УДК 517.9

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ*

Г. П. Пелюх, О. А. Сівак

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We find conditions of existence of continuous bounded solutions for systems of nonlinear functional-difference equations and study properties of the solutions.

Установлены условия существования непрерывных ограниченных решений систем нелинейных функционально-разностных уравнений и исследованы их свойства.

Функціонально-різницеві рівняння вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t, x(t), x(qt)), \tag{1}$$

де A — деяка дійсна $(n \times n)$-матриця, $q = \text{const}$, $f : R \times R^n \times R^n \to R^n$, були об'єктом дослідження багатьох математиків і на даний час окремі їх типи досить добре досліджені. Зокрема, в роботах [1 – 5] побудовано основи теорії систем рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t),$$

$$x(qt) = A(t)x(t)$$

у випадку, коли елементи матриці $A(t)$ є голоморфними функціями в околі точки $t = \infty$, в роботах [6, 7] досліджено структуру множини неперервних розв'язків системи (1) у випадку, коли вектор-функція $f(t, x, y)$ є лінійною відносно x і y, а в роботах [8 – 10] отримано достатні умови існування неперервних періодичних розв'язків систем вигляду (1) і досліджено їх властивості. В продовження цих досліджень у даній роботі встановлено умови існування неперервних при $t \in R^+$ $(t \in R^-)$ розв'язків нелінійних систем вигляду (1) і вивчено структуру їх множини.

1. Розглянемо спочатку систему рівнянь

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t, x(qt)), \tag{2}$$

де $f : R \times R^n \to R^n$, q — деяка дійсна стала, у припущенні, що виконуються наступні умови:

1) $\det A \neq 0$, $a = |A| < 1$, $q > 0$;

2) вектор-функція $f(t, x)$ є неперервною і обмеженою при всіх $t \in R$, $x \in R^n$ і задовольняє умову

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq l|x - y|,$$

* Частково підтримано проектом Ф 25.1/021.

де l — деяка додатна стала така, що $|A| + l < 1$;

3) $\sup\limits_t |f(t, 0)| = M < +\infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–3. Тоді при достатньо малому l система рівнянь (2) має єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\gamma(t)$.*

Доведення. Через C^0 позначимо множину неперервних і обмежених при $t \in R$ вектор-функцій $x(t)$ і за допомогою співвідношення

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sup_t |x(t) - y(t)|$$

введемо в ній метрику ρ. Тоді, очевидно, множина C^0 із метрикою ρ є повним метричним простором.

Покажемо, що відображення S, яке визначається формулою

$$Sx(t) = Ax(t-1) + f(t-1, x(q(t-1))), \tag{3}$$

є відображенням стиску простору C^0 у себе. Дійсно, якщо $x(t) \in C^0$, то на підставі (3) і умов теореми вектор-функція $Sx(t)$ є неперервною й обмеженою при $t \in R$ і, отже, відображення S переводить C^0 у себе.

Нехай тепер $x(t), y(t) \in C^0$. Тоді згідно з (3) і умовами теореми знаходимо

$$|Sx(t) - Sy(t)| = |Ax(t-1) + f(t-1, x(q(t-1))) - Ay(t-1) - f(t-1, y(q(t-1)))| \leq$$

$$\leq |A|\,|x(t-1) - y(t-1)| + l|x(q(t-1)) - y(q(t-1))| \leq (|A| + l)\|x(t) - y(t)\|.$$

Звідси випливає

$$\rho(Sx(t), Sy(t)) \leq (|A| + l)\rho(x(t), y(t)),$$

тобто S є відображенням стиску простору C^0 у себе і, як відомо, має єдину нерухому точку $\gamma(t)$, що належить C^0, і $\gamma(t) = \lim\limits_{m\to\infty} S^m x_*(t)$, де $x_*(t)$ — довільна вектор-функція із C^0.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови 1–3, q — ціле додатне число і вектор-функція $f(t, x)$ є T-періодичною по t, то при достатньо малому l система рівнянь (2) має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\gamma(t)$.*

Дослідимо тепер питання про існування неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків системи рівнянь (2). Для цього виконаємо в (2) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{4}$$

де $\gamma(t)$ — неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок системи (2). В результаті отримаємо систему рівнянь для вектор-функції $y(t)$:

$$y(t+1) = Ay(t) + F(t, y(qt)), \tag{5}$$

де $F(t, y(qt)) = f(t, y(qt)+\gamma(qt))-f(t, \gamma(qt))$, до того ж $F(t, 0) \equiv 0$ і вектор-функція $F(t, y)$ задовольняє умову 2.

