УДК 517.95

НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗБУРЕННЯМ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ЧАСОМ ОБЛАСТІ

Г. Р. Базиляк, М. О. Нечепуренко

Львів. нац. ун-т ім. І. Франка
Україна, 79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua
torgan_g@yahoo.com

We consider a mixed problem for a nonlinear connected evolution system with an integral perturbation given on a time unbounded domain. We prove that a global solution of the problem does not exist.

Рассмотрена смешанная задача для одной нелинейной связной эволюционной системы уравнений с интегральным возмущением в неограниченной по времени области. Доказано несуществование глобального обобщенного решения задачи.

Вступ. У цій статті досліджено неіснування глобального розв'язку мішаної задачі для нелінійної системи рівнянь з інтегральним збуренням в необмеженій за часом області. Схожі задачі в обмежених областях без інтегрального збурення було розглянуто у працях [1, 4, 13]. У [1] отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку хвильового рівняння з термопружною в'язкістю. Ця праця розвиває та узагальнює результати дослідження мішаної задачі в необмеженій за часом області, викладені у [5]. Мішану задачу для нелінійної системи зі змінними коефіцієнтами досліджено в [4], в ній також встановлено показникову поведінку розв'язку. Асимптотичну поведінку слабкого розв'язку напівлінійної системи термопружності досліджено в [12] та показано неіснування розв'язку.

Подібні задачі моделюють, наприклад, коливання струни при поперечній складовій напруженості [2, 16] і розглядались багатьма дослідниками. Для обмеженої області деякі результати існування отримано в [6 – 11] у припущенні певної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності; а для необмеженої області подібну задачу розглянуто у працях [3, 9], в яких отримано умови існування локального узагальненого розв'язку в просторах локально інтегровних функцій.

Ця праця розвиває та узагальнює результати дослідження мішаної задачі в необмеженій за часом області, викладені в [4, 5, 15].

Основні результати. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $n \in \mathbb{N}$; $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, де $T \in [0, \infty)$; $\Omega_\tau = \Omega \times \{\tau\}$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$.

В області Q розглянемо мішану задачу для системи рівнянь

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \theta_{x_i} + a_0(x) u + a_1(x) u_t + a_2(x)\theta -$$

$$-\left(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2\,dx\right)\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i} = b_0(x)|u|^{p-2}u,$$

$$\theta_t-\sum_{i,j=1}^{n}(c_{ij}(x)\theta_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}(b_i(x)u_t)_{x_i}+c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta+c_1(x)u_t+c_2(x)\theta = 0 \qquad (1)$$

з початковими

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x),\quad x\in\Omega, \qquad (2)$$

та крайовими

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\quad \theta\big|_{\partial\Omega}=0 \qquad (3)$$

умовами.

Будемо використовувати такі простори: $L^r((0,T);B)$, $C((0,T);B)$ [17, с. 148, 154, 157], де $r\in[1,+\infty)$, B — деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$; $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r\in(1,+\infty)$ [17, с. 44].

Через $L^r_{\mathrm{loc}}([0,T);B)$, де $0<T\leqslant+\infty$, позначаємо лінійний простір функцій $u:[0,T)\to B$ таких, що $L^r_{\mathrm{loc}}((0,T_0);B)$ для довільного $T_0<T$, $r\in[1,+\infty)$.

Нехай $D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\alpha_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Вважатимемо, що $p>2$, $q>2$; $u_0,\theta_0\in H_0^1(\Omega)$, $u_1\in L^2(\Omega)$.

Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють такі умови:

($\mathbf{H_1}$) $a_0,a_1,a_2\in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x)\geqslant A_0>0$, $a_1(x)\geqslant A_1>0$ для майже всіх $x\in\Omega$;

($\mathbf{H_2}$) $b_{ij},b_i,b_0\in L^\infty(\Omega)$, $i,j\in\{1,\ldots,n\}$,

$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant B_2\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$ і для майже всіх $x\in\Omega$, $B_2>0$,
$b_{ij}(x)=b_{ji}(x)$ для всіх $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ і для майже всіх $x\in\Omega$,
$b_0(x)\geqslant B_0>0$ для майже всіх $x\in\Omega$;

($\mathbf{H_3}$) $c_{ij},c_0,c_1,c_2\in L^\infty(\Omega)$, $i,j\in\{1,\ldots,n\}$,
$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant C_2\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i\in\mathbb{R}$ і для майже всіх $x\in\Omega$, $C_2>0$,
$c_{ij}(x)=c_{ji}(x)$ для всіх $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ і для майже всіх $x\in\Omega$,
$c_0(x)\geqslant C_0>0$ для майже всіх $x\in\Omega$,
$c_2(x)\geqslant\gamma_1>0$ для майже всіх $x\in\Omega$.

