

УДК 517.958

**МОДОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ****Е. В. Попова**

Харьков. ун-т.

Украина, 61077, Харьков, пл. Дзержинского, 4

In a waveguide with an inhomogeneous nonstationary medium and multiply connected cross-sections, we single out a system of not monochromatic mode fields possessing the classical notion of mode waves in a homogeneous stationary medium. We solve the problem of the decomposition of the field in a system of mode states by constructing special bases in a corresponding Hilbert space.

У виведі з неоднорідним нестационарним середовищем і багатозв'язним поперечним перерізом виділено систему немонохроматичних модових полів, що узагальнюють класичне поняття модових хвиль в однорідному стаціонарному середовищі. Розв'язується задача розкладу поля за системою модових станів шляхом побудови спеціальних базисів у відповідному гільбертовому просторі.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Цилиндрический волновод с идеальной проводящей поверхностью Σ имеет многосвязное поперечное сечение $S = \{(x, y)\}$ с границей L , образованной кусочно-гладкими контурами $L_0, L_1, \dots, L_N$. Среда предполагается нестационарной и неоднородной вдоль оси Z волновода. Свободные заряды и свободные источники отсутствуют. Поле внутри волновода удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \mathcal{I}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathcal{B} = 0, \quad (2)$$

где $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ — векторы напряженностей, $\mathcal{D}, \mathcal{B}$ — векторы индукций электромагнитного поля. Плотности тока $\mathcal{I}$ и заряда ρ сторонних источников являются заданными функциями переменных x, y, z, t , связанными уравнением непрерывности $\operatorname{div} \mathcal{I} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$. Граничные условия имеют вид

$$[\mathcal{E}, \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0, \quad (\mathcal{H}, \mathbf{n})_{\Sigma} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности Σ . Поперечные $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ и продольные E_z, H_z компоненты векторов поля $\mathcal{E} = \mathbf{E} + zE_z$, $\mathcal{H} = \mathbf{H} + zH_z$ удовлетворяют на границе соответственно условиям $[\mathbf{E}, \mathbf{n}]_L = 0$, $E_z|_L = 0$, $(\mathcal{H}, \mathbf{n})_L = 0$, где $\mathbf{z}$ — орт оси Z ($[\mathbf{n}, \mathbf{z}] = \mathbf{l}$ — орт касательной к L).

Материальные уравнения в абстрактной форме

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{H} \quad (4)$$

содержат линейные преобразования $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ (индукционные операторы [1]), которые имеют вид диагональных матриц

$$\mathbf{D} = (D \oplus D \oplus D_{\parallel}), \quad \mathbf{B} = (B \oplus B \oplus B_{\parallel}), \quad (5)$$

так что $\mathbf{D}\mathcal{E} = (DE_x, DE_y, D_{\parallel}E_z)'$, $\mathbf{B}\mathcal{H} = (BH_x, BH_y, B_{\parallel}H_z)'$. Здесь $D, D_{\parallel}, B, B_{\parallel}$ — линейные интегро-дифференциальные преобразования над скалярными функциями от переменных z, t , позволяющие учитывать временную и пространственную дисперсии среды [1–3]). В классическом случае среды без дисперсии $\mathbf{D} = \varepsilon(z, t)\mathcal{E}$, $\mathbf{B} = \mu(z, t)\mathcal{H}$, где $\varepsilon(z, t)$, $\mu(z, t)$ имеют физический смысл диэлектрической и магнитной проницаемостей нестационарной среды, неоднородной вдоль оси Z волновода. Естественные области определения линейных индукционных операторов $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ уточняются в каждом конкретном случае.

Энергия поля предполагается ограниченной в поперечном сечении S волновода, что соответствует требованию $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2^2(S) \oplus 0$ и $E_z, H_z \in L_2(S)$ для фиксированных z, t .

На основании ортогонального разбиения пространства $L_2^2(S)$ для многосвязной области $S \subset R^2$ выделим специальные базисы в пространстве $L_2^2(S) \oplus L_2(S)$, по которым разложим гладкое (непрерывно дифференцируемое) решение $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ (1)–(5).