Покажемо, що при деяких додаткових припущеннях система рівнянь (5) має сім'ю неперервних при $t \geq 0$ розв'язків.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 2 і умови:*
4) $q > 1, \widetilde{a}\, a^q < 1$, *де* $\widetilde{a} = |A^{-1}|$;
5) $\dfrac{\widetilde{a}l}{1-\widetilde{a}a^q} = \Delta < 1.$

Тоді система рівнянь (5) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ *розв'язків у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{6}$$

де $y_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — *деякі неперервні й обмежені при* $t \in R^+$ *вектор-функції, які задовольняють умову*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0. \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь вигляду

$$y_0(t+1) = Ay_0(t), \tag{8_0}$$

$$y_1(t+1) = Ay_1(t) + F(t, y_0(qt)), \tag{8_1}$$

$$y_i(t+1) = Ay_i(t) + F\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l(qt)\right) - F\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l(qt)\right), \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{8_i}$$

і покажемо, що вони мають сім'ї неперервних і обмежених при $t \geq 0$ розв'язків, які задовольняють умови

$$|y_i(t)| \leq \widetilde{M}\Delta^i a^{qt}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{9_i}$$

де $\widetilde{M}$ — деяка додатна стала.

Дійсно, система рівнянь (8_0) має сім'ю неперервних розв'язків, що залежать від довільної неперервної при $t \in [0, 1]$ вектор-функції $\omega(t)$ і задовольняють умову

$$|y_0(t)| \leq \widetilde{M}a^t. \tag{9_0}$$

Далі, підставляючи у (8_1) ряд

$$y_1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} F(t+j, y_0(q(t+j))), \tag{10_1}$$

можна переконатися, що він є її формальним розв'язком. Більш того, з огляду на (9_0) і умови теореми отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} l \, |y_0(q(t+j))| \leq \widetilde{M} \widetilde{a} \, l \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j a^{q(t+j)} \leq \widetilde{M} \widetilde{a} \, l \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a} a^q)^j a^{qt} \leq$$

$$\leq \widetilde{M} \frac{\widetilde{a} l}{1 - \widetilde{a} a^q} a^{qt} \leq \widetilde{M} \Delta a^{qt}.$$

Отже, системи рівнянь (8_0), (8_1) мають сім'ї неперервних при $t \geq 0$ розв'язків, для кожного з яких виконуються співвідношення (9_0), (9_1).

Враховуючи умови теореми і оцінки (9_0), (9_1), можна послідовно показати, що ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \left[F\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-1} y_l(q(t+j))\right) - \right.$$

$$\left. - F\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-2} y_l(q(t+j))\right) \right], \quad i = 2, 3, \ldots, \qquad (10_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R^+$ і є розв'язками відповідних систем рівнянь (8_i), $i = 2, 3, \ldots$. Дійсно, легко переконатися, що ряди (10_i), $i = 2, 3, \ldots$, є формальними розв'язками систем рівнянь (8_i), $i = 2, 3, \ldots$. Доведемо їх збіжність. Справді, оскільки ряд (10_1) рівномірно збігається при $t \in R^+$, то за індукцією припустимо, що збіжність ряду (10_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що ряд (10_{i+1}) також рівномірно збігається при $t \in R^+$ і виконується оцінка (9_{i+1}). На підставі (10_{i+1}), (9_i) отримуємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \left| F\left(t+j, \sum_{l=0}^{i} y_l(q(t+j))\right) - F\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-1} y_l(q(t+j))\right) \right| \leq$$

$$\leq \widetilde{a} \, l \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j |y_i(q(t+j))| \leq \widetilde{M} \widetilde{a} \, l \Delta^i \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j a^{q^2(t+j)} \leq \widetilde{M} \widetilde{a} \, l \Delta^i \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a} a^q)^j a^{qt} \leq$$

$$\leq \widetilde{M} \Delta^i \frac{\widetilde{a} l}{1 - \widetilde{a} a^q} \, a^{qt} \leq \widetilde{M} \Delta^{i+1} a^{qt}.$$

Отже, системи рівнянь (8_i), $i = 1, 2, \ldots$, мають розв'язки у вигляді рядів (10_i), $i = 1, 2, \ldots$, що рівномірно збігаються при всіх $t \in R^+$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умови (9_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Безпосередньо із (9_i), $i = 0, 1, \ldots$, випливає, що ряд (6) рівномірно збігається при всіх $t \in R^+$, виконується оцінка

$$|y(t)| \leq \frac{\widetilde{M}}{1 - \Delta} \, a^t,$$

а отже, має місце співвідношення (7).

Для завершення доведення теореми 2 достатньо, очевидно, показати, що ряд (6) задовольняє систему рівнянь (2), тобто виконується тотожність

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) \equiv A \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + F\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt)\right).$$

Для цього, очевидно, досить довести, що ряд

$$F(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left[F\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} y_l(qt)\right) - F\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} y_l(qt)\right) \right]$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R^+$ і його сумою є $F(t, \sum_{l=0}^{\infty} y_l(qt))$. А це, в свою чергу, буде доведено, якщо вдасться показати, що при всіх $t \in R^+$ має місце співвідношення

$$\lim_{i\to\infty} F\left(t, \sum_{l=0}^{i} y_l(qt)\right) = F\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} y_l(qt)\right). \tag{11}$$

Нехай ε — як завгодно мале додатне число. Тоді згідно з умовами теореми 2 існує такий номер N, що виконується умова

$$\widetilde{M} \frac{l}{1-\Delta} \Delta^{N+1} < \varepsilon.$$

Далі, з огляду на умови теорем 1, 2 і оцінки (9_i), $i = 0, 1, \ldots$, знаходимо

$$\left| F\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} y_l(qt)\right) - F\left(t, \sum_{l=0}^{i} y_l(qt)\right) \right| \le l \sum_{l=i+1}^{\infty} |y_l(qt)| \le l\, \widetilde{M} \Delta^{i+1} \, \frac{1}{1-\Delta} < \varepsilon$$

при всіх $i \ge N$. Цим самим співвідношення (11) і теорему 2 доведено.

