УДК 517.919

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко

Тернопіл. нац. екон. ун-т
e-mail: aliluyko@ imath.kiev.ua

We propose sufficient conditions for existence of a periodic solution of a system of linear ordinary second order differential equations that have a singular symmetric matrix at the second order derivatives in the case where the inhomogeneity is arbitrary periodic.

Предлагаются достаточные условия существования периодического решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые имеют вырожденную симметричную матрицу при производных второго порядка, для случая произвольной периодической неоднородности.

1. Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь

$$\varepsilon A(t)\ddot{x} + B(t)\dot{x} + C(t)x = f(t), \tag{1}$$

де дійсні квадратні матриці A, B, C та n-вимірний вектор f є періодичними з періодом 2π функціями, $A'(t) \equiv A(t)$, штрих означає операцію транспонування матриці, крапка — диференціювання по незалежній змінній t, матриця $A(t)$ є виродженою, при цьому, можливо, $\operatorname{rang} A(t) \not\equiv \text{ const}$, ε — додатний параметр.

Ставиться задача про існування гладкого періодичного розв'язку системи (1) для довільної неоднорідності $f(t)$.

Розробці методів побудови та дослідженню якісної поведінки розв'язків вироджених диференціальних систем присвячено багато робіт (див., наприклад, [1–6]). Система (1) вивчалася в [1] при певних припущеннях, одним із яких є сталість рангу матриці $A(t)$. Для скалярного рівняння (1) у повідомленні [2] наведено достатні умови існування періодичного розв'язку на підставі дослідження виродженого рівняння Ріккаті. У даній роботі здійснено узагальнення цих результатів.

Нехай $C^r(\mathcal{T}_1)$ — простір векторних або матричних функцій, що набувають дійсних значень, періодичних з періодом 2π і таких, що є неперервними разом із усіма похідними до порядку r включно; $H^r(\mathcal{T}_1)$ — простір функцій, інтегрованих із квадратом на $\mathcal{T}_1 = [0; 2\pi]$ разом із усіма узагальненими похідними до порядку r включно; $(\,.\,,\,.\,)_r$ — скалярний добуток в $H^r(\mathcal{T}_1)$, $\|\,.\,\|_r^2 = ((1-\Delta)^r\,.\,,\,.\,)_\circ$, $\Delta = \dfrac{d^2}{dt^2}$, $(\,.\,,\,.\,)_\circ = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\,.\,\|^2 dt$, $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — скалярний добуток в R^n, $|\Phi(t)|_r = \max\limits_{t\in\mathcal{T}_1,\, 0\le\rho\le r} \|\Phi^{(\rho)}(t)\|$, $\|\,.\,\|$ — евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

2. Рівняння (1) рівносильне системі

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \varepsilon A(t) \end{pmatrix} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -C(t) & -B(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

© В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко, 2010

де I_n — одинична n-вимірна матриця, $X = \mathrm{col}\,(x, \dot{x})$.

Позначимо

$$V(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_n + \varepsilon A(t)Z(t,\varepsilon) & 0 \\ -\varepsilon A(t)Z(t,\varepsilon) & I_n \end{pmatrix}, \quad W(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ Z(t,\varepsilon) & I_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $Z(t,\varepsilon)$ — n-вимірна матриця, яка задовольняє матричне рівняння Ріккаті

$$\varepsilon A(t)\dot{Z} + B(t)Z + \varepsilon A(t)Z^2 + C(t) = 0. \tag{4}$$

Якщо це рівняння має гладкий періодичний розв'язок $Z_0(t,\varepsilon)$ такий, що матриця $I_n + \varepsilon A Z_0(t,\varepsilon)$ невироджена, то внаслідок множення зліва рівняння (2) на $V(t,\varepsilon)$ та заміни $X = W(t,\varepsilon)Y$ отримуємо рівносильне рівняння

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \varepsilon A(t) \end{pmatrix} \dot{Y} = \begin{pmatrix} Z_0(t,\varepsilon) & I_n \\ 0 & -\varepsilon A(t)Z_0(t,\varepsilon) - B(t) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

для вивчення якого необхідна детальніша інформація про $Z_0(t,\varepsilon)$.

