УДК 517.911

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

А. В. Плотников, Т. А. Комлева

Одес. гос. академия стр-ва и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: a-plotnikov@ukr.net
t-komleva@ukr.net

We substantiate the possibility of applying the total and partial averaging schemes for studying fuzzy systems of differential equations containing a small parameter.

Обґрунтовано можливість застосування повної і часткової схем усереднення при дослідженні систем нечітких диференціальних рівнянь, що містять малий параметр.

1. Введение. Развитие теории многозначных отображений и дифференциальных уравнений с многозначными решениями дали возможность рассмотреть аналогичные понятия в теории нечетких множеств, которая начала свое развитие с работы L. A. Zadeh [1]. В 1983 г. M. L. Puri, D. A. Ralescu [2] ввели понятие H-производной и интеграла для нечетких отображений, в котором использовался подход M. Hukuhara [3] и R. J. Aumann [4] для α-срезок нечетких отображений. В 1987 г. O. Kaleva ввел в рассмотрение нечеткие дифференциальные уравнения [5]. Впоследствии данные уравнения рассматривались в работах O. Kaleva [6 – 8], V. Lakshmikantham [9, 10], J. Y. Park, H. K. Han [11, 12], S. Seikkala [13, 14], Т. А. Комлевой, А. В. Плотникова [15, 16] и др.

В данной работе обосновывается возможность использования некоторых схем усреднения [17 – 26] для такого типа уравнений, содержащих малый параметр.

2. Основные обозначения и определения. Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху, т. е. для любого $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\tilde{\xi},\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|\xi - \tilde{\xi}\| < \delta$ выполняется неравенство $u(\xi) < u(\tilde{\xi}) + \varepsilon$;

2) u нормально, т. е. существует вектор $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(\xi_0) = 1$;

3) u нечетко выпукло, т. е. для любых ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $u(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \geq \min\{u(\xi_1), u(\xi_2)\}$;

4) замыкание множества $\{\xi \in \mathbb{R}^n : u(\xi) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является элемент $\hat{0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = 0, \\ 0, & \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Обозначим
$$[u]^\alpha = \begin{cases} \{\xi \in \mathbb{R}^n : u(\xi) \geq \alpha\}, & 1 \geq \alpha > 0, \\ \mathrm{cl}\,\{\xi \in \mathbb{R}^n : u(\xi) > 0\}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0,+\infty)$, положив
$$D(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Пусть функция $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, тогда согласно принципу L. A. Zadeh [1] можно продолжить g на $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ соотношением

$$g(u,v)(z) = \sup_{z=g(x,y)} \min\{u(x), v(y)\}.$$

При этом

$$[g(u,v)]^\alpha = g([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

для непрерывной функции g и всех $u, v \in \mathbb{E}^n$, $0 \le \alpha \le 1$. В частности, для суммы и умножения на скаляр имеем

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad [ku]^\alpha = k[u]^\alpha,$$

где $u, v \in \mathbb{E}^n$, $k \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 1$.

Легко показать, что

$$D(u+w, v+w) = D(u,v), \quad D(ku,kv) = kD(u,v)$$

для всех $u, v, w \in E^n$ и $k \ge 0$.

Теорема 1 [27, 28]. *Метрическое пространство $(\mathbb{E}^n, D)$ является полулинейным полным метрическим пространством.*

Определение 1 [12]. *Отображение $f : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ называется строго измеримым, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $F_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ измеримо.*

Определение 2 [12]. *Отображение $f : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным в точке $t \in (t_0, T)$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $F_\alpha : [t_0, T] \to$ $\to \mathrm{conv}\,(\mathbb{R}^n)$ непрерывно в точке $t \in (t_0, T)$.*

Определение 3 [12]. *Отображение $f(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ называется интегрально ограниченным, если существует суммируемая функция $h(\cdot)$ такая, что $\|y\| \le h(t)$ для всех $y \in F_0(t)$.*

Определение 4 [12]. *Интегралом от отображения $f : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ на отрезке $[t_0, T]$ называется элемент $g = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int_{t_0}^{T} F_\alpha(t)\,dt$ для всех $\alpha \in [0,1]$, где интеграл от $F_\alpha(\cdot)$ понимается в смысле Ауманна [4].*

