УДК 517.95

ПРО НЕОБМЕЖЕНІСТЬ У СКІНЧЕННИЙ МОМЕНТ ЧАСУ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

П. Я. Пукач

Нац. ун-т „Львів. політехніка"
Україна, 79013, Львів, вул. Степана Бандери, 12

We prove that there is no solution, global in the time variable, of the first mixed problem for a certain class of nonlinear fifth order evolution equations. An example of such an equation is the equation for beam oscillations in Timoshenko's model.

Доказано несуществование глобального по временной переменной решения первой смешанной задачи для некоторого класса нелинейных эволюционных уравнений пятого порядка, примером которых является уравнение колебаний балки в модели Тимошенко.

Нехай Ω — обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, з кусково-гладкою межею $\partial\Omega \in C^1$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, причому при $\tau = +\infty$ писатимемо Q, S замість відповідно Q_τ і S_τ. Нехай $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $\tau \in (0,+\infty)$.

В області Q розглядаємо першу мішану задачу для нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^\beta \left(a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^\beta \left(b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u\right) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha (b_\alpha(x) |D^\alpha u|^{q-2} D^\alpha u) - c_0(x)|u|^{p-2}u = 0 \tag{1}$$

з початковими

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \tag{2}$$

та крайовими

$$u|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{3}$$

умовами, де $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{\alpha_1} \ldots \partial x_n{}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\,\Omega$.

Рівняння (1) є багатовимірним нелінійним узагальненням відомого лінійного рівняння коливань балки в моделі Тимошенка (див. [1] та наведену там бібліографію). Рівняння такого типу зустрічаються в нелінійній моделі коливань Фойгта – Кельвіна, яка описує згинні коливання стрижня, виготовленого з гнучкого матеріалу [2], моделюють поширення збурень у в'язкопружному матеріалі під дією зовнішніх ультразвукових аеродинамічних сил [3], інші процеси подібної природи.

Нелінійні еволюційні рівняння парного та непарного порядку з другою похідною за часовою змінною в останні десятиліття є предметом досліджень багатьох вчених (див., наприклад, [4–14]). Мішана задача в обмеженій області для сильнонелінійного рівняння типу коливань балки вивчалася в роботі [4]. Випадок слабконелінійного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області розглядався в [5, 6]. У праці [7] досліджено існування єдиного узагальненого розв'язку мішаної задачі для сильнонелінійного рівняння типу коливань балки в області $\Omega \times (0, +\infty)$ (Ω — обмежена область), а також поведінку цього розв'язку при $t \to +\infty$. В роботі [8] в такій області вперше розглянуто мішану задачу для нелінійного рівняння третього порядку, доведено існування єдиного класичного розв'язку, стійкого до збурень початкових даних, досліджено поведінку цього розв'язку при $t \to +\infty$. Крім того, у праці [9] отримано умови існування локального та глобального розв'язку вказаної задачі у просторах Соболєва. Випадок, коли показник нелінійності в головній частині є функцією просторових змінних, вивчено в [10]. Таке явище, як неіснування глобального за часовою змінною розв'язку, яке також називають „режимом із загостренням" розглянуто для рівнянь третього порядку в роботах [11, 12], для рівнянь четвертого порядку в праці [13] (див. також наведену там бібліографію). В [14], зокрема, отримано достатні умови неіснування глобального за часовою змінною розв'язку мішаної задачі для гіперболічного рівняння третього порядку з інтегральним доданком, який моделює так зване явище „пам'яті" в коливних процесах. Достатні умови існування локального та неіснування глобального за часовою змінною розв'язку задачі (1)–(3) у випадку $q = 2$ отримано у праці [15].

Метою цієї статті є встановлення достатніх умов неіснування глобального за часовою змінною узагальненого розв'язку мішаної задачі (1)–(3) у припущенні, зокрема, що $p > q > 2$, $c(x) > 0$. Існування так званого локального узагальненого розв'язку цієї задачі при виконанні певних (сильніших, ніж наведені у цій роботі) умов на вихідні дані доведено в [16].

