УДК 517 . 98

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З G-СЕКТОРІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

А. В. Чайковський

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2 корп. 7

A sufficient conditions for solvability of a Cauchy problem for nonlinear differential equations in a Banach space with a G-sectorial operator coefficient in the linear part are given.

Приведены достаточные условия разрешимости задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с G-секториальным операторным коэффициентом при линейном слагаемом.

1. Вступ. Нехай $(B, ||\cdot||)$ — комплексний банахів простір, I — одиничний оператор, O — нульовий оператор в B. Далі $D(A)$, $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$ позначають відповідно область визначення, спектр і резольвенту лінійного оператора A.

Нагадаємо, що лінійний оператор $A : D(B) \subset B \to B$ називають секторіальним, якщо множина $D(A)$ скрізь щільна в B та існують такі сталі $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини

$$S_{a,y} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a,\ |\arg(z-a)| < y\}$$

виконуються умови:

1) $\sigma(A) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists C > 0\, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus S_{a,y},\, \lambda \neq 0 : ||R_\lambda(A)|| \leq \dfrac{C}{|\lambda - a|}$.

Теорія секторіальних операторів і пов'язана з нею теорія аналітичних напівгруп добре розвинені і мають численні застосування (див., наприклад, [1–3]). Зокрема, в роботі [1] наведено достатні умови, при яких можна стверджувати локальне чи глобальне існування розв'язку нелінійного диференціального рівняння з секторіальним операторним коефіцієнтом. В роботах [4–7] розглянуто оператори, спектр яких лежить у відповідному секторі, але резольвента спадає на нескінченності повільніше, ніж у секторіальних операторів. Загальну теорію операторів подібного типу та застосування її до лінійних диференціальних рівнянь викладено в роботі [8]. У цій статті наведено достатні умови розв'язності задачі Коші для відповідних нелінійних рівнянь, які узагальнюють твердження з роботи [1].

2. Означення і основні властивості G-секторіальних операторів. Наведемо ряд означень і тверджень щодо властивостей G-секторіальних операторів, які викладені в роботі [8].

Означення 1. *Будемо говорити, що функція* $G : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *належить класу* Ψ, *якщо вона задовольняє наступні умови:*

а) G *не зростає на* $[0, +\infty)$;

б) $G(t) \to 0$, $t \to +\infty$;

в) функція $1/G$ *ліпшицева на* $[0, +\infty)$.

Разом з кожною функцією $G \in \Psi$ будемо розглядати функцію

$$H(t) := \frac{1}{t} G\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

При цьому

$$G(t) = \frac{1}{t} H\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

Означення 2. *Нехай функція G належить класу Ψ. Лінійний оператор $T : D(T) \subset \subset B \to B$ назвемо G-секторіальним, якщо існують такі сталі $a \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, що для множини $S_{a,\varphi}$ виконуються умови:*

1) $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists M > 0 \, \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} : ||R_\lambda(T)|| \leq MG(|\lambda - a|)$.

Приклад. Кожен секторіальний оператор T є G-секторіальним, якщо покласти $G(t) = = (t+1)^{-1}, t \geq 0$.

В роботах [6, 8] наведено приклади операторів, для яких $G(t) = (t+1)^{-\beta}$, $t > 0$ ($\beta \in \in (0,1)$), $G(t) = (t+1)^{-1} \ln^\beta (t + t_0)$, $t > 0$ ($\beta \in (0,1)$, $t_0 > 0$), $G(t) = \ln^{-\beta}(t+2)$, $t > 0$ ($\beta > 0$).

В роботі [8] для G-секторіального оператора T визначаено операторну експоненту e^{-Tt}, $t > 0$, та дробові степені $A^{-\alpha}$, A^α, $\alpha \in \Omega$, причому

$$\Omega := \Omega_0 \cup \{1\}, \quad \Omega_0 := \left\{ \alpha > 0 \mid \int\limits_0^1 t^{\alpha - 1} H(t)\, dt < +\infty \right\}.$$

Зауважимо, що для кожного G-секторіального оператора

$$(1, +\infty) \subset \Omega_0.$$

Наведемо необхідні властивості експонент та степенів.

Далі розглядатимемо лише G-секторіальні оператори T, спектр яких задовольняє умову

$$\operatorname{Re} \sigma(T) > 0,$$

і покладемо $a := 0$.

Зауважимо, що інші випадки зводяться до цього за формулою $e^{-Tt} = e^{-(T-a)t} e^{-at}$.

