УДК 517 . 928

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИНІ ПОХІДНИХ

І. Г. Ключник

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: Klyuchnyk.I@mail.ru

By using a transformation matrix, we reduce a system of differential equations with a small parameter at partial derivatives and a turning point to an integrable system of equations.

С помощью матрицы преобразования система дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных с точкой поворота асимптотически сводится к интегрируемой системе уравнений.

У роботах [1 – 4] наведено огляд літератури з основних методів побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту. За допомогою примежових функцій в [4] запропоновано метод для асимптотичного інтегрування системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, але цей метод не можна застосувати при наявності точки звороту. В статті [5] уперше розглянуто лінійну систему диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + A_1(x)y_1, \\ \varepsilon y_1' &= (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \end{aligned} \tag{1}$$

у якій $y \in R^P$, $y_1 \in R^2$, $A(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$ і $B_2(x)$ — голоморфні при

$$|x| \leq x_0 \tag{2}$$

матриці, $B(x)$ — матриця рівняння Ейрі [1] вигляду $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, ε — малий дійсний параметр. У даній статті одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду (1), в якій $y \in R^P$, $y_1 \in R^m$, m — парне додатне число, а $B(x)$ — $(m \times m)$-матриця рівняння з [6] вигляду

$$B(x) = xI_1 + N, \tag{3}$$

де N — нільпотентна матриця, I_1 — матриця з єдиним ненульовим елементом $\{I_1\}_{m1} = 1$. Будемо вважати, що

$$\operatorname{tr} B_1(x) = \operatorname{tr} A(x) \equiv 0. \tag{4}$$

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) зведемо до вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v, \tag{5}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \tag{6}$$

де $\Phi(x,\varepsilon)$ — блочна матриця,

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x) & \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}; \tag{7}$$

матриці $C(\varepsilon)$, $D(\varepsilon)$ мають формальні розвинення

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n D_n, \tag{8}$$

C_n, D_n — сталі матриці відповідно розмірностей $p\times m$, $m\times p$, до того ж елементи першого стовпця дорівнюють $\{C_n\}_{i1} = c_{in}$, елементи m-го рядка матриці D_n дорівнюють $\{D_n\}_{mi} = d_{ni}$, $i=\overline{1,p}$, а всі інші елементи матриць C_n, D_n дорівнюють нулю.

Згідно з виглядом рівнянь (1), (5), (6) матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\varepsilon\Phi' + \Phi\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix}\Phi. \tag{9}$$

Підставляючи (7), (8) в (9) і зрівнюючи коефіцієнти при нульовому степені ε, одержуємо рівняння

$$U'(x) = A(x)U(x), \tag{10}$$

$$U(x)C_0 - V_{11}(x)B(x) = A_1(x)V(x), \tag{11}$$

$$V(x)D_0 = B_2(x)U(x) + B(x)U_{11}(x), \tag{12}$$

$$V(x)B(x) = B(x)V(x). \tag{13}$$

З (10), (13) знаходимо

$$U(x) = \Omega_0^x(A(x)), \quad V(x) = q_{0m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \tag{14}$$

де $\Omega_0^x(A(x))$ — матрицант першого з рівнянь (14), $q_{0i}(x)$, $i=\overline{1,m}$, — довільні голоморфні функції в області (2), I — одинична матриця. Для визначення $q_{0i}(x)$, $i=\overline{1,m}$, використаємо рівняння, які одержують, зрівнюючи в (9), з урахуванням (7), (8), коефіцієнти при першому степені параметра ε :

$$U_1'(x) + V_{11}(x)D_0 = A(x)U_1(x) + A_1(x)U_{11}(x), \tag{15}$$

$$V_{11}'(x)+U(x)C_1+U_1(x)C_0+V_{21}(x)B(x) = A(x)V_{11}(x)+A_1(x)V_1(x), \tag{16}$$

$$U_{11}'(x)+V(x)D_1+V_1(x)D_0 = B_2(x)U_1(x)+B_1(x)U_{11}(x)+B(x)U_{21}(x), \tag{17}$$

$$V'(x)+V_1(x)B(x) = B(x)V_1(x)+B_1(x)V(x). \tag{18}$$

За лемами з [7] для існування розв'язку рівняння (18) необхідно і достатньо виконання умов

$$\operatorname{tr}\left((V'(x)-B_1(x)V(x))B^k(x)\right) = 0, \quad k = \overline{0,m-1}. \tag{19}$$