Розглянемо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли умови 1–3 виконуються, але $0 < q \le 1$. Зрозуміло, що в цьому випадку теорема 1 має місце, а теорема 2, взагалі кажучи, ні. Тому далі основною нашою метою є встановлення додаткових умов на вектор-функцію $F(t,x)$ і матрицю A, при виконанні яких система рівнянь (5) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків, які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*
1) $\det A \ne 0$, $a = |A| < 1$, $0 < q \le 1$;
2) $|F(t,x) - F(t,y)| \le l\, p^{|t|} |x-y|$, $t \in R$, *де* $0 < p < 1$;
3) $\widetilde{a}p < 1$, $\dfrac{\widetilde{a}l}{1-\widetilde{a}p} = \widetilde{\Delta} < 1$.

Тоді система рівнянь (5) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ *розв'язків у вигляді ряду (6).*

Для доведення теореми достатньо, як і у випадку теореми 2, показати, що послідовність систем рівнянь (8_i), $i = 0, 1, \ldots$, має неперервні й обмежені при $t \in R^+$ розв'язки у вигляді рядів (10_i), $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють умови

$$|y_i(t)| \le \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^i a^{q^i t}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{12_i}$$

Дійсно, беручи до уваги умови теореми, легко переконатися, що ряд (10_1) рівномірно збігається при всіх $t \in R^+$ і задовольняє систему рівнянь (8_1). Крім того,

$$|y_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} l\, p^{t+j} |y_0(q(t+j))| \le \widetilde{M}\widetilde{a}l \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j a^{qj} p^j a^{qt} \le \widetilde{M}\widetilde{a}l \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}p)^j a^{qt} \le$$

$$\le \widetilde{M} \frac{\widetilde{a}l}{1 - \widetilde{a}p}\, a^{qt} = \widetilde{M}\widetilde{\Delta} a^{qt},$$

тобто умова (12_i) виконується при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (12_i) доведено для деякого $i \ge 1$, і встановимо її для $i+1$. Справді, на підставі умов теореми, (10_{i+1}) і (12_i) отримуємо

$$|y_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \left| F\left(t+j, \sum_{l=0}^{i} y_l(q(t+j))\right) - F\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-1} y_l(q(t+j))\right) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^{j+1} l p^{t+j} |y_i(q(t+j))| \le \widetilde{M}\widetilde{a}\, l \widetilde{\Delta}^i \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}^j p^j a^{q^{i+1}(t+j)} \le$$

$$\le \widetilde{M}\widetilde{a}\, l \widetilde{\Delta}^i \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}p)^j a^{q^{i+1}t} \le \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^i \frac{\widetilde{a}\, l}{1 - \widetilde{a}p}\, a^{q^{i+1}t} = \widetilde{M}\widetilde{\Delta}^{i+1} a^{q^{i+1}t}.$$

Цим доведено, що умови (12_i) виконуються при всіх $i \ge 1$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (6) рівномірно збігається при $t \in R^+$ і його сума $y(t)$ задовольняє умову (7).

Для завершення доведення теореми 3 достатньо, очевидно, встановити співвідношення (11) аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 2.

2. Розглянемо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли умови 2, 3 теореми 1 мають місце, а замість умови 1 виконується умова:

1$'$) $\det A \ne 0$, $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, де A_1, A_2 — деякі дійсні $(p \times p)$- і $(r \times r)$-матриці $(p + r = n)$, для яких виконуються співвідношення $a_1 = |A_1| < 1$, $\widetilde{a}_2 = |A_2^{-1}| < 1$.

Запишемо систему (2) у вигляді

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t+1) &= A_1 \widetilde{x}(t) + \widetilde{f}(t, \widetilde{x}(qt), \widetilde{\widetilde{x}}(qt)), \\ \widetilde{\widetilde{x}}(t+1) &= A_2 \widetilde{\widetilde{x}}(t) + \widetilde{\widetilde{f}}(t, \widetilde{x}(qt), \widetilde{\widetilde{x}}(qt)), \end{aligned} \tag{13}$$

де $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widetilde{\widetilde{x}} = (x_{p+1}, \ldots, x_{p+r})$, $\widetilde{f} = (f_1, \ldots, f_p)$, $\widetilde{\widetilde{f}} = (f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$.