Теорема 2 [12]. *Если $f : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ строго измеримо и интегрально ограничено, то $f(\cdot)$ интегрируемо на $[t_0, T]$.*

Определение 5 [12]. *Отображение $f : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $\tau \in [t_0, T]$, если для любого $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $F_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре [3] в точке τ и семейство $\{D_H F_\alpha(\tau) : \alpha \in [0,1]\}$ определяет некоторый элемент $f'(\tau) \in \mathbb{E}^n$.*

Если $f : [t_0, T] \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо в точке $\tau \in [t_0, T]$, то элемент $f'(\tau)$ будем называть нечеткой производной от $f(t)$ в точке τ.

Определение 6. *Отображение $\overline{f}(x)$ называется равномерно средним относительно x для отображения $f(t,x)$ в области $Q\{t \geq 0, x \in P \subset \mathbb{E}^n\}$, если для любого $\delta > 0$ существует такое $T(\delta) > 0$, не зависящее от x, что при любом $\tau \geq T(\delta)$ неравенство*

$$D\left(\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t,x)\,dt, \overline{f}(x)\right) < \delta$$

выполняется для всех $x \in P$.

3. Основной результат. Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение с малым параметром

$$x' = \varepsilon f(t,x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{E}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, t — время.

Определение 7 [11]. *Отображение $x : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ называется решением системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$, если оно слабо непрерывно и удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \varepsilon f(s, x(s))\,ds. \tag{2}$$

Схема полного усреднения. Системе (1) поставим в соответствие усредненную систему

$$y' = \varepsilon \overline{f}(y), \tag{3}$$

где

$$\lim_{T \to 0} D\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt, \overline{f}(x)\right) = 0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0, x \in P \subset \mathbb{E}^n\}$ выполнены условия:*

1) отображение $f(t,x)$ слабо непрерывно по t, равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ, т. е.

$$F(f(t,x), \hat{0}) \leq M, \quad D(f(t,x_1), f(t,x_2)) \leq \lambda D(x_1, x_2);$$

2) равномерно относительно $x \in P$ существует предел (4);

3) решение $y(\cdot)$ системы (3) с начальным условием $y(0) = x_0 \in P' \subset P$ определено для всех $t \geq 0$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области P.

Тогда для любого $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D(x(t), y(t)) \le \eta, \tag{5}$$

где $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ — решения уравнений (1) и (3) соответственно, удовлетворяющие условию $x(0) = y(0) \in P'$.

Доказательство. Легко показать, что отображение $\overline{f}(y)$ ограничено и удовлетворяет условию Липшица. Действительно, в силу условия 2 для любого $\delta > 0$ можно указать такое $T_1(\delta)$, что при всех $T > T_1$ справедлива оценка

$$D(\overline{f}(y_1), \overline{f}(y_2)) \le D\left(\overline{f}(y_1), \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, y_1)\,dt\right) + D\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, y_1)\,dt, \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, y_2)\,dt\right) + D\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, y_2)\,dt, \overline{f}(y_2)\right) \le$$

$$\le \delta + \frac{1}{T}\int\limits_0^T D(f(t, y_1), f(t, y_2))\,dt \le \delta + \lambda D(y_1, y_2).$$

Поскольку значение δ произвольно, в пределе получаем

$$D(\overline{f}(y_1), \overline{f}(y_2)) \le \lambda D(y_1, y_2).$$

Из условий 1, 2 и [11] следует, что системы (1) и (3) имеют единственные и продолжимые при $t \ge 0$ решения пока $x(t)$ (соответственно $y(t)$) принадлежат множеству P.

Согласно определению решения

$$x(t) = x_0 + \varepsilon\int\limits_0^t f(s, x(s))\,ds, \tag{6}$$

$$y(t) = x_0 + \varepsilon\int\limits_0^t \overline{f}(y(s))\,ds. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$D(x(t), y(t)) \le \varepsilon\lambda\int\limits_0^t D(x(s), y(s))\,ds + \varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(s, y(s))\,ds, \int\limits_0^t \overline{f}(y(s))\,ds\right). \tag{8}$$

Оценим на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ последнее слагаемое в (8). Для этого разделим отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей точками $t_0 = 0,\ t_1 = \dfrac{L}{\varepsilon m}, \ldots, t_i = \dfrac{iL}{\varepsilon m}, \ldots, t_m = \dfrac{L}{\varepsilon}$ и обозначим $y(t_i) = y_i,\ i = \overline{0, m}$. Предположим, что $t \in (t_k, t_{k+1})$ для некоторого k, $k = \overline{0, m-1}$.