2. Ортогональное разложение и базис пространства $L_2^2(S)$. Построим ортогональное разбиение пространства $L_2^2(S)$ ¹ для плоской ограниченной многосвязной области $S \subset R^2$, соответствующее разложению Г.Вейля [4,5] пространства $L_2^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$.

Рассмотрим двусвязную область S , заключенную между внешним L_0 и внутренним L_1 кусочно-гладкими контурами. Пусть l' — замкнутый контур, который нельзя деформировать в точку, оставаясь внутри области S . Согласно теореме Гаусса – Остроградского для гладких в S вектор-функций $\mathbf{F}(x, y) = (F_x, F_y, 0)$ и $[z, \mathbf{F}(x, y)] = (-F_y, F_x, 0)$, непрерывных вплоть до границы $L = L_0 \cup L_1$, имеем

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{F} ds = \int_L (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dl, \quad (6)$$

$$\int_S \operatorname{div} [z, \mathbf{F}] ds = \int_L (\mathbf{F}, \mathbf{l}) dl. \quad (7)$$

Если циркуляция вектора $\mathbf{F}$ по контуру типа l' не зависит от выбора l' , то будем называть ее периодом вектор-функции $\mathbf{F}(x, y)$ и обозначать

$$C[\mathbf{F}] = \oint_{l'} (\mathbf{F}, \mathbf{l}) dl.$$

Из (7) следует, что для потенциальных векторов $\mathbf{F} = \nabla f$, где $f(x, y)$ — многозначная функция, изменяющаяся на постоянную при обходе контура l' , определен период

$$C[\nabla f] = \oint_{l'} \frac{\partial f}{\partial l} dl. \text{ Отметим, что в односвязной области для градиентов (однозначных)}$$

функций φ : $C[\nabla \varphi] = 0$. Очевидно, градиенты многозначных функций, изменяющихся на постоянную при обходе контура l' , являются однозначными векторами.

¹Для сохранения терминологий и обозначений трехмерного пространства $L_2^2(S)$ вкладывается в пространство $L_2^2(S) \oplus 0$.

Рассмотрим циркуляцию вектора $[\mathbf{G}, \mathbf{z}]$ по l' : $\oint_{l'} ([\mathbf{G}, \mathbf{z}], l) dl = \oint_{l'} (\mathbf{G}, \mathbf{n}) dl$. По определению, если она не зависит от контура типа l' , то $C[[\mathbf{G}, \mathbf{z}]] = \oint_{l'} (\mathbf{G}, \mathbf{n}) dl$. На основании (6) для любого соленоидального вектора $\mathbf{G}$ ($\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$) определен период $C[[\mathbf{G}, \mathbf{z}]]$, который в случае плоской односвязной области обращается в нуль. Заметим, что $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0 \Rightarrow \exists f(x, y): \mathbf{G} = [\mathbf{z}, \nabla f]$, где f , вообще говоря, есть многозначная функция. Так, если $\mathbf{G}$ — соленоидальный вектор, то $[\mathbf{G}, \mathbf{z}]$ — потенциальный, и величина $C[[\mathbf{G}, \mathbf{z}]]$ для $\mathbf{G} = [\mathbf{z}, \nabla f]$ совпадает с периодом $C[\nabla f]$.

Градиенты ∇h гармонических функций являются одновременно и потенциальными, и соленоидальными векторами. Для них определены обе величины $C[\nabla h]$ и $C[[\nabla h, \mathbf{z}]]$.

Выделим в S две стандартные гармонические функции, каждая из которых породит одномерное подпространство в ортогональном разложении $L_2^2(S)$.

Лемма 1. Пусть h_1 — гармоническая в S функция, удовлетворяющая краевой задаче

$$\Delta h_1 = 0, \quad h_1|_{L_0} = 0, \quad h_1|_{L_1} = \nu, \quad \nu = \text{const} \neq 0. \quad (8)$$

Тогда в S существует сопряженная к h_1 многозначная гармоническая функция h_2 , удовлетворяющая следующей краевой задаче:

$$\Delta h_2 = 0, \quad \left. \frac{\partial h_2}{\partial n} \right|_L = 0. \quad (9)$$

При этом $C[\nabla h_2] \neq 0$ и $\|\nabla h_2\|^2 = \nu C[\nabla h_2]$.