При цьому виконуються умови:

$2'$) $|\widetilde{f}(t,\widetilde{x}',\widetilde{\widetilde{x}}') - \widetilde{f}(t,\widetilde{x}'',\widetilde{\widetilde{x}}'')| \leq l_1(|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''| + |\widetilde{\widetilde{x}}' - \widetilde{\widetilde{x}}''|)$, $|\widetilde{\widetilde{f}}(t,\widetilde{x}',\widetilde{\widetilde{x}}') - \widetilde{\widetilde{f}}(t,\widetilde{x}'',\widetilde{\widetilde{x}}'')| \leq l_2(|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''| + |\widetilde{\widetilde{x}}' - \widetilde{\widetilde{x}}''|)$, де l_1, l_2 — деякі додатні сталі, що залежать від $l(l_1 = l_1(l),\ l_2 = l_2(l)$, $l_1 \to 0, l_2 \to 0$ при $l \to 0)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови $1'$, $2'$, 3 і $q > 0$. Тоді система рівнянь (13) має єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\gamma(t) = (\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\widetilde{\gamma}}(t))$.*

Доведення теореми 4 проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1. При цьому відображення $T = (T_1, T_2)$ простору C^0 у себе визначається формулами

$$T_1\widetilde{x}(t) = A_1\widetilde{x}(t-1) + \widetilde{f}(t-1, \widetilde{x}(q(t-1)), \widetilde{\widetilde{x}}(q(t-1))),$$

$$T_2\widetilde{\widetilde{x}}(t) = A_2^{-1}\widetilde{\widetilde{x}}(t+1) - A_2^{-1}\,\widetilde{\widetilde{f}}(t, \widetilde{x}(qt), \widetilde{\widetilde{x}}(qt)).$$

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови теореми 4, вектор-функції $\widetilde{f}(t,x,y)$, $\widetilde{\widetilde{f}}(t,x,y)$ є T-періодичними по t і q — деяке ціле додатне число, то розв'язок $\gamma(t) = (\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\widetilde{\gamma}}(t))$ є T-періодичним.*

Виконавши в (13) взаємно однозначну заміну змінних

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= \widetilde{y}(t) + \widetilde{\gamma}(t), \\ \widetilde{\widetilde{x}}(t) &= \widetilde{\widetilde{y}}(t) + \widetilde{\widetilde{\gamma}}(t), \end{aligned} \tag{14}$$

отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(t+1) &= A_1\widetilde{y}(t) + \widetilde{F}(t, \widetilde{y}(qt), \widetilde{\widetilde{y}}(qt)), \\ \widetilde{\widetilde{y}}(t+1) &= A_2\widetilde{\widetilde{y}}(t) + \widetilde{\widetilde{F}}(t, \widetilde{y}(qt), \widetilde{\widetilde{y}}(qt)), \end{aligned} \tag{15}$$

де $\widetilde{F}(t,\widetilde{y}(qt),\widetilde{\widetilde{y}}(qt)) = \widetilde{f}(t,\widetilde{y}(qt)+\widetilde{\gamma}(qt),\widetilde{\widetilde{y}}(qt)+\widetilde{\widetilde{\gamma}}(qt)) - \widetilde{f}(t,\widetilde{\gamma}(qt),\widetilde{\widetilde{\gamma}}(qt))$, $\widetilde{\widetilde{F}}(t,\widetilde{y}(qt),\widetilde{\widetilde{y}}(qt)) = \widetilde{\widetilde{f}}(t,\widetilde{y}(qt)+\widetilde{\gamma}(qt),\widetilde{\widetilde{y}}(qt)+\widetilde{\widetilde{\gamma}}(qt)) - \widetilde{\widetilde{f}}(t,\widetilde{\gamma}(qt),\widetilde{\widetilde{\gamma}}(qt))$. Легко переконатися, що вектор-функції $\widetilde{F}(t,\widetilde{y},\widetilde{\widetilde{y}})$, $\widetilde{\widetilde{F}}(t,\widetilde{y},\widetilde{\widetilde{y}})$ задовольняють умову $2'$ і $\widetilde{F}(t,0,0) \equiv 0$, $\widetilde{\widetilde{F}}(t,0,0) \equiv 0$.

Очевидно, що при виконанні умов $1'$, $2'$ система рівнянь (15) має єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\widetilde{y}(t) = 0$, $\widetilde{\widetilde{y}}(t) = 0$. Проте вона має нескінченно багато неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови $1'$, $2'$, $q > 1$, $\widetilde{F}(t,0,0) \equiv 0$, $\widetilde{\widetilde{F}}(t,0,0) \equiv 0$ і умови:*

$3'$) $\widetilde{a}_1\, a_1^q < 1$, $\widetilde{a}_2\, a_1^q < 1$, де $\widetilde{a}_1 = |A_1^{-1}|$, $\widetilde{a}_2 = |A_2^{-1}|$;

$4'$) $\theta = \max\left\{\dfrac{2\widetilde{a}_1 l_1}{1-\widetilde{a}_1\, a_1^q}, \dfrac{2\widetilde{a}_2 l_2}{1-\widetilde{a}_2\, a_1^q}\right\} < 1$.