3. Дослідимо умови існування періодичного розв'язку матричного рівняння (4).

Нехай матриця $B(t)$ є невиродженою. Виконавши в рівнянні (4) заміну

$$Z = Z_1 - B^{-1}(t)C(t), \tag{6}$$

отримаємо

$$\varepsilon A\dot{Z}_1 + (B - \varepsilon AB^{-1}C)Z_1 - \varepsilon AZ_1B^{-1}C + \varepsilon AZ_1^2 + \varepsilon A\left[(B^{-1}C)^2 - \frac{d}{dt}(B^{-1}C)\right] = 0. \tag{7}$$

Це рівняння можна розглядати як скорочений запис для n^2 скалярних диференціальних рівнянь відносно невідомих n^2 елементів матриці Z_1. Запишемо його у вигляді векторного рівняння. Для цього подамо n^2-вимірні вектори у вигляді

$$u = \begin{pmatrix} z'_{1*} \\ z'_{2*} \\ \dots \\ z'_{n*} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g'_{1*} \\ g'_{2*} \\ \dots \\ g'_{n*} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де $z_{1*}, z_{2*}, \ldots, z_{n*}$ — рядки матриці Z_1,

$$\begin{pmatrix} g_{1*} \\ g_{2*} \\ \dots \\ g_{n*} \end{pmatrix} = A\left[\frac{d}{dt}(B^{-1}C) - (B^{-1}C)^2\right]. \tag{9}$$

Тоді матричне рівняння (7) еквівалентне [7, с. 239] векторному рівнянню

$$\varepsilon(A \otimes I_n)\frac{d}{dt}\,u + \big[(B - \varepsilon AB^{-1}C) \otimes I_n - \varepsilon A \otimes (B^{-1}C)' + \varepsilon AZ_1 \otimes I_n\big]\,u = \varepsilon g, \tag{10}$$

де $K \otimes M$ — прямий добуток [7, с. 235] $(n \times n)$-матриць K та M, тобто

$$K \otimes M = \begin{pmatrix} k_{11}M & k_{12}M & \cdots & k_{1n}M \\ k_{21}M & k_{22}M & \cdots & k_{2n}M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}M & k_{n2}M & \cdots & k_{nn}M \end{pmatrix}, \quad K = \{k_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Використавши позначення

$$\begin{gathered} a(t) = A(t) \otimes I_n, \quad P_1(t,u) = A(t)Z_1 \otimes I_n, \\ P(t,\varepsilon) = \big[B(t) - \varepsilon A(t)B^{-1}(t)C(t)\big] \otimes I_n - \varepsilon A(t) \otimes [B^{-1}(t)C(t))]', \end{gathered} \tag{11}$$

рівняння (10) запишемо у вигляді

$$\varepsilon a(t)\frac{du}{dt} + [P(t,\varepsilon) + \varepsilon P_1(t,u)]\,u = \varepsilon g(t). \tag{12}$$

Нехай матричні функції $A(t), B(t), C(t)$ належать просторам $C^r(\mathcal{T}_1), C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$ і $C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$, $r \geq 1$, відповідно.

