УДК 517.9

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. П. Яковець, М. Б. Віра

Ніжин. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Крапив'янського, 2

We consider the question of existence of a solution for a two-point boundary-value problem for degenerate singularly perturbed linear differential systems, and give asymptotic formulae for such a solution.

Рассматривается вопрос о существовании решения двухточечной краевой задачи для вырожденных сингулярно возмущенных линейных систем дифференциальных уравнений. Получены асимптотические формулы для такого решения.

Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = d, \tag{2}$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [0;1]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ — малий параметр, $h \in \in N$, $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-матриці, d — p-вимірний вектор-стовпець, $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор-стовпець; M, N — матриці зі сталими елементами розмірності $p \times n$.

Нехай виконуються наступні умови:

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;1]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε, тобто

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), \quad f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \tag{3}$$

2) коефіцієнти $A_k(t), f_k(t)$ розвинень (3) і матриця $B(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;1]$;

3) $\det B(t) = 0 \; \forall t \in [0;1]$.

Крайові задачі типу (1), (2) для випадку $B(t) = E$, де E — одинична матриця, досліджувались у роботах [1–5]. При цьому в [1, 2] для побудови асимптотики їх розв'язків було використано метод регуляризації, а в [3, 4] — метод примежових функцій. У роботі [5] для знаходження асимптотики розв'язку крайової задачі використано ідею зведення лінійної системи до майже діагонального вигляду, а в [6] — і до системи з виродженою матрицею при похідній. У роботі [7] запропоновано спосіб асимптотичного інтегрування сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з нетеровими крайовими умовами і матрицею $B(t, \varepsilon)$ при похідній, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля, залишаючись неособливою при $\varepsilon > 0$.

У даній статті вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) з використанням результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), проведеного в роботах [8, 9]. При цьому розглядаються стійкий та напівстійкий випадки.

Дослідимо випадок регулярної [10] в'язки матриць

$$A_0(t) - \lambda B(t); \tag{4}$$

при цьому будемо вважати, що для всіх $t \in [0; 1]$ зберігається кронекерова структура в'язки.

Розглянемо випадок, коли в'язка граничних матриць (4) має лише прості елементарні дільники, а саме, $n-1$ скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1(t), \ldots, \lambda - \lambda_{n-1}(t)$ і один нескінченний. Тоді [9, с. 32] матриця $A_0(t)$ матиме $n-1$ власних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, відносно матриці $B(t)$, що відповідають власним значенням $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, а матриця $B(t)$ — один власний вектор $\widetilde{\varphi}(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню. Якщо $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ — нулі матриць $(A_0 - \lambda_i B)^*$, а $\widetilde{\psi}(t)$ — нуль матриці $B^*(t)$, то їх можна визначити так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B\varphi_i, \psi_i) = 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

$$(A_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 1. \tag{6}$$

Будемо вважати, що вектори $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\widetilde{\psi}(t)$ визначено саме так.

Дослідимо асимптотику розв'язку крайової задачі при $p = n-1$. Формальний розв'язок крайової задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{\alpha_i}^{t} \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right) + \widetilde{v}(t, \varepsilon), \tag{7}$$

де α_i, $i = \overline{1, n-1}$ — числа, які буде визначено нижче; $u_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$; $\widetilde{v}(t, \varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції; $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$ — скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями за степенями малого параметра:

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{8}$$

$$\widetilde{v}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t). \tag{9}$$

Покажемо, що коефіцієнти розвинень (8), (9) можна визначити так, щоб вектор (7) формально задовольняв систему (1) та крайову умову (2). Підставивши вектор (7) у систему (1) і прирівнявши вирази при однакових експонентах та вирази без експонент, будемо мати

$$\varepsilon^h B(t)(u_s(t, \varepsilon))' + \lambda_s(t, \varepsilon) B(t) u_s(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) u_s(t, \varepsilon), \quad s = \overline{1, n-1}, \tag{10}$$

$$\varepsilon^h B(t)(\widetilde{v}(t,\varepsilon))' = A(t,\varepsilon)\widetilde{v}(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon). \tag{11}$$

