УДК 517.938

ЗАДАЧІ РЕГУЛЯРНОСТІ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

Н. В. Степаненко

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 02057, Київ, просп. Перемоги, 37

Є. Ткоч-Пішчек

Сілез. техн. ун-т
Польща, 44-100, Глівіце, вул. Кашубська, 23
e-mail: E.Tkocz@polsl.pl

We study the problem of existence of the Green – Samoilenko function for some linear extensions of dynamical systems.

Исследуется вопрос существования функции Грина – Самойленко некоторых линейных расширений динамических систем.

У статті [1, с. 158] при застосуванні асимптотичного методу до дослідження коливань у нелінійних системах звернено увагу на те, що система рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{h\omega_1^2}{2\nu}\, a\cos 2\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega_1}{2} - \frac{h\omega_1^2}{2\nu}\sin 2\theta, \quad h, \omega_1, \nu = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{1}$$

при заміні змінних $x_1 = a\cos\theta$, $x_2 = a\sin\theta$ переходить у лінійну однорідну систему двох диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами відносно змінних x_1, x_2. Система (1) є лінійним розширенням динамічних систем на торі (див. [2, 3]), для яких глибоко досліджено питання існування функції Гріна – Самойленка (див. [4 – 7]). У зв'язку з цим виникає задача дослідження на регулярність всіх таких систем, які можуть бути отримані при переході до полярної системи координат у лінійних диференціальних системах із сталими коефіцієнтами. Дослідженню цієї задачі і присвячено дану статтю.

Нагадаємо означення функції Гріна – Самойленка лінійних розширень динамічних систем на торі. З цією метою розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)\,x, \tag{2}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in T_m$, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$, T_m — m-вимірний тор.

Підставляючи розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ задачі Коші $\dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi\Big|_{t=0} = \varphi$ у систему рівнянь (2), отримуємо лінійну систему $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))\,x$ з вектором параметрів $\varphi \in T_m$. Матрицант цієї системи позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi)$, $\Omega_\tau^t(\varphi)\big|_{t=\tau} = I_n$, I_n — n-вимірна одинична матриця.

Далі будемо використовувати такі позначення: $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярний добуток в R^n, $\|M\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Mx\|$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, — норма $(n \times n)$-вимірної матриці M.

Означення. *Нехай існує $(n \times n)$-вимірна матриця $C(\varphi)$, елементами якої є дійсні неперервні функції, визначені на m-вимірному торі T_m, така, що функція $G_0(\tau, \varphi)$ вигляду*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

задовольняє оцінку

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\}$$

з деякими додатними сталими K, γ, що не залежать від $\varphi \in T_m$ і $\tau \in R$. Тоді функція (3) називається функцією Гріна – Самойленка системи (2). У випадку існування єдиної такої функції систему (3) називають регулярною.

Ефективним методом дослідження існування функції Гріна – Самойленка системи (2) є метод функції Ляпунова (див. [3, 4]).

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + k_1 \cos 2\varphi - k_2 \sin 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} &= [b + k_2 \cos 2\varphi + k_1 \sin 2\varphi]\, x \end{aligned} \tag{4}$$

з деякими фіксованими значеннями параметрів b, ω, k_1, $k_2 \in R$. Системи вигляду (4) і тільки такого вигляду при заміні змінних $x_1 = x\cos\varphi$, $x_2 = x\sin\varphi$ зводяться до лінійних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$a_{11} = b + k_2, \quad a_{12} = k_1 - \omega, \quad a_{21} = k_1 + \omega, \quad a_{22} = b - k_2. \tag{6}$$

Припускаємо, що для коефіцієнтів k_1, k_2 в системі рівнянь (4) виконується нерівність $k_1^2 + k_2^2 > 0$.

Зауваження 1. При позначеннях (6) нерівність

$$b^2 + \omega^2 - k_1^2 - k_2^2 > 0 \tag{7}$$

для параметрів системи рівнянь (4) є еквівалентною нерівності $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$ для коефіцієнтів системи рівнянь (5).

Має місце наступне твердження.