Розглянемо квазілінійний оператор

$$L(u_1)u_2 = \varepsilon a(t)\frac{du_2}{dt} + [P(t,\varepsilon) + \varepsilon P_1(t,u_1)]\,u_2 \tag{13}$$

на множині функцій $u \in C^r(\mathcal{T}_1)$, яка визначається нерівностями

$$|u|_0 \leq d, \quad |u|_r \leq K.$$

Тоді гладкий періодичний розв'язок рівняння (12) є розв'язком із простору $C^1(\mathcal{T}_1)$ рівняння

$$L(u)u = \varepsilon g(t). \tag{14}$$

Метод Гальоркіна визначає N-те наближення до розв'язку $u \in C^1(\mathcal{T}_1)$ рівняння (14) виразом

$$W_N(t) = \sum_{|k| \leq N} W_k^{(N)} e^{ikt}, \quad t \in \mathcal{T}_1,$$

коефіцієнти якого $W_k^{(N)}$ знаходяться із системи рівнянь, що еквівалентна нелінійному алгебраїчному рівнянню

$$S_N L(W_N(t))W_N(t) = \varepsilon S_N g(t),$$

де $S_N f(t)$ — відрізок ряду Фур'є функції $f(t) \simeq \sum_k f_k e^{ikt}$ вигляду $S_N f(t) = \sum_{|k|\leq N} f_k e^{ikt}$.

Дотримуючись [3], використаємо лінійну модифікацію методу Гальоркіна. Для цього покладемо для початкового наближення $u_0 = 0$ і виберемо набір цілих чисел N_j, $j = 0, 1, \ldots$, для якого $N_j \geq N_{j-1}$, так, щоб N_j-те лінійне наближення Гальоркіна до розв'язку $u \in C^1(\mathcal{T}_1)$ рівняння (14) задати виразом

$$u_j(t) = \sum_{|k|\leq N_j} u_k e^{ikt},$$

коефіцієнти якого $u_k = u_k^{(j)}$ є розв'язком лінійного алгебраїчного рівняння

$$S_{N_j} L(u_{j-1}(t)) u_j(t) = \varepsilon S_{N_j} g(t).$$

Тоді N_j-те лінійне наближення Гальоркіна до розв'язку $u \in C^1(\mathcal{T}_1)$ рівняння (14) є N_j-м наближенням Гальоркіна до розв'язку в $C^1(\mathcal{T}_1)$ рівняння

$$L(u_{j-1}(t)) u(t) = \varepsilon g(t). \tag{15}$$

За рахунок малості параметра праву частину рівняння (15) можна вважати малою за нормою простору $C^r(\mathcal{T}_1)$. Тоді умови існування і збіжності наближень Гальоркіна $W_N(t)$ і $u_j(t)$ визначаються головною частиною оператора $L(u)$, рівною оператору

$$L(0) = \varepsilon a(t) \frac{d}{dt} + P(t, \varepsilon).$$

З'ясуємо умови щодо матричних коефіцієнтів вихідного рівняння (1), при яких система (12) стає нелінійним узагальненням додатної симетричної системи диференціальних рівнянь.

Лема 1. *Нехай для будь-якого* $t \in \mathcal{T}_1$

$$\min_{\|x\|=1} \langle \dot{A}(t)x, x\rangle \geq \alpha_0(t), \quad \max_{\|x\|=1} \langle A(t)x, x\rangle \leq \alpha_1(t),$$
$$\min_{\|x\|=1} \left\langle \left[B(t) - \varepsilon \left(\frac{1}{2}\dot{A}(t) + A(t)B^{-1}(t)C(t) \right) \right] x, x \right\rangle \geq \beta_0(t, \varepsilon), \tag{16}$$
$$\max_{\|x\|=1} \langle B^{-1}(t)C(t)x, x\rangle \leq \beta_1(t).$$

Тоді для будь-якого $t \in \mathcal{T}_1$

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle \dot{a}(t)\xi, \xi\rangle \geq \alpha_0(t), \tag{17}$$

$$\min_{\|\xi\|=1} \left\langle \left[P(t, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\dot{a}(t) \right] \xi, \xi \right\rangle \geq \beta_0(t, \varepsilon) - \varepsilon\alpha_1(t)\beta_1(t). \tag{18}$$

