду

$$y(t) = f(t) + u(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F(s,y(s))\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

і поставимо задачу: знайти такі функції $y(t)$ та $u(t)$ із класу $L_2([a,b])$, щоб справджувались рівняння (1) та обмеження

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \alpha + \varepsilon \int_a^b E(t,y(t))\,dt. \tag{2}$$

Якщо вони існують, то задачу вважатимемо сумісною.

У даній статті досліджується задача, керування в якій має вигляд

$$u(t) = C(t)\lambda, \tag{3}$$

де $\lambda \in \mathbb{R}^l$ — шуканий параметр.

Припускаємо, що задані величини задовольняють наступні умови:

1) $f \in L_2([a,b])$;

2) елементи $(1 \times l)$-матриці $C(t)$ та $(l \times 1)$-матриці $S(t)$ сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$;

3) ядра $K(t,s)$ та $H(t,s)$ сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$;

4) $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — невід'ємний параметр і $\alpha \in \mathbb{R}^l$;

5) функції $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $E : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняють умову Ліпшиця за другою змінною, тобто для будь-яких $\{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}$

$$|F(t,\xi) - F(t,\eta)| \le q(t)|\xi - \eta|, \tag{4}$$

$$|E(t,\xi) - E(t,\eta)| \le p(t)|\xi - \eta|, \tag{5}$$

де $\{p, q\} \subset L_2([a,b])$.

2. Допоміжна задача. При дослідженні задачі (1) – (3) важливу роль відіграє допоміжна задача

$$y(t) = u(t) + \int_a^b P(t)Q(s)y(s)\,ds + z(t), \tag{6}$$

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \beta, \tag{7}$$

де елементи $(1 \times n)$-матриці $P(t)$ та $(n \times 1)$-матриці $Q(s)$ сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, а $z \in L_2([a,b])$ і $\beta \in \mathbb{R}^l$ задано довільним чином.

Тут і далі припускаємо, що компоненти векторів $C(t)$ та $P(t)$ в сукупності лінійно незалежні і такими ж є компоненти векторів $S(t)$ та $Q(t)$.

За такої умови побудуємо розв'язок задачі (6), (7). Оскільки ядро інтегрального оператора із (6) вироджене, то, врахувавши вигляд $u(t)$ (3), задачу (6), (7) можна записати у вигляді

$$y(t) = C(t)\lambda + P(t)\mu + z(t), \tag{8}$$

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \beta, \quad \mu = \int_a^b Q(s)y(s)\,ds. \tag{9}$$

Задовольнивши умови (9) з урахуванням (8), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно векторів λ та μ :

$$\begin{aligned} &\int_a^b S(t)C(t)\,dt\lambda + \int_a^b S(t)P(t)\,dt\mu = \beta - \int_a^b S(t)z(t)\,dt, \\ &\int_a^b Q(t)C(t)\,dt\lambda + \left(\int_a^b Q(t)P(t)\,dt - I\right)\mu = -\int_a^b Q(t)z(t)\,dt, \end{aligned} \tag{10}$$

де I — одинична матриця в $\mathbb{R}^n$.

Ввівши позначення

$$\Lambda_{11} = \int_a^b S(t)C(t)\,dt, \quad \Lambda_{12} = \int_a^b S(t)P(t)\,dt,$$

$$\Lambda_{21} = \int_a^b Q(t)C(t)\,dt, \quad \Lambda_{22} = \int_a^b Q(t)P(t)\,dt - I, \tag{11}$$

$$d_1 = \beta - \int_a^b S(t)z(t)\,dt, \quad d_2 = -\int_a^b Q(t)z(t)\,dt, \tag{12}$$

систему (10) можна записати у компактному вигляді

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де матриці (11) мають розмірності $l \times l$, $l \times n$, $n \times l$ та $n \times n$ відповідно.

Лема 1. *Якщо матриця*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \tag{14}$$

невироджена, то існують такі функції $r(t)$, $h(t)$, $\Gamma(t,s)$ та $R(t,s)$, що розв'язок задачі (6), (7) зображується формулами

$$u(t) = r(t) - \int_a^b \Gamma(t,s)z(s)\,ds, \tag{15}$$

$$y(t) = h(t) + z(t) - \int_a^b R(t,s)z(s)\,ds. \tag{16}$$

Доведення. Запишемо обернену матрицю $\Delta = \Lambda^{-1}$ у вигляді

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де матриці Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{21} та Δ_{22} мають розмірності $l \times l$, $l \times n$, $n \times l$ та $n \times n$ відповідно. Тоді існує єдиний розв'язок системи (13), який визначається формулами

$$\lambda = \Delta_{11} d_1 + \Delta_{12} d_2,$$

$$\mu = \Delta_{21} d_1 + \Delta_{22} d_2.$$

Отже, врахувавши позначення (12), отримаємо співвідношення

$$\lambda = \Delta_{11}\beta - \Delta_{11}\int\limits_a^b S(t)z(t)\,dt - \Delta_{12}\int\limits_a^b Q(t)z(t)\,dt,$$

$$\mu = \Delta_{21}\beta - \Delta_{21}\int\limits_a^b S(t)z(t)\,dt - \Delta_{22}\int\limits_a^b Q(t)z(t)\,dt. \tag{18}$$

Нехай

$$\sigma = \Delta_{11}\beta, \quad \tau = \Delta_{21}\beta, \tag{19}$$

$$V(s) = \Delta_{11}S(s) + \Delta_{12}Q(s), \quad W(s) = \Delta_{21}S(s) + \Delta_{22}Q(s). \tag{20}$$

Тоді формули (18) наберуть вигляду

$$\lambda = \sigma - \int\limits_a^b V(s)z(s)\,ds, \tag{21}$$

$$\mu = \tau - \int\limits_a^b W(s)z(s)\,ds. \tag{22}$$

Підставивши (21), (22) у (3) і (8), отримаємо відповідно формули

$$u(t) = C(t)\left(\sigma - \int\limits_a^b V(s)z(s)\,ds\right), \tag{23}$$

$$y(t) = C(t)\left(\sigma - \int\limits_a^b V(s)z(s)\,ds\right) + P(t)\left(\tau - \int\limits_a^b W(s)z(s)\,ds\right) + z(t). \tag{24}$$

Якщо ввести позначення

$$r(t) = C(t)\sigma, \quad h(t) = C(t)\sigma + P(t)\tau, \tag{25}$$

$$\Gamma(t,s) = C(t)V(s), \quad R(t,s) = C(t)V(s) + P(t)W(s), \tag{26}$$

то, очевидно, формули (23) та (24) наберуть вигляду (15) і (16) відповідно.