Теорема. *Нехай для параметрів у системі рівнянь (4) виконується нерівність (7) і при цьому $b \neq 0$, $k_1^2 + k_2^2 > 0$. Тоді система рівнянь (4) має єдину функцію Гріна – Самойленка. У випадку виконання протилежної нерівності $b^2+\omega^2-k_1^2-k_2^2 \leq 0$ система рівнянь (4) не має жодної такої функції, до того ж якщо виконується строга нерівність*

$$b^2 + \omega^2 - k_1^2 - k_2^2 < 0, \tag{8}$$

то спряжена до (4) система

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + k_1 \cos 2\varphi - k_2 \sin 2\varphi, \\ \frac{dy}{dt} &= -[b + k_2 \cos 2\varphi + k_1 \sin 2\varphi]\, y \end{aligned} \tag{9}$$

має безліч різних функцій Гріна – Самойленка. При виконанні рівності $b^2+\omega^2-k_1^2-k_2^2 = 0$ системи (4) і (9) не мають жодної такої функції.

Спочатку розглянемо допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай система рівнянь (2) така, що матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))\, x$ при деякій додатній сталій Δ, що не залежить від $\varphi \in T_m$, задовольняє одну з нерівностей*

$$\|\Omega_0^\Delta(\varphi)\| < 1, \quad \Delta = \mathrm{const} > 0, \tag{10}$$

або

$$\|\Omega_\Delta^0(\varphi)\| < 1, \quad \Delta = \mathrm{const} > 0. \tag{11}$$

Тоді система рівнянь (2) має єдину функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$, до того ж при виконанні нерівності (10) ця функція має вигляд

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Якщо ж виконується нерівність (11), то

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Доведення. У статті [6] доведено, що із нерівності (10) випливає оцінка $\|\Omega_\tau^t(\varphi)\| \leq \leq K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}$, $\tau \leq t$, $K, \gamma = \text{const} > 0$, а це означає, що система рівнянь (2) має єдину функцію Гріна – Самойленка вигляду (12). Ми пропонуємо для дослідження цього питання використовувати функцію Ляпунова. Розглянемо симетричну матрицю

$$S(\varphi) = \int_0^\Delta (\Omega_0^\sigma(\varphi))^T\,\Omega_0^\sigma(\varphi)\,d\sigma, \quad \Delta = \text{const} > 0. \tag{14}$$

Для суперпозиції $S(\varphi_t(\varphi))$ отримуємо рівність

$$S(\varphi_t(\varphi)) = \int_0^\Delta (\Omega_t^{\sigma+t}(\varphi))^T\,\Omega_t^{\sigma+t}(\varphi)\,d\sigma = \int_t^{\Delta+t} (\Omega_t^z(\varphi))^T\,\Omega_t^z(\varphi)\,dz.$$

Диференціюючи матрицю $S(\varphi_t(\varphi))$ по t, маємо

$$\frac{d}{dt}\,S(\varphi_t(\varphi)) = (\Omega_t^{\Delta+t}(\varphi))^T\Omega_t^{\Delta+t}(\varphi) - I_n - A^T(\varphi_t(\varphi))\,S(\varphi_t(\varphi)) - S(\varphi_t(\varphi))\,A(\varphi_t(\varphi)).$$

Звідси одержуємо $\dot S(\varphi) + S(\varphi)\,A(\varphi) + A^T(\varphi)\,S(\varphi) = (\Omega_0^\Delta(\varphi))^T\,\Omega_0^\Delta(\varphi) - I_n$. Таким чином, похідна квадратичної форми

$$V = \langle S(\varphi)\,x, x\rangle \tag{15}$$

в силу системи рівнянь (2) має вигляд

$$\dot V = -\|x\|^2 + \left\|\Omega_0^\Delta(\varphi)\,x\right\|^2. \tag{16}$$

Оцінюючи зверху праву частину рівності (16), маємо

$$\dot V \leq -\left(1 - \left\|\Omega_0^\Delta(\varphi)\right\|^2\right)\,\|x\|^2. \tag{17}$$