Доведення. Якщо M та K — матриці порядку n, то [7, с. 237] власні значення матриці $M \otimes K$ збігаються з n^2 числами $\lambda_r \mu_s$, $r = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, n}$, де λ_r та μ_s — власні значення матриць M та K відповідно. Із цієї властивості, симетричності $A(t)$, а також рівностей [7, с. 235]

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B', \quad (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C,$$

отримаємо

$$\langle \dot{a}(t)\xi, \xi \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(A(t) \otimes I_n)\xi, \xi \right\rangle = \left\langle \dot{A}(t) \otimes I_n \xi, \xi \right\rangle \geq \alpha_0(t) \|\xi\|^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[P(t,\varepsilon) + P'(t,\varepsilon) - \varepsilon\dot{a}(t)\right] &= \frac{1}{2}\{(B - \varepsilon AB^{-1}C) \otimes I_n - \varepsilon A \otimes (B^{-1}C)' + \\ &+ [(B - \varepsilon AB^{-1}C) \otimes I_n]' - \varepsilon[A \otimes (B^{-1}C)']' - \varepsilon \dot{A} \otimes I_n\} = \\ &= \frac{1}{2}\Big\{[B + B' - \varepsilon(\dot{A} + AB^{-1}C + (AB^{-1}C)')] \otimes I_n - \\ &- \varepsilon[A \otimes (B^{-1}C + (B^{-1}C)')]\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{\|\xi\|=1} \left\langle \left[P(t,\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\dot{a}(t)\right]\xi, \xi \right\rangle &\geq \min_{\|x\|=1} \left\langle \left[B(t) - \varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{A}(t) + A(t)B^{-1}(t)C(t)\right)\right]x, x \right\rangle - \\ &- \varepsilon \max_{\|x\|=1} \langle A(t)x, x \rangle \max_{\|x\|=1} \langle B^{-1}(t)C(t)x, x \rangle \\ &= \beta_0(t,\varepsilon) - \varepsilon\alpha_1(t)\beta_1(t), \quad t \in \mathcal{T}_1,\end{aligned}$$

що і завершує доведення леми.

Нехай $a(t)$, $P(t,\varepsilon)$, $g(t) \in C^r(\mathcal{T}_1)$ і для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконуються нерівності

$$\beta_0(t,\varepsilon) + \varepsilon[s\alpha_0(t) - \alpha_1(t)\beta_1(t)] \geq \gamma, \quad s = \overline{0, r}, \tag{19}$$

де γ — як завгодно мале додатне число. Тоді згідно з (17) і (18) матриця $\frac{1}{2}\left[P(t,\varepsilon) + P'(t,\varepsilon) - \right.$ $\left.-\varepsilon\dot{a}(t)\right]$ є додатно визначеною, а тому для довільної функції $u \in H^1(\mathcal{T}_1)$

$$(L(0)u, u)_0 \geq \gamma_0 \|u\|_0^2, \tag{20}$$

де γ_0 — додатне число, що не залежить від u. За лемою 1 [3, с. 198] для кожного $s, 1 \leq s \leq$ $\leq r$, і довільного $u \in H^{s+1}(\mathcal{T}_1)$ виконується нерівність

$$(L(0)u, u)_s \geq \gamma \|u\|_s^2 - \delta \|u\|_0^2, \tag{21}$$

де γ і δ — додатні сталі, які не залежать від u.

Оскільки $L(0)u = \varepsilon g(t)$, то з нерівностей (20), (21) і нерівності Шварца отримаємо оцінки

$$\|u\|_0 \leq \varepsilon \gamma_0^{-1} \|g\|_0, \quad \gamma \|u\|_r^2 - \delta \|u\|_0^2 \leq \varepsilon \|g\|_r \|u\|_r,$$

звідки

$$\gamma \|u\|_r^2 - \varepsilon^2 \delta \gamma^{-2} \|g\|_r^2 \leq \varepsilon \|g\|_r \|u\|_r, \tag{22}$$

позаяк $\gamma \leq \gamma_0$, $\|g\|_0 \leq \|g\|_r$. Розв'язуючи нерівність (22), маємо оцінку

$$\|u\|_r \leq \varepsilon \gamma_1^{-1} \|g\|_r, \tag{23}$$

де $\gamma_1 = 2\gamma/(1 + \sqrt{1 + 4\delta/\gamma})$.