Означення. *Глобальним узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) назвемо пару функцій (u,θ) таких, що $u\in C([0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^p_{\mathrm{loc}}([0,T);L^p(\Omega))$, $u_t\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);H_0^1(\Omega))$, $u_{tt}\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);L^2(\Omega))$, $\theta\in C([0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^q_{\mathrm{loc}}([0,T);L^q(\Omega))$, $\theta_t\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);L^2(\Omega))$ для*

$T = \infty$ *і задовольняють початкові умови (2) та систему інтегральних рівностей*

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u_{tt}v + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i}v + a_0(x)uv + a_1(x)u_t v + a_2(x)\theta v\right]dx+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dx\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}v_{x_i}\,dx\right) = \int\limits_{\Omega_\tau} b_0(x)|u|^{p-2}uv dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\theta_t w + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}w_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_t w_{x_i} + c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta w + c_1(x)u_t w + c_2(x)\theta w\right]dx = 0$$

для майже всіх $\tau \in (0,T)$ *і всіх* $v \in H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$.

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + a_0(x)u^2 + \theta^2\right]dx-$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t} b_0(x)|u|^p dx + \frac{1}{4}\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx\right)^2, \tag{4}$$

$$A_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|a_2(x)|^2, \quad C_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|c_1(x)|^2.$$

Розглянемо систему нерівностей

$$\begin{aligned} &2A_1\nu_2 - \nu_1\nu_2 - C_1 \geqslant 0,\\ &2\gamma_1\nu_1 - \nu_1\nu_2 - A_2 > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

під додатним розв'язком якої розумітимемо такі (ν_1,ν_2), що $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$. Позначимо через Ξ множину всіх додатних розв'язків системи (5).

Зауваження. Завжди існують такі значення параметрів A_1, A_2, C_1, γ_1, для яких $\Xi \neq \varnothing$.

Справді, припустимо, що $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$, тоді із системи (5) випливає, що $2A_1 \geqslant C_1 + 1$, $2\gamma_1 > A_2 + 1$.

Теорема. *Нехай коефіцієнти системи рівнянь (1) задовольняють умови* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$, $(\mathbf{H_3})$ *і* $\Xi \neq \varnothing$; $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$; $4 < p \leqslant \dfrac{2n}{n-2}$ *при* $n > 2$ *і* $p > 4$ *при* $n \in \{1,2\}$, $q > 2$. *Тоді якщо* $E(0) < 0$, *то не існує глобального узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).*

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує глобальний узагальнений розв'язок (u,θ) задачі (1)–(3).

Спочатку доведемо, що $E(t) < 0$ для довільного $t > 0$. Здиференціюємо (4) по t (зазначимо, що згідно з означенням E' існує майже для всіх t):

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{tx_j} + a_0(x) u u_t + \theta\theta_t - b_0(x)|u|^{p-2} u u_t \right] dx +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dx \right) \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} u_{tx_i} \, dx \right).$$

Але оскільки

$$\int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{tx_j} + a_0(x) u u_t + \theta\theta_t - b_0(x)|u|^{p-2} u u_t \right] dx +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dx \right) \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} u_{tx_i} \, dx \right) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t} \left[-\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \theta_{x_i} u_t - a_1(x)|u_t|^2 - a_2(x)\theta u_t - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) \theta_{x_i} \theta_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_t \theta_{x_i} - c_0(x)|\theta|^q - c_1(x) u_t \theta - c_2(x)|\theta|^2 \right] dx,$$

то

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[-a_1(x)|u_t|^2 - a_2(x)\theta u_t - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} - c_0(x)|\theta|^q - c_1(x) u_t \theta - c_2(x)|\theta|^2 \right] dx. \tag{6}$$

