УДК 517.95+511.2

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІ*

Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків

Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України
Україна, 79000, Львів, вул. Наукова, 3-Б
e-mail: tymkiv_if@ukr.net

We study the correctness of the problem with multipoint conditions on the time variable for an equation, parabolic in the sense of Petrovskii, with coefficients that depend on the spatial variables. We find conditions for existence and uniqueness of a classical solution of the problem. For proving existence of a solution of the problem, a divided difference method is used. A theorem, metric in character, has been proved for lower estimates of small denominators that appear in the construction of the solution.

Исследована корректность задачи с многоточечными условиями по временной переменной для параболического за Петровским уравнения с переменными по пространственным координатам коэффициентами. Установлены условия существования и единственности классического решения задачи. Для доказательства существования решения задачи использован метод разделенных разностей. Доказана теорема метрического характера об оценках снизу малых знаменателей, которые появляются при построении решения.

Задачі з багатоточковими умовами (як за часовою координатою, так і за просторовими змінними) для диференціальних рівнянь із частинними похідними вивчались у роботах [1 – 12], а задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною t та певними умовами за іншими координатами (умови періодичності, умови типу умов Діріхле) для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь — у роботах [1, 6 – 10]. Встановлено, що такі задачі є, взагалі кажучи, умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Локальні багатоточкові задачі для деяких класів параболічних рівнянь високого порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами вивчались у роботах [9, 10]. Розв'язність нелокальних багатоточкових задач для параболічних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами вивчено, зокрема, у працях [2, 3, 5, 11], а для систем параболічних рівнянь — у працях [4, 12].

У даній статті, яка є продовженням праці [9], досліджено коректну розв'язність задачі з багатоточковими за часовою змінною умовами та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для параболічного за Петровським рівняння зі змінними по $x = (x_1, \ldots, x_p)$ коефіцієнтами. Побудовано розв'язок задачі у вигляді ряду Фур'є за системою ортогональних функцій змінних x, для знаходження коефіцієнтів $u_k(t)$ якого використано фундаментальні системи розв'язків відповідних диференціальних рівнянь, побудовані за поділеними різницями. На відміну від [9] це дало змогу уникнути тих малих знаменників, які мають вигляд різниць коренів характеристичних рівнянь.

1. Постановка задачі. Основні позначення. В області $Q_p = (0,T) \times \Pi^p$, $\Pi^p = \{x =$

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект №29.1/005).

$= (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : 0 < x_r < \pi, r = 1, \ldots, p\}$ розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L_1^{s_1} \ldots L_p^{s_p} u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \tag{2}$$

$$L_r^m u(t,x)\Big|_{x_r=0} = L_r^m u(t,x)\Big|_{x_r=\pi} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, (bn/2 - 1), \quad r = 1, \ldots, p, \tag{3}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $b \in \mathbb{N}$ — парне число, $A_{s_0,s} \in \mathbb{R}$; $L_r :=$ $:= -\partial/\partial x_r\,(a_r(x_r)\partial/\partial x_r) + q_r(x_r)$; $a_r \in C^{bn-1}([0,\pi])$, $q_r \in C^{bn-2}([0,\pi])$ — дійснозначні функції, $a_r(x_r) > 0$, $q_r(x_r) > 0$, $r = 1, \ldots, p$.

Припустимо, що рівняння (1) є рівномірно параболічним за Петровським в області Q_p, тобто ξ-корені рівняння

$$\xi^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \prod_{r=1}^{p} (a_r(x_r))^{s_r} \eta_r^{2s_r} \xi^{s_0} = 0 \tag{4}$$

для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ і для довільного $x \in \Pi^p$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re}\xi_j(x,\eta) \le -\delta\|\eta\|^b, \quad \delta > 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Нехай $\{X_{k_r}(x_r), k_r \in \mathbb{N}\}$ і $\Lambda_r = \{\lambda_{k_r},\ k_r \in \mathbb{N}\}$, $r = 1, \ldots, p$, — система власних функцій та множина власних значень відповідної задачі

$$L_r X(x_r) = \lambda X(x_r), \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad r = 1, \ldots, p. \tag{6}$$