Нехай $r > 2$. Тоді згідно з теоремою Соболєва [3, с. 15] про вкладення просторів $H^r(\mathcal{T}_1) \subset C^1(\mathcal{T}_1)$

$$|u|_1 \leq c \|u\|_r, \tag{24}$$

де c — додатна стала, що не залежить від u. З нерівностей (23), (24) випливає оцінка

$$|u|_1 \leq \varepsilon c_1 \|g\|_r, \tag{25}$$

де додатна стала c_1 не залежить від u.

Згідно з лемою Ю. Мозера [9, с. 199], якщо виконуються нерівності (19), то для довільного $u \in C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ мають місце нерівності

$$(L(0)u, u)_s \geq \gamma_1 \|u\|_s^2 - \delta_1 (1 + \varepsilon \|a(t)\|_s + \|P(t, \varepsilon\|_s)^2, \tag{26}$$

де γ_1 і δ_1 — додатні сталі, які залежать тільки від

$$C_0 \geq |a(t)|_2 + |P(t, \varepsilon)|_1 + |u|_1, \quad r \geq 2, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Але з огляду на нерівність (25) можна вважати, що в апріорних оцінках (26) сталі γ_1 і δ_1 вже не залежать від u.

Нехай $w(t)$ — n^2-вектор із $C^r(\mathcal{T}_1)$, для якого $|w|_2 \leq 1$. Розглянемо лінійний оператор

$$L(w) = \varepsilon a(t) \frac{d}{dt} + [P(t, \varepsilon) + \varepsilon P_1(t, w)]$$

як оператор у $C^\infty(\mathcal{T}_1)$. Оскільки нерівності (19) мають грубий характер, то з них випливають аналогічні нерівності для коефіцієнтів оператора $L(w)$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ та деякого $\varepsilon_1 < \varepsilon$. А тому з урахуванням леми Ю. Мозера отримуємо оцінки

$$\begin{gathered} (L(w)u, u) \geq \gamma_2 \|u\|_0^2, \\ (L(w)u, u)_s \geq \gamma_2 \|u\|_s^2 - \delta_2 (1 + \varepsilon \|a(t)\|_s + \|P(t, \varepsilon)\|_s + \varepsilon \|P_1(t, w)\|_s)^2, \quad s = \overline{1, r}, \end{gathered} \tag{27}$$

де γ_2, δ_2 — додатні сталі, які не залежать від w, u і ε.

Згідно з оцінкою Ю. Мозера [3, с. 18] для суперпозиції функцій $P_1(t, w(t))$

$$\|P_1(t,w)\|_s \le c|P_1|_s(1+\|w\|_s), \tag{28}$$

де c — додатна стала, що не залежить від P_1, w,

$$|P_1|_s = \max_{0\le\rho\le s}\max_{(t,w)\in\mathcal{T}_1\times T_{n^2}} \left\|\frac{d^\rho}{dt^\rho}P_1(t,w(t))\right\|,$$

T_{n^2} — одинична куля в R^{n^2}.

Із урахуванням (28) оцінки (27) наберуть вигляду

$$(L(w)u,u)_0 \ge \gamma_2\|u\|_0^2, \quad (L(w)u,u)_s \ge \gamma_2\|u\|_s^2 - \delta_3(1+\varepsilon\|w\|_s)^2, \quad s=\overline{1,r}, \tag{29}$$

де δ_3 не залежить від w, u і ε.

