УДК 517.9

# ПРО ГЛОБАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**Л. М. Сергєєва, Я. Й. Бігун**

*Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича*
*Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2*

*We construct a linear differential system such that all its solutions are global solutions of a system of functional-differential equations. We substantiate existence of such a system, and examine some properties of its solutions.*

*Построена система линейных дифференциальных уравнений, все решения которой являются глобальными решениями системы функционально-дифференциальных уравнений. Обосновано существование такой системы, а также исследованы некоторые свойства ее решений.*

У багатьох моделях, в яких описується динаміка процесів в біології, екології, економіці та інших галузях [1, 2], важливо врахувати залежність їх швидкості в момент часу $t$ від стану процесу або його швидкості для $s \leq t$. Зокрема, це стосується систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням. Наприклад, такою є модель типу Мальтуса із змінним коефіцієнтом лінійного зростання

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t-\tau)$$

або більш загальна модель динаміки популяції [3]

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{t} H(t-s)x(s)ds,$$

де $x(t)$ — чисельність або біомаса популяції, $H$ — ядро, яке характеризує, яким чином поведінка розвитку видів популяції в минулому впливає на теперішній рівень зростання.

В цьому напрямі проводяться численні дослідження. Зокрема, системи функціонально-диференціальних рівнянь на $\mathbb{R}$ досліджувались у роботах [4–6].

А. М. Самойленко [7] запропонував апроксимувати систему лінійних рівнянь з відхиленням аргументу системою звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої були б розв'язками вихідної системи на $\mathbb{R}$. Цей підхід дозволив також встановити еквівалентність деяких властивостей розв'язків цих систем. Для систем рівнянь з лінійно перетвореним аргументом на півосі аналогічні питання досліджено в статті [8].

У роботах [9, 10] розглянуто застосування запропонованого методу для знаходження і дослідження глобальних розв'язків деяких типів функціонально-диференціальних рівнянь.

У даній роботі для системи функціонально-диференціальних рівнянь побудовано систему рівнянь без відхилення аргументу, всі розв'язки якої є глобальними розв'язками початкової системи. Розглянуто деякі окремі випадки, а також наведено обґрунтування методу.

© Л. М. Сергєєва, Я. Й. Бігун, 2011

Розглянемо систему функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)x(t+\eta)d\eta + f(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Як і в [7], побудуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t) + g(t), \tag{2}$$

всі розв'язки якої будуть глобальними розв'язками системи рівнянь (1). Припустимо, що $A(t,\cdot)$ при кожному $t \in \mathbb{R}$ є вимірною, а $A(\cdot,\eta)$ при кожному $\eta \in [-\lambda, 0]$ — неперервна матрична функція та існує інтегровна функція $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ така, що $\|A(t,\eta)\| \leq p(\eta)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\eta \in [-\lambda, 0]$ (такі умови гарантуватимуть неперервність інтеграла $\int_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)d\eta$, див. [11]), $C$ — $n$-вимірна матрична функція, $f$, $g$ — векторні функції.

Покажемо, що матрична функція $C = C(t)$ і вектор-функція $g = g(t)$ задовольняють рівняння вигляду

$$C(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta, \tag{3}$$

$$g(t) = f(t) + \int\limits_{-\lambda}^{0} \int\limits_{t}^{t+\eta} A(t,\eta)\Omega_s^{t+\eta}(C)\, g(s)\, ds\, d\eta. \tag{4}$$

Тут $\Omega_\tau^t(C)$ — фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь (2), яка визначається з рівняння

$$\Omega_\tau^t(C) = I + \int\limits_{\tau}^{t} C(s)ds + \int\limits_{\tau}^{t} C(s) \int\limits_{\tau}^{s} C(s_1)ds_1 ds + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{\tau}^{t} C(s) \int\limits_{\tau}^{s} C(s_1) \ldots \int\limits_{\tau}^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1} \ldots ds_1\, ds + \ldots,$$

де $I$ — одинична матриця. Загальний розв'язок системи рівнянь (2) визначається формулою Коші

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} \Omega_s^t(C)g(s)ds, \tag{5}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Функція (5) задовольняє систему рівнянь (1), якщо

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)\left[\Omega_\tau^t(C)x_0 + \int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds\right] + g(t) =$$

$$= \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\left[\Omega_\tau^{t+\eta}(C)x_0 + \int\limits_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)ds\right]d\eta + f(t). \qquad (6)$$