Теорема 1. *Нехай функція G належить класу Ψ, T — G-секторіальний оператор. Тоді справджуються оцінки:*

1) $\forall n \geq 0 \, \exists C_n > 0 \, \forall t > 0 : ||T^n e^{-Tt}|| \leq C_n H(t) t^{-n}$;

2) $\forall n \geq 0 \, \exists L_n > 0 \, \forall t_1, t_2 > 0, \min\{1, t_1\} > t_2 - t_1 > 0 :$

$$||T^{n-1}(e^{-Tt_1} - e^{-Tt_2})|| \leq L_n (t_2 - t_1) H(t_1) t_1^{-n}.$$

Теорема 2. *Нехай функція G належить класу Ψ, T — G-секторіальний оператор, $\alpha \in \in \Omega$. Тоді:*

1) $(e^{-Tt} - I)T^{-\alpha} \to O,\ t \to 0+;$
2) $\exists C_\alpha > 0\, \forall t > 0\ :\ ||e^{-Tt}T^{-\alpha}|| \le C_\alpha;$
3) $\left((Tt)^{-1}(I - e^{-Tt}) - I\right) T^{-\alpha} \to O, t \to 0+;$
4) якщо додатково виконується умова

$$\exists\, C_H > 0\, \forall t_1, t_2 \in (0, R), \quad t_1 \le t_2 : H(t_2) \le C_H H(t_1), \tag{1}$$

то

$$\forall \alpha \in \Omega\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \alpha\, \exists\, C > 0\, \forall s > 0 : ||T^n e^{-Ts} T^{-\alpha}|| \le C H(s) s^{\alpha - n}.$$

Доведення. Перші три властивості встановлено в [8]. Встановимо четверту:

$$\forall \alpha \in \Omega\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \alpha\, \forall s > 0 :$$

$$||T^n e^{-Ts} T^{-\alpha}|| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T^n e^{-T(t+s)} dt \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} ||T^n e^{-T(t+s)}||\, dt \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} C_n H(t+s)(t+s)^{-n}\, dt =$$

$$= \frac{s^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} C_n H(st+s)(t+1)^{-n}\, dt \le \frac{H(s)s^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} C_n (t+1)^{-n}\, dt.$$

Зауваження 1. Умова (1) виконується для всіх прикладів із роботи [8].

Наслідок. *Нехай функція G належить класу Ψ, T — G-секторіальний оператор, $\alpha \in \Omega$ і $x \in D(T^\alpha)$. Тоді:*
1) $e^{-Tt}x \to x, t \to 0+;$
2) $(Tt)^{-1}(I - e^{-Tt})x \to x, t \to 0+\, .$

Позначимо через X_0 множину тих $x \in B$, для яких справджуються твердження 1 і 2 останнього наслідку. Зауважимо, що для секторіального оператора $X_0 = B$, для довільного G-секторіального оператора $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} D(T^\alpha) \subset X_0$.

3. Задача Коші для лінійного рівняння.

Означення 3. *Нехай $f : (0, R) \to B$, $x_0 \in B$. Розв'язком задачі Коші*

$$x'(t) + Tx(t) = f(t), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0,$$

назвемо функцію $x \in C([0, R), B)$ таку, що $\forall t \in (0, R) : x(t) \in D(T)$, x диференційовна на $(0, R)$ і задовольняє рівняння та початкову умову.

Наведемо ряд результатів, що узагальнюють твердження щодо розв'язності задачі Коші, отримані в [8].

Теорема 3. *Нехай функція* G *належить класу* Ψ, T — G*-секторіальний оператор,* $1 \in \in \Omega_0(T)$, *функція* $f : (0, R) \to X_0$ *задовольняє такі умови:*

$$\forall t \in (0, R)\, \exists \varepsilon_t > 0\, \exists L_t > 0\, \exists \beta_t \in \Omega_0$$

$$\forall s_1, s_2 \in (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap (0, R) : ||f(s_1) - f(s_2)|| \leq L_t |s_1 - s_2|^{\beta_t} \tag{2}$$

і

$$\int_0^t H(t-s)||f(s)||\, ds \to 0, \quad t \to 0+ .$$

Тоді функція

$$F(t) := \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s)\, ds, \quad t \in (0, R), \quad F(0) = \overline{0},$$

є розв'язком задачі Коші

$$F'(t) = -TF(t) + f(t), \quad t \in (0, R), \quad F(0) = \overline{0}.$$

Доведення повністю аналогічне доведенню теореми 8 [8].