Зазначимо ще, що, ввівши до розгляду матриці

$$\Pi(t) = C(t)\Delta_{11}, \quad D(t) = C(t)\Delta_{11} + P(t)\Delta_{21} \tag{27}$$

і використавши позначення (19), формулам (25) можна надати вигляду

$$r(t) = \Pi(t)\beta, \quad h(t) = D(t)\beta. \tag{28}$$

Використавши результати з роботи [7], неважко встановити наступні твердження.

Лема 2. *Якщо матриця Λ невироджена, то справджуються рівності*

$$\int_a^b \Gamma(t,s)C(s)\,ds = C(t), \quad \int_a^b R(t,s)C(s)\,ds = C(t), \tag{29}$$

$$\int_a^b S(t)R(t,s)\,dt = S(s), \quad \int_a^b Q(t)R(t,s)\,dt = Q(s) + W(s), \tag{30}$$

$$\int_a^b S(t)D(t)\,dt = J, \quad \int_a^b Q(t)D(t)\,dt = \Delta_{21}, \tag{31}$$

де J — одинична матриця в $\mathbb{R}^l$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що із властивості даної невиродженої матриці Λ, її оберненої Δ та їхніх структур (14), (17) очевидним чином випливає правильність рівностей

$$\Delta_{11}\Lambda_{11} + \Delta_{12}\Lambda_{21} = J, \quad \Delta_{21}\Lambda_{11} + \Delta_{22}\Lambda_{21} = 0, \tag{32}$$

$$\Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21} = J, \quad \Lambda_{11}\Delta_{12} + \Lambda_{12}\Delta_{22} = 0, \tag{33}$$

$$\Lambda_{21}\Delta_{11} + \Lambda_{22}\Delta_{21} = 0, \quad \Lambda_{21}\Delta_{12} + \Lambda_{22}\Delta_{22} = I. \tag{34}$$

На основі формул (20), (11) та (32) неважко встановити рівності

$$\int_a^b V(s)C(s)\,ds = J, \quad \int_a^b W(s)C(s)\,ds = 0. \tag{35}$$

Справді, маємо

$$\int_a^b V(s)C(s)\,ds = \int_a^b \left(\Delta_{11}S(s) + \Delta_{12}Q(s)\right) C(s)\,ds = \Delta_{11}\Lambda_{11} + \Delta_{12}\Lambda_{21} = J,$$

$$\int_a^b W(s)C(s)\,ds = \int_a^b \left(\Delta_{21}S(s) + \Delta_{22}Q(s)\right) C(s)\,ds = \Delta_{21}\Lambda_{11} + \Delta_{22}\Lambda_{21} = 0.$$

Використавши властивості (35) та формули (26), отримаємо

$$\int_a^b \Gamma(t,s)C(s)\,ds = C(t)\int_a^b V(s)C(s)\,ds = C(t)\cdot J = C(t),$$

$$\int_a^b R(t,s)C(s)\,ds = \int_a^b \left(C(t)V(s) + P(t)W(s)\right)C(s)\,ds = C(t)\cdot J + P(t)\cdot 0 = C(t),$$

тобто властивості (29) справджуються.

Аналогічно встановлюється правильність співвідношень (30). Справді, на основі формул (26), (20), (11) та (33), (34) маємо

$$\begin{aligned}\int_a^b S(t)R(t,s)\,dt &= \int_a^b S(t)\left(C(t)V(s) + P(t)W(s)\right)\,dt = \\ &= \Lambda_{11}(\Delta_{11}S(s) + \Delta_{12}Q(s)) + \Lambda_{12}(\Delta_{21}S(s) + \Delta_{22}Q(s)) = \\ &= (\Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21})S(s) + (\Lambda_{11}\Delta_{12} + \Lambda_{12}\Delta_{22})Q(s) = \\ &= J\cdot S(s) + 0\cdot Q(s) = S(s),\end{aligned}$$

$$\int_a^b Q(t)R(t,s)\,dt = \int_a^b Q(t)C(t)V(s)\,dt + \int_a^b Q(t)P(t)W(s)\,dt = \Lambda_{21}V(s) + (\Lambda_{22}+I)W(s)) =$$

$$= W(s) + (\Lambda_{21}\Delta_{11} + \Lambda_{22}\Delta_{21})S(s) + (\Lambda_{21}\Delta_{12} + \Lambda_{22}\Delta_{22})Q(s) =$$

$$= W(s) + 0\cdot Q(s) + I\cdot Q(s) = W(s) + Q(s).$$

Аналогічно встановлюється правильність рівностей (31). Так, використовуючи формули (27), (11), (33) і (34), отримуємо

$$\int_a^b S(t)D(t)\,dt = \int_a^b S(t)(C(t)\Delta_{11} + P(t)\Delta_{21})\,dt = \Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21} = J,$$

$$\int_a^b Q(t)D(t)\,dt = \int_a^b Q(t)(C(t)\Delta_{11} + P(t)\Delta_{21})\,dt = \Lambda_{21}\Delta_{11} + (\Lambda_{22} + I)\Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Лема 3. *Функція вигляду*

$$y(t) = D(t)\beta + z(t) - \int_a^b R(t,s)z(s)\,ds \tag{36}$$

при будь-яких $\beta \in \mathbb{R}^l$ *і* $z \in L_2([a,b])$ *має властивості*

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \beta, \tag{37}$$

$$\int_a^b Q(t)y(t)\,dt = \Delta_{21}\beta - \int_a^b W(s)z(s)\,ds. \tag{38}$$

Доведення. Правильність співвідношень (37) та (38) безпосередньо випливає із властивостей (30) і (31). Справді, враховуючи зображення (36), маємо

