УДК 531.36

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ ДВОПАРАМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ ВОЛЬТЕРРА

М. Ф. Городній, К. В. Лукаш

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7
e-mail: gorodnii@yandex.ru

We find sufficient conditions for boundedness of solutions for a two-parameter nonlinear Volterra system in terms of coefficients of the system.

Получены достаточные условия ограниченности решений нелинейной двупараметрической системы Вольтерра в терминах коэффициентов этой системы.

У даній статті розглядається питання про обмеженість розв'язку $x = \{x_{n,m} : n \geq 0, m \geq \geq 0\}$ нелінійної двопараметричної системи Вольтерра

$$x_{n,m} = -\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{n-k,m-j}\, g(x_{k,j}) + y_{n,m}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \tag{1}$$

в якій $\{a_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ — фіксована послідовність дійсних чисел, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція, $y = \{y_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ — задана обмежена послідовність дійсних чисел. Аналогічне питання щодо однопараметричної системи Вольтерра досліджувалося в [1]. Про застосування систем Вольтерра див. [2, 3].

У подальшому будемо використовувати такі допоміжні твердження.

Нехай B — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\bar{0}$; $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із B в B, I — одиничний оператор у просторі B.

Розглянемо рівняння

$$x + AGx = y, \tag{2}$$

в якому $A \in L(B)$, $G : B \to B$ — деякий не обов'язково лінійний оператор, y — заданий елемент із B.

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай існують такі сталі $L > 0$, $c > 0$, $\lambda \in (0; 1)$, що виконуються умови:*
a_1*)* $\forall x, y \in B : \|Gx - Gy\| \leq L\|x - y\|$;
a_2*) оператор $I + cA$ є неперервно оборотним, а також $\|(I + cA)^{-1} - I\| \leq \lambda$;*
a_3*)* $\forall x, y \in B : \left\| x - y - \frac{1}{c}(Gx - Gy) \right\| \leq \|x - y\|$;
a_4*)* $G\overline{0} = \overline{0}$.

Тоді для довільного $y \in B$ рівняння (2) має єдиний розв'язок $x \in B$, до того ж цей розв'язок задовольняє нерівність

$$\|x - y\| \leq \frac{\lambda L}{c(1-\lambda)}\|y\|. \tag{3}$$

Доведення. Зафіксуємо $y \in B$. Тоді за умовою a_2) рівняння (2) еквівалентне рівнянню

$$x = S_y\, x, \tag{4}$$

де $S_y\, x := (I + cA)^{-1}A(cx - Gx) + (I + cA)^{-1}y$.

Доведемо, що відображення $S_y : B \to B$ є стискаючим. Справді, для довільних $x, u \in \in B$

$$\|S_y x - S_y u\| = \left\| x - u - \frac{1}{c}(Gx - Gu) - (I + cA)^{-1}\left(x - u - \frac{1}{c}(Gx - Gu)\right)\right\|,$$

а отже, за умовами a_2) та a_3) отримаємо

$$\|S_y x - S_y u\| \leq \lambda\|x - u\|.$$

Оскільки $\lambda \in (0; 1)$, то, застосувавши до відображення $S_y : B \to B$ принцип стискаючих відображень, одержимо, що рівняння (4) має єдиний розв'язок у просторі B.

Покладемо $B_y := \{u \in B | \|u - y\| \leq R\}$, де $R = \dfrac{\lambda L\|y\|}{c(1-\lambda)}$, та доведемо, що $S_y(B_y) \subset \subset B_y$. Справді, для кожного $u \in B_y$ внаслідок умов a_1), a_2) та a_4) справджується ланцюг нерівностей

$$\|S_y u - y\| \leq \|S_y\, u - S_y\, y\| + \|S_y\, y - y\| \leq \lambda\|u - y\| + \frac{1}{c}\,\|(I + cA)^{-1}Gy - Gy\| \leq$$

$$\leq \lambda\|u - y\| + \frac{\lambda}{c}\,\|Gy - G\overline{0}\| \leq \lambda\|u - y\| + \frac{\lambda L}{c}\|y\| \leq$$

$$\leq \lambda\frac{\lambda L\|y\|}{c(1-\lambda)} + \frac{\lambda L}{c}\|y\| = \frac{\lambda L\|y\|}{c(1-\lambda)}.$$

Отже, за принципом стискаючих відображень рівняння (4) має єдиний розв'язок у просторі B_y.