Тоді система рівнянь (15) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків у вигляді рядів

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t), \qquad \widetilde{\widetilde{y}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_i(t), \tag{16}$$

де $\widetilde{y}_i(t), \widetilde{\widetilde{y}}_i(t), i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R^+$ вектор-функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t\to+\infty} \widetilde{y}(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \widetilde{\widetilde{y}}(t) = 0. \tag{17}$$

Доведення. Розглянемо послідовність систем рівнянь

$$\widetilde{y}_0(t+1) = A_1 \widetilde{y}_0(t), \quad \widetilde{\widetilde{y}}_0(t) \equiv 0, \tag{18_0}$$

$$\widetilde{y}_i(t+1) = A_1 \widetilde{y}_i(t) + \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right),$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_i(t+1) = A_2 \widetilde{\widetilde{y}}_i(t) + \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) -$$

$$- \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{18_i}$$

де $\widetilde{y}_{-1}(t) \equiv 0, \widetilde{\widetilde{y}}_{-1}(t) \equiv 0$, і покажемо, що вони мають неперервні й обмежені при $t \in R^+$ розв'язки $(\widetilde{y}_i(t), \widetilde{\widetilde{y}}_i(t)), i = 0, 1, \ldots,$ у вигляді рядів

$$\widetilde{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A_1^{-(j+1)} \left[\widetilde{F}\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{y}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{y}}_l(q(t+j))\right) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{F}\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{y}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{y}}_l(q(t+j))\right)\right],$$

$$\widetilde{\widetilde{y}}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A_2^{-(j+1)} \left[\widetilde{\widetilde{F}}\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{y}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{y}}_l(q(t+j))\right) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t+j, \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{y}_l(q(t+j)), \sum_{l=0}^{i-2} \widetilde{\widetilde{y}}_l(q(t+j))\right)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{19_i}$$

для яких виконуються оцінки

$$|\widetilde{y}_i(t)| \leq \overline{M}\theta^i a_1^t,$$

$$|\widetilde{\widetilde{y}}_i(t)| \leq \overline{M}\theta^i a_1^t, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{20_i}$$

де $\overline{M}$ — деяка додатна стала.

Дійсно, оскільки система рівнянь (18_0) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^+$ розв'язків $(\widetilde{y}_0(t), 0)$, що залежать від довільної неперервної при $t \in [0,1]$ вектор-функції $\omega(t)$ розмірності p і задовольняють умови

$$|\widetilde{y}_0(t)| \leq \overline{M}a_1^t, \quad |\widetilde{\widetilde{y}}_0(t)| \leq \overline{M}a_1^t, \tag{20_0}$$

то оцінки (20_0) мають місце.

Безпосередньою підстановкою (19_i) у (18_i) можна переконатися, що ряди (19_i), $i = 1, 2, \ldots$, є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (18_i), $i = 1, 2, \ldots$. Доведемо справедливість оцінок (20_i), $i = 1, 2, \ldots$. Справді, беручи до уваги (19_1), (20_0) і умови теореми, отримуємо

$$|\widetilde{y}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^{j+1} l_1(|\widetilde{y}_0(q(t+j))| + |\widetilde{\widetilde{y}}_0(q(t+j))|) \leq 2\overline{M}\,\widetilde{a}_1 l_1 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^j\, a_1^{q(t+j)} \leq$$

$$\leq 2\overline{M}\,\widetilde{a}_1 l_1 \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}_1\, a_1^q)^j a_1^{qt} \leq \overline{M}\,\frac{2\widetilde{a}_1 l_1}{1 - \widetilde{a}_1 a_1^q}\, a_1^t \leq \overline{M}\theta a_1^t,$$

$$|\widetilde{\widetilde{y}}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^{j+1} l_2(|\widetilde{y}_0(q(t+j))| + |\widetilde{\widetilde{y}}_0(q(t+j))|) \leq 2\overline{M}\,\widetilde{a}_2 l_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^j\, a_1^{q(t+j)} \leq$$

$$\leq 2\overline{M}\,\widetilde{a}_2 l_2 \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}_2\, a_1^q)^j a_1^{qt} \leq \overline{M}\,\frac{2\widetilde{a}_2 l_2}{1 - \widetilde{a}_2 a_1^q}\, a_1^t \leq \overline{M}\theta a_1^t.$$