Розглянемо перше лінійне наближення Гальоркіна $u_1(t)$. Його коефіцієнти $u_k^{(1)}$ визначаються з системи рівнянь, яка рівносильна рівнянню

$$S_{N_1}L(0)u_1(t) = \varepsilon S_{N_1}g(t).$$

Нерівності (29) для оператора $L(0)$ забезпечують існування розв'язку цього рівняння, для якого при достатньо малому $\varepsilon_2 > 0$ згідно з теоремою Соболєва виконується нерівність $|u_1|_2 \le 1$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$. Тоді оператор $L(u_1)$ визначений для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$ і задовольняє нерівності (29) при $w = u_1$. Це забезпечує існування наближення

$$u_2(t) = \sum_{|k|\le N_2} u_k^{(2)} e^{ikt},$$

для якого виконується нерівність $|u_2(t)|_2 \le 1$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, де $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$.

Використання схеми доведення теореми 1 [3, с. 271] дозволяє у підсумку отримати наступне твердження, яке обґрунтовує лінійну модифікацію методу Гальоркіна, наведену вище.

Лема 2. *Нехай $A'(t) \equiv A(t)$, матричні функції $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ належать просторам $C^r(\mathcal{T}_1)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$ відповідно і виконуються нерівності (19) для $s = 0$, $s = r$ і всіх $t \in \mathcal{T}_1$ та $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де скалярні функції $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t,\varepsilon)$, $\beta_1(t)$ визначаються співвідношеннями (16).*

Тоді якщо $r > \dfrac{1}{2} + l$, $l \ge 2$, то для довільного $M > 1$ можна вказати достатньо мале $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(M) > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ лінійні наближення Гальоркіна $u_j(t)$ існують при кожному $j = 1, 2, \ldots$ і збігаються в $H^s(\mathcal{T}_1)\cap C^l(\mathcal{T}_1)$ при $s < r$ до функції $u(t,\varepsilon)$, яка є розв'язком системи рівнянь (12), причому так, що

$$\|u - u_j\|_0 \le c\sigma_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де $c = \mathrm{const}$, $\sigma_j = \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{i} N_{i-\nu}^{-(r-1)} M^{-\nu}$. *При цьому гранична функція* $u(t,\varepsilon)$ *задовольняє нерівності*

$$\|u(t,\varepsilon)\|_0 \leq \varepsilon \|g(t)\|_0/\gamma_2, \quad \|u(t,\varepsilon)\|_s \leq \delta_0, \quad |u(t,\varepsilon)|_2 \leq 1, \tag{30}$$

де $\delta_0 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Ключовою умовою існування гладкого періодичного розв'язку рівняння (12) у розглянутому випадку є додатна визначеність матриці $B(t) + B'(t)$. Припустимо, що ця матриця є від'ємно визначеною. Помножимо рівняння (12) на $-I_{n^2}$. Використавши схему доведення лем 1 і 2, отримаємо, що лема 2 залишається правильною, якщо замінити умову виконання нерівностей (19) виконанням для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ нерівностей

$$\overline{\beta}_0(t,\varepsilon) - \varepsilon[s\overline{\alpha}_0(t) - \overline{\alpha}_1(t)\overline{\beta}_1(t)] \geq \gamma, \quad s = \overline{0,r}, \tag{31}$$

де γ — як завгодно мале додатне число, скалярні функції визначаються співвідношеннями

$$\max_{\|x\|=1} \langle \dot{A}(t)x, x\rangle \geq \overline{\alpha}_0(t), \quad \min_{\|x\|=1} \langle A(t)x, x\rangle \geq \overline{\alpha}_1(t),$$

$$\min_{\|x\|=1} \left\langle \left[-B(t) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{A}(t) + A(t)B^{-1}(t)C(t)\right)\right] x, x\right\rangle \geq \overline{\beta}_0(t,\varepsilon), \tag{32}$$