Тогда

$$\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(s, y(s))\,ds, \int\limits_0^t \overline{f}(y(s))\,ds\right) \le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(\tau, y(\tau)), f(\tau, y_i))\,d\tau +$$

$$+\,\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(\overline{f}(y_i), \overline{f}(y(\tau)))d\tau + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} f(\tau, y_i)d\tau, \int\limits_0^{t_{i+1}} \overline{f}(y_i)d\tau\right) +$$

$$+\,\varepsilon \sum_{i=1}^{k} D\left(\int\limits_0^{t_i} f(\tau, y_i)d\tau, \int\limits_0^{t_i} \overline{f}(y_i)d\tau\right) + D\left(\int\limits_0^{t} f(\tau, y_k)d\tau, \int\limits_0^{t} \overline{f}(y_k)d\tau\right),$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(\overline{f}(y_i), \overline{f}(y(\tau)))d\tau \le \frac{ML^2\lambda}{m},$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(\tau, y(\tau)), f(\tau, y_i))d\tau \le \frac{ML^2\lambda}{m}.$$

В силу условия 2 существует такая монотонно убывающая функция $\varphi(t)$, стремящаяся к 0 при $t \to \infty$, что во всей области P выполняется неравенство

$$D\left(\int\limits_0^t f(\tau, x)d\tau, \int\limits_0^t \overline{f}(x)d\tau\right) < t\varphi(t).$$

Следовательно,

$$\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(\tau, x)d\tau, \int\limits_0^t \overline{f}(x)d\tau\right) < \varepsilon t\varphi(t) \le F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup_{\tau \in [0, L]}(\tau\varphi(\tau/\varepsilon))$, $\tau = \varepsilon t$. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) = 0$.

Таким образом,

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} f(\tau, y_i)d\tau, \int\limits_0^{t_{i+1}} \overline{f}(y_i)d\tau\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} D\left(\int\limits_0^{t_i} f(\tau, y_i)d\tau, \int\limits_0^{t_i} \overline{f}(y_i)d\tau\right) +$$

$$+\, D\left(\int\limits_0^{t} f(\tau, y_k)d\tau, \int\limits_0^{t} \overline{f}(y_k)d\tau\right) \le 2mF(\varepsilon).$$

Итак,

$$\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(s,y(s))\,ds, \int\limits_0^t \overline{f}(y(s))\,ds\right) \le \frac{2ML^2\lambda}{m} + 2mF(\varepsilon). \tag{9}$$

Из (8), (9) и леммы Гронуолла – Беллмана имеем

$$D(x(t),y(t)) \le \varepsilon e^{\lambda L} D\left(\int\limits_0^t f(\tau,y(\tau))d\tau, \int\limits_0^t \overline{f}(y(\tau))d\tau\right) \le e^{\lambda L}\frac{2ML^2\lambda}{m} + e^{\lambda L}2mF(\varepsilon).$$

Выберем число m так, чтобы выполнялось неравенство

$$e^{\lambda L}\frac{\lambda ML^2}{m} \le \eta/2. \tag{10}$$

Теперь зафиксируем m и выберем ε_0 так, чтобы при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ выполнялось неравенство

$$e^{\lambda L}2mF(\varepsilon) \le \eta/2. \tag{11}$$

Из неравенств (8), (10) и (11) следует неравенство (5).

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Если условие 3 не выполняется, то его можно заменить следующим условием:

3$'$) решение $y(\cdot)$ системы (3) с начальным условием $y(0) = x_0 \in P$ при $\varepsilon = 1$ лежит вместе с ρ-окрестностью в области P при $t \in [0,T_1]$.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L \in [0,T_1]$ существует такое $\varepsilon_0(\eta,L) > 0$, что для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство (5).