Далі, можна довести співвідношення

$$\operatorname{tr}(B^j(x)) = \begin{cases} 0, & 1 \le j \le m-1, \\ 0, & j > m, \\ mx, & j = m, \end{cases} \qquad \operatorname{tr}(B^j(x)B'(x)) = \begin{cases} 0, & 1 \le j < m-1, \\ 0, & j \ge m, \\ 1, & j = m-1, j = \overline{1,2m-2}. \end{cases} \tag{20}$$

Підставляючи (14) у рівняння (18) і використовуючи умови існування (19) для одержаних рівнянь, а також враховуючи співвідношення

$$\operatorname{tr}(B_1(x)B^{m+i}(x)) = x\operatorname{tr}(B_1(x)B^i(x)), \quad i = \overline{0,m-2}, \tag{21}$$

і (20), отримуємо рівняння для знаходження функцій $q_{0i}(x)$, $i = \overline{1,m}$:

$$mq_{0m}'(x) = \sum_{r=0}^{m-1} b_{m-r-1}(x)q_{0,r+1}(x),$$

$$mxq_{0,j-1}'(x) = \sum_{r=1}^{j-2} xb_{j-r-1}(x)q_{0r}(x)+\sum_{r=0}^{m-j} b_{m-r-1}(x)q_{0,j+r}(x)+$$
$$+xb_0(x)q_{0,j-1}(x)-(m-j+1)q_{0,j-1}(x), \quad j = \overline{2,m}, \tag{22}$$

де $b_0(x) = \operatorname{tr}B_1(x)$, $b_i(x) = \operatorname{tr}(B_1(x)B^i(x))$, $i = \overline{1,m-1}$. Записавши (22) в матричному вигляді і помноживши одержане рівняння зліва на матрицю $B(x)$, будемо мати

$$xq_0'(x) = H(x)q_0(x). \tag{23}$$

Тут $H(x) = T_1+\dfrac{1}{m}B(x)T_2(x)$, T_1 — стала діагональна матриця з діагональними елементами $\{T_1\}_{rr} = -\dfrac{m-r}{m}$, $r = \overline{1,m}$, а матриця $T_2(x)$ визначається таким чином: $\{T_2(x)\}_{kr} = \operatorname{tr}(B_1(x)B^{m-1+k-r}(x))$, $k = \overline{1,m}$, $r = \overline{1,m}$. Згідно з явним виглядом матриці $H(x)$ і (21) матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i = -\dfrac{m-i}{m}$, $i = \overline{1,m}$, тому з теорії регулярних особливих точок лінійних диференціальних рівнянь із [1] випливає, що система (23) має ненульовий голоморфний в області (2) розв'язок, який залежить від значень $q_{0m}(0)$. Поклавши $q_{0m}(0) = 1$, однозначно визначимо розв'язок $q_0(x)$ рівняння (23). Підставивши знайдені функції $U(x)$, $V(x)$ у вигляді (14) у рівняння (11), (12), одержимо рівняння для визначення C_0, D_0, $U_{11}(x)$, $V_{11}(x)$. Помноживши (11) справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (12) зліва на $B^{m-1}(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned} U(x)C_0B^{m-1}(x) + xV_{11}(x) &= A_1(x)V(x)B^{m-1}(x), \\ B^{m-1}(x)V(x)D_0 &= B^{m-1}(x)B_2(x)U(x) + xU_{11}(x). \end{aligned} \tag{24}$$

При $x = 0$ із (24) одержимо рівняння для визначення матриць C_0, D_0 :

$$U(0)C_0B^{m-1}(0) = A_1(0)V(0)B^{m-1}(0), \quad B^{m-1}(0)V(0)D_0 = B^{m-1}(0)B_2(0)U(0). \tag{25}$$