Оцінюючи ж праву частину рівності (16) знизу, отримуємо

$$\dot V \geq \left(\frac{1}{\left\|\Omega_0^\Delta(\varphi)\right\|^2} - 1\right)\,\|x\|^2. \tag{18}$$

При виконанні нерівності (10) похідна додатно визначеної квадратичної форми (15) в силу системи рівнянь (2) буде від'ємно визначеною вигляду (17). Звідси випливає наступна оцінка для матриціанта:

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi)\| \leq K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \quad \tau \leq t, \quad t,\tau \in R, \tag{19}$$

з додатними сталими K, γ, що не залежать від t, τ, φ. Це означає, що система рівнянь (2) має єдину функцію Гріна – Самойленка вигляду (12). Аналогічно при виконанні нерівності (11) похідна квадратичної форми (15) в силу системи (2) буде додатно визначеною вигляду (18). Звідси випливає виконання оцінки

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi)\| \leq K \exp\{\gamma(t-\tau)\}, \quad t \leq \tau, \quad t, \tau \in R, \quad K, \gamma = \text{const} > 0, \tag{20}$$

яка гарантує існування єдиної функції Гріна (13).

Зауваження 2. Оскільки (19), (20) еквівалентні відповідно оцінкам

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K \exp\{-\gamma t\}, \quad t \geq 0, \tag{21}$$

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K \exp\{\gamma t\}, \quad t \leq 0, \quad K, \gamma = \text{const} > 0. \tag{22}$$

Лема 2. *Якщо в системі рівнянь (2) функція $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_1)$ є скалярною, яка не набуває нульових значень $\varphi \in T_1$, то існування функції Гріна – Самойленка системи рівнянь (2) еквівалентно існуванню такої функції для системи*

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a(\varphi)}\, A(\varphi)\, x, \quad x \in R^n. \tag{23}$$

Доведення. Існування функції Гріна – Самойленка системи рівнянь (2) є еквівалентним (див. [3]) існуванню симетричної матриці $S(\varphi) \in C^1(T_1)$, для якої виконується нерівність

$$\left\langle \left[\frac{dS(\varphi)}{d\varphi}\, a(\varphi) - S(\varphi) A^T(\varphi) - A(\varphi)\, S(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2.$$

Припустивши, що $a(\varphi) > 0$, обидві частини записаної вище нерівності поділимо на $a(\varphi)$ і отримаємо

$$\left\langle \left[\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} - S(\varphi)\, \frac{1}{a(\varphi)}\, A^T(\varphi) - \frac{1}{a(\varphi)}\, A(\varphi)\, S(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \frac{1}{a(\varphi)}\, \|x\|^2 \geq \varepsilon\, \|x\|^2,$$

де $\varepsilon = \min\limits_{\varphi \in T_1} \dfrac{1}{a(\varphi)} = \text{const} > 0$. Отримана нерівність і є умовою існування функції Гріна – Самойленка системи рівнянь (23). У випадку $a(\varphi) < 0$ знак в отриманій вище нерівності змінюється на протилежний, що не впливає на існування функції Гріна – Самойленка.

Доведення теореми. В системі рівнянь (4) введемо позначення

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} > 0, \; \cos\Delta = \frac{k_2}{k}, \; \sin\Delta = \frac{k_1}{k}, \; \varphi - \frac{\Delta}{2} \to \varphi, \; kt \to t, \; \frac{\omega}{k} \to \omega, \; \frac{b}{k} \to b. \tag{24}$$

Тоді одержимо наступну систему (еквіваленту системі (4)):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \sin 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} &= [b + \cos 2\varphi]\, x. \end{aligned} \tag{25}$$

Нерівність (7) для коефіцієнтів системи рівнянь (4), з урахуванням позначень (24), еквівалентна нерівності

$$\omega^2 + b^2 > 1. \tag{26}$$

Розглянемо такі випадки:

I. При виконанні нерівності $|b| > 1$ система рівнянь (25) має єдину функцію Гріна – Самойленка, оскільки похідна функції $V = x^2$ в силу системи рівнянь (25) буде знаковизначеною.

