

НАХОЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ ЧАСТОТ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ 14-ТИ ТЕЛ С НЕПОЛНОЙ СИММЕТРИЕЙ

А. В. Чичурин

Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина

Республика Беларусь, 224016, Брест, бульвар Космонавтов, 21

e-mail: achichurin@gmail.com

A Lyapunov stability study of stationary solutions of bounded problems in space dynamics first of all means finding resonance frequencies in the linear stability intervals for the solutions. In this paper, we consider a bounded space dynamics problem for 14 bodies with an incomplete symmetry. We find intervals for linear stability of and calculate resonance frequencies for the intervals. We also construct graphs showing the frequency dependence on the geometric parameters of the configuration. We prove that there are two resonance frequencies and give their numerical values.

Дослідження стійкості в сенсі Ляпунова стаціонарних розв'язків обмежених задач космічної динаміки насамперед передбачає знаходження резонансів частот із інтервалів лінійної стійкості цих розв'язків. У роботі розглядається обмежена задача космічної динаміки для чотирнадцяти тіл з неповною симетрією. Наведено інтервали лінійної стійкості, і для них обчислено резонанси частот. Для останніх побудовано графіки залежності від геометричних параметрів конфігурації. Доведено, що існують два частотних резонанси, і наведено їх числові значення.

Введение. Проблема доказательства устойчивости в смысле Ляпунова для частных решений гамильтоновых систем является одной из наиболее трудных в качественной теории дифференциальных уравнений. Известно утверждение самого Ляпунова о том, что проблема устойчивости решений гамильтоновых уравнений не может быть решена ни на каком конечном шаге приближений [1]. Основная трудность при применении первого метода Ляпунова состоит в том, что матрица линейного приближения гамильтоновых систем в окрестности любого положения равновесия является симплектической [2]. В середине прошлого столетия для решения задач аналитической динамики была разработана теория квазипериодических решений дифференциальных уравнений, определенных на многомерных торах. В частности, для исследования проблемы устойчивости в смысле Ляпунова положений равновесия гамильтоновых систем четвертого порядка, возможно применение теоремы Арнольда – Мозера [3, 4]. Первым этапом при использовании данного метода является определение резонансных точек в интервалах линейной устойчивости.

Рассмотрим ограниченную кольцеобразную задачу с неполной симметрией [5] для четырнадцати тел $P_0, P_i, i = \overline{1,13}$, с массами $m_0, m_i, i = \overline{1,12}, \mu$ соответственно. Тела взаимно притягиваются между собой в соответствии с законом всемирного тяготения и двигаются в одной плоскости. При движении тела $P_i, i = \overline{1,12}$, образуют два правильных шестиугольника, равномерно вращающихся вокруг тела P_0 с угловой скоростью ω (рис. 1).

Угловая скорость вращения точно определяется из условия теоремы Банка – Эльмабсута [6], а также из динамических и гравитационных параметров модели. Параметр μ

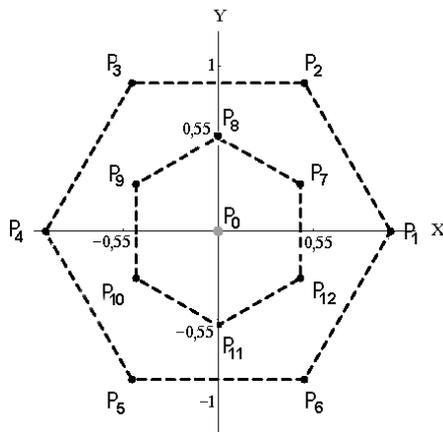


Рис. 1. Модель из 13-ти тел с неполной симметрией ($p = 2, \alpha = 0,55$).

является бесконечно малой величиной. Существование таких динамических моделей доказано в работах [3, 7].