Далі скрізь припускаємо виконання таких умов:

(A) $a_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(\Omega)$, $|\alpha| = |\beta| = 2$,

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq A_2 \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2, \quad A_2 > 0,$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $x \in \Omega$;

(B) $b_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(\Omega)$, $|\alpha| = |\beta| = 2$,

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq B_2 \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2, \quad B_2 > 0,$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $x \in \Omega$; $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$ для всіх α, β, $|\alpha| = |\beta| = 2$, та для майже всіх $x \in \Omega$;

(B$_1$) $b_\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_\alpha(x) \geq b_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ та для всіх α, $|\alpha| = 2$;

(C) $c_0 \in L^{\infty}(\Omega)$;

(PQ) $p > q > 2$;

(U) $u_0, u_1 \in W_0^{2,q}(\Omega)$.

Означення. *Функцію* $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$ *(*T *— додатне число або* $+\infty$*) таку, що*

$$u \in C([0, T_0]; W_0^{2,q}(\Omega)) \cap L^p((0, T_0); L^p(\Omega)), \quad u_t \in C([0, T_0]; W_0^{2,q}(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L^{\infty}((0,T_0);L^2(\Omega))$$

для довільного числа T_0 з інтервалу $(0,T)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) в області Q_T, якщо вона задовольняє початкові умови (2) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_{tt}v+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_tD^{\beta}v+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}uD^{\beta}v+$$

$$+\sum_{|\alpha|=2}b_{\alpha}(x)|D^{\alpha}u|^{q-2}D^{\alpha}uD^{\alpha}v-c_0(x)|u|^{p-2}uv\Bigg]\,dx=0 \tag{4}$$

для майже всіх $t\in(0,T)$ та для всіх $v\in W_0^{2,q}(\Omega)\cap L^p(\Omega)$. Якщо $T=+\infty$, то розв'язок називаємо глобальним.

Позначимо

$$\|v\|_r:=\|v\|_{L^r(\Omega)}=\left(\int\limits_{\Omega}|v|^r\,dx\right)^{1/r},\quad r>1,\quad \|D^2v\|_2:=\left(\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}v|^2\,dx\right)^{1/2},$$

$$E_0=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Bigg[(u_1)_t^2+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_0D^{\beta}u_0\Bigg]\,dx+$$

$$+\frac{1}{q}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}b_{\alpha}(x)|D^{\alpha}u_0|^q dx-\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}c_0(x)|u_0|^p\,dx.$$

Теорема. *Нехай виконуються вказані вище умови і, крім того, $c_0(x)\ge C_0>0$, $E_0<$ <0, $p>2$, якщо $n\in\{1,2,3,4\}$; $2<p\le\dfrac{2n}{n-4}$, якщо $n>4$; $2<q<\dfrac{p+2}{2}$. Тоді не існує глобального розв'язку задачі (1)–(3).*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто існують глобальні розв'язки задачі (1)–(3). Позначимо

$$E(t):=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_t^2+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}uD^{\beta}u\Bigg]\,dx+$$

$$+\frac{1}{q}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=2}b_{\alpha}(x)|D^{\alpha}u|^q\,dx-\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t}c_0(x)|u|^p\,dx, \tag{5}$$

де u — будь-який глобальний узагальнений розв'язок даної задачі. З означення узагальненого розв'язку випливає, що функція $E(t)$, $t\in[0,+\infty)$, є неперервною і її звуження на довільний відрізок $[0,\tau]$, $\tau > 0$, є абсолютно неперервною функцією. Крім того, очевидно, що $E(0) = E_0$.

Покажемо спочатку, що $E(t) < 0$ при $t > 0$. Для цього здиференціюємо E :

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta u_t \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x) |D^\alpha u|^{q-2} D^\alpha u D^\alpha u_t \, dx - \int\limits_{\Omega_t} c_0(x) |u|^{p-2} u_t \, dx \tag{6}$$

для майже всіх $t \in (0, +\infty)$.