З рівнянь (25) знайдемо $\{C_0\}_{i1} = \{A_1(0)V(0)\}_{i1}$, $\{C_0\}_{ij} = 0$,

$$\{D_0\}_{mi} = \{B_2(0)U(0)\}_{mi}, \quad \{D_0\}_{si} = 0, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{2,m}, \quad s = \overline{1,m-1}. \tag{26}$$

З огляду на (25) для визначення матриць $V_{11}(x)$, $U_{11}(x)$ із (24) отримаємо рівняння

$$x\,V_{11}(x) = F(x), \quad x\,U_{11}(x) = G(x), \tag{27}$$

де $F(x)$, $G(x)$ — відомі матриці вигляду $F(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x) - U(x)C_0B^{m-1}(x)$, $G(x) = B^{m-1}(x)V(x)D_0 - B^{m-1}(x)B_2(x)U(x)$. Оскільки на підставі вибору C_0, D_0 $F(0) = 0$, $G(0) = 0$, то

$$F(x) = x\int_0^1 F'(tx)dt, \quad G(x) = x\int_0^1 G'(tx)dt. \tag{28}$$

Тут через F' позначено похідну функції $F(x)$ по $x : F' = dF/dx$.

З урахуванням (27), (28) для $V_{11}(x)$, $U_{11}(x)$ знайдемо значення

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'(tx)\,dt, \quad U_{11}(x) = \int_0^1 G'(tx)\,dt,$$

які визначають голоморфні в області (2) розв'язки відповідно рівнянь (27). Отже, знайдено коефіцієнти розвинень (7), (8) при ε в нульовому степені.

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (7), (8) при ε у першому степені використаємо систему рівнянь (15) – (18). Покладаючи $U_1(0) = 0$, з рівняння (15) однозначно знаходимо $U_1(x)$, а загальний розв'язок рівняння (18) визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x), \tag{29}$$

де $W_1(x)$ — відома $(m \times m)$-матриця, елементи останнього стовпчика якої дорівнюють нулю. Підставивши (29) в умову існування розв'язку рівняння, що одержується з (9) при ε у другому степені,

$$V_1'(x) + U_{11}(x)C_0 + V_2(x)B(x) = B(x)V_2(x) + B_2(x)V_{11}(x) + B_1(x)V_1(x), \tag{30}$$

і помноживши знайдені співвідношення зліва на матрицю $B(x)$ одержимо неоднорідну диференціальну систему рівнянь з регулярною особливістю вигляду

$$xq_1'(x) = H(x)q_1(x) + F^{(1)}(x), \tag{31}$$

де $F^{(1)}(x) = \dfrac{1}{m}B(x)f^{(1)}(x)$, компоненти вектора $\{f^{(1)}(x)\}_i = \operatorname{tr}(B_1(x)W_1(x) + B_2(x)\times$ $\times V_{11}(x) - U_{11}(x)C_0 - W_1'(x))B^{i-1}(x)$, $i = \overline{1,m}$, $q_1(x)$ — вектор з компонентами $q_{1i}(x)$, $i = \overline{1,m}$. Система рівнянь (31) має голоморфний розв'язок в області (2), який залежить від $q_{1m}(0)$. При $q_{1m}(0) = 0$ однозначно визначається розв'язок системи (31). Матриці $V_{21}(x)$, $U_{21}(x)$, C_1, D_1 однозначно знаходяться з рівнянь (16), (17). Можна довести, що за вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень (7) є голоморфними функціями в області (2).

Матриця (7) при $\varepsilon = 0$ має вигляд $\Phi(x,0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$, де $U(x)$, $V(x)$ визначаються за формулами (14). З умови (4) випливає, що $\det U(x) \equiv 1$. Використавши явний вигляд (14) матриці $V(x)$, знайдемо похідну від визначника матриці $V(x)$ і в одержаних визначниках I_j, $j = \overline{1,m}$, виконаємо наступні перетворення при $x \neq 0$. А саме, у визначнику I_j, $j = \overline{1,m-1}$, j-й рядок помножимо на mx і використаємо (22). В одержаному визначнику i-й рядок при $i = \overline{1,j-1}$ помножимо на $-xb_{j-i}(x)$, а i-й рядок при $i = \overline{j+1,m}$ — на $-b_{j+m-i}(x)$ і додамо до j-го рядка, а потім запишемо цей визначник у вигляді суми двох визначників. У визначнику I_m m-й рядок помножимо на m і використаємо (22). В одержаному визначнику j-й рядок помножимо на $b_{m-j}(x)$, $j = \overline{1,m-1}$, і додамо до m-го рядка. В результаті одержимо