Кожне з цих рівнянь розв'яжемо методом із [11]. Врахувавши розвинення (8) та прирівнявши в (10) коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо

$$(A_0(t) - \lambda_0^{(s)}(t)B(t))u_0^{(s)}(t) = 0, \tag{12}$$

$$(A_0(t) - \lambda_0^{(s)}(t)B(t))u_k^{(s)}(t) = b_k^{(s)}(t), \quad k = 1,2,\ldots, \quad s = \overline{1,n-1}, \tag{13}$$

де

$$b_k^{(s)}(t) = \lambda_k^{(s)}(t)B(t)u_0^{(s)}(t) + g_k^{(s)}(t), \quad k = 1,2,\ldots, \quad s = \overline{1,n-1}, \tag{14}$$

$$g_k^{(s)}(t) = B(t)(u_{k-h}^{(s)}(t))' + \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{(s)}(t)B(t)u_{k-i}^{(s)}(t) - \sum_{i=1}^{k}A_i(t)u_{k-i}^{(s)}(t).$$

З рівняння (12) знайдемо

$$u_0^{(s)}(t) = c_0^{(s)}\varphi_s(t), \quad \lambda_0^{(s)}(t) = \lambda_s(t), \quad s = \overline{1,n-1}. \tag{15}$$

За виконання умови розв'язності — ортогональності векторів $b_k^{(s)}(t)$ до вектора $\psi_s(t)$ — з рівнянь (13) отримаємо

$$u_k^{(s)}(t) = H_s(t)b_k^{(s)}(t) + c_k^{(s)}\varphi_s(t), \quad s = \overline{1,n-1}, \tag{16}$$

де $H_s(t) = (A_0(t) - \lambda_0^{(s)}(t)B(t))^-$ — матриця, напівобернена до матриці $A_0(t) - \lambda_0^{(s)}(t)B(t)$, а $c_k^{(s)}$ — сталі множники, які підлягають визначенню з крайових умов. Підставляючи (15), (16) у (14), вираз для векторів $b_k^{(s)}(t)$ перетворимо до вигляду

$$b_k^{(s)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(s)}\widetilde{b}_{k-i}^{(s)},$$

$$\widetilde{b}_k^{(s)}(t) = \lambda_k^{(s)}(t)B(t)\varphi_s(t) + m_k^{(s)}(t),$$

$$m_k^{(s)}(t) = B(t)\delta_{h,k}\varphi_s'(t) + \sum_{i=1}^{k-1}B(t)\delta_{h,i}(H_s(t)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)})' + \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{(s)}(t)B(t)H_s(t)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)} -$$

$$- A_k(t)\varphi_s(t) - \sum_{i=1}^{k-1}A_i(t)H_s(t)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)}, \quad s = \overline{1,n-1}, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Тоді, взявши до уваги (5), з умови розв'язності дістанемо

$$\lambda_k^{(s)}(t) = -(m_k^{(s)}(t), \psi_s(t)), \quad s = \overline{1,n-1}. \tag{17}$$

Нарешті, наклавши умову

$$\det A_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0;1], \tag{18}$$

із (11) знайдемо рекурентні співвідношення для визначення коефіцієнтів $\widetilde{v}_k(t), k = 0,1,\ldots$:

$$\widetilde{v}_0(t) = -A_0^{-1}(t) f_0(t),$$

$$\widetilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t) \left[B(t)(\widetilde{v}_{k-h}(t))' - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t) \right], \quad k = 1,2,\ldots. \tag{19}$$

Розглянемо тепер m-те наближення, обірвавши ряди (8), (9) на m-му члені

$$u_m^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} u_j^{(k)}(t)\varepsilon^j, \quad \lambda_m^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{(k)}(t)\varepsilon^j, \quad k = \overline{1, n-1},$$
$$\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \widetilde{v}_j(t)\varepsilon^j. \tag{20}$$

Дослідимо два випадки:

1) стійкий, коли

$$\operatorname{Re}\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) < 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \forall t \in [0;1], \tag{21}$$

2) умовно стійкий, коли

$$\operatorname{Re}\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) < 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad \operatorname{Re}\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon) > 0, \quad j = \overline{l+1, n-1}. \tag{22}$$

У першому випадку наближений розв'язок задачі (1), (2) запишемо у вигляді

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt \right) + \widetilde{v}_m(t,\varepsilon). \tag{23}$$

Підставивши цей вираз у крайову умову (2), дістанемо

$$M\sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon) + N\sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(1,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt \right) + N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon) = d. \tag{24}$$

Оскільки згідно з (21)

$$\exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt \right) = o(\varepsilon^{m+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{25}$$

то, знехтувавши відповідними доданками, замість (24) розглянемо рівняння

$$M\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)=d, \tag{26}$$

з якого визначимо сталі множники $c_i^{(k)}$, $i=\overline{1,n-1}$, $k=\overline{0,m}$.

Прирівнявши у (26) коефіцієнти при однакових степенях малого параметра з урахуванням (20), отримаємо

$$M\sum_{i=1}^{n-1}u_k^{(i)}(0)+M\widetilde{v}_k(0)+N\widetilde{v}_k(1)-\delta_{k,0}d=0,\quad k=\overline{0,m},$$

де $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера. Підставивши в ці рівняння вирази (16), (19), будемо мати

$$\begin{gathered}M\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(j)}H_j(0)\widetilde{b}_{k-i}^{(j)}(0)+c_k^{(j)}\varphi_j(0)\right)+\\
+MA_0^{-1}(0)\left[B(0)(\widetilde{v}_{k-h}(0))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(0)\widetilde{v}_{k-i}(0)-f_k(0)\right]+\\
+NA_0^{-1}(1)\left[B(1)(\widetilde{v}_{k-h}(1))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(1)\widetilde{v}_{k-i}(1)-f_k(1)\right]-\delta_{k,0}d=0, \qquad (27)\\
k=\overline{0,m}.\end{gathered}$$

Введемо позначення

$$c_k=\mathrm{col}\,(c_k^{(1)},c_k^{(2)},\ldots,c_k^{(n-1)}),\quad k=0,1,\ldots,$$

$$U_0=(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_{n-1}(0)),$$

$$\Phi_k=(H_1(0)\widetilde{b}_k^{(1)}(0),H_2(0)\widetilde{b}_k^{(2)}(0),\ldots,H_{n-1}(0)\widetilde{b}_k^{(n-1)}(0)),\quad k=1,2,\ldots,$$

$$\begin{gathered}l_k=MA_0^{-1}(0)\left[B(0)(\widetilde{v}_{k-h}(0))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(0)\widetilde{v}_{k-i}(0)-f_k(0)\right]+\\
+NA_0^{-1}(1)\left[B(1)(\widetilde{v}_{k-h}(1))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(1)\widetilde{v}_{k-i}(1)-f_k(1)\right]-\delta_{k,0}d,\quad k=0,1,\ldots.\end{gathered}$$

Припустимо, що

$$\det MU_0\neq 0. \tag{28}$$

Тоді рівняння (27) можна записати у вигляді

$$M\sum_{i=1}^{k}\Phi_i c_{k-i} + MU_0 c_k + l_k = 0, \quad k = \overline{0,m}.$$

Звідси однозначно визначаються вектори c_k :

$$c_0 = -(MU_0)^{-1} l_0,$$
$$c_k = -(MU_0)^{-1}\left(l_k + M\sum_{i=1}^{k}\Phi_i c_{k-i}\right), \quad k = \overline{1,m}. \tag{29}$$

Покажемо, що побудований в такий спосіб вираз (23) є асимптотичним зображенням точного розв'язку крайової задачі (1), (2). Підставивши (23) у диференціальний оператор

$$L(x) = \varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} - A(t,\varepsilon)x - f(t,\varepsilon),$$