Відомо [13], що для кожного r, $r = 1, \ldots, p$, власні функції задачі (6) утворюють повну ортогональну в $L_2(0,\pi)$ систему і за накладених на $a_r(x_r)$ і $q_r(x_r)$ умов для всіх $k_r \in \mathbb{N}$ виконуються оцінки

$$\widetilde{C_0} k_r^2 \le \lambda_{k_r} \le \widetilde{C_1} k_r^2, \tag{7}$$

$$|X_{k_r}^{(j)}(x_r)| \le N_j \lambda_{k_r}^{j/2}, \quad j = 0, 1, \ldots, bn, \tag{8}$$

де $\widetilde{C_0}, \widetilde{C_1}, N_j$, $j = 0, 1, \ldots, bn$, — додатні константи; при цьому система функцій $\{X_k(x) =$ $= X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p), k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p\}$ є повною ортогональною системою у просторі $L_2(\Pi^p)$ (будемо вважати, що вона ортонормована). Далі позначимо $\Lambda = \{\lambda_k =$ $= (\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}), k \in \mathbb{N}^p\}$, $|\lambda_k| = \lambda_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_p}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_p$; $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}(A)$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $C^{(q,m)}(\overline{Q_p})$, $q < m$, — банахів простір функцій $v(t,x)$ з нормою

$$\left\|v; C^{(q,m)}(\overline{Q_p})\right\| = \sum_{\substack{0 \le j \le q \\ 0 \le j+|s| \le m}} \max_{(t,x) \in \overline{Q_p}} \left| \frac{\partial^{j+|s|} v(t,x)}{\partial t^j \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p), \alpha \in \mathbb{R}, \gamma > 0,$ — простір функцій $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} \varphi_k X_k(x), \varphi_k = \int_{\Pi^p} \varphi(x) X_k(x) dx$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi; G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p)\| = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} |\varphi_k| \exp(\alpha|\lambda_k|^\gamma);$$

$C^q([0,T]; G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p))$ — простір визначених в Q_p функцій $v(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} v_k(t) X_k(x), v_k(t) = \int_{\Pi^p} v(t,x) X_k(x) dx$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ $\partial^j v(t,x)/\partial t^j \in G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p)$ і є неперервною по t в нормі цього простору, $j = 0, 1, \ldots, q$,

$$\|v; C^q([0,T]; G_{\alpha,\gamma}(\Pi^p))\| = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} \sum_{j=0}^{q} \max_{0\le t\le T} \left| v_k^{(j)}(t) \right| \exp(\alpha|\lambda_k|^\gamma).$$

2. Умови єдиності розв'язку. Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} u_k(t) X_k(x). \tag{9}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}^p$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \lambda_{k_1}^{s_1} \ldots \lambda_{k_p}^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = f_k(t), \tag{10}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \tag{11}$$

де $f_k(t) = \int_{\Pi^p} f(t,x) X_k(x) dx$, $\varphi_{jk} = \int_{\Pi^p} \varphi_j(x) X_k(x) dx$, $j = 1, \ldots, n$.

Розглянемо відповідну до (10), (11) однорідну задачу

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+2|s|=bn} A_{s_0,s} \lambda_{k_1}^{s_1} \ldots \lambda_{k_p}^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{12}$$

$$u_k(t_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \tag{13}$$

і зауважимо, що розв'язок задачі (10), (11) можна зобразити у вигляді суми

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t), \tag{14}$$

де $w_k(t)$ — розв'язок задачі (11), (12), а $v_k(t)$ — розв'язок задачі (10), (13).