Покладаючи в (6) $x_0 = 0$, отримуємо

$$C(t)\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\int\limits_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)dsd\eta + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

З (6) і (7) випливає рівняння

$$C(t)\Omega_\tau^t(C) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_\tau^{t+\eta}(C)d\eta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи властивості матриці $\Omega_\tau^t(C)$, можна зробити висновок, що

$$C(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_\tau^{t+\eta}(C)d\eta(\Omega_t^\tau(C)) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta. \qquad (8)$$

Підставляючи (8) у (7), одержуємо

$$\int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_\tau^{t+\eta}(C)d\eta(\Omega_t^\tau(C))\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds + g(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\int\limits_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)\,ds\,d\eta + f(t).$$

Звідси випливає, що

$$g(t) = f(t) + \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\int\limits_\tau^{t+\eta} \Omega_s^{t+\eta}(C)g(s)dsd\eta -$$

$$- \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta\int\limits_\tau^t \Omega_s^t(C)g(s)ds =$$

$$= f(t) + \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_t^{t+\eta} A(t,\eta)\Omega_s^{t+\eta}(C)\,g(s)\,ds\,d\eta. \qquad (9)$$

Отже, якщо всі розв'язки системи рівнянь (2) є глобальними розв'язками системи рівнянь (1), то матриця $C(t)$ задовольняє рівняння (3), а вектор-функція $g(t)$ — рівняння (4) при $t \in \mathbb{R}$.

***Зауваження.*** В однорідному випадку рівняння (1), (2) наберуть вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)x(t+\eta)d\eta, \tag{10}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)x(t). \tag{11}$$

Розв'язок рівняння (11)

$$x(t) = \Omega_\tau^t(C)x_0 \tag{12}$$

задовольняє рівняння (10), якщо

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t)\Omega_\tau^t(C)x_0 = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_\tau^{t+\eta}(C)x_0 d\eta.$$

Звідси для матричної функції $C(t)$ маємо

$$C(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_\tau^{t+\eta}(C)d\eta(\Omega_t^\tau(C)) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta. \tag{13}$$

**Теорема 1.** *Нехай у системі диференціальних рівнянь (1) матрична функція* $A(t,\eta)$ *задовольняє накладені вище умови, функція* $f$ *визначена і вимірна за Лебегом та виконуються нерівності*

$$\| A(t,\eta) \| \leq \alpha, \quad \|f(t)\| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \eta \in [-\lambda, 0], \tag{14}$$

*до того ж*

$$2e^{\frac{2}{\mu}(\sqrt{1+\mu}-1)} < \sqrt{1+\mu}+1, \quad \mu = \frac{4}{\alpha\lambda^2}. \tag{15}$$

*Тоді існують визначені й вимірні на* $\mathbb{R}$ *розв'язки* $C$ *і* $g$ *рівнянь (3), (4) відповідно такі, що* $\|C\| \leq m$, $\|g\| \leq M$, *де* $m$ *і* $M$ *— деякі сталі, що залежать від* $|\lambda|$ *та* $\alpha$.

***Доведення.*** Розглянемо рівняння (3). Його розв'язки будуть неперервними функціями внаслідок умов, які накладено на матричну функцію $A(t,\eta)$. Визначимо оператор $S$ :

$$SC(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta \tag{16}$$

у просторі $\mathbb{C}(m)$ матриць $C = C(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$ і таких, що

$$\|C\|_0 = \sup_{t\in R}\|C(t)\| \leq m.$$

Тоді для $SC(t)$ справджується оцінка

$$\|SC\|_0 = \sup_{t\in R}\left|\int\limits_{-\lambda}^{0} \|A(t,\eta)\|e^{\eta m}d\eta\right| = \frac{\alpha}{m}\,|1-e^{-\lambda m}|.$$

Тому якщо виконується нерівність

$$\alpha|1-e^{-\lambda m}| \leq m^2, \tag{17}$$

то оператор $S$ переводить простір $\mathbb{C}(m)$ у себе.