Теорема 4. *Нехай функція* G *належить класу* Ψ, T — G*-секторіальний оператор,* $(0, 1) \cap \Omega_0(T) \neq \varnothing$ *і виконується умова (1). Нехай також функція* $f \in C((0, R], B)$ *і*

$$\int_0^R ||f(s)||\, ds < +\infty.$$

Тоді:

1) функція

$$F(t) := \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s)\, ds, \quad t \in (0, R), \quad F(0) = \overline{0},$$

локально гельдерова на $(0, R]$, *причому показник степеня в означенні гельдеровості для кожного проміжку має вигляд* $1 - \alpha$, *де* $\alpha \in (0, 1) \cap \Omega_0$;

2) якщо $f \in C([0, R], B)$, *то* F *гельдерова на* $[0, R]$ *з показником* $1 - \alpha$, *де* $\alpha \in (0, 1) \cap \Omega_0$;

3) функція $V = T^{-1}F$ *є розв'язком задачі Коші*

$$V'(t) = -TV(t) + T^{-1}f(t), \quad t \in (0, R), \quad V(0) = \overline{0}.$$

Доведення. Доведемо локальну гельдеровість F.

Нехай $t_1, t_2 \in [a, b] \subset (0, R)$, $t_2 > t_1$, $t_2 - t_1 < a/2$, $C := \max\limits_{t \in [a/2, b]} ||f(t)||$. Тоді

$$F(t_2) - F(t_1) = \sum_{k=1}^{4} J_k(t_1, t_2),$$

де

$$J_1(t_1, t_2) = \int\limits_{2t_1 - t_2}^{t_2} e^{-T(t_2 - s)} f(s)\, ds,$$

$$J_2(t_1, t_2) = -\int\limits_{2t_1 - t_2}^{t_1} e^{-T(t_1 - s)} f(s)\, ds,$$

$$J_3(t_1, t_2) = \int\limits_{a/2}^{2t_1 - t_2} (e^{-T(t_2 - s)} - e^{-T(t_1 - s)}) f(s)\, ds,$$

$$J_4(t_1, t_2) = \int\limits_{0}^{a/2} (e^{-T(t_2 - s)} - e^{-T(t_1 - s)}) f(s)\, ds.$$

Оцінимо ці інтеграли, враховуючи теорему 1:

$$||J_1(t_1, t_2)|| \le \int\limits_{2t_1 - t_2}^{t_2} H(t_2 - s) ||f(s)||\, ds \le L_1 C \int\limits_{0}^{2(t_2 - t_1)} H(s)\, ds \le$$

$$\le L_1 C \int\limits_{0}^{2(t_2 - t_1)} H(s) s^{\alpha - 1}\, ds (2(t_2 - t_1))^{1-\alpha} \le L_1 C \int\limits_{0}^{2R} H(s) s^{\alpha - 1}\, ds (2(t_2 - t_1))^{1-\alpha},$$

$$||J_2(t_1, t_2)|| \le \int\limits_{2t_1 - t_2}^{t_1} H(t_1 - s) ||f(s)||\, ds \le L_1 C \int\limits_{0}^{t_2 - t_1} H(s)\, ds \le$$

$$\le L_1 C \int\limits_{0}^{t_2 - t_1} H(s) s^{\alpha - 1}\, ds (t_2 - t_1)^{1-\alpha} \le L_1 C \int\limits_{0}^{R} H(s) s^{\alpha - 1}\, ds (t_2 - t_1)^{1-\alpha},$$

$$||J_3(t_1, t_2)|| \le L_1 C \int\limits_{0}^{2t_1 - t_2} (t_2 - t_1)(t_1 - s)^{-1} H(t_1 - s)\, ds =$$

$$= L_1 C \int\limits_{t_2 - t_1}^{t_1} (t_2 - t_1) s^{-1} H(s)\, ds \le L_1 C \int\limits_{0}^{R} H(s) s^{\alpha - 1}\, ds (t_2 - t_1)^{1-\alpha},$$

$$||J_4(t_1,t_2)|| \le L_1 C \int\limits_0^{a/2} (t_2-t_1)(t_1-s)^{-1} H(t_1-s)||f(s)||\,ds \le$$

$$\le L_1 C(t_2-t_1)\int\limits_0^{a/2} \frac{2}{a} C_H H(a/2)||f(s)||\,ds.$$

Якщо $f \in C([0,R])$, то гельдеровість доводиться аналогічно, якщо вибрати $[a,b] = [0,R]$.