Отже, оцінки (20_i) виконуються при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (20_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від i до $i + 1$. Дійсно, на підставі (19_{i+1}), (20_i) і умов теореми отримуємо

$$|\widetilde{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^{j+1} l_1(|\widetilde{y}_i(q(t+j))| + |\widetilde{\widetilde{y}}_i(q(t+j))|) \leq 2\overline{M}\theta^i \widetilde{a}_1 l_1 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_1^j a_1^{q(t+j)} \leq$$

$$\leq \overline{M}\theta^i \frac{2\widetilde{a}_1 l_1}{1 - \widetilde{a}_1 a_1^q}\, a_1^t \leq \overline{M}\theta^{i+1} a_1^t,$$

$$|\widetilde{\widetilde{y}}_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^{j+1} l_2(|\widetilde{y}_i(q(t+j))| + |\widetilde{\widetilde{y}}_i(q(t+j))|) \le 2\overline{M}\theta^i \widetilde{a}_2 l_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_2^j a_1^{q(t+j)} \le$$

$$\le 2\overline{M}\theta^i \widetilde{a}_2 l_2 \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{a}_2 a_1^q)^j a_1^{qt} \le \overline{M}\theta^i \frac{2\widetilde{a}_2 l_2}{1-\widetilde{a}_2 a_1^q} a_1^t \le \overline{M}\theta^{i+1} a_1^t.$$

Таким чином, ряди (19_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\widetilde{y}_i(t), \widetilde{\widetilde{y}}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють відповідні системи рівнянь (18_i) і для яких виконуються оцінки (20_i), $i = 1, 2, \ldots$. Звідси безпосередньо випливає, що ряди (16) рівномірно збігаються при всіх $t \in R^+$ до деяких неперервних при $t \in R^+$ вектор-функцій $\widetilde{y}(t), \widetilde{\widetilde{y}}(t)$, які задовольняють умови

$$|\widetilde{y}(t)| \le \frac{\overline{M}}{1-\theta}\, a_1^t, \quad |\widetilde{\widetilde{y}}(t)| \le \frac{\overline{M}}{1-\theta} a_1^t,$$

а отже, й умови (17).

Тепер покажемо, що виконуються співвідношення

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) = \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right),$$

$$\lim_{i\to+\infty} \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) = \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right). \tag{21}$$

Дійсно, нехай ε — як завгодно мале додатне число і N — ціле додатне число, що задовольняє умови

$$\overline{M}\frac{2l_1}{1-\theta}\theta^{N+1} < \varepsilon, \quad \overline{M}\frac{2l_2}{1-\theta}\theta^{N+1} < \varepsilon$$

(за умовою $0 < \theta < 1$ таке число N завжди існує). Тоді згідно з умовами теореми і оцінками (20_i), $i = 0, 1, \ldots$, при всіх $i \ge N$ виконуються нерівності

$$\left|\widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right)\right| \le l_1 \sum_{l=i+1}^{\infty} (|\widetilde{y}_l(qt)| + |\widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)|) \le$$

$$\le l_1 \sum_{l=i+1}^{\infty} (\overline{M}\theta^l a_1^{qt} + \overline{M}\theta^l a_1^{qt}) \le 2\overline{M} l_1 \theta^{i+1} \frac{1}{1-\theta} < \varepsilon,$$

$$\left|\widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right)\right| \le l_2 \sum_{l=i+1}^{\infty} (|\widetilde{y}_l(qt)| + |\widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)|) \le$$

$$\le l_2 \sum_{l=i+1}^{\infty} (\overline{M}\theta^l a_1^{qt} + \overline{M}\theta^l a_1^{qt}) \le 2\overline{M}\, l_2 \theta^{i+1} \frac{1}{1-\theta} < \varepsilon,$$

а отже, співвідношення (21) мають місце. Далі, очевидно,

$$\widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) \equiv \sum_{i=0}^{\infty}\left(\widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right)\right),$$

$$\widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) \equiv \sum_{i=0}^{\infty}\left(\widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \widetilde{\widetilde{y}}_l(qt)\right)\right)$$

і, отже (на підставі (18_i), $i = 0, 1, \ldots$), ряди (16) — це сім'я розв'язків системи рівнянь (15), що задовольняють умови (17).

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови $1'$, $2'$, $q > 1$ і умови:*
$3''$) $0 < a_1 a_2^{-q} < 1$, $0 < a_2^{1-q} < 1$, де $a_2 = |A_2| > 1$;
$4''$) $\widetilde{\theta} = \max\left\{\dfrac{2l_1}{a_2^q - a_1}, \dfrac{2l_2}{a_2^q - a_2}\right\} < 1$.

Тоді система рівнянь (15) має сім'ю неперервних й обмежених при $t \in R^-$ розв'язків у вигляді рядів

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t), \qquad \widetilde{\widetilde{y}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_i(t), \tag{22}$$

де $\overline{y}_i(t), \overline{\overline{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in R^-$ вектор-функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t\to-\infty} \widetilde{y}(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \widetilde{\widetilde{y}}(t) = 0. \tag{23}$$

Доведення. Розглянемо послідовності систем рівнянь

$$\overline{y}_0(t) = 0, \quad \overline{\overline{y}}_0(t+1) = A_2 \overline{\overline{y}}_0(t), \tag{24_0}$$

$$\overline{y}_i(t+1) = A_1 \overline{y}_i(t) + \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right),$$

$$\overline{\overline{y}}_i(t+1) = A_2 \overline{\overline{y}}_i(t) + \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i-2} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{24_i}$$

і доведемо, що вони мають неперервні й обмежені при $t \in R^-$ розв'язки, що задовольняють умови

$$|\overline{y}_i(t)| \leq \overline{\overline{M}}\,\widetilde{\theta}^i a_2^t, \quad |\overline{\overline{y}}_i(t)| \leq \overline{\overline{M}}\,\widetilde{\theta}^i a_2^t, \quad i = 0, 1, \ldots, \qquad (25_i)$$

де $\overline{\overline{M}}$ — деяка додатна стала.