одержимо

$$L(x_m) = \sum_{i=1}^{n-1}\Big[\varepsilon^h B(t)(u_m^{(i)}(t,\varepsilon))' + \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)B(t)u_m^{(i)}(t,\varepsilon) - A(t,\varepsilon)u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\Big]\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right) + [\varepsilon^h B(t)(\widetilde{v}_m(t,\varepsilon))' - A(t,\varepsilon)\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) - f(t,\varepsilon)].$$

Згідно з наведеним вище алгоритмом визначення функцій $\lambda_m(t,\varepsilon)$ та вектор-функцій $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ вирази у квадратних дужках є величинами порядку $O(\varepsilon^{m+1})$. Отже,

$$L(x_m) = \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon^{m+1}a_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right) + \varepsilon^{m+1}b(t,\varepsilon),$$

де $a_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n-1}$, $b(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, рівномірно обмежені на $[0;1]$. Взявши до уваги (21), цю рівність запишемо у вигляді

$$L(x_m) = \varepsilon^{m+1}a(t,\varepsilon),$$

де $a(t,\varepsilon)$ — вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0;1]$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $x(t,\varepsilon)$ — точний розв'язок задачі (1), (2). Позначимо

$$y_m(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon). \tag{30}$$

Тоді вектор $y_m(t,\varepsilon)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dy_m}{dt} = A(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m+1}a(t,\varepsilon), \tag{31}$$

$$My_m(0,\varepsilon) + Ny_m(1,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \tag{32}$$

де $b(\varepsilon)$ — деякий обмежений $(n-1)$-вимірний вектор. Помножимо систему (31) на ε^{-h} :

$$B(t)\,\frac{dy_m}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m+1-h}a(t,\varepsilon), \tag{33}$$

де

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-h}A(t,\varepsilon).$$

Поряд із крайовою задачею (32), (33) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)x, \tag{34}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = 0, \tag{35}$$

а також систему, спряжену з (34),

$$\frac{d}{dt}\,B^*(t)x = -\widetilde{A}^*(t,\varepsilon)x. \tag{36}$$

Згідно з [9] фундаментальна матриця однорідної системи (34) у даному випадку має вигляд

$$X_{n-1}(t,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right),$$

де $\Lambda_m = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\}$, $U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k U_k(t)$, а матриці $U_k(t)$ складаються з векторів-стовпців, які визначаються за формулами (16), в яких $c_0^{(s)} = 1$, $c_i^{(s)} = 0$, $i = \overline{1,n-1}$.

Аналогічну структуру має і фундаментальна матриця спряженої системи (36):

$$Y_{n-1}(t,\varepsilon) = (\widehat{U}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m^*(t,\varepsilon)dt\right),$$

де $\widehat{U}_m(t,\varepsilon)$ — матриця, елементи якої визначаються за тим же алгоритмом, що і елементи матриці $U_m(t,\varepsilon)$, Λ^* — матриця, комплексно спряжена з Λ_m. Тоді, використавши [9, с. 67], загальний розв'язок системи (33) запишемо у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right) c+$$

$$+\int\limits_0^t (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\tau^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right) \times$$

$$\times (\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau - \widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),$$

де

$$q(t,\varepsilon) = \varepsilon^{m-h+1}a(t,\varepsilon),$$
$$\widetilde{L}(t) = A(t) - \varepsilon^h B(t)\frac{d}{dt}. \tag{37}$$

Визначивши вектор c із крайової умови (32) і взявши до уваги (21), (25), отримаємо асимптотичний розв'язок неоднорідної крайової задачі (32), (33):

$$y_m(t,\varepsilon) = (Gq)(t,\varepsilon) + (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right) \times$$

$$\times ([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m+1}))\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \tag{38}$$