II. $|\omega| > 1$, $b \neq 0$. Згідно з лемою 2 систему рівнянь (25) замінимо наступною:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b + \cos 2\varphi}{\omega - \sin 2\varphi}\, x. \tag{27}$$

Відповідне лінійне рівняння з параметром φ має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b + \cos 2(t+\varphi)}{\omega - \sin 2(t+\varphi)}\, x.$$

Звідси знаходимо вигляд функції $\Omega_\tau^t(\varphi)$:

$$\Omega_\tau^t(\varphi) = \exp\left\{ \int_\tau^t \frac{b}{\omega - \sin 2(\sigma+\varphi)}\, d\sigma \right\} F(t,\tau,\varphi), \tag{28}$$

де

$$F(t,\tau,\varphi) = \exp\left\{ \int_\tau^t \frac{\cos 2(\sigma+\varphi)}{\omega - \sin 2(\sigma+\varphi)}\, d\sigma \right\} = \left(\frac{\omega - \sin 2(\tau+\varphi)}{\omega - \sin 2(t+\varphi)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, має місце оцінка

$$|F(t,\tau,\varphi)| \le \left(\frac{|\omega|+1}{|\omega|-1} \right)^{\frac{1}{2}} = F_0.$$

Розглянемо наступні випадки.

1) $\omega > 1$, $b > 0$. При всіх значеннях $t \le 0$ має місце нерівність

$$\int_0^t \frac{b}{\omega - \sin 2(\sigma+\varphi)}\, d\sigma = \int_t^0 \frac{b}{-\omega + \sin 2(\sigma+\varphi)}\, d\sigma \le \int_t^0 \frac{b}{-\omega - 1}\, d\sigma = \frac{b}{\omega+1}\, t.$$

Звідси для функції (28) при $\tau = 0$ випливає нерівність

$$|\Omega_0^t(\varphi)| \le F_0 \exp\left\{ \frac{b}{\omega+1}\, t \right\}, \quad t \le 0,$$

яка відповідає оцінці (22).

2) $\omega < -1, b < 0$. При $t \le 0$ маємо

$$\int\limits_0^t \frac{b}{\omega - \sin 2(\sigma + \varphi)}\, d\sigma = \int\limits_t^0 \frac{-b}{\omega - \sin 2(\sigma + \varphi)}\, d\sigma \le \int\limits_t^0 \frac{-b}{\omega - 1}\, d\sigma = \frac{b}{\omega - 1}\, t,$$

звідки

$$|\Omega_0^t(\varphi)| \le F_0 \exp\left\{\frac{-b}{-\omega + 1}\, t\right\}, \quad t \le 0.$$

3) $\omega > 1, b < 0$. При $t \ge 0$ маємо

$$\int\limits_0^t \frac{b}{\omega - \sin 2(\sigma + \varphi)}\, d\sigma \le \int\limits_0^t \frac{b}{\omega + 1}\, d\sigma = \frac{b}{\omega + 1}\, t, \quad t \ge 0,$$

звідки випливає

$$|\Omega_0^t(\varphi)| \le F_0 \exp\left\{\frac{b}{\omega + 1}\, t\right\}, \quad t \ge 0,$$

що відповідає оцінці (21) при $\gamma = -\dfrac{b}{\omega + 1}$.

4) $\omega < -1, b > 0$. При $t \ge 0$ маємо

$$\int\limits_0^t \frac{b}{\omega - \sin 2(\sigma + \varphi)}\, d\sigma \le \int\limits_0^t \frac{b}{\omega - 1}\, d\sigma = \frac{b}{\omega - 1}\, t, \quad t \ge 0,$$

що означає

$$|\Omega_0^t(\varphi)| \le F_0 \exp\left\{\frac{b}{\omega - 1}\, t\right\}, \quad t \ge 0.$$

Тобто виконується оцінка (21) зі сталою $\gamma = -\dfrac{b}{\omega - 1}$.

III. $|\omega| > 1, b = 0$. Оскільки у цьому випадку функція (28) буде обмеженою, то система рівнянь (25) не має жодної функції Гріна – Самойленка.