Нехай $C, C_1 \in \mathbb{C}(m)$. Для різниці $SC_1(t) - SC(t)$ маємо

$$\|SC_1 - SC\| = \left\|\int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C_1)d\eta - \int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta\right\| =$$

$$= \left\|\int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\left[\Omega_t^{t+\eta}(C_1) - \Omega_t^{t+\eta}(C)d\eta\right]\right\| =$$

$$= \left\|\int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\left[\int\limits_{t}^{t+\eta} C_1(s)ds - \int\limits_{t}^{t+\eta} C(s)ds\; + \right.\right.$$

$$+ \int\limits_{t}^{t+\eta} C_1(s)\int\limits_{t}^{s} C_1(s_1)ds_1ds - \int\limits_{t}^{t+\eta} C(s)\int\limits_{t}^{s} C(s_1)ds_1ds + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{t}^{t+\eta} C_1(s)\int\limits_{t}^{s} C_1(s_1)\ldots\int\limits_{t}^{s_{n-2}} C_1(s_{n-1})ds_{n-1}\ldots ds_1ds -$$

$$\left.\left. - \int\limits_{t}^{t+\eta} C(s)\int\limits_{t}^{s} C(s_1)\ldots\int\limits_{t}^{s_{n-2}} C(s_{n-1})ds_{n-1}\ldots ds_1ds + \ldots\right]d\eta\right\|.$$

Побудуємо оцінку

$$\left\|\int\limits_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\int\limits_{t}^{t+\eta}(C_1(s) - C(s))ds\,d\eta\right\| \leq \alpha\left|\int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{t}^{t+\eta}\|C_1(s) - C(s)\|ds\,d\eta\right| \leq$$

$$\leq \alpha\frac{\lambda^2}{2}\,\|C_1 - C\|_0 = \frac{\alpha|\lambda|}{2m}\,\frac{|\lambda|m}{1!}\|C_1 - C\|_0.$$

Тоді

$$\left\| \int_{-\lambda}^{0} A(t,\eta) \left[ \int_t^{t+\eta} C_1(s) \int_t^s C_1(s_1) ds_1 ds - \int_t^{t+\eta} C(s) \int_t^s C(s_1) ds_1 ds \right] d\eta \right\| \le$$

$$\le \alpha \left\| \int_{-\lambda}^{0} \left[ \int_t^{t+\eta} C_1(s) \int_t^s C_1(s_1) ds_1 ds + \int_t^{t+\eta} C(s) \int_t^s C_1(s_1) ds_1 ds \right. \right. -$$

$$\left. \left. - \int_t^{t+\eta} C(s) \int_t^s C_1(s_1) ds_1 ds - \int_t^{t+\eta} C(s) \int_t^s C(s_1) ds_1 ds \right] d\eta \right\| \le$$

$$\le \alpha \left\| \int_{-\lambda}^{0} \left[ \int_t^{t+\eta} (C_1(s) - C(s)) \int_t^s C_1(s_1) ds_1 ds + \int_t^{t+\eta} C(s) \int_t^s (C_1(s) - C(s)) ds_1 ds \right] d\eta \right\| \le$$

$$\le \alpha \left| \int_{-\lambda}^{0} \left( \int_t^{t+\eta} \int_t^s \|C_1(s)\| ds_1 ds + \int_t^{t+\eta} \|C(s)\| \int_t^s ds_1 ds \right) d\eta \right| \|C_1 - C\|_0 \le$$

$$\le \alpha m \left| \int_{-\lambda}^{0} \left( \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{2} \right) d\eta \right| \|C_1 - C\|_0 = 2\alpha m \frac{|\lambda|^3}{3!} \|C_1 - C\|_0 = \frac{2\alpha|\lambda|}{3m} \frac{\lambda^2 m^2}{2!} \|C_1 - C\|_0.$$

Тому виконується нерівність

$$\left\| \int_{-\lambda}^{0} A(t,\eta) \left[ \int_t^{t+\eta} C_1(s) \int_t^s C_1(s_1) \ldots \int_t^{s_{n-2}} C_1(s_{n-1}) ds_{n-1} \ldots ds_1\, ds \right. \right. -$$

$$\left. \left. - \int_t^{t+\eta} C(s) \int_t^s C(s_1) \ldots \int_t^{s_{n-2}} C(s_{n-1}) ds_{n-1} \ldots ds_1\, ds + \ldots \right] d\eta \right\| \le$$

$$\le \alpha n m^{n-1} \frac{|\lambda|^{n+1}}{(n+1)!} \|C_1 - C\|_0 = \frac{\alpha n |\lambda|}{(n+1)m} \frac{|\lambda|^n m^n}{n!} \|C_1 - C\|_0.$$