Дійсно, друга підсистема системи рівнянь (24_0) має, як відомо, сім'ю неперервних і обмежених при $t \in R^-$ розв'язків $\overline{\overline{y}}_0(t) = \overline{\overline{y}}_0(t, \omega^-(t))$, що залежать від довільної неперервної при $t \in [0,1]$ вектор-функції $\omega^-(t)$ розмірності r і задовольняють умови (25_0).

Далі, безпосередньою підстановкою в (24_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що ряди

$$\overline{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_1^{j-1} \left[\widetilde{F}\left(t-j, \sum_{l=0}^{i-1} \overline{y}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{y}}_l(q(t-j)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \widetilde{F}\left(t-j, \sum_{l=0}^{i-2} \overline{y}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{y}}_l(q(t-j)) \right) \right],$$
$$\qquad (26_i)$$
$$\overline{\overline{y}}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_2^{j-1} \left[\widetilde{\widetilde{F}}\left(t-j, \sum_{l=0}^{i-1} \overline{y}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{y}}_l(q(t-j)) \right) - \right.$$
$$\left. - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t-j, \sum_{l=0}^{i-2} \overline{y}_l(q(t-j)), \sum_{l=0}^{i-2} \overline{\overline{y}}_l(q(t-j)) \right) \right], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (24_i), $i = 1, 2, \ldots$. Доведемо, що вони рівномірно збігаються при $t \in R^-$ до деяких неперервних вектор-функцій $\overline{y}_i(t), \overline{\overline{y}}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умови (25_i), $i = 1, 2, \ldots$. Справді, беручи до уваги умови теореми і (25_0), отримуємо

$$|\overline{y}_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{j-1} l_1(|\overline{y}_0(q(t-j))| + |\overline{\overline{y}}_0(q(t-j))|) \leq l_1 \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{j-1}(\overline{\overline{M}} a_2^{q(t-j)} + \overline{\overline{M}}\, a_2^{q(t-j)}) \leq$$
$$\leq 2\overline{\overline{M}}\, l_1 a_1^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (a_1\, a_2^{-q})^j a_2^{qt} \leq \overline{\overline{M}} \frac{2 l_1 a_1^{-1}\, a_1 a_2^{-q}}{1 - a_1 a_2^{-q}} a_2^t \leq \overline{\overline{M}} \widetilde{\theta} a_2^t,$$

$$|\overline{\overline{y}}_1(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_2^{j-1} l_2(|\overline{y}_0(q(t-j))| + |\overline{\overline{y}}_0(q(t-j))|) \leq l_2 \sum_{j=1}^{\infty} a_2^{j-1}(\overline{\overline{M}} a_2^{q(t-j)} + \overline{\overline{M}}\, a_2^{q(t-j)}) \leq$$
$$\leq 2\overline{\overline{M}} l_2 a_2^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (a_2\, a_2^{-q})^j a_2^{qt} \leq \overline{\overline{M}} \frac{2 l_2 a_2^{-1} a_2 a_2^{-q}}{1 - a_2^{1-q}} a_2^t \leq \overline{\overline{M}} \widetilde{\theta} a_2^t.$$

Отже, ряди (26_1) рівномірно збігаються при $t \in R^-$ до деяких неперервних вектор-функцій $\overline{y}_1(t), \overline{\overline{y}}_1(t)$, які задовольняють умови (25_1). Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (25_i) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вони зберігаються при переході від i до $i+1$. Дійсно, згідно з (26_{i+1}), умовами теореми і (25_i) знаходимо

$$|\overline{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{j-1} l_1(|\overline{y}_i(q(t-j))| + |\overline{\overline{y}}_i(q(t-j))|) \leq l_1 a_1^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_1^j (\overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^i a_2^{q(t-j)} +$$

$$+ \overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^i a_2^{q(t-j)}) \leq 2\overline{\overline{M}} a_1^{-1} l_1 \widetilde{\theta}^i \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 a_2^{-q})^j a_2^{qt} \leq \overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^i \frac{2l_1 a_1^{-1} a_1 a_2^{-q}}{1 - a_1 a_2^{-q}} \, a_2^t \leq \overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^{i+1} a_2^t,$$

$$|\overline{\overline{y}}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_2^{j-1} l_2(|\overline{y}_i(q(t-j))| + |\overline{\overline{y}}_i(q(t-j))|) \leq l_2 a_2^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_2^j (\overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^i a_2^{q(t-j)} +$$

$$+ \overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^i a_2^{q(t-j)}) \leq 2\overline{\overline{M}} l_2 a_2^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (a_2 a_2^{-q})^j a_2^{qt} \leq \overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^i \frac{2l_2 a_2^{-1} a_2 a_2^{-q}}{1 - a_2^{1-q}} a_2^t \leq \overline{\overline{M}}\widetilde{\theta}^{i+1} a_2^t.$$

