УДК 517.988.6

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Р. І. Качурівський

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: kachurivsky@gmail.com

We obtain sufficient conditions for existence of a continuous and N-periodic solution of a system of integral-difference equations, where N is an integer.

Получены достаточные условия существования непрерывного и N-периодического (N — целое положительное число) решения систем интегрально-разностных уравнений.

Розглянемо систему інтегрально-різницевих рівнянь

$$x(t+1) = A(t)x(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau, \tag{1}$$

де елементи матриць $A(t)$, $K(t)$ є неперервними при $t \in \mathbb{R}$ функціями, $A(t+N) = A(t)$ (N — ціле додатне число), вектор-функція $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є неперервною за всіма змінними та N-періодичною по t. При різних припущеннях такі системи були об'єктом дослідження у багатьох роботах (див. [1–10] та наведену в них бібліографію) і на даний час ряд питань їх теорії досить добре вивчено. Зокрема, при досить жорстких умовах на матрицю $A(t)$ отримано низку результатів щодо існування періодичних розв'язків систем вигляду (1) [2, 3, 9]. У продовження цих досліджень у даній статті запропоновано новий підхід до вивчення питань існування періодичних розв'язків систем інтегрально-різницевих рівнянь (1), який дозволяє послабити умови на матрицю $A(t)$.

Далі припускатимемо, що виконуються наступні умови:

1) $\det A(t) \neq 0$, $\det(E - A(t+N-1)\ldots A(t+1)A(t)) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $|A(t)| \leq a(t)$, де $a(t)$ — деяка невід'ємна N-періодична функція, $|A| = \max\limits_i \sum_{j=0}^n |a_{ij}|$;

3) $a(t)a(t+1)\ldots a(t+N-1) \leq \Delta_1 < 1$, $t \in \mathbb{R}$;

4) $|K(t)| \leq Me^{-\alpha|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, де α, M — деякі додатні сталі, $M \geq 1$;

5) для довільних $x, y \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція $f(t,x)$ задовольняє умову

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l|x-y|,$$

де l — деяка додатна стала;

6) $\dfrac{M}{\alpha}\,\dfrac{2}{1-\Delta_1}\,\dfrac{1-\tilde{a}^N}{1-\tilde{a}}\,l \leq \Delta_2 < 1$, де $\tilde{a} = \max\limits_t a(t)$.

Періодичний розв'язок системи рівнянь (1) будемо шукати у вигляді функціонального ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ — деякі неперервні N-періодичні вектор-фукції, що є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = A(t)x_0(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f(\tau, 0) d\tau, \tag{3_0}$$

$$x_1(t+1) = A(t)x_1(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) \Big(f(\tau, x_0(\tau)) - f(\tau, 0) \Big) d\tau, \tag{3_1}$$

$$x_i(t+1) = A(t)x_i(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) \left(f\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(\tau)\right) - f\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(\tau)\right)\right) d\tau, \tag{3_i}$$

$$i = 2, 3, \ldots .$$

Розглянемо спочатку систему рівнянь (3_0), яку запишемо у вигляді

$$x_0(t+1) = A(t)x_0(t) + \widetilde{F}_0(t),$$

де

$$\widetilde{F}_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f(\tau, 0) d\tau.$$

Звідси послідовно отримуємо

$$x_0(t+2) = A(t+1)x_0(t+1) + \widetilde{F}_0(t+1) =$$

$$= A(t+1)A(t)x_0(t) + A(t+1)\widetilde{F}_0(t) + \widetilde{F}_0(t+1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0(t+N) = A(t+N-1)\ldots A(t+1)A(t)x_0(t) +$$

$$+ A(t+N-1)\ldots A(t+1)\widetilde{F}_0(t) + \ldots$$

$$\ldots + A(t+N-1)\widetilde{F}_0(t+N-2) + \widetilde{F}_0(t+N-1).$$

Покажемо, що система рівнянь

$$x_0(t) = \overline{A}(t)x_0(t) + \overline{F}_0(t), \tag{4_0}$$

де

$$\overline{A}(t) = A(t+N-1)\dots A(t+1)A(t),$$

$$\overline{F}_0(t) = A(t+N-1)\dots A(t+1)\widetilde{F}_0(t) + \dots$$
$$\dots + A(t+N-1)\widetilde{F}_0(t+N-2) + \widetilde{F}_0(t+N-1),$$

має неперервний N-періодичний розв'язок.