Звідси випливає, що

$$\|SC_1(t) - SC(t)\| \le \left( \frac{\alpha|\lambda|}{2m} \frac{|\lambda| m}{1!} + \frac{2\alpha|\lambda|}{3m} \frac{\lambda^2 m^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha n |\lambda|}{(n+1)m} \frac{|\lambda|^n m^n}{n!} \right) \|C_1 - C\|_0 \le$$

$$\le \quad \frac{\alpha|\lambda|}{m} (e^{|\lambda| m} - 1) \|C_1 - C\|_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Оператор $S$ буде оператором стиску в $\mathbb{C}(m)$, якщо виконується нерівність

$$\frac{\alpha|\lambda|}{m}(e^{|\lambda|m} - 1) < 1. \tag{19}$$

Будемо вимагати одночасного виконання нерівностей (17) і (19). Нехай

$$2e^{\frac{\alpha\lambda^2}{2}(\sqrt{1+\frac{4}{\alpha\lambda^2}}-1)} - \sqrt{1 + \frac{4}{\alpha\lambda^2}} < 1, \tag{20}$$

тоді рівняння

$$\alpha|1 - e^{-\lambda m}| = m^2$$

матиме розв'язок такий, що

$$\frac{\alpha|\lambda|m}{\alpha - m^2} < 1.$$

Звідси одержуємо, що для

$$m < \frac{1}{2}(\sqrt{(\alpha\lambda)^2 + 4\alpha} - \alpha|\lambda|) \tag{21}$$

будуть одночасно виконуватись нерівності (17) і (19).

Розв'язавши наближено нерівність (20), отримаємо $\alpha\lambda < 4,6402\ldots$.

Отже, при виконанні нерівності (20) для значень $m$, які задовольняють нерівність (21), оператор $S$ є оператором стиску і відображає простір у себе. Тобто $S$ має у просторі $\mathbb{C}(m)$ єдину нерухому точку, яка і є розв'язком рівняння (3).

Розглянемо тепер рівняння (4). Виконавши в ньому заміну змінних $g = f + z$, отримаємо рівняння

$$z(t) = \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{t}^{t+\eta} A(t,\eta)\Omega_s^{t+\eta}(C)(f(s) + z(s))dsd\eta. \tag{22}$$

Визначимо оператор $S_1$ у просторі $\mathbb{C}(M)$ функцій $z = z(t)$, заданих і неперервних на $\mathbb{R}$, таких, що

$$\|z\|_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|z(t)\| \leq M.$$

Функція $S_1 z(t)$ буде неперервна на $\mathbb{R}$, до того ж

$$\|S_1 z\|_0 \leq \frac{\alpha(1+M)}{m^2}\,|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|.$$

Отже, якщо

$$\frac{\alpha(1+M)}{m^2}\,|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}| \leq M,$$

то оператор $S_1$ переводить простір $\mathbb{C}(M)$ у себе. Розглянемо різницю

$$\|S_1 z_1(t) - S_1 z_2(t)\| \leq \left( \int\limits_{-\lambda}^{0} \|A(t,\eta)\| \int\limits_{t}^{t+\eta} \|\Omega_s^{t+\eta}(C)\| \, ds \, d\eta \right) \|z_1 - z_2\|_0 \leq$$

$$\leq \alpha \left| \int\limits_{-\lambda}^{0} \int\limits_{t}^{t+\eta} e^{(t+\eta-s)} ds d\eta \right| \|z_1 - z_2\|_0 \leq \frac{\alpha}{m^2} |\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}| \|z_1 - z_2\|_0.$$

При виконанні умови $\alpha|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}| < m^2$ оператор $S_1$ буде оператором стиску. Враховучи цю нерівність, переконуємося, що при

$$M \geq \frac{\frac{\alpha}{m^2} |\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|}{1 - \frac{\alpha}{m^2} |\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|}$$

оператор $S_1$ відображає $\mathbb{C}(M)$ у себе і є стискаючим. Простір $\mathbb{C}(M)$ відносно норми $\|\cdot\|_0$ є повним нормованим простором, і цього достатньо, щоб існував єдиний розв'язок рівняння (22), а отже і рівняння (4).