Теорема 4. *Пусть в области Q выполняются следующие условия:*

1) отображение $f(t,x)$ строго измеримо по t, слабо непрерывно по x и существует суммируемая функция $M(t)$ такая, что

$$D(f(t,x),\widehat{0}) \le M(t), \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} M(t)dt \le M_0(t_2-t_1), \quad M_0 = \text{const};$$

2) существует суммируемая функция $N(t)$ такая, что

$$D(f(t,x_1),f(t,x_2)) \le N(t)D(x_1,x_2), \quad |N(t)| \le N_0 = \text{const};$$

3) равномерно отоносительно x в области Q существует предел (4), причем

$$D(\overline{f}(x_1),\overline{f}(x_2)) \le \vartheta D(x_1,x_2);$$

4) решение $y(\cdot)$, $y(0) = x(0)$ уравнения (3) определено для всех $t \ge 0$ и лежит в области P с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D(x(t), y(t)) < \eta,$$

где $x(\cdot)$ *и* $y(\cdot)$ — *решения уравнений (1) и (3) соответственно, удовлетворяющие условию* $x(0) = y(0) \in P'$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, только существование решений систем (1) и (3) следует из условий 1 – 3 теоремы 4 и [15, 16].

Схема частичного усреднения. Пусть существует такое отображение $\widetilde{f}(t, x)$, для которого

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D \left(\int_0^T f(t, x)\, dt, \int_0^T \widetilde{f}(t, x)\, dt \right) = 0. \tag{12}$$

Тогда системе (1) поставим в соответствие систему

$$y' = \varepsilon \widetilde{f}(t, y) \tag{13}$$

и назовем ее частично усредненной.

Рассмотрим вопрос о близости решений систем (1) и (13) на конечном промежутке.

Теорема 5. *Пусть в области* Q *выполняются следующие условия:*

1) отображения $f(t, x)$ *и* $\widetilde{f}(t, x)$ *слабо непрерывны по* t, *ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по переменной* x *с постоянной* λ;

2) равномерно по отношению к x *в области* P *существует предел (12);*

3) решение $y(\cdot)$, $y(0) = x(0) \in P' \subset P$ *системы (13) при* $t \geq 0$ *для всех* $\varepsilon \in (0, \sigma]$ *лежит с некоторой* ρ*-окрестностью в области* P.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, *что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D(x(t), y(t)) \leq \eta,$$

где $x(\cdot)$ *и* $y(\cdot)$ — *решения систем (1) и (13) соответственно, удовлетворяющие условию* $x(0) = y(0) \in P'$.

Доказательство. Из (1), (13), [11] и определения 7 имеем

$$D(x(t), y(t)) \leq \varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \int_0^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau \right) + \varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y(\tau)) d\tau \right).$$

Следовательно,

$$D(x(t), y(t)) \leq \varepsilon \int_0^t \lambda D\left(x(\tau), y(\tau)\right)\, d\tau + \varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y(\tau)) d\tau \right).$$

По лемме Гронуолла – Беллмана

$$D(x(t), y(t)) \leq \varepsilon e^{\lambda L} \sup_{0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}} \varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y(\tau)) d\tau \right).$$

Разделим отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей и положим $y(t_i) = y_i$, $t_i = \dfrac{iL}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0, m}$. Предположим, что $t \in (t_k, t_{k+1}]$ для некоторого k, $4k = \overline{0, m-1}$. После несложных выкладок получаем оценки

$$\varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y(\tau)) d\tau \right) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(\tau, y(\tau)), f(\tau, y_i)) d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(\widetilde{f}(\tau, y(\tau)), \widetilde{f}(\tau, y_i))\, d\tau + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} D \left(\int_0^{t_{i+1}} f(\tau, y_i) d\tau, \int_0^{t_{i+1}} \widetilde{f}(\tau, y_i)\, d\tau \right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{k} D \left(\int_0^{t_i} f(\tau, y_i)\, d\tau, \int_0^{t_i} \widetilde{f}(\tau, y_i)\, d\tau \right) + \varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, y_k) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y_k) d\tau \right),$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(\widetilde{f}(\tau, y(\tau)), \widetilde{f}(\tau, y_i)) d\tau \leq \frac{ML^2\lambda}{m},$$

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(f(\tau, y(\tau)), f(\tau, y_i)) d\tau \leq \frac{ML^2\lambda}{m}.$$

В силу условия 2 существует такая монотонно убывающая функция $\phi(t)$, стремящаяся к 0 при $t \to \infty$, что во всей области P выполняется неравенство

$$D \left(\int_0^t f(\tau, y) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y) d\tau \right) < t\phi(t).$$

Следовательно,

$$\varepsilon D \left(\int_0^t f(\tau, y) d\tau, \int_0^t \widetilde{f}(\tau, y) d\tau \right) < \varepsilon t \phi(t) \leq F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup_{\tau \in [0, L]} \left[\tau f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right) \right]$, $\tau = \varepsilon t$. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) = 0$.