Зауважимо, що з умов даної теореми та теорем вкладення Соболєва [17, с. 47] випливають такі неперервні вкладення:

$$W_0^{2,q}(\Omega) \subset H_0^2(\Omega) \subset L^p(\Omega). \tag{7}$$

Тому в рівності (4) можемо покласти $v(\cdot) = u_t(\cdot, t)$, звідки отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt}u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t D^\beta u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta u_t + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x) |D^\alpha u|^{q-2} D^\alpha u D^\alpha u_t - c_0(x) |u|^{p-2} u u_t \right] dx = 0. \tag{8}$$

Отже, з (6), (8) випливає

$$E'(t) = -\int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t D^\beta u_t \right] dx \leq 0 \tag{9}$$

для майже всіх $t \in (0, +\infty)$. Звідси та з умови $E_0 < 0$ випливає, що $E(t) < 0$ для всіх $t > 0$.

Тепер покладемо

$$H(t) := -E(t), \;\; L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u u_t \, dx,$$

де $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$ — поки що довільні числа.

Зауважимо, що з означення узагальненого розв'язку задачі (1) – (3) випливає, що функція $L(t)$, $t \in [0, +\infty)$, є неперервною і її звуження на довільний відрізок $[0,\tau]$, $\tau > 0$, є абсолютно неперервною функцією.

Зауважимо, що оскільки $H'(t) \geq 0$, то

$$0 < H(0) \leq H(t) < \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p dx \leq \frac{C^0}{p}\|u\|_p^p, \tag{10}$$

де $C^0 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |c_0(x)|$.

Крім того,

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}[u_t^2 + uu_{tt}]\,dx. \tag{11}$$

Оскільки на підставі (4) правильною є рівність

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[u_{tt}u + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u + \\ + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\Bigg]\,dx = \int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\,dx,$$

то з (11), використовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[c_0(x)|u|^p - \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u_t - \\ - \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u - \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\Bigg]\,dx \geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx + \\ + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p dx - \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\Bigg]\,dx - \\ - \frac{\varepsilon A^2}{2\delta_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u_t|^2\,dx - \frac{\varepsilon\delta_0}{2}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u|^2\,dx, \tag{12}$$

де $A^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}|a_{\alpha\beta}(x)|^2$, $\delta_0 > 0$ — довільна стала.

З нерівності (9) та умови **(A)** маємо

$$H'(t) = \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t D^\beta u_t\Bigg]dx \geq A_2\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha u_t\right|^2 dx.$$

Тому з (12) одержимо

$$L'(t) \geq \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)A_2 - \frac{\varepsilon A^2}{2\delta_0}\right]\|D^2u_t\|_2^2 + \varepsilon\|u_t\|_2^2 + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p dx -$$

$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\right]dx - \frac{\varepsilon\delta_0}{2}\|D^2u\|_2^2 =$$

$$= \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)A_2 - \frac{\varepsilon A^2}{2\delta_0}\right]\|D^2u_t\|_2^2 + \varepsilon\|u_t\|_2^2 + \varepsilon p[-H(t)+H(t)] +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p dx - \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\right]dx - \frac{\varepsilon\delta_0}{2}\|D^2u\|_2^2.$$

На підставі (10) та очевидної нерівності $H(t) > -\delta_1 H(t)$, де $\delta_1 \in (0,1)$ — довільна стала, з останньої нерівності можна отримати

$$L'(t) \geq \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)A_2 - \frac{\varepsilon A^2}{2\delta_0}\right]\|D^2u_t\|_2^2 + \varepsilon\|u_t\|_2^2 - \varepsilon pH(t) - \varepsilon p\delta_1 H(t) +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\,dx - \varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta u + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\right]dx -$$

$$-\frac{\varepsilon\delta_0}{2}\|D^2u\|_2^2.$$

Візьмемо $\delta_2 = H^\alpha(t)\delta_0$ та продовжимо останню оцінку:

$$L'(t) \geq \left[(1-\alpha)A_2 - \frac{\varepsilon A^2}{2\delta_2}\right]H^{-\alpha}(t)\|D^2u_t\|_2^2 + \varepsilon\left(1+\frac{p\delta_1}{2}\right)\|u_t\|_2^2 -$$

$$-\varepsilon pH(t) + \varepsilon\left(\frac{p\delta_1}{2}-1\right)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u D^\beta\,dx + \varepsilon\left(\frac{p\delta_1}{q}-1\right)\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(x)|D^\alpha u|^q\,dx + \varepsilon(1-\delta_1)\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\,dx - \frac{\varepsilon\delta_2}{2}H^\alpha(t)\|D^2u\|_2^2. \tag{13}$$