Сопряженная к $h_1(x, y)$ гармоническая функция $h_2(x, y)$ удовлетворяет векторному равенству $\nabla h_2 = [\mathbf{z}, \nabla h_1]$, откуда $h_2(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x_0,y_0)} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl + \text{const}$ и является многозначной функцией, изменяющейся на циклическую постоянную при обходе замкнутого контура типа l' .

Ввиду граничных условий (8) $C[\nabla h_1] = 0$ и h_1 — однозначная в S функция, отличная от постоянной. Тогда

$$\|\nabla h_1\|^2 = - \int_S h_1 \Delta h_1 ds + \oint_{L_0} h_1 \frac{\partial h_1}{\partial n} dl - \oint_{L_1} h_1 \frac{\partial h_1}{\partial n} dl = -\nu \oint_{L_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl \neq 0.$$

В силу соленоидальности Δh_1 в кольце, ограниченном контурами l' и L_1 , имеем

$$C[[\mathbf{z}, \nabla h_1]] = - \oint_{l'} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl = - \oint_{L_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl \neq 0 \quad \text{и} \quad C[\nabla h_2] = C[[\mathbf{z}, \nabla h_1]] \neq 0.$$

Таким образом, $\|\nabla h_1\|^2 = \|\mathbf{z}, \nabla h_1\|^2 = \nu C[\nabla h_2]$. Лемма доказана. Выберем постоянную ν так, чтобы функция h_1 удовлетворяла условию $C[[\mathbf{z}, \nabla h_1]] = 1$.

В $L_2^2(S)$ определим последовательно линейные гладкие взаимно ортогональные векторы, используя обозначения трехмерного случая [4]. Выделим во всем пространстве

линеалы гладких градиентов $\tilde{G} = \{\nabla\varphi, \varphi|_L = 0\}$ и гладких соленоидальных векторов $\tilde{J} = \{[\mathbf{z}, \nabla\psi]\}$. Их ортогональность легко проверяется:

$$(\nabla\varphi, [\mathbf{z}, \nabla\psi]) = \int_S \operatorname{div}(\varphi[\mathbf{z}, \nabla\psi])ds - \int_S \varphi \operatorname{div}[\mathbf{z}, \nabla\psi]ds = \int_L \varphi \frac{\partial\psi}{\partial l}dl = 0.$$

В $\tilde{J}$ выделим линеалы $U_1 = \{\alpha\nabla h_1, \alpha = \text{const}\}$ и $\tilde{J}' = \{[\mathbf{z}, \nabla\psi'], C[\nabla\psi'] = 0\}$. Гармоническая функция h_1 удовлетворяет задаче (8), в силу леммы 1 $\nabla h_1 = -[\mathbf{z}, \nabla h_2]$ и $C[\nabla h_2] \neq 0$. Проверим ортогональность U_1 в $\tilde{J}'$:

$$(\nabla h_1, [\mathbf{z}, \nabla\psi']) = \int_L h_1 \frac{\partial\psi'}{\partial l}dl = -\nu \oint_{L_1} \frac{\partial\psi'}{\partial l}dl = -\nu \oint_{l'} \frac{\partial\psi'}{\partial l}dl = \nu C[\nabla\psi'] = 0.$$

Далее в $\tilde{J}'$ можно выделить линеалы $\tilde{U}' = \{\nabla h, h - \text{однозначные гармонические функции}, C[\nabla h] = C[[\mathbf{z}, \nabla h]] = 0\}$ и $\tilde{J}'' = \{[\mathbf{z}, \nabla\psi''], \psi''|_{L_j} = \lambda_j, \lambda_j = \text{const}, j = 0, 1\}$. Отметим, что элементы $\tilde{U}'$ можно было записать в виде векторов $[\mathbf{z}, \nabla h']$. Действительно, любая однозначная гармоническая функция h с $\nabla h \in \tilde{U}'$ имеет сопряженную гармоническую функцию h' , которая удовлетворяет уравнению $\nabla h' = [\mathbf{z}, \nabla h]$ и также является однозначной ($C[\nabla h'] = C[[\mathbf{z}, \nabla h']] = 0$). Элементы $\tilde{J}''$ — гладкие соленоидальные векторы с нулевой нормальной составляющей на границе. Так, $\frac{\partial\psi''}{\partial l}\Big|_L = 0$ и автоматически $C[\nabla\psi''] = 0$.