Математическая модель ограниченной задачи 14-ти тел с неполной симметрией описывается во вращающейся системе координат P_0xyz системой дифференциальных уравнений [8]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 x + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 y + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1)$$

где

$$U(x, y, z) = f \left(\frac{m_0}{\Delta_0} + m_1 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\Delta_i} + m_2 \sum_{j=1}^6 \frac{1}{\Delta_j} \right),$$

$$\Delta_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Delta_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2},$$

$$x_i = \cos \frac{2\pi(i-1)}{6}, \quad y_i = \sin \frac{2\pi(i-1)}{6}, \quad z_i = 0, \quad i = \overline{1,6},$$

$$\Delta_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}, \quad x_j = \cos \left(\frac{2\pi(j-1)}{6} + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$y_j = \sin \left(\frac{2\pi(j-1)}{6} + \frac{\pi}{6} \right), \quad z_j = 0, \quad j = \overline{1,6},$$

а ω^2 определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_l^2 x_{lk} = & \frac{m_0 x_{lk}}{(x_{lk}^2 + y_{lk}^2)^{3/2}} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^6 \frac{x_{lk} - x_{rj}}{((x_{lk} - x_{rj})^2 + (y_{lk} - y_{rj})^2)^{3/2}} + \\ & + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 \frac{x_{lk} - x_{lj}}{((x_{lk} - x_{lj})^2 + (y_{lk} - y_{lj})^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \omega_l^2 y_{lk} = & \frac{m_0 y_{lk}}{(x_{lk}^2 + y_{lk}^2)^{3/2}} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^6 \frac{y_{lk} - y_{rj}}{((x_{lk} - x_{rj})^2 + (y_{lk} - y_{rj})^2)^{3/2}} + \\ & + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 \frac{y_{lk} - y_{lj}}{((x_{lk} - x_{lj})^2 + (y_{lk} - y_{lj})^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Здесь l — номер окружности ($l = 1, 2$), k — номер вершины на заданной окружности, q_{lk} — любая координата точки $P_{l,k}$:

$$P_1 : x_{11} = 1, y_{11} = 0, \quad P_2 : x_{12} = \frac{1}{2}, y_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P_3 : x_{13} = -\frac{1}{2}, y_{13} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad P_4 : x_{14} = -1, y_{14} = 0,$$

$$P_5 : x_{15} = -\frac{1}{2}, y_{15} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad P_6 : x_{16} = \frac{1}{2}, y_{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P_7 : x_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{21} = \frac{1}{2}\alpha, \quad P_8 : x_{22} = 0, y_{22} = \alpha,$$

$$P_9 : x_{23} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{23} = \frac{1}{2}\alpha, \quad P_{10} : x_{24} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{24} = -\frac{1}{2}\alpha,$$

$$P_{11} : x_{25} = 0, y_{25} = -\alpha, \quad P_{12} : x_{26} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, y_{26} = -\frac{1}{2}\alpha.$$

Замечание 1. Условия (2) следуют из теоремы Банка–Эльмабсута [6] и являются условиями существования точных гомографических решений в задаче взаимно притягивающихся 13-ти тел.

Способ нахождения положений равновесия рассматриваемой задачи, ее визуализация (рис. 2), а также координаты положений равновесия приведены в [8].

Решение задачи. Для определения частотных резонансов в ограниченных задачах многих тел с неполной симметрией необходимо найти нули функции

$$f_{k_1, k_2}(m_1, \alpha) = k_1 \sigma_1(m_1, \alpha) + k_2 \sigma_2(m_1, \alpha)$$

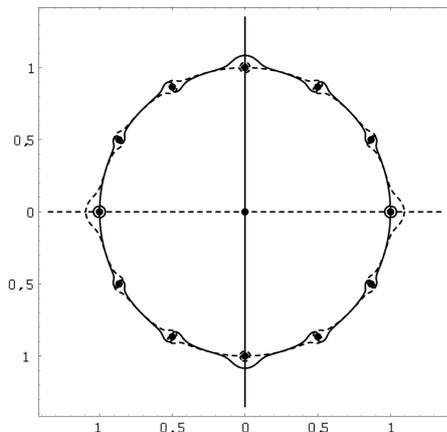


Рис. 2. Точки равновесия (точки пересечения сплошной и штриховой кривых) при $m = 0,0002$.