Покладемо $\alpha = \dfrac{q-2}{p}$. З умов теореми випливають нерівності

$$\alpha < \frac{1}{2}, \quad 2 \leq \frac{2}{1-2\alpha} \leq p. \tag{14}$$

Використовуючи оцінки (10) та вкладення (7), отримуємо

$$
\begin{aligned}
H^{\alpha}(t)\|D^2u\|_2^2 &\le \left(\frac{C^0}{p}\right)^{\alpha}\|u\|_p^{p\alpha}\|D^2u\|_2^2 \le \left(\frac{C^0}{p}\right)^{\alpha}\varkappa^{p\alpha}\|D^2u\|_2^{p\alpha}\|D^2u\|_2^2 = \\
&= \left(\frac{C^0}{p}\right)^{\alpha}\varkappa^{p\alpha}\|D^2u\|_2^{p\alpha+2} \le \left(\frac{C^0}{p}\right)^{\alpha}\varkappa^{p\alpha}C_1\|D^2u\|_q^{p\alpha+2} = \\
&= C_2\|D^2u\|_q^q,
\end{aligned}
$$

де $C_1 > 0$, $C_2 = \left(\frac{C^0}{p}\right)^{\alpha}\varkappa^{p\alpha}C_1$, $\varkappa > 0$ — норма оператора вкладення $H_0^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, тобто (див., наприклад, [17, с. 44])

$$
\|u\|_p \le \varkappa\|D^2u\|_2\,. \tag{15}
$$

Тоді (13) можна переписати таким чином:

$$
\begin{aligned}
L'(t) \ge& \left[(1-\alpha)A_2 - \frac{\varepsilon A^2}{2\delta_2}\right]H^{-\alpha}(t)\|D^2u_t\|_2^2 + \varepsilon\left(1+\frac{p\delta_1}{2}\right)\|u_t\|_2^2 - \varepsilon pH(t) + \\
&+ \varepsilon\left(\frac{p\delta_1}{2}-1\right)B_2\|D^2u\|_2^2 + \varepsilon\left[\left(\frac{p\delta_1}{q}-1\right)b_2 - \frac{\varepsilon\delta_2C_2}{2}\right]\|D^2u\|_q^q + \\
&+ \varepsilon\left(1-\delta_1\right)C_0\|u\|_p^p.
\end{aligned} \tag{16}
$$

На підставі умов теореми можемо вибрати сталі δ_1, δ_2 так, щоб отримати з нерівності (16) оцінку

$$
L'(t) \ge C_3\left[-H(t) + \|D^2u\|_2^2 + \|D^2u\|_q^q + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p\right], \tag{17}
$$

де стала $C_3 > 0$ залежить від ε.

Розглянемо далі

$$
[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.
$$

Використовуючи нерівність $(a+b)^{\gamma} \le 2^{\gamma-1}(a^{\gamma}+b^{\gamma})$, $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 1$, та враховуючи (14), при $\gamma = \dfrac{1}{1-\alpha}$ отримуємо

$$
[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[H(t) + \left|\varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right].
$$

Оскільки

$$
\left|\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \le \left(\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\left(\int\limits_{\Omega_t} u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}},
$$

то, використовуючи (14) та нерівність Юнга з показниками $r = 2(1-\alpha) > 1$, $r' = \dfrac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$, з останніх двох нерівностей маємо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \le C_4 \left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_2^{\frac{2}{1-2\alpha}} \right), \tag{18}$$

де стала $C_4 > 0$ залежить від ε. Крім того, на підставі (14) робимо висновок, що

$$\|u\|_2^{\frac{2}{1-2\alpha}} \le C_5 \left(\|u\|_2^2 + \|u\|_p^p \right), \quad C_5 > 0.$$