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \int_a^b S(t)D(t)\beta\,dt + \int_a^b S(t)z(t)\,dt - \int_a^b S(t)\int_a^b R(t,s)z(s)\,ds\,dt =$$

$$= J\beta + \int_a^b \left(S(s) - \int_a^b S(t)R(t,s)\,dt \right) z(s)\,ds = \beta,$$

$$\int_a^b Q(t)y(t)\,dt = \int_a^b Q(t)D(t)\,dt\beta + \int_a^b \left(Q(s) - \int_a^b Q(t)R(t,s)\,dt \right) z(s)\,ds =$$

$$= \Delta_{21}\beta - \int_a^b W(s)z(s)\,ds.$$

3. Зведення задачі (1) – (3) до рівнозначного інтегрального рівняння без обмежень. Апроксимуємо ядро $K(t,s)$ виродженим ядром $P(t)Q(s)$ і виберемо матриці $P(t)$ та $Q(s)$ таким чином, щоб норма ядра

$$B(t,s) = K(t,s) - P(t)Q(s) \tag{39}$$

була достатньо малою. Для цього можна використати різноманітні існуючі апроксимаційні методи, зокрема проекційні чи інтерполяційні.

Нехай

$$x(t) = f(t) + \int_a^b B(t,s)y(s)\,ds, \tag{40}$$

$$v(t) = \int_a^b H(t,s)F(s,y(s))\,ds, \tag{41}$$

$$\gamma = \int_a^b E(t,y(t))\,dt. \tag{42}$$

Тоді рівняння (1) з урахуванням керування (3) та виразу (39) і обмеження (2) наберуть відповідно вигляду

$$y(t) = C(t)\lambda + \int_a^b P(t)Q(s)y(s)\,ds + x(t) + \varepsilon v(t), \tag{43}$$

$$\int_a^b S(t)y(t)\,dt = \alpha + \varepsilon\gamma, \tag{44}$$

тобто вигляду допоміжної задачі (6), (7), якщо покласти

$$z(t) = x(t) + \varepsilon v(t), \quad \beta = \alpha + \varepsilon\gamma. \tag{45}$$

За припущення, що матриця Λ, яка визначається формулою (14), невироджена, існує єдний розв'язок задачі (43), (44). Цей розв'язок, використавши формули (16), (21) та позначення (27), (45), (19), можна записати у вигляді

$$y(t) = D(t)\alpha + x(t) - \int_a^b R(t,s)x(s)\,ds + \varepsilon\left(D(t)\gamma + v(t) - \int_a^b R(t,s)v(s)\,ds\right), \tag{46}$$

$$\lambda = \Delta_{11}(\alpha + \varepsilon\gamma) - \int_a^b V(s)(x(s) + \varepsilon v(s))\, ds. \tag{47}$$

Підставимо тепер вирази (40) – (42) у праву частину формули (46) і виконаємо нескладні перетворення, в результаті чого отримаємо співвідношення

$$y(t) = D(t)\alpha + f(t) - \int_a^b R(t,s)f(s)\, ds + \int_a^b B(t,s)y(s)\, ds - \int_a^b R(t,\xi)\int_a^b B(\xi,s)y(s)\, ds\, d\xi +$$
$$+\varepsilon\left(D(t)\int_a^b E(s,y(s))\, ds + \int_a^b H(t,s)F(s,y(s))\, ds -\right.$$
$$\left. - \int_a^b R(t,\xi)\int_a^b H(\xi,s)F(s,y(s))\, ds\, d\xi\right), \tag{48}$$

яке можна трактувати як інтегральне рівняння відносно невідомої функції $y(t)$.

Ввівши позначення

$$g(t) = D(t)\alpha + f(t) - \int_a^b R(t,\xi)f(\xi)\, d\xi, \tag{49}$$

$$M(t,s) = B(t,s) - \int_a^b R(t,\xi)B(\xi,s)\, d\xi, \tag{50}$$

$$N(t,s) = H(t,s) - \int_a^b R(t,\xi)H(\xi,s)\, d\xi, \tag{51}$$

$$\Omega(t,s,y(s)) = D(t)E(s,y(s)) + N(t,s)F(s,y(s)), \tag{52}$$

рівняння (48) запишемо у компактному вигляді

$$y(t) = g(t) + \int_a^b M(t,s)y(s)\, ds + \varepsilon\int_a^b \Omega(t,s,y(s))\, ds. \tag{53}$$

Отже, дослідження існування розв’язків задачі (1) – (3) звелося до задачі існування розв’язків інтегрального рівняння (53).

Теорема 1. *Якщо матриця Λ невироджена, то розв'язок задачі (1)–(3) існує тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок інтегрального рівняння (53).*

Доведення. Нехай $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (53), тобто справджується рівність

$$y^*(t) = g(t) + \int_a^b M(t,s)y^*(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b \Omega(t,s,y^*(s))\,ds. \tag{54}$$

Згідно з формулами (40)–(42) знайдемо

$$x^*(t) = f(t) + \int_a^b B(t,s)y^*(s)\,ds, \tag{55}$$

$$v^*(t) = \int_a^b H(t,s)F(s,y^*(s))\,ds, \tag{56}$$

$$\gamma^* = \int_a^b E(t,y^*(t))\,dt \tag{57}$$

і побудуємо, врахувавши (46), (47), функцію

$$w(t) = D(t)\alpha + x^*(t) - \int_a^b R(t,s)x^*(s)\,ds + \varepsilon\left(D(t)\gamma^* + v^*(t) - \int_a^b R(t,s)v^*(s)\,ds\right) \tag{58}$$

та параметр

$$\lambda^* = \Delta_{11}(\alpha + \varepsilon\gamma^*) - \int_a^b V(s)(x^*(s) + \varepsilon v^*(s))\,ds. \tag{59}$$

Встановимо, що

$$w(t) = y^*(t). \tag{60}$$

Для цього достатньо підставити вирази (55)–(57) у праву частину формули (58) і повторити ті самі вкладки, що й при встановленні рівняння (53). В результаті отримаємо

$$w(t) = g(t) + \int_a^b M(t,s)y^*(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b \Omega(t,s,y^*(s))\,ds. \tag{61}$$

Співставляючи формули (54) та (61), переконуємось у правильності рівності (60).