IV. $\omega^2 = 1, b \ne 0$. Безпосередньо переконуємось, що в цьому випадку система рівнянь (25) має єдину функцію Гріна – Самойленка вигляду

$$\Omega_0^t(\varphi) = e^{bt} \begin{cases} \sqrt{2t^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + 2t\cos 2\varphi + 1}, & \omega = 1, \\ \sqrt{2t^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 + 2t\cos 2\varphi + 1}, & \omega = -1. \end{cases}$$

Звідси випливає одна з оцінок (21), (22). Це приводить до регулярності системи рівнянь (25).

V. $0 < \omega < 1, \omega^2 + b^2 > 1$. Оскільки цей випадок викликає особливий інтерес, то дослідимо його детальніше.

Інтегруючи перше рівняння системи (25), отримуємо

$$\frac{\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi_t(\varphi)-1-\sqrt{1-\omega^2}}{\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi_t(\varphi)-1+\sqrt{1-\omega^2}}=\frac{\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi-1-\sqrt{1-\omega^2}}{\omega\,\mathrm{tg}\,\varphi-1+\sqrt{1-\omega^2}}\;\exp\left\{2\sqrt{1-\omega^2}\,t\right\}. \tag{29}$$

Позначимо праву частину отриманої рівності через σ. Спростивши відповідний вираз, будемо мати

$$\sigma=\frac{\omega\,\sin\,\varphi-(1+\sqrt{1-\omega^2})\cos\,\varphi}{\omega\,\sin\,\varphi+(-1+\sqrt{1-\omega^2})\cos\,\varphi}\;\exp\left\{2\sqrt{1-\omega^2}t\right\}=\frac{u}{\nu}\;\exp\left\{\gamma\,t\right\}, \tag{30}$$

де

$$u=\omega\,\sin\varphi-(1+\sqrt{1-\omega^2})\,\cos\varphi,\ \nu=\omega\,\sin\varphi+(-1+\sqrt{1-\omega^2})\,\cos\varphi,\ \gamma=2\sqrt{1-\omega^2}. \tag{31}$$

З рівності (29) отримуємо

$$\mathrm{tg}\,\varphi_t(\varphi)=\frac{1}{\omega}+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\,\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}. \tag{32}$$

Тепер для знаходження нормованого розв’язку другого рівняння системи (25)

$$\Omega_0^t(\varphi)=\exp\left\{\int\limits_0^t(b+\cos 2\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau\right\} \tag{33}$$

обчислимо спочатку $\cos 2\varphi_t(\varphi)$:

$$\cos 2\varphi_t(\varphi)=\frac{1-\mathrm{tg}^2\varphi_t(\varphi)}{1+\mathrm{tg}^2\varphi_t(\varphi)}=\frac{1-\left[\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1+\sigma}{1-\sigma}\,\dfrac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\right]^2}{1+\left[\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1+\sigma}{1-\sigma}\,\dfrac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\right]^2}=$$

$$=\frac{\omega^2(1-\sigma)^2-[(1-\sigma)+(1+\sigma)\sqrt{1-\omega^2}]^2}{\omega^2(1-\sigma)^2+[(1-\sigma)+(1+\sigma)\sqrt{1-\omega^2}]^2}=$$

$$=\frac{2\left[(1-\sqrt{1-\omega^2})\,\sigma^2-(1+\sqrt{1-\omega^2})\right]\sqrt{1-\omega^2}}{2\left[\sigma^2(1-\sqrt{1-\omega^2})-2\omega^2\sigma+1+\sqrt{1-\omega^2}\right]}=$$

$$=\frac{\sigma^2-\dfrac{1+\sqrt{1-\omega^2}}{1-\sqrt{1-\omega^2}}}{\sigma^2-2\dfrac{\omega^2}{1-\sqrt{1-\omega^2}}\sigma+\dfrac{1+\sqrt{1-\omega^2}}{1-\sqrt{1-\omega^2}}}\;\sqrt{1-\omega^2}=$$

$$=\frac{\sigma^2-C}{\sigma^2-2B\sigma+C}\;\sqrt{1-\omega^2},$$

де

$$B = \frac{\omega^2}{1-\sqrt{1-\omega^2}}, \quad C = \frac{1+\sqrt{1-\omega^2}}{1-\sqrt{1-\omega^2}}. \tag{34}$$