$$I_j = \frac{b_0(x)}{m}\det V(x) + \frac{1}{mx}\det L_j, \quad I_m = \frac{b_0(x)}{m}\det V(x) + \frac{1}{m}\det L_m, \quad j = \overline{1,m-1}, \tag{32}$$

де

$$\{L_j\}_{ji} = \begin{cases} (j-i)xq_{0,j-i}(x) & i = \overline{1,j}, \\ (j-i)q_{0,j+m-i}, & i = \overline{j+1,m}, \end{cases}$$

$\{L_m\}_{mi} = (m-i)q_{0,m-i}(x)$, $i = \overline{1,m}$, $\{L_j\}_{ki} = \{V(x)\}_{ki}$, $k = \overline{1,m}$, $k \neq j$, $i = \overline{1,m}$.

Покажемо справедливість рівності

$$\sum_{j=1}^{m} \det L_j = 0. \tag{33}$$

Для цього визначник $\det L_j$, $j = \overline{1,m}$, розкладемо по j-му рядку і одержаний вираз згрупуємо при $q_{01}(x), q_{02}(x), \ldots, q_{0,m-1}(x)$. При $q_{01}(x)$ маємо вираз

$$\frac{q_{01}(x)}{mx}\left((m-1)\det L_{11} - \det L_{21} - \ldots - \det L_{m1}\right), \tag{34}$$

де $\{L_{11}\}_{k_1 i} = \{L_1\}_{ki}$, $k = \overline{2,m}$, $k_1 = k-1$, $i = \overline{1,m-1}$; $\{L_{21}\}_{k_2 i_2} = \{L_2\}_{ki}$, $i_2 = i-1$, $i = \overline{2,m}$, $k_2 = k = 1$, $k_2 = k-1$ при $k = \overline{3,m}$; $\{L_{m1}\}_{k i_m} = \{L_m\}_{ki}$, $k = \overline{1,m-1}$, $i_m = i$,

$i = \overline{1, m-2}$, $i_m = i - 1$ при $i = m$. Визначник матриці L_{21} можна перетворити таким чином: перший рядок переставити на місце $(m-1)$-го рядка, а рядки, що починаються з другого, підняти на один рядок вище. При цьому, оскільки m є парним, а кількість зроблених перестановок дорівнює $m - 2$, знак визначника не зміниться. Для перетворення визначника $\det L_{j1}$ до вигляду визначника $\det L_{11}$ будемо переставляти рядки і стовпчики таким чином, щоб елемент $xq_{01}(x)$, який знаходився в j-му рядку, перейшов до першого рядка і першого стовпчика; при цьому всі інші рядки і стовпчики будемо зсувати таким чином, щоб не змінити порядок їх слідування у визначнику до перестановок. У визначнику $\det L_{m1}$ поставимо $(m-1)$-й стовпчик на місце першого, а всі інші стовпчики зсуваємо так, щоб не змінити їх порядок слідування у визначнику до перестановки. Після таких перетворень видно, що вираз, який знаходиться у формулі (34), дорівнює нулю. Міркуючи аналогічно, переконуємося, що сума визначників, згрупованих при $q_{0j}(x)$, $j = \overline{2, m-1}$, дорівнює нулю. Таким чином, рівність (33) доведено.