Зазначимо, що вигляд (58) функції $w(t)$ аналогічний вигляду (36), а тому, як стверджується в лемі 3, з урахуванням формул (45), (60) та (57) справджуються співвідношення

$$\int_a^b S(t)y^*(t)\,dt = \alpha + \int_a^b E(t, y^*(t))\,dt, \tag{62}$$

$$\int_a^b Q(t)y^*(t)\,dt = \Delta_{21}(\alpha + \varepsilon\gamma^*) - \int_a^b W(s)(x^*(s) + \varepsilon v^*(s))\,ds. \tag{63}$$

Далі, на основі рівностей (59), (63) і позначень (26), (27) отримуємо

$$C(t)\lambda^* + P(t)\int_a^b Q(s)y^*(s)\,ds = (C(t)\Delta_{11} + P(t)\Delta_{21})\;(\alpha + \varepsilon\gamma^*) -$$

$$- \int_a^b (C(t)V(s) + P(t)W(s))(x^*(s) + \varepsilon v^*(s))\,ds =$$

$$= D(t)(\alpha + \varepsilon\gamma^*) - \int_a^b R(t,s)(x^*(s) + \varepsilon v^*(s))\,ds. \tag{64}$$

Тепер майже очевидним є той факт, що функції $y(t) = y^*(t)$ та $u(t) = C(t)\lambda^*$ — це розв'язок задачі (1), (2). Справді, по-перше, функція $y^*(t)$, як видно із співвідношення (62), задовольняє обмеження (2), а по-друге, використавши формули (39), (56), (55), (64), (58) та (60), будемо мати

$$f(t) + C(t)\lambda^* + \int_a^b K(t,s)y^*(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b H(t,s)F(s, y^*(s))\,ds = C(t)\lambda^* + f(t) +$$

$$+ \int_a^b B(t,s)y^*(s)\,ds + \int_a^b P(t)Q(s)y^*(s)\,ds + \varepsilon v^*(s) = x^*(t) + \varepsilon v^*(t) +$$

$$+ D(t)(\alpha + \varepsilon\gamma^*) - \int_a^b R(t,s)(x^*(s) + \varepsilon v^*(s))\,ds = w(t) = y^*(t).$$

Таким чином, якщо існує розв'язок інтегрального рівняння (53), то задача (1) – (3) є сумісною.

Навпаки, нехай $(\overline{y}(t), \overline{\lambda})$ — розв'язок задачі (1)–(3), тобто правильними є рівності

$$\overline{y}(t) = f(t) + C(t)\overline{\lambda} + \int_a^b K(t,s)\overline{y}(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F(s,\overline{y}(s))\,ds, \tag{65}$$

$$\int_a^b S(t)\overline{y}(t)\,dt = \alpha + \varepsilon \int_a^b E(t,\overline{y}(t))\,dt. \tag{66}$$

Побудуємо вектор

$$\overline{\mu} = \int_a^b Q(s)\overline{y}(s)\,ds \tag{67}$$

і встановимо, що при

$$z(t) = \overline{x}(t) + \varepsilon\overline{v}(t), \quad \beta = \alpha + \overline{\gamma}, \tag{68}$$

де $\overline{x}(t)$, $\overline{v}(t)$ і $\overline{\gamma}$ визначаються формулами (40)–(42), в яких $y(t)$ замінено на $\overline{y}(t)$, система лінійних алгебраїчних рівнянь (13) має єдиний розв'язок

$$\lambda = \overline{\lambda}, \quad \mu = \overline{\mu}, \tag{69}$$

Справді, по-перше, оскільки при використанні позначень (39) та (67) маємо

$$\int_a^b K(t,s)\overline{y}(s)\,ds = P(t)\overline{\mu} + \int_a^b B(t,s)\overline{y}(s)\,ds,$$

то із співвідношень (65) та (68) очевидним чином випливає

$$\overline{y}(t) = z(t) + C(t)\overline{\lambda} + P(t)\overline{\mu}, \tag{70}$$

а по-друге, на основі формул (11), (12), (66)–(68) та (70) маємо

$$d_1 = \alpha + \varepsilon\overline{\gamma} - \int_a^b S(t)(\overline{y}(t) - C(t)\overline{\lambda} - P(t)\overline{\mu})\,dt =$$

$$= \alpha + \varepsilon\overline{\gamma} - \int_a^b S(t)(\overline{y}(t)\,dt + \Lambda_{11}\overline{\lambda} + \Lambda_{12}\overline{\mu} = \Lambda_{11}\overline{\lambda} + \Lambda_{12}\overline{\mu},$$

$$d_2 = -\int_a^b Q(t)(\overline{y}(t) - C(t)\overline{\lambda} - P(t)\overline{\mu})\,dt = -\overline{\mu} + \Lambda_{21}\overline{\lambda} + (\Lambda_{22} + I)\,\overline{\mu} = \Lambda_{21}\overline{\lambda} + \Lambda_{22}\overline{\mu}.$$

Отже, система (13) набирає вигляду

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - \overline{\lambda} \\ \mu - \overline{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси, оскільки за умовою матриця Λ невироджена, випливає правильність співвідношення (69).