***Приклад.*** У випадку, коли $A$ — стала матриця, враховуючи (8) і (9), для коефіцієнтів $C$ і $g$ рівняння (2) одержуємо

$$C = A \int\limits_{-\lambda}^{0} e^{C\eta} d\eta, \quad g(t) = f(t) + A \int\limits_{-\lambda}^{0} \int\limits_{t}^{t+\eta} e^{C(t+\eta-s)} g(s) \, ds \, d\eta.$$

Наступна теорема характеризує властивості розв'язків рівнянь (3), (4).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1 і $A(t,\eta)$ та $f(t)$ в системі диференціальних рівнянь (1) є $r$ разів неперервно диференційовними, періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними функціями. Тоді $r$ разів неперервно диференційовними, періодичними, квазіперіодичними або майже періодичними є розв'язки $C$ і $g$ рівнянь (3) і (4).*

Справді, із рівнянь (3) і (22) випливає, що їх розв'язки мають гладкість на порядок вищу, ніж гладкість функцій $A(t,\eta)$, $f(t)$. Тому функції $C(t)$ і $g(t)$ мають гладкість функцій $A(t,\eta)$, $f(t)$. Для завершення доведення теореми 2 доведемо спочатку наступну лему, яка є аналогом леми в [7, с. 637].

**Лема.** *Нехай виконуються умови теореми 1 та існує послідовність $\tau_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, така, що*

$$\lim_{n\to\infty} [\|A_n - A\|_0 + \|f_n - f\|_0] = 0, \tag{23}$$

*де $A_n = A(t + \tau_n, \eta)$, $f_n = f(t + \tau_n)$.*

*Тоді розв'язки $C$ і $g$ рівнянь (3) і (4) задовольняють умову*

$$\lim_{n\to\infty} [\|C_n - C\|_0 + \|g_n - g\|_0] = 0, \tag{24}$$

*де $C_n = C(t + \tau_n)$, $g_n = g(t + \tau_n)$.*

***Доведення.*** Встановимо співвідношення (24) для розв'язків рівнянь (3) і (4). Позначимо $\Omega_\tau^t(C) = \Omega_\tau^t(C(s))$ і розглянемо спочатку різницю $C_n - C = C(t+\tau_n) - C(t)$. Маємо

$$
\begin{aligned}
C_n - C &= \int_{-\lambda}^{0} A(t+\tau_n, \eta)\Omega_{t+\tau_n}^{t+\tau_n+\eta}(C(s))d\eta - \int_{-\lambda}^{0} A(t,\eta)\Omega_t^{t+\eta}(C(s))d\eta = \\
&= \int_{-\lambda}^{0} \left[A(t+\tau_n,\eta)\Omega_0^\eta(C(s+t+\tau_n)) - A(t,\eta)\Omega_0^\eta(C(s+t))\right] d\eta = \\
&= \int_{-\lambda}^{0} [A(t+\tau_n,\eta)\Omega_0^\eta(C(s+t+\tau_n)) - A(t,\eta)\Omega_0^\eta(C(s+t+\tau_n)) + \\
&\quad + A(t,\eta)\Omega_0^\eta(C(s+t+\tau_n)) - A(t,\eta)\Omega_0^\eta(C(s+t))]\, d\eta = \\
&= \int_{-\lambda}^{0} [(A(t+\tau_n,\eta) - A(t,\eta))\Omega_0^\eta(C(s+t+\tau_n)) + \\
&\quad + A(t,\eta)(\Omega_0^\eta(C(s+t+\tau_n)) - \Omega_0^\eta(C(s+t)))]\, d\eta. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Враховуючи (18) і (25), отримуємо

$$
\|C_n - C\| \le \frac{1}{m}|1 - e^{-\lambda m}|\|A_n - A\|_0 + \frac{\alpha|\lambda|}{m}(e^{|\lambda|m} - 1)\|C_n - C\|_0.
$$

Якщо виконується оцінка (19), то

$$
\|C_n - C\| \le \frac{\frac{1}{m}|1 - e^{-\lambda m}|}{1 - \frac{\alpha|\lambda|}{m}(e^{|\lambda|m} - 1)}\|A_n - A\|_0 = \frac{|1 - e^{-\lambda m}|}{m - \alpha|\lambda|(e^{|\lambda|m} - 1)}\|A_n - A\|_0.
$$