Підставивши (32) в $(\det V(x))'$ і врахувавши (33), одержимо

$$(\det V(x))' = (\operatorname{tr} B_1(x)) \det V(x), x \neq 0. \tag{35}$$

Оскільки

$$q_{0i}(0) = 0, \quad q_{0m}(0) = 1, \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{36}$$

з формули (32) випливає, що I_j при $x = 0$ є визначником верхньотрикутної матриці, діагональний елемент (jj) якої дорівнює $q'_{0m}(0)$, а інші діагональні елементи дорівнюють одиниці. Тому

$$I_j(0) = q'_{0m}(0). \tag{37}$$

Підставляючи (36) в (22), при $x = 0$ знаходимо

$$q'_{0m}(0) = \frac{\operatorname{tr} B_1(0)}{m}. \tag{38}$$

Тоді з (37), (38) маємо

$$(\det V(x))'\big|_{x=0} = \operatorname{tr} B_1(0). \tag{39}$$

З (35) і (39) випливає, що для кожного x з області (2) справджується рівність

$$(\det V(x))' = (\operatorname{tr} B_1(x)) \det V(x). \tag{40}$$

З умови (4) і рівності (40) випливає, що $(\det V(x))' \equiv 0$, для кожного x з області (2). Але тоді з (14) і останньої рівності маємо $\det V(x) \equiv \det V(0) = 1$. Таким чином, $\det \Phi(x, 0) \equiv \equiv 1$ для кожного x з області (2).

Методом із [5] можна довести, що за допомогою заміни $u = V(\varepsilon)w$ система (5), (6) зводиться до вигляду

$$w'_1 = c_1(\varepsilon)v_1, \quad w'_i = 0, \quad i = \overline{2, p}, \tag{41}$$

$$\varepsilon v' = B(x)\, v + \varepsilon D_1(\varepsilon)\, w, \tag{42}$$

де v — m-вимірний вектор з компонентами v_i; $c_s(\varepsilon)$, $s = \overline{1, p}$, — елементи матриці $c_s = \{C(\varepsilon)\}_{s1}$; $V(\varepsilon)$ — $(p \times p)$-матриця з діагональними елементами, що дорівнюють одиниці, в якої $\{V(\varepsilon)\}_{i1} = j_i(\varepsilon)$, $j_i(\varepsilon) = \dfrac{c_i(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}$, $i = \overline{2,p}$, при умові, що $c_1(\varepsilon) \neq 0$, а інші елементи дорівнюють нулю; $D_1(\varepsilon) = D(\varepsilon)V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix}$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай права частина системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді існують формальні ряди (7), (8), коефіцієнти яких голоморфні в області (2), такі, що* $\det \Phi(x,0) \equiv 1$, *і формальні перетворення з матрицею заміни вигляду (7) зводять систему (1) до системи (41), (42).*

Розглянемо систему рівнянь (41), (42). З (41) маємо $w_1 = w_1^0 + c_1(\varepsilon)\int_0^x v_1(t)dt$, $w_j = w_j^0$, $j = \overline{2,p}$, де w_i^0, $i = \overline{1,p}$, — довільні сталі. Підставляючи останні рівності в (42), одержуємо систему рівнянь для v, яка зводиться до одного рівняння m-го порядку

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = v_1 x + \varepsilon c_0 + \varepsilon\alpha \int\limits_0^x v_1(t)\,dt, \tag{43}$$

де $c_0 = d_1(\varepsilon)w_0, d_1(\varepsilon) = (d_{11}(\varepsilon)\ldots d_{1p}(\varepsilon)), \alpha = d_{11}(\varepsilon)c_1(\varepsilon); v_m = \varepsilon^{m-1}v_1^{(m-1)}$.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння (43), поклавши $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) = 0, \ldots$ $\ldots, v_1^{(m-1)}(0) = 0$. Взявши $v_1(x)$ у вигляді степеневого ряду

$$v_1(x) = \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, \tag{44}$$

для коефіцієнтів цього ряду отримаємо рівняння

$$v_m = \frac{c_0\lambda^{m-1}}{m!}, \quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \quad v_n = \frac{v_{n-m-1}(1+\frac{\varepsilon\alpha}{n-m})}{\varepsilon^m n(n-1)\ldots(n-m+1)}, \quad n = (m+1),(m+2)\ldots. \tag{45}$$

Врахувавши початкові значення і (45), одержимо, що ненульові коефіцієнти ряду (44) визначаються співвідношеннями

$$v_{k(m+1)+m} = \frac{c_0\lambda^{mk+m-1}(m+1+\varepsilon\alpha)(2m+2+\varepsilon\alpha)\ldots(km+k+\varepsilon\alpha)}{(km+k+m)!}, \quad k = 1,2\ldots. \tag{46}$$

Згідно з (46) розв'язок (44) рівняння (43) має вигляд

$$v_1(x) = x^m\lambda^{m-1}c_0\left(\frac{1}{m!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{km-m+k}(m+\varepsilon\alpha)(\lambda^m x^{m+1})^k}{(km+k+m)!}\right), \tag{47}$$

де через $\Gamma_l(\mu)$ позначено добуток $\Gamma_l(\mu) = (\mu+1)\ldots(\mu+l)$.