Покладемо $G = T^{-1}F$. Тоді при $0 < t_1 < t_2 < R$ маємо

$$G(t_2)-G(t_1)+F(t_1)(t_2-t_1) = \int\limits_0^{t_2} T^{-1}e^{-T(t_2-s)}f(s)\,ds -$$

$$-\int\limits_0^{t_1} T^{-1}e^{-T(t_1-s)}f(s)\,ds + (t_2-t_1)\int\limits_0^{t_1} e^{-T(t_1-s)}f(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} (T^{-1}e^{-T(t_2-s)} - T^{-1}e^{-T(t_1-s)} + (t_2-t_1)e^{-T(t_1-s)})f(s)\,ds +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} T^{-1}e^{-T(t_2-s)}f(s)\,ds = I_1 + I_2.$$

Враховуючи теорему 2, отримуємо

$$||I_1|| \le (t_2-t_1)L_1||T^{-\alpha}(T^{-1}(e^{-T(t_2-t_1)}-I)(t_2-t_1)^{-1}+I)|| \int\limits_0^{t_1} ||TT^{\alpha-1}e^{-T(t_1-s)}f(s)||\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} \frac{C_0 H(t_1-s)}{(t_1-s)^{\alpha}}||f(s)||\,ds\, o(t_2-t_1) = o(t_2-t_1), \quad t_1,t_2 \to t_0, \quad t_0 \in (0,R).$$

Крім того,

$$||I_2-(t_2-t_1)f(t_1)|| = \left\| \int\limits_{t_1}^{t_2} T^{-1}e^{-T(t_2-s)}(f(s)-f(t_1))ds \right\| \le$$

$$\le C_0(t_2-t_1)\max_{s\in[t_1,t_2]}||f(s)-f(t_1)|| =$$

$$= o(t_2-t_1), \quad t_1,t_2 \to t_0, \quad t_0 \in (0,R).$$

Доведемо неперервність функції V в нулі. Маємо

$$\left\| \int_0^t T^{-1} e^{-T(t-s)} f(s)\, ds \right\| \le C_1 \int_0^t ||f(s)||\, ds \to 0, \quad t \to 0+\, .$$

Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для кожного $x_0 \in X_0$ існує єдиний розв'язок задачі Коші*

$$x'(t) + Tx(t) = f(t), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0,$$

причому

$$x(t) = e^{-Tt} x_0 + \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s)\, ds. \tag{3}$$

Доведення повністю аналогічне доведенню теореми 9 [8].

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді для кожного $x_0 \in X_0$ існує єдиний розв'язок задачі Коші*

$$x'(t) + Tx(t) = T^{-1} f(t), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0,$$

причому

$$x(t) = e^{-Tt} x_0 + \int_0^t e^{-T(t-s)} T^{-1} f(s)\, ds. \tag{4}$$

Доведення з урахуванням теореми 4 аналогічне доведенню теореми 9 [8].

4. Задача Коші для нелінійного рівняння. Нехай $U \subset (0, R) \times B$ — відкрита множина, $f : U \to B$. Розглянемо задачу Коші

$$x'(t) + Tx(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

Означення 4. *Розв'язком задачі Коші (5) назвемо функцію $x \in C([0, R], B)$ таку, що $x(0) = x_0$ і при кожному $t \in (0, R) : (t, x(t)) \in U, x(t) \in D(T)$, існує $x'(t)$ і справджується відповідне диференціальне рівняння.*

Лема 1. *Нехай функція G належить класу Ψ, T — G-секторіальний оператор, $(0, 1) \cap \cap \Omega_0(T) \neq \varnothing$ і виконується умова (1). Нехай для довільної точки $(t, x) \in U$ існує окіл $U_1 \subset U$ такий, що*

$\exists C_f > 0\, \exists \alpha \in (0, 1) \cap \Omega_0(T)\, \exists \theta_1, \theta_2 \in (0, 1],\ \min\{\theta_1, \theta_2 \cdot (1 - \alpha)\} \in \Omega\, \forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in U_1 :$

$$||f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)|| \le C_f(|t_1 - t_2|^{\theta_1} + ||x_1 - x_2||^{\theta_2}).$$

Функція $x \in C([0, R], B)$ є розв'язком задачі Коші (5) таким, що

$$\int_0^t H(t-s)||f(s, x(s))||\, ds \to 0, \quad t \to 0+, \tag{6}$$

тоді і лише тоді, коли справджується рівність

$$x(t) = e^{-Tt}x_0 + \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [0, R]. \tag{7}$$

Доведення. З умов на функцію f випливає, що інтеграл в твердженні леми є абсолютно збіжним.