Отже,

$$
\lim_{n\to\infty}\|C_n - C\|_0 = 0. \qquad (26)
$$

Нехай $z_n = z(t+\tau_n)$. Тоді з урахуванням (22) для різниці $z_n - z$ одержимо рівняння

$$z_n - z = \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{0}^{\eta} A(t+\tau_n,\eta)\Omega_{s+t+\tau_n}^{t+\eta+\tau_n}(C)(f(s+t+\tau_n)+z(s+t+\tau_n))dsd\eta -$$

$$-\int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{0}^{\eta} A(t,\eta)\Omega_{s+t}^{t+\eta}(C)(f(s+t)+z(s+t))dsd\eta =$$

$$= \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{0}^{\eta} \big[A(t+\tau_n,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n)(f(\gamma+t+\tau_n)+z(\gamma+t+\tau_n)) -$$

$$- A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))(f(\gamma+t)+z(\gamma+t))\big]\, d\gamma\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{0}^{\eta} \big[A(t+\tau_n,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))f(\gamma+t+\tau_n) +$$

$$+ A(t+\tau_n,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))z(\gamma+t+\tau_n) -$$

$$- A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))f(\gamma+t) - A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))z(\gamma+t))\big]\, d\gamma\, d\eta.$$

Тому виконується нерівність

$$\|z_n - z\| \le \Bigg\| \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{0}^{\eta} (A(t+\tau_n,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))f(\gamma+t+\tau_n) -$$

$$- A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))f(\gamma+t+\tau_n) +$$

$$+ A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))f(\gamma+t+\tau_n) - A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))f(\gamma+t+\tau_n) +$$

$$+ A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))f(\gamma+t+\tau_n) - A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))f(\gamma+t))d\gamma d\eta \Bigg\| +$$

$$+ \Bigg\| \int\limits_{-\lambda}^{0}\int\limits_{0}^{\eta} (A(t+\tau_n,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))z(\gamma+t+\tau_n) -$$

$$- A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))z(\gamma+t+\tau_n) +$$

$$+ A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t+\tau_n))z(\gamma+t+\tau_n) - A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))z(\gamma+t+\tau_n) +$$

$$+ A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))z(\gamma+t+\tau_n) - A(t,\eta)\Omega_\gamma^\eta(C(s+t))z(\gamma+t))d\gamma d\eta \Bigg\|.$$

Враховуючи попередньо встановлені оцінки, маємо

$$\|z_n - z\| \leq \frac{1}{m^2}|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|\|A_n - A\|_0 + \frac{\alpha|\lambda|}{m}(e^{|\lambda|m} - 1)\|C_n - C\|_0 +$$
$$+ \frac{\alpha}{m^2}|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|\|f_n - f\|_0 + \frac{M}{m^2}|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|\|A_n - A\|_0 +$$
$$+ \frac{\alpha|\lambda|M}{m}(e^{|\lambda|m} - 1)\|C_n - C\|_0 + \frac{\alpha}{m^2}|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}|\|z_n - z\|_0.$$

Звідси з урахуванням нерівності $\alpha|\lambda m - 1 + e^{-\lambda m}| < m^2$, умови (23) і одержаної рівності (26) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n - z\|_0 = 0,$$

тому на підставі (22) і $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n - g\|_0 = 0.$

Лему доведено.

Із доведеної леми випливає справедливість теореми 2 для майже періодичних функцій $A(t,\eta)$, $f(t)$, до того ж частотні базиси функцій $A(t,\eta)$, $f(t)$ та розв'язків $C$ і $g$ збігаються. Тому теорема 2 є справедливою і для випадку, коли функції $A(t,\eta)$, $f(t)$ періодичні чи квазіперіодичні.


1. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. — Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1999. — 648 p.
2. *Yang Kuang.* Delay differential equations with applications in population dynamics. — Arizona: Acad. Press, 1993. — **191**. — 399 p.
3. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. — Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1992. — **74**. — 501 p.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
5. *Arino O., Pituk M.* More on linear differential systems with small delays // J. Different. Equat. — 1999. — **170**. — P. 381 – 407.
6. *Diblik J., Koksch N.* Existence of global solutions of delayed differential equations via retract approach // Nonlinear Analysis. — 2006. — **64**. — P. 1153 – 1170.
7. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 5. — С. 631 – 640.
8. *Самойленко А. М., Денисенко Н. Л.* Про розв'язки на півосі системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Там же. — 2007. — **59**, № 4. — С. 501 – 513.
9. *Сергєєва Л. М.* Знаходження розв'язків диференціальних рівнянь нейтрального типу з відхиленням аргументу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2008. — Вип. 421. – С. 96 – 100.
10. *Сергєєва Л. М., Бігун Я. Й.* Знаходження глобальних розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь // Там же. — 2009. — Вип. 485. — С. 108 – 112.
11. *Хатсон В., Пим Дж. С.* Приложение функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.


*Одержано 01.06.10*