Розв'язок системи рівнянь (4_0) будемо будувати, використовуючи метод послідовних наближень, які визначимо таким чином:

$$x_{0,0}(t) = 0,$$

$$x_{0,m}(t) = \overline{A}(t)x_{0,m-1}(t) + \overline{F}_0(t), \quad m = 1, 2, \dots. \tag{5_0}$$

З урахуванням властивостей матриці $A(t)$ та вектор-функції $f(t,x)$ за допомогою методу математичної індукції можна показати, що всі вектор-функції $x_{0,m}(t)$, $m = 0, 1, \dots$, є неперервними при $t \in \mathbb{R}$ та N-періодичними. Покажемо, що послідовність $\{x_{0,m}(t)\}$, $m = 0, 1, \dots$, рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $t \in \mathbb{R}$ мають місце оцінки

$$|x_{0,m}(t) - x_{0,m-1}(t)| \le M_0\Delta_1^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{6_0}$$

де

$$M_0 = 2\frac{M(1-\tilde{a}^N)}{\alpha(1-\tilde{a})}f^*, \quad f^* = \max_{t\in[0;N)}|f(t,0)|.$$

Справді, згідно з умовою 3 при $m = 1$ маємо

$$|x_{0,1}(t) - x_{0,0}(t)| = |\overline{A}(t)x_{0,0}(t) + \overline{F}_0(t)| = |A(t+N-1)\dots A(t+1)\widetilde{F}_0(t) + \dots +$$
$$\dots + A(t+N-1)\widetilde{F}_0(t+N-2) + \widetilde{F}_0(t+N-1)| \le M_0.$$

Припустимо, що оцінку (6_0) доведено для деяких $j = 0, 1, \dots, m-1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від $m-1$ до m. Дійсно, на підставі (6_0) та умови 5 отримуємо

$$|x_{0,m}(t) - x_{0,m-1}(t)| = |\overline{A}(t)(x_{0,m-1}(t) - x_{0,m-2}(t))| \le$$
$$\le |A(t+N-1)\dots A(t+1)A(t)|\,|x_{0,m-1}(t) - x_{0,m-2}(t)| \le$$
$$\le a(t)a(t+1)\dots a(t+N-1)\,|x_{0,m-1}(t) - x_{0,m-2}(t)| \le M_0\Delta_1^{m-1}.$$

Отже, оцінка (6_0) має місце при всіх $m \geq 1$ і послідовність неперервних та N-періодичних вектор-функцій $\{x_{0,m}(t)\}$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до неперервної та N-періодичної вектор-функції $x_0(t) = \lim\limits_{m \to +\infty} x_{0,m}(t)$. Виконуючи в ($5_0$) граничний перехід при $m \to +\infty$, неважко переконатися у тому, що $x_0(t)$ буде розв'язком системи рівнянь (4_0). Враховуючи умову 1, можна показати, що вектор-функція $x_0(t)$ буде задовольняти систему рівнянь (3_0) (див. [10]). Крім цього, згідно з (6_0) маємо

$$|x_0(t)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty}(x_{0,m}(t) - x_{0,m-1}(t))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}|x_{0,m}(t) - x_{0,m-1}(t)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} M_0 \Delta_1^{m-1} = \frac{M_0}{1 - \Delta_1}. \tag{7_0}$$

Припустимо тепер, що побудовано неперервні при $t \in \mathbb{R}$ N-періодичні розв'язки $x_k(t)$ систем рівнянь (3_k), $k = 0, 1, \ldots, i-1$, для яких виконуються умови

$$|x_k(t)| \leq \widetilde{M}\Delta_2^k, \tag{8_k}$$

де

$$\widetilde{M} = \frac{M_0}{1 - \Delta_1}.$$

Покажемо, що у цьому випадку існує неперервний N-періодичний розв'язок системи (3_i), для якого виконується умова

$$|x_i(t)| \leq \widetilde{M}\Delta_2^i. \tag{8_i}$$

Запишемо систему (3_i) у вигляді

$$x_i(t+1) = A(t)x_i(t) + \widetilde{F}_i(t),$$

де

$$\widetilde{F}_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau)\left(f\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(\tau)\right) - f\left(\tau, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(\tau)\right)\right) d\tau,$$