Необхідність. Нехай x_1 — розв'язок задачі Коші (5). Розглянемо задачу

$$z'(t) + Tz(t) = T^{-1}f(t, x_1(t)), \quad t \in (0, R), \quad z(0) = T^{-1}x_0.$$

За теоремою 7 ця задача має єдиний розв'язок

$$z(t) = e^{-Tt}T^{-1}x_0 + \int_0^t e^{-T(t-s)}T^{-1}f(s, x_1(s))\, ds, \quad t \in (0, R).$$

З іншого боку, розв'язком цієї задачі є функція $T^{-1}x_1$.

На рівність $z(t) = T^{-1}x_1(t)$, $t \in (0, R)$, можна подіяти оператором T. Отримана рівність означає, що x_1 — розв'язок (7).

Достатність. Нехай x — розв'язок (7). За теоремою 5 x — локально гельдерова функція з показниками степеня вигляду $1 - \alpha$, де $\alpha \in (0, 1) \cap \Omega_0$. Доведемо, що функція $f_1(t) := f(t, x(t))$ задовольняє умови теореми 6. При t_1, t_2 з деякого околу заданої точки $t_0 \in (0, R)$ маємо

$$||f_1(t_1) - f_1(t_2)|| \le C_f(|t_1 - t_2|^{\theta_1} + ||x(t_1) - x(t_2)||^{\theta_2}).$$

Тому f_1 локально гельдерова з показником $\min\{\theta_1, \theta_2 \cdot (1-\alpha)\} \in \Omega$. З теореми 6 випливає, що функція x є розв'язком задачі Коші

$$x'(t) + Tx(t) = f_1(t), \quad t \in (0, R), \quad x(0) = x_0.$$

Лему доведено.

Зауваження 2. Лема 1 узагальнює лему 3.3.1 [1] при $\alpha = 0$ (виконання додаткового твердження — локальної гельдеровості функції $f(t, x(t))$ для розв'язку x рівняння (7) — легко випливає з доведення леми 1).

Зауваження 3. Умову (6) можна замінити більш легкою для перевірки умовою обмеженості функції f.

Теорема 7. *Нехай $f \in C([0,R] \times B, B)$, $G \in \Psi$, T — G-секторіальний оператор, $x_0 \in \in X_0$, $(0,1) \cap \Omega_0(T) \neq \varnothing$ і виконується умова (1). Нехай також для довільної точки $(t,x) \in [0,R] \times B$ існує окіл $U_1 \subset [0,R] \times B$ такий, що*

$$\exists C_f = C_f(t,x) > 0\, \exists \alpha \in (0,1) \cap \Omega_0(T)\, \exists \theta_1 \in (0,1],\ \min\{\theta_1, 1-\alpha\} \in \Omega\, \forall (t_1,x_1),(t_2,x_2) \in U_1 :$$

$$||f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)|| \le C_f(|t_1 - t_2|^{\theta_1} + ||x_1 - x_2||).$$

Тоді існує $R_1 \in (0,R)$ таке, що задача Коші (5) з заміною R на R_1 має єдиний розв'язок.

Якщо додатково виконується умова

$$\exists K > 0\, \forall (t,x) \in [0,R] \times B : ||f(t,x)|| \le K(1 + ||x||), \tag{8}$$

то задача Коші (5) має єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $R_1 \in (0,R)$, $\delta > 0$ такі, що

$$[0,R_1] \times \{b \in B | ||b - x_0|| \le \delta\}, \quad Y := \{y \in C([0,R_1],B) | ||y(t) - x_0|| \le \delta\}$$

— повний метричний простір з рівномірною метрикою. Розглянемо відображення $S : Y \to Y$, що діє за формулою

$$(Sx)(t) := e^{-Tt}x_0 + \int_0^t e^{-T(t-s)} f(s,x(s))\, ds, \quad t \in [0,R_1], \quad x \in Y.$$