Оскільки рівняння (4) має єдиний розв'язок у просторі B, то цей розв'язок належить B_y, тобто задовольняє нерівність (3).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $\{p_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ — така послідовність комплексних чисел, що $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|p_{n,m}| < \infty$ і функція $p(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}p_{n,m}t^n s^m$ не має нулів на множині $K^2 := \{(t,s) \in \mathbb{C}^2 : |t| \leq 1, |s| \leq 1\}$. Тоді знайдеться така послідовність $\{d_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\} \subset \mathbb{C}$, що $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|d_{n,m}| < \infty$ і $\dfrac{1}{p(t,s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}d_{n,m}t^n\, s^m$, $(t,s) \in K^2$.*

Теорема 2 є безпосереднім наслідком теореми 3 із [4] і узагальнює відому теорему Вінера про абсолютно збіжні ряди Фур'є на випадок абсолютно збіжних степеневих рядів від двох змінних.

Достатні умови обмеженості розв'язків системи Вольтерра (1) визначає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай функція g і послідовність $\{a_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ задовольняють умови:*

b_1) $\exists L > 0\, \forall t, s \in \mathbb{R} : |g(t) - g(s)| \leq L|t - s|$;

b_2) $\forall t, s \in \mathbb{R} : |t - s - (g(t) - g(s))| \leq |t - s|$;

b_3) $g(0) = 0$;

b_4) $a_{0,0} = 0$;

b_5) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty$;

b_6) *функція* $f(t, s) = 1+\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} t^n s^m$ *не має нулів на множині* K^2 *і* $(f(t, s))^{-1} = 1+\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} t^n s^m$, *де* $\{q_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\}$ — *така послідовність дійсних чисел, що* $q_{0,0} = 0$ *і* $\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < 1$.

Тоді для довільної обмеженої послідовності система (1) має єдиний обмежений розв'язок x. Цей розв'язок задовольняє нерівність

$$\sup_{n\geq 0, m\geq 0} |x_{n,m} - y_{n,m}| \leq \frac{\lambda L}{(1-\lambda)} \sup_{n\geq 0, m\geq 0} |y_{n,m}|.$$

Доведення. Покладемо

$$l_{\infty}^2 := \left\{ x = \{x_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\} \subset \mathbb{R} \mid \|x\|_{\infty} := \sup_{n\geq 0, m\geq 0} |x_{n,m}| < \infty \right\}.$$

Тоді $(B, \|\cdot\|) = (l_{\infty}^2, \|\cdot\|_{\infty})$ — банахів простір.

Визначимо відображення A та G, які діють з B в B, співвідношеннями

$$Au := \left\{ (Au)_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{n-k,m-j} u_{k,j} | n \geq 0, m \geq 0 \right\},$$

$$Gu := \{(Gu)_{n,m} = g(u_{n,m}) \mid n \geq 0, m \geq 0\}.$$

Тоді оператори A та G визначено коректно, A належить $L(B)$ і система (1) еквівалентна системі (2). З умов b_1)–b_3) випливає, що умови a_1,) a_3,) a_4) теореми 1 для цих операторів виконуються зі сталими $L > 0$, $c = 1$. Перевіримо виконання умови a_2).

Розглянемо лінійну систему Вольтерра

$$x_{n,m} = -\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{n-k,m-j} x_{k,j} + y_{n,m}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0. \tag{5}$$

Неважко переконатись, що розв'язок системи (5) записується у вигляді

$$x_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} q_{n-k,m-j} y_{k,j} + y_{n,m}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0. \tag{6}$$

Тому оператор $(I+A)^{-1}$ існує і, згідно зі співвідношеннями (6),

$$\big(((I+A)^{-1}-I)\,y\big)_{n,m}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}q_{n-k,m-j}y_{k,j},\quad n\geq 0,\quad m\geq 0,$$

а отже, внаслідок умови b_6) виконується нерівність $\|(I+A)^{-1}-I\|\leq\lambda$.

Таким чином, теорема 3 випливає з теореми 1.

Приклад. Умови теореми 3 виконуються для функції $g(t)=\operatorname{arctg}t$, $t\in\mathbb{R}$, і послідовності $a_{0,0}=0$, $a_{n,m}=p^n\,q^m$, $n\geq 0$, $m\geq 0$, $(n,m)\neq(0,0)$, де p, q — такі фіксовані дійсні числа, що $|p|+|q|+|pq|<1$. У цьому випадку $(f(t,s))^{-1}=1-pt-qs++pqts$, $(t,s)\in K^2$.

1. *Городній М. Ф.* Про обмежені розв'язки нелінійної системи Вольтерри // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 149–155.

2. *Колмановський В. Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 4. — С. 42–45.

3. *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001. — 400 с.

4. *Bochner S. Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings // Ann. Math. — 1942. — **43**, № 3. — P. 409–418.

Одержано 21.10.09