$$\min_{\|x\|=1} \langle B^{-1}(t)C(t)x, x\rangle \geq \overline{\beta}_1(t).$$

4. Повернемося до матричного рівняння Ріккаті (4). При виконанні умов леми 2 та її аналога для випадку від'ємної визначеності матриці $B(t) + B'(t)$ розв'язком рівняння (7) є матриця $Z_1(t,\varepsilon)$, рядки якої згідно з (8) є відповідними компонентами n^2-вектора $u(t,\varepsilon)$. При цьому $Z_1(t,\varepsilon) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_1)$ і з урахуванням (30) та (9)

$$\|Z_1\|_0 \leq \varepsilon \left\| A\left[\frac{d}{dt}(B^{-1}C) - (B^{-1}C)^2\right]\right\|_0 /\gamma_2, \quad \|Z_1\|_{r-1} \leq \delta_0, \quad |Z_1|_2 \leq 1, \tag{33}$$

де $\delta_0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$.

Згідно з (6) шуканий розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$Z_0(t,\varepsilon) = Z_1(t,\varepsilon) - B^{-1}(t)C(t) \tag{34}$$

і належить $C^{r-1}(\mathcal{T}_1)$.

За теоремою Адамара [8, с. 406] матриця $I_n + \varepsilon A(t)Z_0(t,\varepsilon)$ є невиродженою для всіх $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_0]$ і достатньо малого $\overline{\varepsilon}_0$. А тому невиродженою є і матриця $V(t,\varepsilon)$, визначена рівністю (3), що приводить до рівносильності систем (2) і (5) для всіх $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_1]$, де $\overline{\varepsilon}_1 = \min(\varepsilon^0, \overline{\varepsilon}_0)$.

Рівняння (5) запишемо у вигляді системи рівнянь

$$\dot{Y}_1 = Z_0(t,\varepsilon)Y_1 x + Y_2, \tag{35}$$

$$\varepsilon A(t)\dot{Y}_2 = -[B(t) + \varepsilon A(t)Z_0(t,\varepsilon)]Y_2 + f(t), \tag{36}$$

де $Y = \mathrm{col}\,(Y_1, Y_2)$, і дослідимо умови існування періодичного розв'язку рівняння (36) для довільної неоднорідності.

Нехай матриця $B(t) + B'(t)$ є додатно визначеною. Врахувавши (34) і (33), можна довести, що для диференціального оператора, породженого рівнянням (36), мають місце апріорні оцінки вигляду (20), (21), якщо для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ та $s = 0$, $s = r - 1$ виконуються нерівності

$$\beta_0(t, \varepsilon) + \varepsilon\,[s\alpha_0(t) - |A(t)|_0] \geq \gamma, \tag{37}$$

де γ — як завгодно мале додатне число, а скалярні функції β_0, α_0 визначаються співвідношеннями (16). Тоді згідно з теоремою 1 [3, с. 202] рівняння (36) для довільної функції $f(t) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_1)$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ має розв'язок $Y_2^0(t, \varepsilon) \in C^l(\mathcal{T}_1)$, $l \geq 1$, якщо $r - 1 > \dfrac{1}{2} + l$. При цьому враховано, що $Z_0(t, \varepsilon) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_1)$.

Нехай матриця $B(t)+B'(t)$ є від'ємно визначеною. Помноживши рівняння (36) на $-I_n$, прийдемо до попереднього висновку про існування розв'язку $Y_2^0(t, \varepsilon) \in C^{r-2}(\mathcal{T}_1)$, якщо нерівності (37) замінити на нерівності

$$\overline{\beta}_0(t, \varepsilon) - \varepsilon\,[s\overline{\alpha}_0(t) + |A(t)|_0] \geq \gamma, \quad s = \overline{0, r-1}, \tag{38}$$

де скалярні функції $\overline{\beta}_0$, $\overline{\alpha}_0$ визначаються співвідношеннями (32).