де $(Gq)(t,\varepsilon)$ — оператор Гріна крайової задачі (31), (32), тобто розв'язок напіводнорідної крайової задачі (33), (35). Другий доданок виразу (38) — розв'язок напіводнорідної задачі (32), (34). Оператор Гріна у даному випадку має вигляд

$$(Gq)(t,\varepsilon) = \int\limits_0^1 G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau + (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right) \times$$

$$\times ([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m+1}))(M\xi(0,\varepsilon) + N\xi(1,\varepsilon)) - \xi(t,\varepsilon),$$

де

$$\xi(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon), \tag{39}$$

$G_0(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна однорідної крайової задачі (34), (35), яка має таку структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} -(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)\times \\ \times([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m+1}))N(U_m(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\times \\ \times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\tau^1 \Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right)(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})), \\ \text{якщо}\quad 0\le t<\tau\le 1, \\ (U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\tau^t \Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right)\times \\ \times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))-(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\times \\ \times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m+1}))\times \\ \times N(U_m(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\tau^1 \Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right)\times \\ \times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})), \\ \text{якщо}\quad 0\le\tau\le t\le 1. \end{cases}$$

Перейшовши в рівності (38) до оцінок за нормою, дістанемо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\|\le\int\limits_0^1\|G_0(t,\tau,\varepsilon)\|\,\|q(\tau,\varepsilon)\|d\tau+$$
$$+\|U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})\|\left\|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)\right\|\times$$
$$\times\|(MU_m(0,\varepsilon))^{-1}+O(\varepsilon^{m+1})\|\,\|M\xi(0,\varepsilon)+N\xi(1,\varepsilon)\|+$$

$$+\varepsilon^{m+1}(\|U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})\|)\left\|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)\right)\,dt\right\|\times$$

$$\times\|(MU_m(0,\varepsilon))^{-1}+O(\varepsilon^{m+1})\|\,\|b(\varepsilon)\|+\|\xi(t,\varepsilon)\|. \tag{40}$$

Взявши до уваги формули (37), (39) і врахувавши умову (21) та обмеженість усіх матричних і векторних функцій, які містяться в (40), матимемо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\|\leq\varepsilon^{m-h+1}c,$$

де c — деяка стала, що не залежить від ε. Повернувшись до заміни (30), отримаємо остаточну оцінку

$$\|x_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\|\leq\varepsilon^{m-h+1}c. \tag{41}$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо в'язка граничних матриць (4) має на відрізку* $[0;1]$ $n-1$ *простих скінченних елементарних дільників та один нескінченний і виконуються умови (18), (21), (28), то при досить малих* ε *крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h+1}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ — n*-вимірні вектор-функції;* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ — *скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (20), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (16), (17), (19), (29).*

Наближений розв'язок задачі (1), (2) в умовно стійкому випадку шукаємо у вигляді

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon). \tag{42}$$

Підставивши (42) у крайову умову (2), дістанемо

$$M\sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + M\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(0,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right) +$$

$$+ M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon) + N\sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(1,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right) +$$

$$+ N\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(1,\varepsilon) + N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon) = d. \qquad (43)$$

Взявши до уваги (22) і знехтувавши величинами порядку $o(\varepsilon^{m+1})$, замість (43) розглянемо рівняння

$$M\sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon) + N\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(1,\varepsilon) + N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon) = d,$$

з якого визначимо сталі множники $c_i^{(k)}$, $i = \overline{1,n-1}$, $k = \overline{0,m}$. Прирівнявши в ньому коефіцієнти при однакових степенях ε з урахуванням (20), отримаємо систему рівнянь

$$M\sum_{s=1}^{l} u_k^{(s)}(0) + M\widetilde{v}_k(0) + N\sum_{s=l+1}^{n-1} u_k^{(s)}(1) + N\widetilde{v}_k(1) = \delta_{k,0}d, \quad k = \overline{0,m}.$$

Врахувавши (16), запишемо її у вигляді

$$M\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)} H_s(0)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(0) + c_k^{(s)}\varphi_s(0)\right) + N\sum_{s=l+1}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)} H_s(1)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(1) + c_k^{(s)}\varphi_s(1)\right) =$$

$$= \delta_{k,0}d - M\widetilde{v}_k(0) - N\widetilde{v}_k(1), \quad k = \overline{0,m}. \qquad (44)$$