Ортогональность линеалов очевидна: $(\nabla h, [\mathbf{z}, \nabla\psi'']) = \int_L h \frac{\partial\psi''}{\partial l}dl = 0$. Наконец, в $\tilde{J}'$ вы-

делим линеалы $U_2 = \{\beta\nabla h_2, \beta = \text{const}\}$ и $\tilde{J} = \{[\mathbf{z}, \nabla\varphi], \varphi|_L = 0\}$. Гармоническая функция h_2 — решение краевой задачи (9), $\nabla h_2 = [\mathbf{z}, \nabla h_1]$ и $C[\nabla h_1] = 0$. Линеалы U_2 и $\tilde{J}$ ортогональны:

$$(\nabla h_2, [\mathbf{z}, \nabla\varphi]) = (\nabla h_1, \nabla\varphi) = \int_L \varphi \frac{\partial h_1}{\partial n}dl = 0.$$

Введем линеалы гладких потенциальных векторов $\tilde{G}, \tilde{G}', \tilde{G}''$:

$$\tilde{G} = \{[\mathbf{F}, \mathbf{z}], \mathbf{F} \in \tilde{J}\}, \quad \tilde{G}' = \{[\mathbf{F}', \mathbf{z}], \mathbf{F}' \in \tilde{J}'\}, \quad \tilde{G}'' = \{[\mathbf{F}_0', \mathbf{z}], \mathbf{F}_0' \in \tilde{J}''\}.$$

Подпространства, образованные замыканиями введенных выше линеалов, будем обозначать теми же символами без тильды (линеалы U_1, U_2 образуют одномерные подпространства).

Теорема 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение пространства $L_2^2(S)$:*

$$L_2^2 = \overset{\circ}{G} + U_1 + U' + U_2 + \overset{\circ}{J}. \quad (10)$$

$$L_2^2 = \overset{\circ}{G} + J, \quad J = U_1 + J', \quad J' = U' + \overset{\circ}{J}', \quad \overset{\circ}{J}' = U_2 + \overset{\circ}{J}$$

и

$$L_2^2 = G + \overset{\circ}{J}, \quad G = G' + U_2, \quad G' = \overset{\circ}{G}' + U', \quad \overset{\circ}{G}' = \overset{\circ}{G} + U_1.$$

Достаточно показать, что любой гладкий вектор $\mathbf{F} \in L_2^2(S)$ представим в виде суммы проекций на введенные линейалы, а затем перейти к замыканию. Докажем, что

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi_1 + \alpha \nabla h_1 + \nabla h' + \beta \nabla h_2 + [\mathbf{z}, \nabla \varphi_2], \quad (11)$$

где h_1, h_2 удовлетворяют соответственно задачам (8), (9), $\varphi_1|_L = \varphi_2|_L = 0$ и h' — однозначная гармоническая функция с периодами $C[\nabla h'] = C[[\mathbf{z}, \nabla h']] = 0$. Скалярный потенциал φ_1 проекции $\mathbf{F}$ на $\overset{\circ}{G}$ и потенциал φ_2 проекции $[\mathbf{F}, \mathbf{z}]$ на $\overset{\circ}{G}$ найдем как решения следующих краевых задач:

$$\Delta \varphi_1 = \operatorname{div} \mathbf{F}, \quad \varphi_1|_L = 0 \quad \text{и} \quad \Delta \varphi_2 = \operatorname{div} [\mathbf{F}, \mathbf{z}], \quad \varphi_2|_L = 0.$$