Розглянемо тепер однорідне рівняння вигляду

$$\varepsilon^m v_1^{(m)} = v_1 x + \varepsilon\alpha\int\limits_0^x v_1(t)dt. \tag{48}$$

Знайдемо m лінійно незалежних розв'язків рівняння (48). Перше з них визначаємо у вигляді ряду

$$v_1(x) = 1 + \sum_{n=m}^{\infty} v_n x^n, \tag{49}$$

тобто початкові умови визначимо таким чином: $v_1(0) = 1$, $v_1'(0) = 0, \ldots, v_1^{(m-1)}(0) = 0$. Підставляючи (49) в (48), для коефіцієнтів v_n ряду (49) одержимо рівняння

$$v_m = 0 \tag{50}$$

і рекурентне співвідношення (45). З урахуванням початкових умов і (50) ненульові коефіцієнти ряду (49) визначаються співвідношеннями

$$v_{k(m+1)} = \frac{\lambda^{mk}(1+\varepsilon\alpha)(m+2+\varepsilon\alpha)\ldots(km+k-m+\varepsilon\alpha)}{(km+k)!}, \quad k = 1, 2 \ldots. \tag{51}$$

Згідно з (51) розв'язок (49) рівняння (48) має вигляд

$$v_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{km-m+k}(\varepsilon\alpha)(\lambda^m x^{m+1})^k}{(km+k)!}, \tag{52}$$

а j-й лінійно незалежний розв'язок рівняння (48) з початковими умовами $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) = 0, \ldots, v_1^{(j)}(0) = 1, v_1^{(j+1)}(0) = 0, \ldots, v_1^{(m-1)}(0) = 0$

$$v_1(x) = x^j \left(\frac{1}{j!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{km-m+k}(j+\varepsilon\alpha)(\lambda^m x^{m+1})^k}{(km+k+j)!} \right), \quad 1 \le j \le m-1. \tag{53}$$

З розв'язків (47), (52) та (53) для $1 \le j \le m-1$ рівнянь (43), (48) можна записати загальний розв'язок системи рівнянь (41), (42).

До рівняння (43) можна застосувати результати роботи [8] і дати більш повний аналіз розв'язків. Очевидним є узагальнення наведених вище результатів на випадок системи більш загального, ніж (1), вигляду, а саме, на випадок системи

$$y' = A(x,\varepsilon)y + A_1(x,\varepsilon)y_1,$$

$$\varepsilon y_1' = B(x,\varepsilon)y_1 + \varepsilon B_1(x,\varepsilon)y,$$

де $A(x,\varepsilon)$, $A_1(x,\varepsilon)$, $B(x,\varepsilon)$, $B_1(x,\varepsilon)$ — матриці, голоморфні по x, ε в області $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ і такі, що матриця $B(x,0)$ голоморфно подібна матриці $B(x)$ вигляду (3).

Таким чином, у даній статті запропоновано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту.

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.

2. *Wasow W.* Linear turning point theory. — New York: Springer, 1985. — 243 p.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
5. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1505 – 1516.
6. *Kohno M., Ohkohchi S., Kohmoto T.* On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter // Hiroshima Math. J. — 1979. — **9**. — P. 747 – 767.
7. *Wasow W.* Simplification of turning point problems for systems of linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — **106**. — P. 100 – 114.
8. *Langer R. E.* The solutions of the differential equations $v''' + \lambda^2 z v' + 3\mu\lambda^2 v = 0$ // Duke Math. J. — 1955. — **22**. — P. 525 – 542.

Одержано 16.02.09