Оцінимо доданки у правій частині рівності (6):

$$J_1 := -\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x)\theta_{x_i}\theta_{x_j} dx \leqslant -C_2 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}|^2 \, dx,$$

$$J_2 := -\int\limits_{\Omega_t} a_1(x)|u_t|^2 dx \leqslant -A_1 \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 \, dx,$$

$$J_3 := -\int\limits_{\Omega_t} a_2(x)\theta u_t dx \leqslant \frac{A_2}{2\nu_1} \int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2 \, dx + \frac{\nu_1}{2} \int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 \, dx, \quad \nu_1 > 0,$$

$$J_4 := -\int\limits_{\Omega_t} c_1(x)\theta u_t dx \leqslant \frac{C_1}{2\nu_2}\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\,dx + \frac{\nu_2}{2}\int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2\,dx, \quad \nu_2 > 0,$$

$$J_5 := -\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|\theta|^q\,dx \leqslant -C_0\int\limits_{\Omega_t} |\theta|^q\,dx,$$

$$J_6 := -\int\limits_{\Omega_t} c_2(x)|\theta|^2 dx \leqslant -\gamma_1\int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2\,dx.$$

З огляду на умови теореми і оцінки інтегралів $J_1 - J_6$ з (6) отримаємо

$$E'(t) \leqslant -\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2\left(A_1 - \frac{\nu_1}{2} - \frac{C_1}{2\nu_2}\right) + |\theta|^2\left(\gamma_1 - \frac{A_2}{2\nu_1} - \frac{\nu_2}{2}\right) + C_2\sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2 + C_0|\theta|^q\right]dx \leqslant$$

$$\leqslant -\nu_0\int\limits_{\Omega_t}\left[|\theta|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2\right]\,dx, \quad \nu_0 > 0.$$

Тому

$$E(t) \leqslant E(0) < 0, \quad \text{бо} \quad E(0) = -\lambda < 0.$$

Введемо тепер

$$H(t) = -E(t), \quad L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t} a_1(x)|u|^2\,dx$$

і розглянемо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left|\frac{\overline{A_1}\varepsilon}{2}\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right),$$

де $\overline{A_1} = \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega} |a_1(x)|$, $\varepsilon > 0$.

Оцінимо доданки у правій частині останньої нерівності:

$$J_7 := \left|\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\left(\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant M_0\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p(1-\alpha)}}\left(\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leqslant M_1\left(\|u(\cdot,t)\|_p^s + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2\right),$$

де $s = \dfrac{2}{1-2\alpha}$. Якщо $\|u(\cdot,t)\|_p \leqslant 1$, то за теоремою вкладення Соболєва [17, с. 47]

$$\|u(\cdot,t)\|_p^s \leqslant \|u(\cdot,t)\|_p^2 \leqslant M_2 \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2.$$

Якщо $\|u(\cdot,t)\|_p > 1$, то $\|u(\cdot,t)\|_p^s \leqslant \|u(\cdot,t)\|_p^p$, тобто виконується нерівність

$$\|u(\cdot,t)\|_p^s \leqslant M_2 \left(\|u(\cdot,t)\|_p^p + \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2\right) \quad \text{при} \quad 2 \leqslant s \leqslant p, \quad \alpha \leqslant \frac{p-2}{2p}.$$

Отже,

$$\left|\int\limits_{\Omega_t} u u_t \, dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant M_3 \left(\|u(\cdot,t)\|_p^p + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2 + \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_3 \left(H(t) + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2 + \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2 + \|u(\cdot,t)\|_p^p\right).$$

Аналогічно

$$J_8 := \left|\int\limits_{\Omega_t} |u|^2 \, dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant M_4 \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p \, dx\right)^{\frac{2}{p(1-\alpha)}} \leqslant M_5 (\|u(\cdot,t)\|_p^p +$$

$$+ \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2) \leqslant M_5 \left(H(t) + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2 + \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2 + \|u(\cdot,t)\|_p^p\right)$$

при $\alpha \leqslant \dfrac{p-2}{2p}$, тому

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant M_6 \left(H(t) + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2 + \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2 + \|u(\cdot,t)\|_p^p\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_6 \left[H(t) + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2 + \|D^1 u(\cdot,t)\|_2^2 + \|u(\cdot,t)\|_p^p + \|D^1 \theta(\cdot,t)\|_2^2\right].$$

Розглянемо

$$L'(t) = (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + u u_{tt} + a_1(x) u u_t\right] \, dx.$$

Оскільки справджується рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt} u + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \theta_{x_i} u + a_0(x)|u|^2 + a_1(x) u_t u + a_2(x) \theta u\right] dx +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \, dx\right) \left(\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 dx\right) = \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) |u|^p \, dx,$$