в зависимости от параметров m_1 и α в следующих вариантах пар целых чисел (k_1, k_2) [5, 9]:

$$(1, -1), (1, -2), (1, -3), (2, -1), (2, -2), (3, -1). \tag{3}$$

Выберем, например, $m_1 = 0,0002$. Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 2\omega \\ b & c & -2\omega & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a = & \frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \omega^2 - \left(\frac{1}{((x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(x - 1)^2}{((x - 1)^2 + y^2)^{5/2}} + \right. \\ & + \frac{1}{((x - 1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3(x + 1)^2}{((x + 1)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x + 1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3(x - \frac{1}{2})^2}{((x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \\ & + \frac{1}{((x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(x + \frac{1}{2})^2}{((x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \\ & \left. - \frac{3(x - \frac{1}{2})^2}{((x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(x + \frac{1}{2})^2}{((x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} \right) m_1 - \\ & - \left(\frac{1}{(x^2 + (y - \alpha)^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + (y - \alpha)^2)^{5/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + (y + \alpha)^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + (y + \alpha)^2)^{3/2}} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3(x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \\
& + \frac{1}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} - \\
& - \frac{3(x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} \Big) m_2, \\
b = & \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \left(\frac{3(x-1)y}{((x-1)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{3(x+1)y}{((x+1)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{3(x-\frac{1}{2})(y-\frac{\sqrt{3}}{2})}{((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \right. \\
& + \frac{3(x+\frac{1}{2})(y-\frac{\sqrt{3}}{2})}{((x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \frac{3(x-\frac{1}{2})(y+\frac{\sqrt{3}}{2})}{((x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \left. \frac{3(x+\frac{1}{2})(y+\frac{\sqrt{3}}{2})}{((x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} \right) m_1 + \\
& + \left(\frac{3x(y-\alpha)}{(x^2 + (y-\alpha)^2)^{5/2}} + \frac{3x(y+\alpha)}{(x^2 + (y+\alpha)^2)^{5/2}} + \frac{3(x-\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})(y-\frac{\alpha}{2})}{((x-\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y-\frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \right. \\
& + \frac{3(x-\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})(y+\frac{\alpha}{2})}{((x-\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y+\frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{3(x+\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})(y-\frac{\alpha}{2})}{((x+\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y-\frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \\
& \left. + \frac{3(x+\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})(y+\frac{\alpha}{2})}{((x+\frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y+\frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} \right) m_2, \\
c = & \frac{3y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \omega^2 - \left(\frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{((x-1)^2 + y^2)^{5/2}} + \right. \\
& + \frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{((x+1)^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \\
& + \frac{1}{((x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{((x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \\
& - \frac{3(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{((x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{3/2}} - \left. \frac{3(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{((x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^{5/2}} \right) m_1 - \\
& - \left(\frac{1}{(x^2 + (y-\alpha)^2)^{3/2}} - \frac{3(y-\alpha)^2}{(x^2 + (y-\alpha)^2)^{5/2}} - \frac{3(y+\alpha)^2}{(x^2 + (y+\alpha)^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + (y+\alpha)^2)^{3/2}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3(y - \frac{\alpha}{2})^2}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(y + \frac{\alpha}{2})^2}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \\
 & + \frac{1}{((x - \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} - \frac{3(y - \frac{\alpha}{2})^2}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y - \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} - \\
 & - \frac{3(y + \frac{\alpha}{2})^2}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{5/2}} + \frac{1}{((x + \frac{\sqrt{3}\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\alpha}{2})^2)^{3/2}} \Big) m_2
 \end{aligned}$$

для точки S_1 (рис. 2) приведены в табл. 1.