При побудові розв'язку задачі (10), (11) використаємо поділені різниці $R_M(f(\mu))$ порядку $\chi - 1$ ($\chi \ge 1$) комплекснозначної функції $f(\mu)$ для набору комплексних чисел $M = (\underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\mu_l, \ldots, \mu_l}_{n_l})$ при $\chi = n_1 + \ldots + n_l$ вигляду

$$R_M(f(\mu)) = \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(n_j-1)!} \frac{\partial^{\chi-l}}{\partial\mu_1^{n_1-1} \ldots \partial\mu_l^{n_l-1}} \left(\sum_{j=1}^{l} f(\mu_j) \prod_{i=1, i\ne j}^{l} (\mu_j - \mu_i)^{-1} \right), \tag{15}$$

зокрема при $l = \chi$

$$R_M(f(\mu)) = \sum_{j=1}^{\chi} f(\mu_j) \prod_{i=1, i\neq j}^{\chi} (\mu_j - \mu_i)^{-1},$$

при $l = 1$, $R_M(f(\mu)) = f^{(\chi-1)}(\mu_1)/(\chi-1)!$. Формула (15) є правильною для функції $f(\mu)$, аналітичної в точках $\mu_1, \ldots, \mu_l$, а для функції $f(\mu)$, яка аналітична в опуклій області, що містить точки $\mu_1, \ldots, \mu_l$, має місце інтегральна формула

$$R_M(f(\mu)) = \int_0^1 \int_0^{\varsigma_1} \ldots \int_0^{\varsigma_{l-2}} f^{(\chi-1)} \left(\sum_{i=1}^{l} \varsigma_{i-1}(\mu_i - \mu_{i-1}) \right) \prod_{j=1}^{l} \frac{(\varsigma_{j-1} - \varsigma_j)^{n_j - 1}}{(n_j - 1)!} d\varsigma_1 \ldots d\varsigma_{l-1}, \quad (16)$$

де $\varsigma_0 = 1$, $\mu_0 = \varsigma_l = 0$.

Поділені різниці різних порядків пов'язані між собою формулою [14]

$$R_M(f(\mu)) = [R_{M_1}(f(\mu)) - R_{M_2}(f(\mu))]/(\mu_{j_1} - \mu_{j_2}), \quad \mu_{j_1} \neq \mu_{j_2}, \quad (17)$$

де $M_1 = (\mu_1, \ldots, \mu_{j_2-1}, \mu_{j_2+1}, \ldots, \mu_\chi)$, $M_2 = (\mu_1, \ldots, \mu_{j_1-1}, \mu_{j_1+1}, \ldots, \mu_\chi)$. Ліва частина формули (17) містить поділену різницю порядку $\chi - 1$, а права — поділені різниці порядку $\chi - 2$.

Нехай $\mu_1(\lambda_k), \ldots, \mu_l(\lambda_k)$ — корені рівняння

$$\mu^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0 + 2|s| = bn} A_{s_0, s} \lambda_{k_1}^{s_1} \ldots \lambda_{k_p}^{s_p} \mu^{s_0} = 0 \quad (18)$$

з кратностями $n_1, \ldots, n_l$ відповідно, $n_1 + \ldots + n_l = n$. Система функцій

$$E(t, \lambda_k) = \{t^{r-1} \exp(\mu_q(\lambda_k) t), \ r = 1, \ldots, n_q, \ q = 1, \ldots, l\} \quad (19)$$

є фундаментальною системою розв'язків рівняння (12).

Позначимо

$$M_{qr} = (\underbrace{\mu_1(\lambda_k), \ldots, \mu_1(\lambda_k)}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\mu_{q-1}(\lambda_k), \ldots, \mu_{q-1}(\lambda_k)}_{n_{q-1}}, \ldots, \underbrace{\mu_q(\lambda_k), \ldots, \mu_q(\lambda_k)}_{r}),$$

$$\chi_{qr} = r + n_1 + \ldots + n_{q-1}, \quad r = 1, \ldots, n_q, \quad q = 1, \ldots, l.$$

Зі структури рівняння (18), згідно з [15, с. 102], випливають оцінки

$$|\mu_j(\lambda_k)| \leq C_1 |\lambda_k|^{b/2}, \quad j = 1, \ldots, l, \quad C_1 = 2 \max_{m \in \{1, \ldots, n\}} \left(\max_{|s| = bm/2} |A_{n-m, s}| \right)^{1/m}. \quad (20)$$