При доведенні леми 1 встановлено, що розв'язок системи (13) має вигляд (21), (22), а тому, використовуючи його і формули (68), (69), маємо

$$\overline{\lambda} = \Delta_{11}(\alpha + \varepsilon\gamma) - \int_a^b V(s)(\overline{x}(s) + \varepsilon\overline{v}(s))\,ds, \tag{71}$$

$$\overline{\mu} = \Delta_{21}(\alpha + \varepsilon\gamma) - \int_a^b W(s)(\overline{x}(s) + \varepsilon\overline{v}(s))\,ds. \tag{72}$$

Замінивши у формулі (70) $\overline{\lambda}$ та $\overline{\mu}$ виразами (71), (72) і використавши при цьому позначення (26), (27), остаточно отримаємо рівність

$$\overline{y}(t) = D(t)\alpha + \overline{x}(t) - \int_a^b R(t,s)\overline{x}(s)\,ds + \varepsilon\left(D(t)\gamma + \overline{v}(t) - \int_a^b R(t,s)\overline{v}(s)\,ds\right),$$

яка рівнозначна, як це зазначалося вище, рівності

$$\overline{y}(t) = g(t) + \int_a^b M(t,s)\overline{y}(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b \Omega(t,s,\overline{y}(s))\,ds. \tag{73}$$

Отже, перша компонента $\overline{y}(t)$ розв'язку задачі (1) – (3), про що свідчить рівність (73), є розв'язком інтегрального рівняння (53).

Теорема 2. *За умови теореми 1 інтегральне рівняння (53) і задача (1) – (3) мають однакову кількість розв'язків, зокрема одночасно вони мають єдині розв'язки.*

Доведення. Правильність твердження теореми ґрунтується на тому факті, що задача (1) – (3) не може мати розв'язків $(\overline{y}(t), \overline{\lambda})$ та $(\overline{y}(t), \lambda^*)$, у яких $\overline{\lambda} \neq \lambda^*$, оскільки в протилежному випадку, як встановлено при доведенні теореми 1, буде правильним зображення (71), використавши яке, будемо мати $\overline{\lambda} = \lambda^*$. Отже, з огляду на теорему 1 кожному розв'язку $(\overline{y}(t), \overline{\lambda})$ задачі (1) – (3) відповідає тільки один розв'язок $\overline{y}(t)$ рівняння (53), і, навпаки, кожному розв'язку $y^*(t)$ рівняння (53) відповідає лише один розв'язок $(y^*(t), \lambda^*)$ задачі (1) – (3), до того ж λ^* обчислюється за формулою (59).

Таким чином, задача (1) – (3) рівнозначна інтегральному рівнянню (53).

4. Достатні умови існування єдиного розв'язку. Дослідженню нелінійних інтегральних рівнянь присвячено чимало робіт, в яких висвітлюються як проблеми теорії, зокрема питання існування розв'язків, так і різноманітні наближені методи. При встановленні достатніх умов існування та єдиності розв'язків нелінійних рівнянь широко використовується принцип Банаха стискуючих відображень. Застосуємо його до інтегрального рівняння (53). Для цього потрібно встановити достатні умови, при виконанні яких інтегральний оператор, що визначається правою частиною рівняння (53), є оператором стиску.

Спершу зазначимо, що за умови невиродженості матриці Λ (14) із умов 1 – 5 випливає, що, по-перше, існує функція

$$\Omega(t,s,\xi) = D(t)E(s,\xi) + N(t,s)F(s,\xi), \tag{74}$$

яка задовольняє умову Ліпшиця за третьою змінною, оскільки, використавши нерівності (4), (5) та зображення (74), очевидним чином будемо мати

$$|\Omega(t,s,\xi) - \Omega(t,s,\eta)| \le T(t,s)|\xi - \eta| \qquad \forall \{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}, \tag{75}$$

де

$$T(t,s) = |D(t)p(s)| + |N(t,s)q(s)|, \tag{76}$$

а по-друге, існують додатні сталі ν та ζ, зокрема мінімальні, такі, що для довільної функції $w(t)$ із $L_2([a,b])$ виконуються нерівності

$$\int_a^b \left| \int_a^b M(t,s)w(s)\,ds \right|^2 dt \le \nu^2 \int_a^b |w(s)|^2\,ds, \tag{77}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b T(t,s)w(s)\,ds \right|^2 dt \le \zeta^2 \int_a^b |w(s)|^2\,ds. \tag{78}$$

Тепер неважко встановити, що оператор $(Ay)(t)$, який є правою частиною рівняння (53), задовольняє умову Ліпшиця, тобто

$$\|Ay - Az\| \le \rho\|y - z\| \quad \forall \{y, z\} \subset L_2([a,b]), \tag{79}$$

де $\|\cdot\|$ — норма в $L_2([a,b])$ і

$$\rho = \nu + \varepsilon\zeta. \tag{80}$$

Справді, оскільки

$$(Ay)(t) - (Az)(t) = \int_a^b M(t,s)(y(s) - z(s))\,ds + \varepsilon \int_a^b (\Omega(t,s,y(s)) - \Omega(t,s,z(s))\;ds, \tag{81}$$

а на основі нерівностей (75) та (78) маємо

$$\int_a^b \left| \int_a^b (\Omega(t,s,y(s)) - \Omega(t,s,z(s)))\;ds \right|^2 dt \le \int_a^b \left| \int_a^b T(t,s)(y(s) - z(s))\,ds \right|^2 dt \le \zeta^2 \|y - z\|^2, \tag{82}$$

то із формули (81) і нерівностей (77), (82) нерівність (79) випливає очевидним чином.

Як відомо, за умови $\rho < 1$ оператор A є оператором стиску, отже, рівняння (53) має єдиний розв'язок, а згідно з теоремою 2 за цієї умови існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3). Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо матриця Λ невироджена і виконується умова $\rho < 1$, де ρ визначається формулою (80), то існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3).*

5. Приклад. Проілюструємо деякі теоретичні твердження на простому прикладі

$$y(t) = u(t) - 13\sqrt{t} + \int_0^1 \left(15\sqrt{ts} + 21\right) y(s)\,ds + \varepsilon \int_0^1 (\sqrt{t}s + 5)\cos(\pi\sqrt{s}y(s))\,ds, \tag{83}$$

$$\int_0^1 5ty(t)\,dt = 4 + \varepsilon \int_0^1 \sin(\pi\sqrt{t}y(t))\,dt, \quad u(t) = 6\lambda, \quad t \in [0,1]. \tag{84}$$

Для цього зведемо задачу (83), (84) до інтегрального рівняння (53).