Таблица 1

| α | Координаты (x, y) точки S_1 | Собственные значения матрицы (4) | | | |
|----------|---------------------------------|----------------------------------|------------|-----------|------------|
| 0,99988 | (0,977449; 0,212234) | 0,748037i | -0,748037i | 0,63709i | -0,63709i |
| 0,99989 | (0,976874; 0,214852) | 0,773953i | -0,773953i | 0,606216i | -0,606216i |
| 0,9999 | (0,976258; 0,217617) | 0,792771i | -0,792771i | 0,582306i | -0,582306i |
| 0,99991 | (0,975597; 0,220545) | 0,808222i | -0,808222i | 0,561618i | -0,561618i |
| 0,99992 | (0,974886; 0,223654) | 0,821612i | -0,821612i | 0,542837i | -0,542837i |
| 0,99993 | (0,974116; 0,226965) | 0,833581i | -0,833581i | 0,525307i | -0,525307i |
| 0,99994 | (0,973281; 0,230506) | 0,844501i | -0,844501i | 0,508644i | -0,508644i |
| 0,99995 | (0,972369; 0,234305) | 0,85461i | -0,85461i | 0,492592i | -0,492592i |
| 0,99996 | (0,971369; 0,238401) | 0,864074i | -0,864074i | 0,476968i | -0,476968i |
| 0,99997 | (0,970264; 0,242839) | 0,873012i | -0,873012i | 0,461627i | -0,461627i |
| 0,99998 | (0,969036; 0,247677) | 0,881517i | -0,881517i | 0,44645i | -0,44645i |
| 0,99999 | (0,967659; 0,252988) | 0,889663i | -0,889663i | 0,431331i | -0,431331i |
| 1,0000 | (0,966098; 0,258865) | 0,897511i | -0,897511i | 0,416168i | -0,416168i |
| 1,00001 | (0,964308; 0,265435) | 0,905114i | -0,905114i | 0,400855i | -0,400855i |
| 1,00002 | (0,962224; 0,272871) | 0,912523i | -0,912523i | 0,385276i | -0,385276i |
| 1,00003 | (0,959753; 0,281419) | 0,919787i | -0,919787i | 0,369293i | -0,369293i |
| 1,00004 | (0,956747; 0,291451) | 0,926961i | -0,926961i | 0,352728i | -0,352728i |
| 1,00005 | (0,952963; 0,30357) | 0,934113i | -0,934113i | 0,335329i | -0,335329i |
| 1,00006 | (0,94795 ; 0,318853) | 0,941341i | -0,941341i | 0,316703i | -0,316703i |

Очевидно, что в рассматриваемом интервале изменений расстояния α точка равновесия S_1 является устойчивой в линейном приближении.

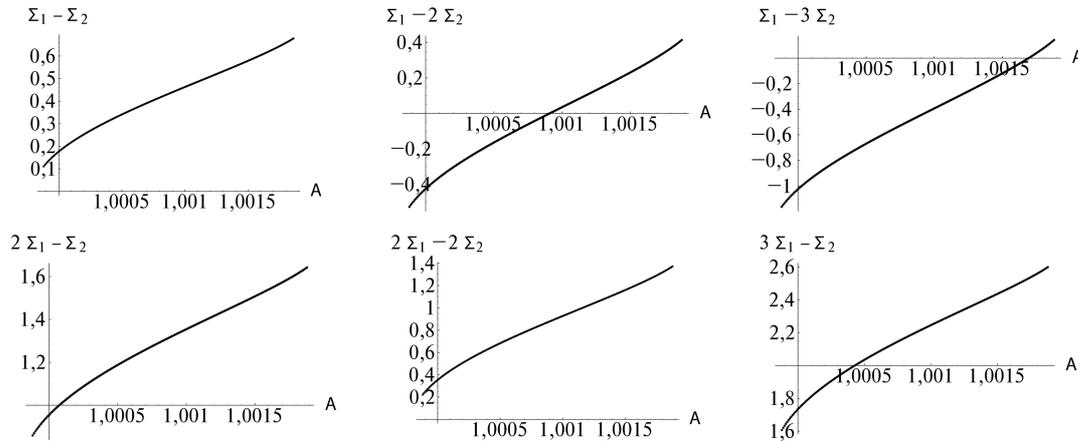
Графики функции $f_{k_1, k_2}(\alpha)$ для значений k_1, k_2 вида (3) построены на рис. 3.