Із (4), (5) при $\eta_r = \sqrt{\lambda_{k_r}/a_r(x_r)}$, $\quad r = 1, \ldots, p$, та рівнянь (18) знаходимо

$$\operatorname{Re} \mu_j(\lambda_k) \leq -\delta a_0 |\lambda_k|^{b/2}, \quad j = 1, \ldots, l, \quad a_0 = \left(\max_{1 \leq r \leq p} \left(\max_{0 \leq x_r \leq \pi} a_r(x_r) \right) \right)^{-b/2}. \quad (21)$$

Далі використовуватимемо відмінну від (19) фундаментальну систему розв'язків рівняння (12) (побудовану за поділеними різницями функцій) вигляду

$$U(t,\lambda_k)=\{u_{k,q,r}(t):=R_{M_{qr}}(\exp(\mu(\lambda_k)t)),\ r=1,\ldots,n_q,\ q=1,\ldots,l\}, \tag{22}$$

що спрощує обґрунтування розв'язності задачі (1) – (3).

Тоді розв'язок задачі (11), (12) зображується формулою

$$w_k(t)=\sum_{q=1}^{l}\sum_{r=1}^{n_q}C_{qr}(\lambda_k)u_{k,q,r}(t),$$

де сталі $C_{qr}(\lambda_k)$, $r=1,\ldots,n_q$, $q=1,\ldots,l$, визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{l}\sum_{r=1}^{n_q}C_{qr}(\lambda_k)u_{k,q,r}(t_j)=\varphi_{jk},\quad j=1,\ldots,n,$$

визначник якої

$$\Delta(\lambda_k)=\det\|u_{k,q,r}(t_j)\|_{j=\overline{1,n},\quad r=\overline{1,n_q}}^{q=\overline{1,l}}. \tag{23}$$

Зауважимо, що визначник (23) збігається з характеристичним визначником задачі (10), (11).

На підставі (15) і (22) отримуємо

$$u_{k,q,r}(t)=\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{(n_j-1)!}\frac{\partial^{\chi_{qr}-q}\left(\sum\limits_{j=1}^{q}\exp(\mu_j(\lambda_k)t)\prod\limits_{i=1,i\neq j}^{q}(\mu_j(\lambda_k)-\mu_i(\lambda_k))^{-1}\right)}{\partial\mu_1^{n_1-1}(\lambda_k)\ldots\partial\mu_{q-1}^{n_{q-1}-1}(\lambda_k)\partial\mu_q^{r-1}(\lambda_k)}, \tag{24}$$

де $r=1,\ldots,n_q$, $q=1,\ldots,l$. Враховуючи (23), (24) знаходимо

$$\Delta(\lambda_k)=\prod_{1\leq i<j\leq l}(\mu_j(\lambda_k)-\mu_i(\lambda_k))^{-n_in_j}\det\left\|t_j^{r-1}/((r-1)!)\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)\right\|_{j=\overline{1,n},\,r=\overline{1,n_q}}^{q=\overline{1,l}}. \tag{25}$$

Задача (1) – (3) не може мати два різні розв'язки тоді і лише тоді, коли відповідна їй однорідна задача має лише тривіальний розв'язок.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1) – (3) у просторі $C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\det\left\|t_j^{r-1}/((r-1)!)\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)\right\|_{j=\overline{1,n},\,r=\overline{1,n_q}}^{q=\overline{1,l}}\neq0\quad\forall\lambda_k\in\Lambda. \tag{26}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з [6] (гл. 2) із урахуванням формули (25).