Враховуючи рівність (30) і позначення (31), для функції (33) отримуємо рівність

$$\Omega_0^t(\varphi) = \exp\left\{\int\limits_0^t \left[b + \frac{u^2e^{2\gamma z} - C\nu^2}{u^2e^{2\gamma z} - 2Bu\nu e^{\gamma z} + C\nu^2}\sqrt{1-\omega^2}\right] dz\right\}. \tag{35}$$

Зауважимо, що квадратична форма $u^2 - 2Bu\nu + C\nu^2$ з коефіцієнтами (34) $(0 < \omega < 1)$ є додатно визначеною і її можна оцінити таким чином:

$$L_1\left(u^2+\nu^2\right) \le u^2 - 2Bu\nu + C\nu^2 \le L_2\left(u^2+\nu^2\right), \tag{36}$$

де L_1, L_2 — додатні сталі, які можна вибрати у вигляді

$$L_1 = \frac{1-\sqrt{1-\omega^2+\omega^4}}{1-\sqrt{1-\omega^2}}, \quad L_2 = \frac{1+\sqrt{1-\omega^2+\omega^4}}{1-\sqrt{1-\omega^2}}.$$

З метою дослідження функції (35) обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^t \frac{u^2e^{2\gamma z} - C\nu^2}{u^2e^{2\gamma z} - 2Bu\nu e^{\gamma z} + C\nu^2}\, dz &= \int\limits_1^{\exp\{\gamma t\}} \frac{u^2x^2 - C\nu^2}{(u^2x^2 - 2Bu\nu x + C\nu^2)\,\gamma x}\, dx = \\
&= \int\limits_1^{\exp\{\gamma t\}} \frac{u^2x^2 + C\nu^2 - 2Bu\nu x + 2Bu\nu x - 2C\nu^2}{(u^2x^2 - 2Bu\nu x + C\nu^2)\,\gamma x}\, dx = \\
&= \int\limits_1^{\exp\{\gamma t\}} \frac{dx}{\gamma x} + \int\limits_1^{\exp\{\gamma t\}} \left[\frac{\dfrac{2u^2}{\gamma}\,x - \dfrac{2B}{\gamma}\,u\nu}{(u^2x^2 - 2Bu\nu x + C\nu^2)} - \frac{2}{\gamma x}\right] dx = \\
&= \int\limits_1^{\exp\{\gamma t\}} \left[\frac{\dfrac{2u^2}{\gamma}\,x - \dfrac{2B}{\gamma}\,u\nu}{(u^2x^2 - 2Bu\nu x + C\nu^2)} - \frac{1}{\gamma x}\right] dx = \\
&= \frac{1}{\gamma}\,\ln\left(\frac{u^2e^{2\gamma t} - 2Bu\nu e^{\gamma t} + C\nu^2}{e^{\gamma t}(u^2x^2 - 2Bu\nu x + C\nu^2)}\right).
\end{aligned}$$

Таким чином, функцію (35) можна записати у вигляді

$$\Omega_0^t(\varphi) = \exp\{bt\}\sqrt{\frac{u^2e^{2\gamma t} - 2Bu\nu e^{\gamma t} + C\nu^2}{e^{\gamma t}(u^2 - 2Bu\nu + C\nu^2)}}. \tag{37}$$

Нехай $b > 0$, тоді функцію (37) при $t \leq 0$ запишемо і оцінимо з урахуванням нерівностей (36) таким чином:

$$\Omega_0^t(\varphi) = \exp\left\{\left(b - \frac{\gamma}{2}\right) t\right\} \sqrt{\frac{u^2 e^{2\gamma t} - 2Bu\nu e^{\gamma t} + C\nu^2}{u^2 - 2Bu\nu + C\nu^2}} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\left(b - \frac{\gamma}{2}\right) t\right\} \sqrt{\frac{L_2(u^2 e^{2\gamma t} + \nu^2)}{L_1(u^2 + \nu^2)}} \leq L \exp\left\{\left(b - \frac{\gamma}{2}\right) t\right\}, \quad t \leq 0,$$