В представлении (11) сумма проекций $\nabla h' + \beta \nabla h_2 + [\mathbf{z}, \nabla \varphi_2]$ должна принадлежать линейалу $\overset{\circ}{J}'$. Обозначим $\mathbf{F} - \nabla \varphi_1 - \alpha \nabla h_1 = \mathbf{F}'$. С другой стороны, в представлении $[\mathbf{F}, \mathbf{z}] = \nabla \varphi_2 + \beta \nabla h_1 + [\nabla h', \mathbf{z}] - \alpha \nabla h_2 + [\nabla \varphi_1, \mathbf{z}]$ проекция $[\mathbf{F}, \mathbf{z}] - \nabla \varphi_2 - \beta \nabla h_1 = \mathbf{F}''$ также должна принадлежать $\overset{\circ}{J}'$. Векторы $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$ соленоидальны:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}' = \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \varphi_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{F}'' = \operatorname{div} [\mathbf{F}, \mathbf{z}] - \Delta \varphi_2 = 0.$$

Следовательно, можно определить периоды $C[[\mathbf{F}', \mathbf{z}]]$ и $C[[\mathbf{F}'', \mathbf{z}]]$. Постоянную α подберем так, чтобы выполнялось условие $C[[\mathbf{F}', \mathbf{z}]] = 0$:

$$C[[\mathbf{F}', \mathbf{z}]] = \oint_{l'} (\mathbf{F}', \mathbf{n}) dl = \oint_{l'} (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dl - \oint_{l'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dl - \alpha \oint_{l'} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl = 0.$$

Здесь $\oint_{l'} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl = -C[\nabla h_2] = -1$ и в силу соленоидальности $\mathbf{F}'$ интегрирование по контуру l' можно заменить интегрированием по L_1 :

$$\alpha = \oint_{L_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dl - \oint_{L_1} (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dl.$$

Найдем постоянную β , удовлетворив требованию:

$$C[[\mathbf{F}'', \mathbf{z}]] = \oint_{l'} ([\mathbf{F}, \mathbf{z}], \mathbf{n}) dl - \beta \oint_{l'} \frac{\partial h_1}{\partial n} dl - \oint_{l'} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dl = 0, \quad \beta = \oint_{L_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dl + \oint_{L_1} (\mathbf{F}, \mathbf{l}) dl.$$

Вектор $\mathbf{V} = \mathbf{F} - \nabla\varphi_1 - \alpha\nabla h_1 - \beta\nabla h_2 - [\mathbf{z}, \nabla\varphi_2]$ удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, $\operatorname{div}[\mathbf{V}, \mathbf{z}] = 0$. Отсюда $\mathbf{V} = \nabla h'$, где h' — гармоническая функция. Покажем, что h' — однозначная функция:

$$C[[\mathbf{z}, \nabla h']] = -C[[\mathbf{F}', \mathbf{z}]] + \beta C[\nabla h_1] + C[\nabla\varphi_2] = 0$$

и

$$C[\nabla h'] = -C[[\mathbf{F}'', \mathbf{z}]] - \alpha C[\nabla h_1] - C[\nabla\varphi_1] = 0.$$

Здесь $C[\nabla\varphi_1] = C[\nabla\varphi_2] = 0$ в силу граничных условий φ_1 и φ_2 . Таким образом, $\nabla h' \in \tilde{U}'$ и теорема доказана.

Рассмотрим область S общего вида. Пусть L_0 — внешний контур, $L_1, \dots, L_N$ — внутренние контуры, ограничивающие область S , а $l_1, \dots, l_N$ — контуры типа l' . Разложение пространства $L_2^2(S)$ получаем аналогичным образом. Все сформулированные утверждения справедливы для $(N+1)$ -связной области, но только $U_1 - N$ -мерное подпространство векторов вида $\alpha_1 \nabla h_{11} + \dots + \alpha_N \nabla h_{1N}$, где h_{1i} — гармонические функции, удовлетворяющие краевым задачам

$$\Delta h_{1i} = 0, \quad h_{1i}|_{L_j} = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N. \quad (12)$$

$U_2 - N$ -мерное подпространство векторов вида $\beta_1 \nabla h_{21} + \dots + \beta_n \nabla h_{2N}$, где $\nabla h_{2i} = [\mathbf{z}, \nabla h_{1i}]$ и h_{2i} — многозначные гармонические функции, удовлетворяющие условиям $\frac{\partial}{\partial n} h_{2i} \Big|_L = 0$, $C^i[\nabla h_{2i}] \neq 0$. Здесь период $C^j[\nabla h_{2i}]$ есть циклическая постоянная h_{2i} при обходе по контуру l_j . В определениях линейалов J' и $\tilde{U}'$ требование обращения в нуль накладывается на периоды градиентов по всем контурам l_j .