3. Існування розв'язку. Нехай виконується умова (26). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує розв'язок задачі (11), (12), який зображується формулою

$$w_k(t) = \sum_{q=1}^{l} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,qr}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)} \varphi_{jk} u_{k,q,r}(t), \tag{27}$$

де $\Delta_{j,qr}(\lambda_k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $u_{k,q,r}(t_j)$ у визначнику (23), а також у квадраті $K = \{(t,\tau) : 0 \le t \le T,\ 0 \le \tau \le T\}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (12), (13), за допомогою якої розв'язок задачі (10), (13) визначається формулою

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau. \tag{28}$$

У кожній із областей $K_j = \{(t,\tau) : 0 \le t \le T, t_j < \tau < t_{j+1}\}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$, функція $G_k(t,\tau)$ збігається, відповідно, з функцією

$$G_{kj}(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} u_{k,l,n_l}(t-\tau) + \sum_{m=1}^{j} (-1)^{m+1} F_{km}(t,\tau) - \sum_{m=j+1}^{n} (-1)^{m+1} F_{km}(t,\tau), \tag{29}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n,$$

де

$$F_{km}(t,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l} \sum_{r=1}^{n_q} \frac{\Delta_{m,qr}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)} u_{k,q,r}(t) u_{k,l,n_l}(t_m - \tau), \quad m = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

На відрізках прямих $\tau = t_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, доозначуємо функцію $G_k(t,\tau)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

На основі формул (9), (14), (27), (28) одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (1) – (3) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} \left(\sum_{q=1}^{l} \sum_{r=1}^{n_q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,qr}(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)} \varphi_{jk} u_{k,q,r}(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right) X_k(x). \tag{31}$$

Збіжність ряду (31), взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(\lambda_k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова (26) та існує додатна стала ν така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\lambda_k \in \Lambda$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)| > \exp(-\nu |\lambda_k|^{b/2}). \tag{32}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in G_{\alpha_1, b/2}(\Pi^p)$, $\alpha_1 > \nu - (n-1)\delta a_0 t_1$, $j = 1, \ldots, n$, $f(t,x) \in C([0,T]; G_{\alpha_2, b/2}(\Pi^p))$, $\alpha_2 > \nu + (T - n t_1)\delta a_0$, то у просторі $C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})$ існує розв'язок задачі (1) – (3), який зображується рядом (31) і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення. На підставі (16), (20) – (23) знаходимо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u^{(s_0)}_{k,q,r}(t)\right| \leq C_2|\lambda_k|^{bs_0/2}, \quad s_0 = 0,1,\ldots,n, \tag{33}$$

$$|\Delta_{j,qr}(\lambda_k)| \leq (n-1)!(C_2)^{n-1}\exp\left\{-(n-1)\delta a_0 t_1|\lambda_k|^{b/2}\right\}, \tag{34}$$

$$r = 1,\ldots,n_q, \quad q = 1,\ldots,l, \quad j = 1,\ldots,n,$$

де $C_2 = C_2(n,T,C_1)$. Із формул (27) – (30) на підставі оцінок (32) – (34) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|w^{(s_0)}_{k}(t)\right| \leq C_3\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}||\lambda_k|^{bs_0/2}\exp\{(\nu-(n-1)\delta a_0 t_1)|\lambda_k|^{b/2}\}, \tag{35}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|v^{(s_0)}_{k}(t)\right| \leq C_4\widetilde{f}_k|\lambda_k|^{bs_0/2}\exp\{(\nu+(T-nt_1)\delta a_0)|\lambda_k|^{b/2}\}, \tag{36}$$

де $s_0 = 0,1,\ldots,n$, $C_3 = n!(C_2)^n$, $C_4 = (n+1)!(C_2)^{n+1}/2$, $\widetilde{f}_k = \max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$. На підставі формул (9), (14), (27) – (30) і нерівностей (8), (35), (36) дістаємо оцінку

$$\left\|u; C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})\right\| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}^p}\sum_{s_0=0}^{n}\sum_{s_0+|s|\leq bn}\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|v^{(s_0)}_{k}(t)\right| + \max_{t\in[0,T]}\left|w^{(s_0)}_{k}(t)\right|\right\}\max_{x\in\overline{\Pi^p}}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right| \leq$$

$$\leq C_5\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\widetilde{f}_k|\lambda_k|^{bn-n/2}\exp\left\{(\nu+(T-nt_1)\delta a_0)|\lambda_k|^{b/2}\right\} +$$

$$+ C_6\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_{jk}|\,|\lambda_k|^{bn-n/2}\exp\left\{(\nu-(n-1)\delta a_0 t_1)|\lambda_k|^{b/2}\right\}, \tag{37}$$

в якій $C_5 = C_4 N_{bn}V_{bn}$, $C_6 = C_3 N_{bn}V_{bn}$, N_{bn} — стала із оцінок (8), V_{bn} — кількість усіх розв'язків нерівності $s_0+|s| \leq bn$ у цілих невід'ємних числах $s_0, s_1, \ldots, s_p$, $s_0 \leq n$.