Таким чином, ряди (26_i) рівномірно збігаються при $t \in R^-$ і всіх $i \geq 1$ до деяких неперервних вектор-функцій $\overline{y}_i(t), \overline{\overline{y}}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють умови (25_i), $i = 1, 2, \ldots$. Звідси безпосередньо випливає, що ряди (22) рівномірно збігаються при $t \in R^-$ до деяких неперервних вектор-функцій $\widetilde{y}(t), \widetilde{\widetilde{y}}(t)$, які задовольняють умови

$$|\widetilde{y}(t)| \leq \frac{\overline{\overline{M}}}{1 - \widetilde{\theta}} a_2^t, \quad |\widetilde{\widetilde{y}}(t)| \leq \frac{\overline{\overline{M}}}{1 - \widetilde{\theta}} a_2^t,$$

а отже, й умови (23).

Для завершення доведення теореми залишається показати, що ряди (22) задовольняють систему рівнянь (15). Для цього покажемо спочатку, що виконуються співвідношення

$$\begin{gathered}
\lim_{i \to +\infty} \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \equiv \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right), \\
\lim_{i \to +\infty} \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \equiv \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right).
\end{gathered} \tag{27}$$

Дійсно, нехай ε — як завгодно мале додатне число і N — таке ціле додатне число, що задовольняє умови

$$\overline{\overline{M}} \frac{2l_1}{1 - \widetilde{\theta}} \widetilde{\theta}^{N+1} < \varepsilon, \quad \overline{\overline{M}} \frac{2l_2}{1 - \widetilde{\theta}} \widetilde{\theta}^{N+1} < \varepsilon$$

(оскільки $0 < \widetilde{\theta} < 1$, то таке число N завжди існує). Тоді на підставі умов теореми і оцінок

(25_i), $i = 0, 1, \ldots$, при всіх $i \geq N$ отримуємо

$$\left| \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \right| \leq l_1 \sum_{l=i+1}^{\infty} (|\overline{y}_l(qt)| + |\overline{\overline{y}}_l(qt)|) \leq$$

$$\leq l_1 \sum_{l=i+1}^{\infty} (\overline{\overline{M}} \widetilde{\theta}^l a_2^{qt} + \overline{\overline{M}} \widetilde{\theta}^l a_2^{qt}) \leq \overline{\overline{M}} \frac{2 l_1}{1 - \widetilde{\theta}} \widetilde{\theta}^{i+1} < \varepsilon,$$

$$\left| \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \right| \leq l_2 \sum_{l=i+1}^{\infty} (|\overline{y}_l(qt)| + |\overline{\overline{y}}_l(qt)|) \leq$$

$$\leq l_2 \sum_{l=i+1}^{\infty} (\overline{\overline{M}} \widetilde{\theta}^l a_2^{qt} + \overline{\overline{M}} \widetilde{\theta}^l a_2^{qt}) \leq \overline{\overline{M}} \frac{2 l_2}{1 - \widetilde{\theta}} \widetilde{\theta}^{i+1} < \varepsilon,$$

тобто співвідношення (27) мають місце.

Таким чином, оскільки згідно з (27) мають місце тотожності

$$\widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left[\widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \right],$$

$$\widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left[\widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) - \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{i-1} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right) \right],$$

де $\overline{y}_{-1}(t) \equiv 0$, $\overline{\overline{y}}_{-1}(t) \equiv 0$, то, враховуючи (24_i), $i = 0, 1, \ldots$, знаходимо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t+1) = A_1 \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t) + \widetilde{F}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_i(t+1) = A_2 \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_i(t) + \widetilde{\widetilde{F}}\left(t, \sum_{l=0}^{\infty} \overline{y}_l(qt), \sum_{l=0}^{\infty} \overline{\overline{y}}_l(qt)\right),$$

що і потрібно було показати.

Теорему 6 доведено.

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243–284.

2. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregular linear difference equations // Acta Math. — 1930. — **54**. — P. 205–246.

3. *Carmichael R. D.* Linear difference equations and their analytic solutions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 99–134.

4. *Adams C. R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations // Ibid. — 1928. — **30**, № 3. — P. 507 – 541.
5. *Tzjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Acta Math. — 1933. — **61**. — P. 1 – 38.
6. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 307 – 335.
7. *Сівак О. А.* Про існування неперервних при $t \in R$ розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 2. — С. 450 – 459.
8. *Пелюх Г. П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1994. — № 6. — С. 1083 – 1085.
9. *Пелюх Г. П.* О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 1. — С. 140 – 144.
10. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Там же. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1626 – 1633.

Одержано 25.06.09