Системы функций $\{1, h_{11}, \dots, h_{1N}\}$ и вектор-функций $\{\nabla h_{1i}\}_1^N$ линейно независимы в S . Соответственно линейно независимы системы $\{[\mathbf{z}, \nabla h_{1i}]\}_1^N$ и $\{1, h_{21}, \dots, h_{2N}\}$. Методом ортогонализации Гильберта — Шмидта преобразуем системы $\{1, h_{21}, \dots, h_{2N}\}$ и $\{\nabla h_{1i}\}_1^N$ в ортонормированные системы $\{\psi_0, \psi_{01}, \dots, \psi_{0N}\}$ и $\{\nabla u_i\}_1^N$ пространств $L_2(S)$ и $L_2^2(S)$ соответственно.

На основании разложения (10) выделим в пространстве $L_2^2(S)$ два ортонормированных базиса. Пусть $\{\varkappa_i^2\}_1^\infty$, $\{\gamma_i^2\}_0^\infty$ — собственные значения, а $\{\varphi_i(x, y)\}_1^\infty$, $\{\psi_0, \psi_{01}(x, y), \dots, \psi_{0N}(x, y)\} \cup \{\psi_i(x, y)\}_1^\infty$ — полные в $L_2(S)$, ортонормированные системы вещественных собственных функций оператора Лапласа $-\Delta$, удовлетворяющие соответственно спектральным задачам Дирихле и Неймана:

$$\Delta \varphi_i + \varkappa_i^2 \varphi_i = 0, \quad \varphi_i|_L = 0, \quad (13)$$

$$\Delta \psi_i + \gamma_i^2 \psi_i = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \Big|_L = 0. \quad (14)$$

Собственному значению $\gamma_0 = 0$ отвечают собственные функции $\psi_0 \equiv \text{const}$ и многозначные гармонические функции $\{\psi_{0i}\}_1^N \left(\frac{\partial}{\partial n} \psi_{0i} \Big|_L = 0 \right)$.

Лемма 2. Каждая из систем вектор-функций

$$\left\{ \frac{1}{\varkappa_i} \nabla \varphi_i \right\}_1^\infty \cup \{ \nabla u_i \}_1^N \cup \left\{ \frac{1}{\gamma_i} [\nabla \psi_i, \mathbf{z}] \right\}_1^\infty, \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{1}{\gamma_i} \nabla \psi_i \right\}_1^\infty \cup \{ [\mathbf{z}, \nabla u_i] \}_1^N \cup \left\{ \frac{1}{\varkappa_i} [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i] \right\}_1^\infty \quad (16)$$

образует ортонормированный базис в пространстве $L_2^2(S)$.

Докажем полноту системы (16) в $L_2^2(S)$, используя разложение $L_2^2 = G' + U_2 + \overset{\circ}{J}$ и выделив полные системы вектор-функций в подпространствах G' , $\overset{\circ}{J}$.

Зададим в $L_2^2(S)$ оператор A : $AF = -\nabla \operatorname{div} \mathbf{F}$, определив его на плотном в $L_2^2(S)$ множестве $\mathcal{D}_A$ вектор-функций $\mathbf{F}$, дважды непрерывно дифференцируемых в области S и удовлетворяющих на границе условию $(\mathbf{F}, \mathbf{n})|_L = 0$. Оператор A является самосопряженным:

$$\forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{D}_A \quad (A\mathbf{F}, \mathbf{G}) - (\mathbf{F}, A\mathbf{G}) = \int_L \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{G}, \mathbf{n}) d\ell - \int_L \operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{F}, \mathbf{n}) d\ell = 0.$$