Нехай $n = 1$ і $Q(s) = 1$, а

$$P(t) = \int_0^1 (15\sqrt{ts} + 21)\,ds = 10\sqrt{t} + 21.$$

Тоді допоміжна задача для даного прикладу має вигляд

$$y(t) = 6\lambda + (10\sqrt{t} + 21)\mu + z(t), \tag{85}$$

$$\int_0^1 5ty(t)\,dt = \beta, \quad \int_0^1 y(t)\,dt = \mu. \tag{86}$$

Для визначення невідомих параметрів λ та μ, підставивши (85) у (86) і виконавши відповідні обчислення, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} 30\lambda + 145\mu &= 2\beta - 10\int_0^1 tz(t)\,dt, \\ 18\lambda + 80\mu &= -3\int_0^1 z(t)\,dt. \end{aligned} \tag{87}$$

Система (87) має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{42}\left(-32\beta + \int_0^1 (160s - 87)z(s)\,ds\right), \\ \mu &= \frac{1}{35}\left(6\beta + \int_0^1 (15 - 30s)\ z(s)\,ds\right), \end{aligned} \tag{88}$$

а підставивши (88) у (85), отримаємо

$$y(t) = \frac{2}{35}\left(30\sqrt{t} - 17\right)\beta + z(t) - \frac{2}{7}\int_0^1 \left(7s + \left(5\sqrt{t} - 4\right)(6s - 3)\right)\ z(s)\,ds. \tag{89}$$

Зазначимо, що для даного прикладу, по-перше, згідно з формулою (39) маємо

$$B(t,s) = 5\sqrt{t}(3\sqrt{s} - 2), \tag{90}$$

а по-друге, з урахуванням позначень (40) – (42) формули (45) наберуть вигляду

$$z(t) = -13\sqrt{t} + \int_0^1 5\sqrt{t}\left(3\sqrt{s} - 2\right)\ y(s)\,ds + \varepsilon\int_0^1 (\sqrt{t}s + 5)\cos(\pi\sqrt{s}y(s))\,ds, \tag{91}$$

$$\beta = 4 + \int_0^1 \sin(\pi\sqrt{t}y(t))\,dt. \tag{92}$$

Підставивши вирази (91), (92) у формулу (89) і виконавши нескладні обчислення, отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) = \frac{1}{7}(9\sqrt{t}+4) + \frac{3}{7}\int\limits_0^1 \left(5\sqrt{t}-4\right)(3\sqrt{s}-2)\,y(s)\,ds +$$

$$+\frac{\varepsilon}{35}\int\limits_0^1 \Big((60\sqrt{t}-34)\sin(\pi\sqrt{s}y(s)) + (15\sqrt{t}-12)s\cos(\pi\sqrt{s}y(s)\Big)\,ds. \qquad (93)$$

Таким чином, задача (83), (84) звелась, як стверджується в теоремі 1, до рівнозначного інтегрального рівняння (93).

Розглянемо питання існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння (93). Для цього досить знайти сталі ν та ζ, точні чи їхні оцінки зверху в нерівностях (77) і (78).

На основі порівняльного аналізу формул (16), (28) і (53), (52) з формулами (89) та (93) відповідно приходимо до висновку, що

$$D(t) = \frac{2}{35}(30\sqrt{t}-17), \quad R(t,s) = \frac{2}{7}(7s + (5\sqrt{t}-4)(6s-3)), \qquad (94)$$

$$M(t,s) = \frac{3}{7}(5\sqrt{t}-4)(3\sqrt{t}-2), \quad N(t,s) = \frac{3}{35}(5\sqrt{t}-4)\,s. \qquad (95)$$

При цьому зауважимо, що ці вирази можна безпосередньо знайти, якщо виконати певні обчислення за формулами (26), (27), (50) та (51).

Оскільки для даного прикладу

$$E(t,\xi) = \sin(\pi\sqrt{t}\xi), \quad F(t,\xi) = \cos(\pi\sqrt{t}\xi),$$

то для цих функцій умови (4), (5) виконуються і в них

$$p(t) = q(t) = \pi\sqrt{t}. \qquad (96)$$

Отже, використовуючи формули (76), (94) – (96), маємо

$$T(t,s) = \frac{2\pi}{35}|30\sqrt{t}-17|\sqrt{s} + \frac{3\pi}{35}\left|5\sqrt{t}-4\right|\,s\sqrt{s}. \qquad (97)$$

Як відомо, мінімальними додатними сталими ν та ζ в нерівностях (77), (78) є норми інтегральних операторів, ядра яких визначаються формулами (50) та (56) відповідно. Оскільки точне значення норм можна знайти лише у виняткових випадках, широко використовуються різні їхні оцінки зверху.

З огляду на явні вигляди (95) та (97) ядер згаданих операторів обчислимо величини

$$\nu = \frac{3}{7}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (5\sqrt{t}-4)^2\,(3\sqrt{s}-2)^2\,ds\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{33}}{14},$$

$$\zeta = \frac{2\pi}{35}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (30\sqrt{t}-17)^2 s\,ds\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3\pi}{35}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (5\sqrt{t}-4)^2 s^3\,ds\,dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{118}}{35}\,\pi + \frac{\sqrt{66}}{140}\,\pi = \frac{\pi}{140}\left(4\sqrt{118}+\sqrt{66}\right)$$

і зазначимо, що ν — це норма, а ζ — лише оцінка норми відповідних конкретних операторів. Отже, формула (80) набере вигляду

$$\rho = \frac{\sqrt{33}}{14} + \frac{\pi\varepsilon}{140}\left(4\sqrt{118}+\sqrt{66}\right).$$

Якщо справджується умова

$$\varepsilon < \frac{10\left(14-\sqrt{33}\right)}{4\sqrt{118}+\sqrt{66}}, \tag{98}$$

то, очевидно, виконується нерівність $\rho < 1$, а згідно з теоремою 3 при цій умові задача (83), (84) має єдиний розв'язок.