Построим аппроксимационные интерполяционные функции на основе таблиц, вычисляемых аналогично табл. 1. Затем, используя итерационный метод Ньютона, найдем нули построенных функций

$$\alpha = 0,9999829559822183 \dots, \tag{5}$$

$$\alpha = 1,0000613277519275 \dots \tag{6}$$

Можно проверить, что для значений параметра α вида (5) и (6) собственные значения матрицы (4) удовлетворяют резонансным соотношениям.

Рис. 3. Графики функции $f_{k_1, k_2}(\alpha)$ для значений k_1, k_2 вида (3).

Действительно, при $m_1 = 0,0002$, α вида (5) и точки S_1 с координатами $(0,968646; 0,249194)$ получаем собственные значения

$$0,883959 i, \quad -0,88396 i, \quad 0,44198 i, \quad -0,44198 i,$$

которые удовлетворяют равенству $\sigma_1 = 2\sigma_2$. При $m_1 = 0,0002$, α вида (6) и точки S_1 с координатами $(0,94715; 0,321217)$ получаем собственные значения

$$0,942315 i, \quad -0,942315 i, \quad 0,314105 i, \quad -0,314105 i,$$

удовлетворяющие равенству $\sigma_1 = 3\sigma_2$.

Для особых точек S_2, \dots, S_{12} результаты, в сущности, такие же. Аналогичные вычисления можно выполнить и для других значений параметра m_1 . Числовые значения резонансов приведены в табл. 2.

Таблица 2

| m_1 | $\sigma_1 = 2\sigma_2$ | | $\sigma_1 = 3\sigma_2$ | |
|--------|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| | α | σ_1, σ_2 | α | σ_1, σ_2 |
| 0,0001 | 0,9998842374024406... | 0,884058; 0,442029 | 0,9999769252344901... | 0,942359; 0,31412 |
| 0,0002 | 0,9999829559822183... | 0,88396; 0,44198 | 1,0000613277519275... | 0,942315; 0,314105 |
| 0,0003 | 1,0000684314549086... | 0,883914; 0,441957 | 1,0001295447408354... | 0,942340; 0,3141112 |
| 0,0005 | 1,000211700530294... | 0,883933; 0,4419665 | нет | |
| 0,0006 | нет | | нет | |

Замечание 2. Не представляется практически возможным вычислить абсолютно точно границы интервалов линейной устойчивости и значения масс при нахождении резонансов, так как компьютер не позволяет вычислять значения чисел с бесконечным числом знаков. С учетом этого сформулируем основной результат.

Теорема. Для масс $m_1 \leq 0,0003$ существуют два резонанса $\sigma_1 = 2\sigma_2$ и $\sigma_1 = 3\sigma_2$. Для масс $0,0003 < m_1 < 0,0006$ существует один резонанс $\sigma_1 = 2\sigma_2$. Для масс $m_1 \geq 0,0006$ резонансов не существует.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М., 1950. — 471 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
3. *Гребеников Е. А., Козак-Сковородкина Д., Якубяк М.* Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. — М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 2002. — 209 с.
4. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — 312 с.
5. *Ихсанов Е. В.* Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики. — М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 2004. — 132 с.
6. *Bank D., Elmabsout B.* Configurations polygonales en equilibre relative // C. r. Acad. sci. — 2001. — **329**, Ser. II b. — P. 243–248.
7. *Гребеников Е. А.* Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // Мат. моделирование. — 1998. — **10**, № 8. — С. 74–80.
8. *Гадомский Л., Ковальчук И. Р., Чичурин А. В.* Построение математических моделей для задач космической динамики в системе компьютерной алгебры „Mathematica”. — М.: Изд-во МАКС Пресс, 2007. — 112 с.
9. *Козак-Сковородкина Д.* Применение компьютерной системы *Mathematica* в качественных исследованиях ньютоновой проблемы многих тел. — М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 2005. — 146 с.

Получено 30.06.08