На підставі нерівності (15), умови **(B)** та означення H можна одержати

$$\|u\|_2^2 \le C_6 \|D^2 u\|_2^2 \le C_7 \left[-H(t) + C_8 \|u\|_p^p \right].$$

Отже, врахувавши викладене вище, з нерівності (18) отримаємо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \le C_9 \left[-H(t) + \|D^2 u\|_2^2 + \|D^2 u\|_q^q + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p \right],$$

де $C_k > 0$, $k = 6, 7, 8, 9$, — деякі сталі. На підставі останньої нерівності та (17) одержимо

$$L'(t) \ge C_{10} [L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_{10} > 0. \tag{19}$$

Зінтегрувавши обидві частини нерівності (19) за змінною t від 0 до τ (τ — довільне число), будемо мати

$$L(\tau) \ge \frac{1}{\left[L(0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - C_{10} \frac{\alpha}{1-\alpha} \tau \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}. \tag{20}$$

Оскільки

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u_0 u_1 \, dx,$$

то, враховуючи (10) і вибираючи параметр $\varepsilon > 0$ достатньо малим, можна вважати, що $L(0) > 0$. Тоді з нерівності (20) випливає існування такого скінченного $T^* > 0$, для якого $\lim_{t \to T^* - 0} L(t) = +\infty$. Отримали суперечність з тим, що функція $L(t)$ є неперервною на $[0; +\infty)$.

Теорему доведено.

1. *Gu R. J., Kuttler K. L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam // J. Math. Anal. and Appl. — 2000. — **242**. — P. 212–236.

2. *Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. — М.: Физматлит, 2002. — 208 с.

3. *Hughes T. J., Marsden J. E.* Mathematical foundation of elasticity. — Endlewood C. Prentice Hall, 1983.

4. *Пукач П. Я.* Мішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області // Прикл. проблеми механіки та математики. — 2006. — Вип. 4. — С. 59–69.

5. *Пукач П. Я.* Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Мат. студ. — 2007. — **27**, № 2. — С. 139–148.

6. *Пукач П. Я.* Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. — 2006. — Вип. 314–315. — С. 159–170.

7. *Clark H. R.* Elastic membrane equation in bounded and unbounded domains // Electron. J. Qualitative Theory Different. Equat. — 2002. — № 7. — P. 1–21.

8. *Greenberg J. M., Mac Camy R. C., Mizel V. J.* The equation $\sigma^{'}(u_x)u_{tt} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. and Mech. — 1968. — **17**, № 7. — P. 707–728.

9. *Graham Andrews.* On the existence of solution to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$ // J. Different. Equat. — 1980. — **35**. — P. 200–231.

10. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 44–61.

11. *Yang Zhijian, Song Changming.* Blowup of solutions for a class of quasilinear evolution equations // J. Nonlinear Anal. Theory. Meth. and Appl. — 1997. — **28,** № 12. — P. 2017–2032.

12. *Messaoudi Salim A.* Blow-up of positive-initial-energy solutions of nonlinear viscoelastic hyperbolic equation // J. Math. Anal. and Appl. — 2006. — **320**. — P. 902–915.

13. *Liu Yacheng, Xu Runzhang.* A class of fourth order wave equations with dissipative and nonlinear strain terms // J. Different. Equat. — 2008. — **224**. — P. 200–228.

14. *Лавренюк С. П., Панат О. Т.* Необмеженість розв'язків одного гіперболічного рівняння третього порядку // Мат. методи та фіз-мех. поля. — 2008. — **51**, № 3. — С. 36–45.

15. *Пукач П. Я.* Про неіснування глобального за часовою змінною розв'язку мішаної задачі для одного нелінійного рівняння п'ятого порядку // Прикл. проблеми механіки та математики. — 2009. – Вип. 7. — С. 7–15.

16. *Пукач П. Я.* Існування локальних розв'язків мішаної задачі для нелінійного еволюційного рівняння п'ятого порядку // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. — 2008. — № 601. — С. 27–34.

17. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

Одержано 09.03.09,
після доопрацювання — 09.07.10