Використовуючи елементарну нерівність

$$\theta^{\sigma} \leq C(\sigma)\exp(\rho\theta), \quad C(\sigma) > 0, \tag{38}$$

яка при $0 < \theta < +\infty$ виконується для довільних $\sigma \geq 0$ і $\rho > 0$, із (37) маємо

$$\left\|u; C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})\right\| \leq C_7\Bigg(C_5\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\widetilde{f}_k\exp\{(\rho_2+\nu+(T-nt_1)\delta a_0)|\lambda_k|^{b/2}\} +$$

$$+ C_6\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_{jk}|\exp\{(\rho_1+\nu-(n-1)\delta a_0 t_1)|\lambda_k|^{b/2}\}\Bigg) \leq$$

$$\leq C_7C_8\left(\|f; C([0,T]G_{\alpha_2,b/2}(\Pi^p))\| + \sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j; G_{\alpha_1,b/2}(\Pi^p)\|\right), \tag{39}$$

де $\rho_1 = \alpha_1 - \nu + (n-1)\delta a_0 t_1$, $\rho_2 = \alpha_2 - \nu - (T - nt_1)\delta a_0$, $C_7 = C_7(n, b)$, $C_8 = \max\{C_5, C_6\}$, що й завершує доведення теореми.

Очевидно, що за умов теореми 2 розв'язок задачі (1)–(3) належить простору $C^n\left([0,T]; G_{\alpha_3,b/2}(\Pi^p)\right)$, де $\alpha_3 < \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

4. Оцінки знизу малих знаменників. Вияснимо, наскільки "багата"множина задач (1)–(3), для яких виконується нерівність (32). Позначимо $m_0 = 0$, $m_r = n_1 + \ldots + n_r$, $r = 1, \ldots, l$;

$$g_q(t, \lambda_k) := t^{q-m_{j-1}-1}/((q-m_{j-1}-1)!)\exp(\mu_j(\lambda_k)t), \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$P_q(\beta, \lambda_k) := (\beta - \mu_1(\lambda_k))^{n_1} \ldots (\beta - \mu_{j-1}(\lambda_k))^{n_{j-1}}(\beta - \mu_j(\lambda_k))^{q-m_{j-1}}, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$Z_q(\lambda_k) := 1, \quad q = 1, \ldots, n_1,$$

$$Z_q(\lambda_k) := (\mu_j(\lambda_k) - \mu_1(\lambda_k))^{n_1} \ldots (\mu_j(\lambda_k) - \mu_{j-1}(\lambda_k))^{n_{j-1}}, \quad q = n_1 + 1, \ldots, n,$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1} < q \le m_j$.

Теорема 3. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$ і для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) нерівність (32) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\lambda_k \in \Lambda$ при $\nu > nC_1T$, де C_1 — стала з оцінок (20).*

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 3 з [8]. Нехай

$$\Gamma(\lambda_k; t_1, \ldots, t_n) := \det \|g_q(t_j, \lambda_k)\|_{j,q=1}^n, \tag{40}$$

а $\Gamma_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_q)$ — визначник, який отримується з $\Gamma(\lambda_k; t_1, \ldots, t_n)$ викреслюванням останніх $n - q$ рядків та останніх $n - q$ стовпців. Згідно з (25), (40)

$$\Delta(\lambda_k) = \Gamma(\lambda_k; t_1, \ldots, t_n) \prod_{1 \le i < j \le l} (\mu_j(\lambda_k) - \mu_i(\lambda_k))^{-n_i n_j} = \Gamma(\lambda_k; t_1, \ldots, t_n) \prod_{q=1}^{n} Z_q^{-1}(\lambda_k). \tag{41}$$