Враховуючи те, що $x_0 \in X_0$, теорему 5, а також оцінку

$$||(Sx)(t) - x_0|| \le ||e^{-Tt}x_0 - x_0|| + \int_0^t H(t-s)(||f(0,x_0)|| + C_f(0,x_0)(s^{\theta_1} + ||x(s) - x_0||))\, ds \le$$

$$\le (||f(0,x_0)|| + C_f(0,x_0)(R_1^{\theta_1} + 1)) \int_0^{R_1} H(s) ds,$$

приходимо до висновку, що при досить малих R_1 відображення S визначене коректно. Крім того,

$$||(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)|| \le \int_0^t H(t-s) ||f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))||\, ds \le$$

$$\le \int_0^t H(t-s) C_f ||x_1(s) - x_2(s)||\, ds \le C_f \int_0^{R_1} H(s)\, ds ||x_1 - x_2||_\infty,\ t \in [0,R_1].$$

Тому при досить малих R_1 відображення S є стискаючим.

Отже, це відображення має єдину нерухому точку в просторі $C([0, R_1], B)$. Внаслідок обмеженості функції $f(s, x(s))$ при $s \in [0, R_1]$ для фіксованого $x \in C([0, R_1], B)$ виконується умова (6). Тому з леми 1 випливає, що задача Коші на $[0, R_1]$ має єдиний розв'язок.

Нехай $\beta \in (0, 1) \cap \Omega_0(T)$. Тоді $x(R_1) \in D(T^\beta) \subset X_0$. Це означає, що аналогічно доводиться однозначна розв'язність задачі Коші на $[R_1, R_2]$, $[R_2, R_3]$ і т. д.

Припустимо, що виконується умова (8), але розв'язок x допускає продовження лише на проміжок $[0, R_0)$, $R_0 < R$. З нерівності

$$||x(t)|| \leq ||e^{-Tt}x_0|| + K \int_0^t H(t-s)(1 + ||x(s)||)\, ds, \quad t \in [0, R_0),$$

та нерівності Гронуолла – Беллмана випливає, що функція x обмежена на $[0, R_1)$, а тому на цьому проміжку обмежена деякою сталою K_0 функція $f(s, x(s))$. Звідси при $\gamma \in (\beta, 1) \cap$ $\cap \Omega_0(T)$ маємо

$$||T^\gamma x(t)|| = \left\| e^{-T(t-R_1/2)} T^\gamma x(R_1/2) + \int_{R_1/2}^{t} T^\gamma e^{-T(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\| \leq$$

$$\leq ||e^{-T(t-R_1/2)} T^\gamma x(R_1/2)|| + K_0 \int_{R_1/2}^{R} (t-s)^{-\gamma} H(t-s) ds, \quad t \in [R_1, R_0).$$

Тому при $R_1 < t_1 < t_2 < R_0$

$$||T^\beta x(t_2) - T^\beta x(t_1)|| = \left\| e^{-T(t_2-t_1)} T^\beta x(t_1) - T^\beta x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{-T(t_2-s)} f(s, x(s)) ds \right\| \leq$$

$$\leq ||(e^{-T(t_2-t_1)} - I) T^{\beta-\gamma} x(t_1)||\, ||T^\gamma x(t_1)|| +$$

$$+ K_0 \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t-s)^{-\beta} H(t-s) ds \right\| \to 0, \quad t_1, t_2 \to R_0 - .$$

Отже, існує границя $\lim\limits_{t \to R_0-} x(t) \in D(T^\beta) \subset X_0$. Це означає, що розв'язок можна продовжити далі вправо за точку R_0. Прийшли до суперечності.

Теорему доведено.

Зауваження 4. Теорема 7 узагальнює теорему 3.3.3 та наслідок 3.3.5 [1] при $\alpha = 0$ на випадок G-секторіального операторного коефіцієнта.

5. Висновки. В роботі наведено умови розв'язності задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь з G-секторіальним операторним коефіцієнтом при лінійному доданку. Ці результати узагальнюють відомі раніше твердження для рівнянь з секторіальним операторним коефіцієнтом.

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 739 с.
4. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 830 с.
5. *Сильченко Ю. Т., Соболевский П. Е.* Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью // Сиб. мат. журн. — 1986. — **27**, № 4. — С. 93–104.
6. *Сильченко Ю. Т.* Об одном классе полугрупп // Функцион. анализ и его прил. — 1999. — **33**, № 4. — С. 90–93.
7. *Якубов С. М.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. — Баку, 1985.
8. *Городний М. Ф., Чайковский А. В.* Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сб. — 2006. — **197**, № 7. — С. 29–46.

Одержано 14.01.10,
після доопрацювання — 13.05.10