Таким образом,

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1} D\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} f(\tau,y_i)\,d\tau, \int\limits_0^{t_{i+1}} \widetilde{f}(\tau,y_i)d\tau\right) + \varepsilon\sum_{i=1}^{k} D\left(\int\limits_0^{t_i} f(\tau,y_i)\,d\tau, \int\limits_0^{t_i} \widetilde{f}(\tau,y_i)\,d\tau\right) +$$

$$+\varepsilon D\left(\int\limits_0^{t} f(\tau,y_k)d\tau, \int\limits_0^{t} \widetilde{f}(\tau,y_k)d\tau\right) \le 2mF(\varepsilon).$$

Итак,

$$\varepsilon D\left(\int\limits_0^{t} f(\tau,y(\tau))d\tau, \int\limits_0^{t} \widetilde{f}(\tau,y(\tau))d\tau\right) \le \frac{2ML^2\lambda}{m} + 2mF(\varepsilon) \equiv a(\varepsilon,m).$$

Выбирая достаточно большое m и малое ε, можно сделать $a(\varepsilon,m)$ сколь угодно малым.

Значит, на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ имеет место оценка

$$D(x(t),y(t)) \le a(\varepsilon,m)e^{\lambda L}.$$

Полагая $a(\varepsilon,m) < \min\{\rho,\eta\}e^{-\lambda L}$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Данные результаты обобщают результаты M. Kisielewicz [29], А. В. Плотникова [24] для дифференциальных уравнений с производной Хукухары и В. А. Плотникова [22], А. Н. Филатова, Л. В. Шаровой [30], М. М. Хапаева [31] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проиллюстрируем полученые результаты следующим примером.

Пример. Рассмотрим схему усреднения для линейной задачи Коши нечетких дифференциальных уравнений вида

$$x' = \varepsilon(A(t)x + B(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{14}$$

где $x:\mathbb{R}\to\mathbb{E}^2$, $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$, $B:\mathbb{R}\to\mathbb{E}^2$, $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ -1 & \sin(t) \end{pmatrix}$, $B(t)$ таково, что

$$[B(t)]^\alpha = K_{40(1-\alpha)\|\sin(t)\|}\begin{pmatrix} 10\sin(t) \\ 10\cos(t) \end{pmatrix},$$

$$x_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{1-(\xi_1-1)^2-(\xi_2-1)^2}, \xi \in S_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ 0, \xi \notin S_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$K_a(b) = \{(k_1,k_2) : |k_i - b_i| \le a,\ i = 1,2\}.$$

Задаче (14) поставим в соответствие усредненную задачу

$$\bar{x}' = \varepsilon(A\bar{x} + \bar{B}), \quad \bar{x}(0) = x_0,$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{B}$ таково, что $[\bar{B}]^\alpha = K_{\frac{40}{\pi}(1-\alpha)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

На рис. 1 приведены графики решений $x(t)$ и $\bar{x}(t)$, а на рис. 2 показано, как „плавающий" характер свободного члена исходной задачи проявляется на графике динамики α-срезок.