Розглянемо множини

$$A(\lambda_k) := \left\{\vec{t} \in [0, T]^n : |\Delta(\lambda_k)| < \exp(-\nu|\lambda_k|^{b/2})\right\},$$

$$A_q(\lambda_k) := \left\{\vec{t} \in [0, T]^n : |\Gamma_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_q)| < h_q(\lambda_k), |\Gamma_{q-1}(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1})| \ge h_{q-1}(\lambda_k)\right\},$$

де числа $h_q(\lambda_k)$, $q = 1, \ldots, n$, визначаються рівностями

$$h_q(\lambda_k) = |\lambda_k|^{-q(q-1)(p+b)/4 - \varepsilon(2q-1)/(2n-1)} \exp\left(-qC_1T|\lambda_k|^{b/2}\right) \prod_{j=1}^{q} |Z_j(\lambda_k)|, \quad \varepsilon > 0.$$

Згідно з теоремою Фубіні [16, с. 119], для кожного q, $q = 2, \ldots, n$,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(\lambda_k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n, \tag{42}$$

де $A_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) := \{t_q \in [0, T] : \vec{t} \in A_q(\lambda_k)\}$.

Застосуємо леми 1, 2 з роботи [8] для оцінки зверху мір Лебега множин $A_q(\lambda_k; t_1, \ldots$ $\ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, $q = 2, \ldots, n$. Для цього зауважимо, що функція $\Gamma_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_q)$ як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$) є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_1|\lambda_k|^{b/2}$. Крім того, з розвинення визначника $\Gamma_q(\lambda_k;$ $t_1, \ldots, t_q)$ за елементами останнього рядка випливають рівності

$$P_{q-1}(\partial/\partial t_q, \lambda_k)\Gamma_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_q) = \exp(\mu_j(\lambda_k)t_q)Z_q(\lambda_k)\Gamma_{q-1}(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}), \quad q = 2, \ldots, n, \tag{43}$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1} < q \le m_j$.

Із оцінок (20) отримуємо

$$|\exp(\mu_r(\lambda_k)t)| \ge \exp(-C_1 T|\lambda_k|^{b/2}) = h_1(\lambda_k), \quad t \in [0, T], \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad r = 1, \ldots, l. \tag{44}$$

Якщо $\vec{t} \in A_q(\lambda_k)$, $q = 2, \ldots, n$, то з формул (43), (44) та означення множин $A_q(\lambda_k)$ випливає

$$|P_{q-1}(\partial/\partial t_q, \lambda_k)\Gamma_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_q)| \ge h_1(\lambda_k)h_{q-1}(\lambda_k)|Z_q(\lambda_k)| \quad \forall t_q \in [0, T]. \tag{45}$$

Очевидно, що для кожного q, $q = 2, \ldots, n$, степінь многочлена $P_{q-1}(\beta, \lambda_k)$ за змінною β дорівнює $q - 1$, а модуль коефіцієнта при β^{q-j-1}, $j = 0, 1, \ldots, q - 1$, в цьому многочлені не перевищує $C_9|\lambda_k|^{bj/2}$, де $C_9 = C_9(n, C_1)$. Тому з оцінок (45) та лем 1, 2 з [8] отримуємо

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) &\le C_{10}|\lambda_k|^{b/2} \sqrt[q-1]{\frac{h_q(\lambda_k)}{h_1(\lambda_k)h_{q-1}(\lambda_k)|Z_q(\lambda_k)|}} \le \\ &\le C_{10}|\lambda_k|^{-p/2-\varepsilon_q}, \quad q = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{46}$$

де $\varepsilon_q = \varepsilon/((2q-1)(2n-1)) > 0$, $C_{10} = C_{10}(n, T)$.