Припустимо, що

$$\det(M\varphi_1(0), M\varphi_2(0), \ldots, M\varphi_l(0), N\varphi_{l+1}(1), \ldots, N\varphi_{n-1}(1)) \neq 0. \qquad (45)$$

Введемо позначення

$$\widetilde{l}_k = M\widetilde{v}_k(0) + N\widetilde{v}_k(1) - \delta_{k,0}d, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\widetilde{U}_0 = (M\varphi_1(0), M\varphi_2(0), \ldots, M\varphi_l(0), N\varphi_{l+1}(1), \ldots, N\varphi_{n-1}(1)),$$

$$c_k = \mathrm{col}\,(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \ldots, c_k^{(n-1)}),$$

$$\widetilde{\Phi}_k = (MH_1(0)\widetilde{b}_k^{(1)}(0), \ldots, MH_l(0)\widetilde{b}_k^{(l)}(0),$$

$$NH_{l+1}(1)\widetilde{b}_k^{(l+1)}(1), \ldots, NH_{n-1}(1)\widetilde{b}_k^{(n-1)}(1)).$$

Тоді рівняння (44) наберуть вигляду

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\Phi}_i c_{k-i} + \widetilde{U}_0 c_k + \widetilde{l}_k = 0, \quad k = \overline{0, m},$$

звідки

$$c_0 = -\widetilde{U}_0^{-1} \widetilde{l}_0,$$

$$c_k = -\widetilde{U}_0^{-1} \left(\widetilde{l}_k + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\Phi}_i c_{k-i} \right), \quad k = \overline{1, m}. \tag{46}$$

Для виведення асимптотичної оцінки наближеного розв'язку (41), як і в попередньому випадку, розглянемо рівняння (33) з крайовою умовою (32), яке задовольняє вектор нев'язки

$$y_m(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon).$$

У даному випадку фундаментальну матрицю однорідної системи (34) виразимо асимптотичною формулою

$$X(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})] \operatorname{diag} \left\{ \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon) dt \right), \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^1 \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon) dt \right) \right\},$$

де

$$\Lambda_m^{(1)} = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_m^{(l)}(t,\varepsilon)\},$$

$$\Lambda_m^{(2)} = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(l+1)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\},$$

$U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k U_k(t)$, а матриці $U_k(t)$ складаються з векторів-стовпців, які визначаються за формулами (16), в яких $c_0^{(s)} = 1$, $c_i^{(s)} = 0$, $i = \overline{1, n-1}$ [8, 9]. Аналогічно зображається і фундаментальна матриця спряженої системи (36):

$$Y(t,\varepsilon) = [\widehat{U}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})] \operatorname{diag} \left\{ \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m^{(1)*}(t,\varepsilon) dt \right), \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^1 \Lambda_m^{(2)*}(t,\varepsilon) dt \right) \right\},$$

де $\widehat{U}_m(t,\varepsilon)$ — прямокутна матриця відповідних розмірів.

Введемо позначення

$$Y_m^{(1)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag} \left\{ \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon) dt \right), 0 \right\},$$

$$Y_m^{(2)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{0, \exp\left(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^1 \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon)dt\right)\right\},$$

де нульові блоки мають розмірності $(n-l-1)\times(n-l-1)$ та $l\times l$ відповідно. Тоді

$$X(t,\varepsilon) = X_1(t,\varepsilon) + X_2(t,\varepsilon),$$

де

$$X_i(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})]Y_m^{(i)}(t,\varepsilon), \quad i = 1,2,$$

і загальний розв'язок системи (33) можна записати у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)c + \int\limits_0^t X_1(t,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau +$$

$$+ \int\limits_1^t X_2(t,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau -$$

$$- \widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon).$$

Визначивши сталий вектор c із крайової умови (32) і взявши до уваги умову (22), для розв'язку задачі (33), (32) отримаємо вираз

$$y_m(t,\varepsilon) = (Gq)(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}X(t,\varepsilon)([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon); NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)] + O(\varepsilon^{m+1}))^{-1}b(\varepsilon). \tag{47}$$