то

$$
\begin{aligned}
L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\\
&\quad+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2-\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}-\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{x_i}u-a_0(x)|u|^2-a_2(x)\theta u+b_0(x)|u|^p\right]dx-\\
&\quad-\varepsilon\left(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2dx\right)^2+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[u_t^2+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a_0(x)u^2+\theta^2\right]dx-\\
&\quad-\frac{m\varepsilon}{p}\int\limits_{\Omega_\tau}b_0(x)|u|^pdx+\frac{m\varepsilon}{4}\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2dx\right)^2=\\
&= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\left(1+\frac{m}{2}\right)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}u_t^2dx+\\
&\quad+\left(\frac{m}{2}-1\right)\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a_0(x)|u|^2\right]dx+\\
&\quad+\frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|\theta|^2dx-\varepsilon\int\limits_{\Omega_\tau}\left[a_2(x)\theta u+\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{x_i}u\right]dx+\\
&\quad+\varepsilon\left(1-\frac{m}{p}\right)\int\limits_{\Omega_\tau}b_0(x)|u|^p\,dx+\varepsilon\left(\frac{m}{4}-1\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2dx\right)^2+m\varepsilon H(t).
\end{aligned}
$$

Оцінимо доданки у правій частині останньої рівності:

$$J_9 := \int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\,dx \geqslant B_2\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dx,$$

$$J_{10} := -\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n b_i(x)\theta_{x_i}u\,dx \geqslant -\frac{B_1}{2\delta_1}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|\theta_{x_i}|^2\,dx-\frac{\delta_1}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dx,$$

де $\delta_1 > 0$, $B_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega}\sum\limits_{i=1}^n|b_i(x)|^2$,

$$J_{11} := \int\limits_{\Omega_t}a_0(x)|u|^2\,dx \geqslant A_0\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\,dx,$$

$$J_{12} := -\int\limits_{\Omega_t} a_2(x)u\theta dx \geqslant -\delta \int\limits_{\Omega_t} |u|^2\, dx - \frac{A_2}{2\delta_1}\int\limits_{\Omega_t} |\theta|^2\, dx,$$

$$J_{13} := \int\limits_{\Omega_t} b_0(x)|u|^p\, dx \geqslant B_0 \int\limits_{\Omega_t} |u|^p\, dx.$$

Покладемо $\delta = \dfrac{H^\alpha(t)\delta_1}{1-\alpha}$ і оцінимо

$$H^\alpha(t)\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\, dx \leqslant M_7 \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p\, dx\right)^{\alpha} \int\limits_{\Omega_t} |u|^2\, dx \leqslant M_8 \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p\, dx\right)^{\alpha+\frac{2}{p}} = M_8\|u(\cdot,t)\|_p^{2+\alpha p}.$$

Якщо $\alpha \leqslant \dfrac{p-2}{p}$, то

$$H^\alpha(t)\int\limits_{\Omega_t} |u|^2\, dx \leqslant M_9\left[\|u(\cdot,t)\|_p^p + \|D^1u(\cdot,t)\|_2^2\right].$$

Тому, врахувавши отримані оцінки, будемо мати

$$L'(t) \geqslant (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2\left(\nu_0 - \frac{\varepsilon B_1}{2\delta_1}\right) + |\theta|^2\left(\nu_0 - \frac{\varepsilon A_2}{2\delta_1}\right)\right] dx+$$

$$+\frac{\varepsilon(2+m)}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2 dx + \frac{m\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_t}|\theta|^2 dx + \varepsilon\left[\left(1-\frac{m}{p}\right)B_0 - \frac{\delta_1 M_8 m}{1-\alpha}\right]\int\limits_{\Omega_t}|u|^p dx+$$

$$+\left[\left(\frac{m}{2}-1\right)B_2 - \frac{\delta_1 M_8 m}{1-\alpha}\right]\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\, dx + \varepsilon\left(\frac{m}{2}-1\right)A_0\int\limits_{\Omega_t}|u|^2\, dx+$$

$$+\varepsilon\left(\frac{m}{4}-1\right)\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\, dx\right)^2 + m\varepsilon H(t).$$

Виберемо $4 < m < p$,

$$\delta_1 < \frac{1-\alpha}{M_8 m}\min\left\{\frac{(p-m)B_0}{p}; \frac{(m-2)B_2}{2}\right\}, \quad \varepsilon < 2\nu_0\delta_1 \min\left\{\frac{1}{B_1}; \frac{1}{A_2}\right\},$$