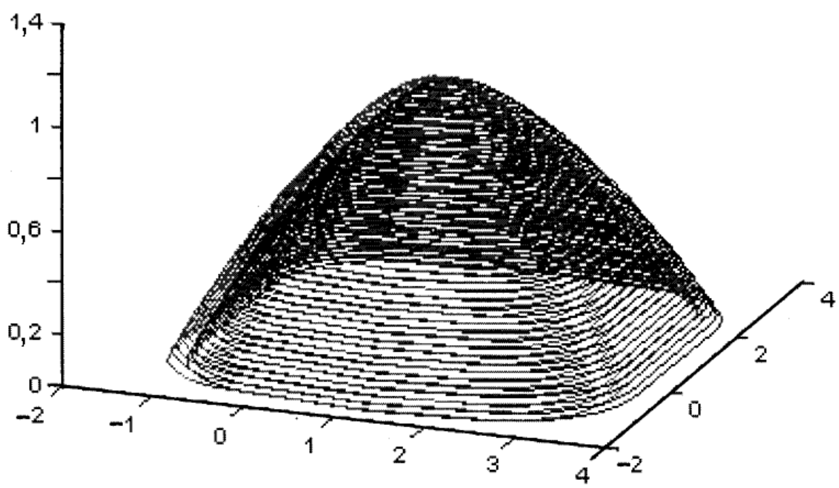

Рис. 1. Решения задач при $\varepsilon = 0,01$, $T = 10$.

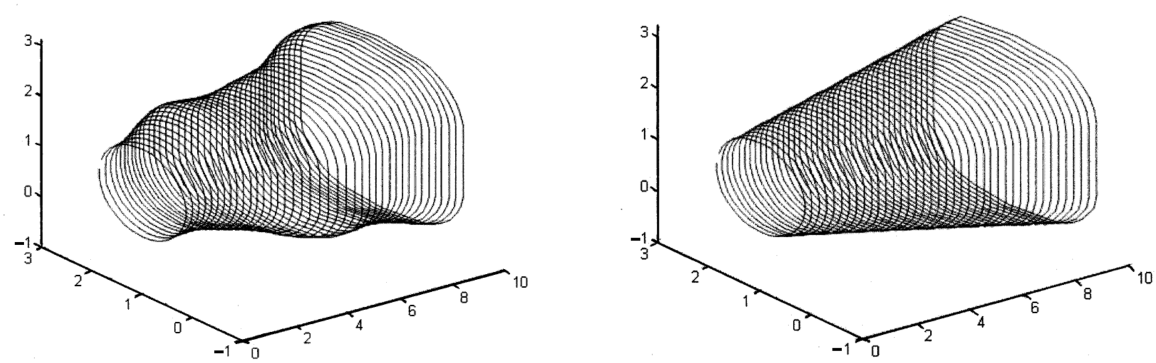

Рис. 2. Динамика α-срезок при $\alpha = 0,5$, $\varepsilon = 0,01$.

1. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. Control. — 1965. — № 8. — P. 338–353.
2. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — **91**. — P. 552–558.
3. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205–223.
4. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — № 12. — P. 1–12.
5. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301–317.
6. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — № 35. — P. 389–396.
7. *Kaleva O.* The Peano theorem for fuzzy differential equations revisited // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 98. — P. 147–148.
8. *Kaleva O.* O notes on fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. — 2006. — № 64. — P. 895–900.
9. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. — Cambridge Sci. Publ., 2006. — 204 p.
10. *Laksmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. — Melbourne: Florida Inst. Technol., 2003. — 178 p.
11. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **22**, № 2. — P. 271–279.
12. *Park J. Y., Han H. K.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 110. — P. 69–77.
13. *Vorobiev D., Seikkala S.* Towards the theory of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 2002. — № 125. — P. 231–237.
14. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — № 24. — P. 319–330.
15. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Ω-пространство и его связь с теорией нечетких множеств // Труды Одес. политехн. ун-та. — 2007. — Вып.2 (28). — С. 182–191.
16. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с многозначными решениями // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 10. — С. 1326–1337.
17. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
18. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 363 с.
19. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
20. *Митропольский Ю. А., Хома Г. Н.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 216 с.
21. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
22. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления. — Одесса: Одес. гос. ун-т, 1976. — 103 с.
23. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат. журн. — 1979. — **31**, № 5. — С. 573–576.
24. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
25. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
26. *Самойленко А. М., Теплинский Ю.Ḃ.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
27. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. and Appl. — 1986. — № 114. — P. 409–422.

28. *Stojaković M.* R^n-valued fuzzy random variable // Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat. — 1990. — **20**, № 2. — P. 95 – 103.

29. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Math. — 1976. — **9**, №3. — P. 397 – 408.

30. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976. — 151 с.

31. *Хапаев М.М.* О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Диференц. уравнения. — 1966. — **11**, № 5. — С. 600 – 608.

Получено 28.08.09,
после доработки — 16.04.10