і розглянемо систему рівнянь

$$x_i(t) = \overline{A}(t)x_i(t) + \overline{F}_i(t), \tag{4_i}$$

де

$$\overline{F}_i(t) = A(t+N-1)\ldots A(t+1)\widetilde{F}_i(t) + \ldots$$

$$\ldots + A(t+N-1)\widetilde{F}_i(t+N-2) + \widetilde{F}_i(t+N-1).$$

Міркуючи, як і при побудові розв'язку системи (4_0), неважко переконатися у тому, що вектор-функція $x_i(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x_{i,m}(t)$, де

$$x_{i,0}(t) = 0,$$

$$x_{i,m}(t) = \overline{A}(t)x_{i,m-1}(t) + \overline{F}_i(t),$$

$$m = 1, 2, \ldots,$$

буде N-періодичним розв'язком системи (3_i). Крім цього, справедливою буде оцінка

$$|x_i(t)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty}(x_{i,m}(t) - x_{i,m-1}(t))\right| \le \sum_{m=1}^{\infty}|x_{i,m}(t) - x_{i,m-1}(t)| \le \widetilde{M}\Delta_2^i.$$

Таким чином, при виконанні умов 1 – 6 існують неперервні при $t \in \mathbb{R}$ N-періодичні розв'язки $x_i(t)$ систем рівнянь (3_i), $i = 0, 1, \ldots$, для яких справджуються оцінки (8_i). Внаслідок цього ряд (2) рівномірно збігається до деякої неперервної N-періодичної вектор-функції $\gamma(t)$.

Покажемо, що вектор-функція $\gamma(t)$ задовольняє систему рівнянь (1), тобто має місце тотожність

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = A(t)\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f\left(\tau, \sum_{i=0}^{\infty} x_i(\tau)\right) d\tau.$$

Для цього, очевидно, достатньо показати, що ряд

$$f(t,0) + (f(t,x_0(t)) - f(t,0)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(f\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(t)\right) - f\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(t)\right)\right) \tag{9}$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до $f\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)\right)$.

Оскільки при всіх $m \ge 0$ мають місце співвідношення

$$f(t,0)+(f(t,x_0(t))-f(t,0))+\sum_{i=2}^{m+1}\left(f\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} x_j(t)\right) - f\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} x_j(t)\right)\right) = f\left(t, \sum_{j=0}^{m} x_j(t)\right),$$

то згідно з умовами 5 та (8_i), $i = 0, 1, \ldots$, отримаємо

$$\left|f\left(t, \sum_{j=0}^{m} x_j(t)\right) - f\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)\right)\right| \le l\sum_{j=m+1}^{\infty}|x_j(t)| \le \widetilde{M}l\frac{\Delta_2^{m+1}}{1-\Delta_2}.$$

Звідси та з умови 6 випливає, що ряд (9) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до $f\Big(t, \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)\Big)$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1 – 6. Тоді існує неперервний N-періодичний розв'язок $\gamma(t)$ системи рівнянь (1).*

Зауваження. При виконанні деяких додаткових умов аналогічні результати встановлено при дослідженні систем диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t+1) = \Lambda(t)x(t+1) + B(t)x(t) + A(t)\dot{x}(t) + f(t, x(t)).$$

1. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1626 – 1633.
2. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Теория уравнений нейтрального типа // Мат. анализ (Итоги науки и техники). — 1981. — **19**. — С. 55 – 126.
3. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 167 с.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М: Мир, 1984. — 421 с.
5. *Пелюх Г. П., Олійниченко О. П.* Асимптотичні властивості глобальних розв'язків системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з нелінійними відхиленнями аргументу // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 489 – 503.
6. *Митропольський Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 212 с.
7. *Пелюх Г. П., Блащак Н. І.* Про існування і єдиність періодичних розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу // Доп. НАН України. — 1997. — № 8. — С. 10 – 13.
8. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* О периодических решениях систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Там же. — 1994. — № 3. — С. 19 – 21.
9. *Качурівський Р. І., Пелюх Г. П.* Про існування періодичних розв'язків систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 2. — С. 400 – 416.
10. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 351 – 359.

Одержано 10.03.10