тоді

$$L'(t) \geqslant M_{10}\int\limits_{\Omega_t}\left[|u_t|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2 + |\theta|^2 + |u|^p + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + |u|^2\right] dx + M_{11}H(t) \geqslant$$

$$\geqslant M_{12}\left[H(t) + \|u_t(\cdot,t)\|_2^2 + \|D^1u(\cdot,t)\|_2^2 + \|u(\cdot,t)\|_p^p + \|D^1\theta(\cdot,t)\|_2^2\right].$$

Отже,

$$L'(t) \geqslant M_{13}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{7}$$

Оскільки $H(0) = \lambda > 0$, $H'(t) \geqslant 0$, то $H(t) \geqslant \lambda$ і ε можна вибрати так, щоб

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u_0 u_1 \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_t} a_1(x)|u_0|^2 \, dx \geqslant \frac{\lambda}{2}.$$

Позначимо $\gamma = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\gamma > 1$. Зінтегрувавши обидві частини нерівності (7) від 0 до t, одержимо

$$L^{\gamma-1}(t) \geqslant \frac{1}{L^{1-\gamma}(0) - M_{13}(\gamma-1)t}.$$

Тому існує таке T_0, що $L(t) \to +\infty$ при $t \to T_0 - 0$.

Отже,

$$\int_{\Omega_t} b_0(x)|u|^p \, dx \to \infty \quad \text{при} \quad t \to T_0 - 0.$$

Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Висновки. В даній роботі досліджено мішану задача з однорідними крайовими умовами Діріхле та ненульовими початковими умовами для нелінійної зв'язної системи еволюційних рівнянь з інтегральним збуренням в обмеженій за просторовими змінними області. Доведено неіснування глобального узагальненого розв'язку задачі при певних умовах на коефіцієнти рівняння і початкові дані.

1. *Apolaya R. F., Clark H. R., Feitosa A. J.* On a nonlinear coupled system with internal damping // Electron. J. Different. Equat. — 2000. — **2000**, № 64. — P. 1 – 17.
2. *Arosio A., Spagnolo S.* Global solution of the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic, nonlinear partial differential equation and their aplications // College de France Seminar /Eds H. Brezis and J. L. Lions. — London: Pitman, 1984. — Vol. 6.
3. *Bisignin E.* Perturbation of Kirchhoff – Carrier's operator by Lipschitz functions // Proc. XXXI Bras. Sem. Analysis. — Rio de Janeiro, 1992.
4. *Clark M.R., Lima O. A.* On a mixed problem for a coupled nonlinear system // Electron. J. Different. Equat. — 1997. — **1997**, № 06. — P. 1 – 11.
5. *Clark M. R., Lima O. A.* Existence of solutions for a variational unilateral system // Electron. J. Different. Equat. — 2002. — **2002**, № 22. — P. 1 – 18.
6. *D'Ancona P., Spagnolo S.* Nonlinear perturbation of the Kirchhoff – Carrier equations // Univ. Pisa Lect. Notes. — 1992.
7. *Hosoya M., Yamada Y.* On some nonlinear wave equation I — local existence and regularity of solutions // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, Math. — 1991. — **38**. — P. 225 – 238.
8. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Изд-во иностр. лит., 1972.
9. *Matos M. P.* Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of a string // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl. — 1991. — **17**, № 12. — P. 1125 – 1137.
10. *Medeiros L. A., Milla Miranda M.* Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation // Nonlinear Anal. — 1986. — **10**. — P. 27 – 40.

11. *Medeiros L. A.* On some nonlinear perturbations of Kirchhoff – Carrier's operator // Camp. Appl. Math. — 1994. — **13**, № 3. — P. 225 – 233.

12. *Messaoudi S. A.* A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system // Electron. J. Different. Equat. — 2001. — **2001**, № 30. — P. 1 – 9.

13. *Nechepurenko M. O.* The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math. — 2007. — **67**. — P. 207 – 223.

14. *Nechepurenko M. O.* Mixed problem for a nonlinear coupled system in unbounded domains // Mat. Stud. — 2009. — **32**, № 1. — P. 33 – 44.

15. *Нечепуренко М. О., Торган Г. Р.* О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области // Укр. мат. вісн. — 2010. — **7**, № 1. — С. 49 – 72.

16. *Pohozhaev S. I.* On a class of quasilinear hyperbolic equations // Mat. Sb. — 1975. — **96**, № 138. — P. 152 – 166.

17. *Гаевский Х. Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1978. — 336 с.

Одержано 23.02.10