Тоді з формул (42), (46) дістаємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(\lambda_k) \le C_{10} T^{n-1}|\lambda_k|^{-p/2-\varepsilon_q}, \quad q = 2, \ldots, n. \tag{47}$$

Оскільки, згідно з (41),

$$|\Gamma(\lambda_k; t_1, \ldots, t_n)| = |\Delta(\lambda_k)| \prod_{q=1}^{n} |Z_q(\lambda_k)| < h_n(\lambda_k),$$

то $A(\lambda_k) \subset \bigcup\limits_{q=2}^{n} A_q(\lambda_k)$. З оцінок (7) та (47) випливає

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A(\lambda_k) \le \sum_{k\in\mathbb{N}^p} \sum_{q=2}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(\lambda_k) \le C_{11} \sum_{k\in\mathbb{N}^p} |k|^{-p-\varepsilon},$$

де $C_{11} = (n-1)T^{n-1}C_{10}\widetilde{C_0}^{-p/2}$. Зі збіжності останнього ряду, згідно з лемою Бореля – Кантеллі [17] і оцінкою (38), для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq |\lambda_k|^{-n(n-1)(p+b)/4-\varepsilon}\exp(-nC_1T|\lambda_k|^{b/2}) \geq \frac{1}{C_{12}}\exp(-(nC_1T+\rho_3)|\lambda_k|^{b/2}), \quad \rho_3 > 0,$$

де $C_{12} = C_{12}(n,p,b,\varepsilon)$, виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорему доведено.

З теорем 2, 3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай* $\varphi_j(x) \in G_{\alpha_1,b/2}(\Pi^p)$, $\alpha_1 > nC_1T-(n-1)\delta a_0 t_1$, $j=1,\ldots,n$, $f(t,x) \in C([0,T];G_{\alpha_2,b/2}(\Pi^p))$, $\alpha_2 > nC_1T+(T-nt_1)\delta a_0$. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *і довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3) з простору* $C^{(n,bn)}(\overline{Q_p})$, *який зображується рядом (31) і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$.

Викладені вище результати можна перенести на випадок такої задачі:

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r L^{b(n-r)/2}u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D,$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} d_r \frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r} = \varphi_j(x),\ x \in \overline{\Omega}, \quad j=1,\ldots,n, \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T,$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T], \quad m = 0,1,\ldots,(bn/2-1),$$

де $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, Ω — обмежена однозв'язна область з гладкою межею $\partial\Omega$; $A_r \in \mathbb{R}$, $d_r \in \mathbb{C}$; $L = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - c(x)$ — еліптичний в Ω диференціальний вираз з досить гладкими в $\overline{\Omega}$ коефіцієнтами, $c(x) \geq 0$.

1. *Василишин П. Б., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 9. — С. 1155 – 1168.

2. *Картынник А. В.* Трехточечная смешанная задача с интегральным условием по пространственной переменной для параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1990. — **26**, № 9. — С. 1568 – 1575.

3. *Лавренчук В. П.* Деякі нелокальні задачі для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. — Чернівці: Рута, 1990. — С. 111 – 119.

4. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — Київ: Наук. думка, 1999. — 214 с.

5. *Пукальський І. Д.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння з виродженням // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — Вип. 16. — С. 246 – 255.

6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1984. — 264 с.

7. *Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 6. — С. 728 – 734.
8. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Там же. — 2003. — **55**, № 2. — С. 241 – 254.
9. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. — 2008. — № 12. — С. 34 – 39.
10. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2000. — **43**, № 4. — С. 42 – 48.
11. *Chabrovski J.* On non-local problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. — 1984. — **93**. — P. 109 – 131.
12. *Majchrowski M.* On certain nonlocal problem with mixed boundary condition for a parabolic system of partial differential equations // Demonstr. math. — 1982. — **15**, № 3. — P. 635 – 646.
13. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
14. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965. — 328 с.
15. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. — Київ: Вища шк., 1971. — 316 с.
16. *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. — Киев: Вища шк., 1989. — 152 с.
17. *Спринжук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. — М.: Наука, 1977. — 143 с.

Одержано 12.03.09