6. Апроксимаційно-ітеративний метод. Висвітлимо суть апроксимаційно-ітеративного методу. Для цього спочатку вибираємо певним чином матриці $P(t)$ та $Q(s)$ і будуємо за формулою (39) функцію $B(t,s)$. Нехай наближення $(y_{k-1}(t), u_{k-1}(t))$ вже побудоване, тоді знаходимо

$$x_k(t) = f(t) + \int\limits_a^b B(t,s)y_{k-1}(s)\,ds, \tag{99}$$

$$v_k(t) = \int\limits_a^b H(t,s)F(s,y_{k-1}(s))\,ds, \tag{100}$$

$$\gamma_k = \int\limits_a^b E(t,y_{k-1}(t))\,dt \tag{101}$$

і наступне наближення визначаємо із задачі

$$y_k(t) = u_k(t) + \int\limits_a^b P(t)Q(s)y_k(s)\,ds + x_k(t) + \varepsilon v_k(t), \tag{102}$$

$$\int\limits_a^b S(t)y_k(t)\,dt = \alpha + \varepsilon\gamma_k, \tag{103}$$

в якій

$$u_k(t) = C(t)\lambda_k. \tag{104}$$

Початкове наближення знаходимо із задачі (102) – (104) при $k = 0$ і довільно заданих функціях $x_0(t)$, $v_0(t)$ і векторі γ_0.

За умови, що матриця Λ, яка визначається формулою (14), невироджена, метод (99) – (104) рівнозначний методу послідовних наближень щодо інтегрального рівняння (53). Справді, оскільки задача (102) – (104) має вигляд задачі (43), (44), розв'язок якої зображається формулами (46), (47), то, враховуючи їх і позначення (26), (27), маємо

$$y_k(t) = D(t)\alpha + x_k(t) - \int_a^b R(t,s)x_k(s)\,ds + \varepsilon\left(D(t)\gamma_k + v_k(t) - \int_a^b R(t,s)v_k(s)\,ds\right), \tag{105}$$

$$u_k(t) = \Pi(t)\alpha - \int_a^b \Gamma(t,s)x_k(s)\,ds + \varepsilon\left(\Pi(t)\gamma_k - \int_a^b \Gamma(t,s)v_k(s)\,ds\right). \tag{106}$$

Якщо підставити вирази (99) – (101) у (105), (106), використати позначення (49) – (52) і ввести нові

$$\eta(t) = \Pi(t)\alpha - \int_a^b \Gamma(t,s)f(s)\,ds, \tag{107}$$

$$\Phi(t,s) = -\int_a^b \Gamma(t,\xi)B(\xi,s)\,d\xi, \quad \Psi(t,s) = -\int_a^b \Gamma(t,\xi)H(\xi,s)\,d\xi, \tag{108}$$

$$\Theta(t,s,\xi) = \Pi(t)E(s,\xi) + \Psi(t,s)F(s,\xi), \tag{109}$$

то отримаємо

$$y_k(t) = g(t) + \int_a^b M(t,s)y_{k-1}(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b \Omega(t,s,y_{k-1}(s))\,ds, \tag{110}$$

$$u_k(t) = \eta(t) + \int_a^b \Phi(t,s)y_{k-1}(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b \Theta(t,s,y_{k-1}(s))\,ds. \tag{111}$$

Отже, дослідження апроксимаційно-ітеративного методу (99) – (104) звелося до дослідження методу послідовних наближень (110) щодо інтегрального рівняння (53), достатні умови збіжності якого широко відомі.

Зазначимо, що функція (109) існує за умови, коли матриця Λ невироджена, і, як це випливає із нерівностей (4), (5), задовольняє умову Ліпшиця

$$|\Theta(t,s,\xi) - \Theta(t,s,\eta)| \leq L(t,s)|\xi - \eta| \quad \forall\{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R} \tag{112}$$

з функцією

$$L(t,s) = |\Pi(t)p(s)| + |\Psi(t,s)q(s)|\,. \tag{113}$$

Беручи до уваги нерівність (112), як і при отриманні нерівності (79), встановлюємо, що інтегральний оператор $(Uy)(t)$, який визначається правою частиною співвідношення (111), задовольняє умову Ліпшиця

$$\|Uy - Uz\| \leq \omega\|y - z\| \quad \forall\{y,z\} \subset L_2([a,b]) \tag{114}$$

з константою $\omega = \chi + \varepsilon\theta$, де χ та θ — норми чи їхні оцінки зверху лінійних інтегральних операторів, ядра яких мають вигляд (108) та (113), тобто виконуються нерівності, аналогічні нерівностям (77), (78).

Теорема 4. *Якщо матриця Λ, що визначається формулою (14), невироджена і виконується умова $\rho < 1$, де ρ знаходиться за формулою (80), то існує єдиний розв'язок $(y^*(t), u^*(t))$ задачі (1) – (3) і послідовність $\{y_k(t), u_k(t), k \geq 0\}$, побудована за апроксимаційно-ітеративним методом (99) – (104), збігається за нормою в $L_2([a,b])$ до цього розв'язку, тобто*

$$\lim_{k\to\infty} y_k(t) = y^*(t), \quad \lim_{k\to\infty} u_k(t) = u^*(t). \tag{115}$$

Правильними є оцінки похибки

$$\| y^* - y_k \| \leq \rho^k \| y^* - y_0 \|, \tag{116}$$

$$\| y^* - y_k \| \leq \frac{\rho^m}{1-\rho} \| y_{k-m+1} - y_{k-m} \|, \quad 1 \leq m \leq k, \tag{117}$$

$$\| u^* - u_k \| \leq \omega \| y^* - y_k \|, \tag{118}$$

де ω — величина, що фігурує в нерівності (114).

Доведення. За умови $\rho < 1$, як відомо, існує єдиний розв'язок $y^*(t)$ інтегрального рівняння (53) і послідовність $\{y_k(t), k \geq 0\}$, побудована за формулою (110), збігається до цього розв'язку, тобто правильним є перше співвідношення (115), а також справджуються нерівності (116) та (117).