Тут $U_m^{(1)}(t,\varepsilon)$ — прямокутна матриця розмірності $n\times l$, стовпцями якої є вектори $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,l}$, а $U_m^{(2)}(t,\varepsilon)$ — матриця розмірності $n\times(n-l-1)$, стовпцями якої є вектори $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{l+1,n-1}$:

$$(Gq)(t,\varepsilon) = \int\limits_0^1 G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau +$$

$$+ X(t,\varepsilon) + ([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon); NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)]^{-1} +$$

$$+ O(\varepsilon^{m+1}))(M\xi(0,\varepsilon) + N\xi(1,\varepsilon)) - \xi(t,\varepsilon), \tag{48}$$

де

$$\xi(t,\varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),$$

$G_0(t, \tau, \varepsilon)$ — матриця Гріна крайової задачі (34), (35), яка має таку структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} (U_m^{(1)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_{\tau}^{t} \Lambda_m^{(1)}(s,\varepsilon) ds\right) \times \\ \times [\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})] + K_m(t,\tau,\varepsilon), \\ \text{якщо} \quad 0 \le \tau < t \le 1, \\ (U_m^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_{t}^{\tau} \Lambda_m^{(2)}(s,\varepsilon) ds\right) \times \\ \times (\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) + K_m(t,\tau,\varepsilon), \\ \text{якщо} \quad 0 \le t \le \tau \le 1. \end{cases}$$

Тут

$$K_m(t,\tau,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))(Y_m^{(1)}(t,\varepsilon) + Y_m^{(2)}(t,\varepsilon)) \times$$
$$\times ([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon); NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)] + O(\varepsilon^{m+1}))^{-1} \times$$
$$\times \left[(MU_m^{(2)}(0,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_{0}^{\tau} \Lambda_2(s,\varepsilon) ds\right) (\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) - \right.$$
$$\left. -(NU_m^{(1)}(1,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_{\tau}^{1} \Lambda_1(s,\varepsilon) ds\right) (\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) \right].$$

Виходячи з умов (22), (45), неважко переконатися, що всі матричні і векторні функції, які містяться в (47), (48), рівномірно обмежені при всіх $t \in [0;1]$ і досить малих ε. Тому, перейшовши в (47) до оцінок за нормою, дістанемо асимптотичну оцінку вигляду (41).

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2. *Якщо в'язка матриць (4) має на відрізку* $[0;1]$ $n-1$ *простих скінченних елементарних дільників та один нескінченний і виконуються умови (18), (22), (45), то при досить малих* ε *крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який зображається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_{0}^{t} \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) dt\right) +$$
$$+ \sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_{t}^{1} \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) dt\right) + \widetilde{v}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$; $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ — n*-вимірні вектор-функції;* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$ — *скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (20), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (16), (17), (19), (46).*

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 398 с.
2. *Коняев Ю. А.* Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 11. — С. 1999 – 2003.
3. *Каранджулов Л. И., Бойчук А. А., Божко В. А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной линейной краевой задачи // Докл. НАН Украины. — 1994. — № 1. — С. 7 – 10.
4. *Каранджулов Л. И.* Линейные краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных систем // Там же. — 1996. — № 7. — С. 1 – 5.
5. *Шишкин А. А.* Асимптотика решений краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной // Дифференц. уравнения. — 1972. — **8**, № 4. — С. 615 – 632.
6. *Старун І. І.* Крайові задачі для лінійних систем // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 540 – 548.
7. *Завизион Г. В.* Асимптотические решения сингулярно возмущенной нетеровой краевой задачи с вырождениями // Вiсник Харкiв. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. — 2005. — № 711. — С. 156 – 168.
8. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
9. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
11. *Яковець В. П., Кочерга О. І.* Задача Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи // Доп. НАН України. — 1999. — № 5. — С. 34 – 39.

Одержано 08.04.08