В результаті рівняння (35) з урахуванням рівності (34) набере вигляду

$$\dot{Y}_1 = -[B^{-1}(t)C(t) - Z_1(t, \varepsilon)]Y_1 + Y_2^0(t, \varepsilon). \tag{39}$$

Згідно з (33) матрицю $Z_1(t, \varepsilon)$ можна вважати „малою". А тому умови існування періодичного розв'язку рівняння (39) визначаються матрицею $-B^{-1}C$.

Нехай існує невироджена симетрична матриця $S(t) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ така, що для всіх $t \in \mathcal{T}_1$ виконується нерівність

$$\langle [\dot{S}(t) - S(t)B^{-1}(t)C(t) - (B^{-1}(t)C(t))'S(t)]x, x\rangle \leq -\delta, \tag{40}$$

де $\delta \equiv \mathrm{const} > 0$. Тоді [3] рівняння

$$\dot{Y} = -B^{-1}(t)C(t)Y + Y_2^0(t, \varepsilon) \tag{41}$$

для довільної неоднорідності має періодичний розв'язок, гладкість якого збігається з гладкістю коефіцієнтів. Згідно з лемою 2 [3, с. 216] і другою нерівністю (33) можна вказати таке $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, $\rho(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, що рівняння (39), „породжене" рівнянням (41), матиме розв'язок $Y_1^0(t, \varepsilon) \in C^{r-2}(\mathcal{T}_1)$, якщо $|Z_1(t, \varepsilon)|_k \leq \rho(\varepsilon)$.

Отже, рівняння (5) при виконанні наведених вище умов має для достатньо малого ε періодичний розв'язок $Y_0(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\,(Y_1^0(t, \varepsilon), Y_2^0(t, \varepsilon)) \in C^{r-2}(\mathcal{T}_1)$. Тоді з урахуванням (3), (8), леми 2 та її аналога для випадку $\langle B(t)x, x\rangle < 0$ $X_0(t, \varepsilon) = W(t, \varepsilon)Y_0(t, \varepsilon) \in C^{r-2}(\mathcal{T}_1)$ — періодичний розв'язок рівняння (2). Але оскільки $X_0(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\,(x_0(t, \varepsilon), \dot{x}_0(t, \varepsilon))$, то робимо висновок, що $x_0(t, \varepsilon) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_1)$ — шуканий розв'язок вихідного рівняння (1).

У підсумку отримаємо таке твердження.

Теорема. *Нехай для вихідного рівняння (1) виконуються такі умови:*

1) $A(t) \equiv A'(t)$ і матричні функції $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ належать просторам $C^r(\mathcal{T}_1)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_1)$, $r \geq 3$, відповідно;

2) матриця $B(t)$ знаковизначена і для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконуються нерівності (19), (37) або (31), (38), у яких скалярні функції визначаються співвідношеннями (16) або (32) відповідно;

3) існує невироджена симетрична матриця n-го порядку $S(t) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ така, що для всіх $t \in \mathcal{T}_1$ виконується нерівність (40).

Тоді можна вказати достатньо мале додатне число ε^0 таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ і довільної неоднорідності $f(t) \in C^r(\mathcal{T}_1)$ рівняння (1) має періодичний розв'язок $x_0(t, \varepsilon) \in \in C^{r-1}(\mathcal{T}_1)$.

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
2. *Еременко В. А.* Периодические решения линейных вырожденных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Міжнар. наук. конф. „Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” (Мелітополь, 16-21 червня 2008 р.): Тези доп.— 2008. — С. 48 – 49.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
4. *Бойчук А. А., Самойленко, А. М., Каранджулов Л. И.* Нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 9. — С. 1243 – 1251.
5. *Бойчук А. А., Шегда Л. М.* Умови біфуркації розв'язків вироджених крайових задач // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 147 – 154.
6. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и представление решений линейных динамических систем // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1341 – 1351.
7. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
9. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. — 1968. — **23**, № 4. — С. 179 – 238.

Одержано 14.08.09