Згідно з теоремою 3 задача (1) – (3) має єдиний розв'язок $(y^*(t), u^*(t))$, до того ж $u^*(t) = C(t)\lambda^*$. Якщо в цьому співвідношенні замінити параметр λ^* його значенням, яке отримаємо при підстановці виразів (55) – (57) у формулу (59), і використати позначення (107) – (109), то одержимо

$$u^*(t) = \eta(t) + \int_a^b \Phi(t,s)y^*(s)\,ds + \varepsilon\int_a^b \Theta(t,s,^*(s))\,ds. \tag{119}$$

Із формул (111), (119) та (114) очевидним чином випливає правильність оцінки (118), викорисовуючи яку та перше співвідношення (115), переконуємось, що $\|u_k - u^*\| \to 0$ при $k \to \infty$, а отже, правильним є і друге співвідношення (115).

Застосуємо апроксимаційно-ітеративний метод (99) – (104) до задачі (83), (84). В цьому випадку наближені розв'язки знаходимо із задачі

$$y_k(t) = u_k(t) + \int_0^1 (10\sqrt{t} + 21)y_k(s)\,ds + x_k(t) + \varepsilon v_k(t), \tag{120}$$

$$\int_0^1 5\,ty_k(t)\,dt = 4 + \varepsilon\gamma_k, \quad u_k(t) = 6\lambda_k, \tag{121}$$

в якій з урахуванням формули (90)

$$x_k(t) = -13\sqrt{t} + \int_0^1 5\sqrt{t}\left(3\sqrt{s} - 2\right)y_{k-1}(s)\,ds, \tag{122}$$

$$v_k(t) = \int_0^1 (\sqrt{t}s + 5)\cos(\pi\sqrt{s}y_{k-1}(s))\,ds, \tag{123}$$

$$\gamma_k = \int_0^1 \sin(\pi\sqrt{s}y_{k-1}(s))\,ds. \tag{124}$$

Покладемо $\varepsilon = 10^{-2}$ і зазначимо, що в цьому випадку умова (98) виконується, тобто задача (83), (84) має єдиний розв'язок

$$y^*(t) = 2\sqrt{t}, \quad u^*(t) = -28, \tag{125}$$

в чому можна переконатися, виконавши відповідні обчислення.

Нехай $x_0(t) = -13\sqrt{t}$, $v_0(t) = 0$ і $\gamma_0 = 0$, тоді для знаходження початкового наближення отримаємо задачу

$$y_0(t) = u_0(t) - 13\sqrt{t} + \int_0^1 (10\sqrt{t} + 21) y_0(s)\, ds, \quad \int_0^1 5 s y_0(s)\, ds = 4, \quad u_0(t) = 6\lambda_0,$$

розв'язавши яку, матимемо

$$y_0(t) = \frac{1}{7}(9\sqrt{t} + 4), \quad u_0(t) = -29\,\frac{3}{7}. \tag{126}$$

Для побудови першого наближення використовуємо формули (122) – (124) при $k = 1$ і, виконавши обчислення з точністю до 10^{-5}, отримаємо

$$x_1(t) = -11,92857\sqrt{t}, \quad v_1(t) = -0,75348 - 0,06620\sqrt{t}, \quad \gamma_1 = -0,58570.$$

Тоді задача (120), (121) набере вигляду

$$y_1(t) = u_1(t) + \int_0^1 (10\sqrt{t} + 21) y_1(s)\, ds - 11,92923\sqrt{t} - 0,00753,$$

$$\int_0^1 5 t y_1(t)\, dt = 3,99941, \quad u_1(t) = 6\lambda_1,$$

а розв'язавши її, будемо мати перше наближення

$$y_1(t) = 1,74361\sqrt{t} + 0,20488, \quad u_1(t) = -28,50056. \tag{127}$$

Продовжуючи цей процес далі, можна отримати друге і вищі наближення, зокрема

$$y_2(t) = 1,90832\sqrt{t} + 0,07334, \quad u_2(t) = -28,18069, \tag{128}$$

$$y_3(t) = 1,96723\sqrt{t} + 0,02621, \quad u_3(t) = -28,06463. \tag{129}$$

Наскільки відхиляються побудовані наближення від точного розв'язку задачі (83), (84), видно із порівняння формул (125) – (129).

7. Окремі випадки. Якщо в апроксимаційно-ітеративному методі вважати $P(t)Q(s) = 0$, то він вироджується в ітераційний метод, суть якого висвітлено в [1].

Нехай матриця $Q(s)$ задана, а матриця $P(t)$ визначається з умови

$$\int_a^b \left(K(t,s) - P(t)Q(s)\right) X(s)\, ds = 0, \tag{130}$$

або, навпаки, матриця $P(t)$ задана, а матриця $Q(s)$ знаходиться з умови

$$\int_a^b \Upsilon(t)\left(K(t,s) - P(t)Q(s)\right)\,dt = 0. \tag{131}$$

Якщо $(1 \times n)$-матрицю $X(s)$ чи $(n \times 1)$-матрицю $\Upsilon(t)$ підібрано таким чином, що рівняння (130) чи (131) має лише єдиний розв'язок, то в цих випадках апроксимаційно-ітеративний метод збігається із проекційно-ітеративними методами, застосуванням яких до інтегральних, диференціальних чи інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем з обмеженнями присвячено низку праць, зокрема [3 – 7].

1. *Лучка А. Ю., Мельничук В. Ф.* Ітераційний метод для квазілінійних інтегральних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 14. — С. 496 – 506.
2. *Лучка А. Ю.* Загальний підхід до побудови методів апроксимаційно-ітеративного типу // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». — 2000. — № 3. — С. 212 – 216.
3. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 3. — С. 82 – 96.
4. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язування рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1501 – 1509.
5. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з обмеженнями // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Пр. Укр. мат. конгр. (Київ, 2002 р.). — 2002. — С. 43 – 59.
6. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 672 – 679.
7. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Побудова наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 361 – 378.

Одержано 18.11.10,
після доопрацювання — 09.03.11