де $L = \sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$. Зауважимо, що вираз $b - \dfrac{\gamma}{2} = b - \sqrt{1 - \omega^2}$ є додатним, а тому існує значення $\Delta > 0$, при якому виконується нерівність $\left|\Omega_0^{-\Delta}(\varphi)\right| < 1$, що є еквівалентною нерівності $\left|\Omega_\Delta^0(\varphi)\right| < 1$. З огляду на лему 1 стверджуємо, що система рівнянь (25) є регулярною, тобто має єдину функцію Гріна – Самойленка. У випадку, коли $b < 0$, функцію (37) оцінимо таким чином:

$$\Omega_0^t(\varphi) = \exp\left\{\left(b + \frac{\gamma}{2}\right) t\right\} \sqrt{\frac{u^2 - 2Bu\nu e^{-\gamma t} + C\nu^2 e^{-2\gamma t}}{u^2 - 2Bu\nu + C\nu^2}} \leq L \exp\left\{\left(b + \frac{\gamma}{2}\right) t\right\}, \quad t \geq 0.$$

При цьому показник $b + \dfrac{\gamma}{2} = b + \sqrt{1 - \omega^2}$ є від'ємним. Звідси випливає, що існує таке значення $\Delta > 0$, при якому $\left\|\Omega_0^\Delta(\varphi)\right\| < 1$, що відповідає оцінці (11).

Випадок, коли $-1 < \omega < 0$, $\omega^2 + b^2 > 1$, зводиться до попереднього випадку. Досить лише в системі рівнянь (25) виконати заміну змінної $\varphi = \psi + \dfrac{\pi}{2}$ і незалежної змінної $t \to$ $\to -t$. В результаті отримаємо систему

$$\frac{d\psi}{dt} = -\omega - \sin 2\psi,$$

$$\frac{dx}{dt} = [-b + \cos 2\psi]\, x,$$

в якій $0 < -\omega < 1$.

При виконанні рівності $\omega^2 + b^2 = 1$ існує таке значення $\varphi = \varphi_0$, при якому одночасно виконуються рівності

$$\omega - \sin 2\varphi_0 = 0,$$

$$b + \cos 2\varphi_0 = 0.$$

Звідси випливає, що система рівнянь (25) і спряжена до неї

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \sin 2\varphi,$$
$$\frac{dy}{dt} = -[b + \cos 2\varphi]\, y \tag{38}$$

не мають жодної функції Гріна – Самойленка.

Якщо виконується нерівність $\omega^2+b^2 < 1$, то похідна квадратичної форми $V = (\cos 2\varphi)\, x^2$ в силу системи рівнянь (25) буде додатно визначеною:

$$\dot{V} = \{2 - 2\omega \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi\}\, x^2 \geq 2\left(1 - \sqrt{b^2+\omega^2}\right) x^2.$$

Оскільки коефіцієнт $\cos 2\varphi$ у квадратичній формі V набуває нульового значення, то система рівнянь (25) не має функції Гріна – Самойленка, а спряжена система (38) має безліч таких функцій.

Теорему доведено.

1. *Мосеенков Б. И., Максимюк П. А.* Изучение параметрического резонанса при освещении модулированным светом полупроводниковых кристаллов // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 149 – 160.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 270 с.
3. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. London: Taylor & Francis Inc., 2003.
4. *Kenneth J. Palmer.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems // J. Different. Equat. — 1980. — **36**, № 3. — P. 374 – 390.
5. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 12. — С. 1665 – 1699.
6. *Самойленко А. М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Там же. — 2001. — **53**, № 4. — С. 513 – 521.
7. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Там же. — 2001. — **53**, № 4. — С. 556 – 559.

Одержано 04.02.08