Собственным значениям $\gamma_i^2 \neq 0$ оператора A отвечают собственные функции $\nabla \psi_i$. Действительно, с учетом (14) имеем $A\nabla \psi_i = -\nabla(\Delta \psi_i) = \gamma_i^2 \nabla \psi_i$, $i = 1, 2, \dots$. Собственному значению $\gamma_0 = 0$ отвечают собственные функции $\{[\mathbf{z}, \nabla u_j]\}_i^N$ и $\{[\mathbf{z}, \nabla \varphi_k]\}_i^\infty$. Следовательно, $\{\nabla \psi_i\}_1^\infty \subset G'$ и периоды $C^j[\nabla \psi_i] = 0$, $j = 1, \dots, N$.

Система $\left\{ \frac{1}{\varkappa_k} [\mathbf{z}, \nabla \varphi_k] \right\}_1^\infty$ образует ортонормированный базис в подпространстве $\overset{\circ}{J}$ [3]. В G' плотно множество гладких потенциальных векторов: $\{\nabla \psi, (\partial/\partial n)\psi|_L = 0, C^j[\nabla \psi] = 0, j = 1, \dots, N\}$, откуда ортонормированная система $\left\{ \frac{1}{\gamma_i} \nabla \psi_i \right\}_1^\infty$ полна в подпространстве G' [3].

Каждой вектор-функции $\mathbf{F}_i$ системы (16) соответствует вектор-функция $[\mathbf{F}_i, \mathbf{z}]$ системы (15) и наоборот. Система (15) образует ортонормированный базис в $L_2^2(S)$, отвечающий разложению $L_2^2 = \overset{\circ}{G} + U_1 + J'$. Лемма доказана.

3. Система модовых состояний. В свободном волноводе ($\mathcal{I} = 0$, $\rho = 0$) построим счетную систему собственных состояний: поперечных магнитных ($H_z = 0$), поперечных электрических ($E_z = 0$) и чисто плоских ($H_z = E_z = 0$) полей. Требование разделения переменных (x, y) и (z, t) предопределяет структуру специальных решений [1, 2]:

модовых E -полей

$$\mathcal{E}_E^i = a_i(z, t) \nabla \varphi_i(x, y) + \mathbf{z} g_i(z, t) \varphi_i(x, y), \quad \mathcal{H}_E^i = b_i(z, t) [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i(x, y)], \quad (17)$$

модовых H -полей

$$\mathcal{E}_H^i = c_i(z, t) [\nabla \psi_i(x, y), \mathbf{z}], \quad \mathcal{H}_H^i = h_i(z, t) \nabla \psi_i(x, y) + \mathbf{z} f_i(z, t) \psi_i(x, y) \quad (18)$$

и нуль-модового поля [6]

$$\mathcal{E}_0 \equiv 0, \quad \mathcal{H}_0 = \mathbf{z} f_0(z, t) \psi_0, \quad (19)$$

$i = 1, 2, \dots$ — номер модового поля соответствующего типа.

В отличие от односвязной области в случае многосвязного сечения S существуют чисто поперечные поля [7] вида

$$\mathcal{E}_T^i = v_i(z, t) \nabla u_i(x, y), \quad \mathcal{H}_T^i = w_i(z, t) [\mathbf{z}, \nabla u_i(x, y)], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

которые назовем *модовыми T -полями*.

Подставив вектор-функции (17) – (20) в однородную систему Максвелла с целью отделить переменные (x, y) от (z, t) , получим следующие утверждения [1, 2].

Скалярные потенциалы $\varphi_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$ должны быть решениями спектральных задач Дирихле (13) и Неймана (14) соответственно. Нуль-модовое поле отвечает собственной функции $\psi_0 \equiv \text{const}$ и собственному значению $\gamma_0 = 0$ спектральной задачи (14).

Функции u_i в (20) должны быть гармоническими в области S , постоянными на границе $L = \cup_{j=0}^N L_j$. В односвязной области такие функции тождественно равны константе, и их градиенты не порождают модовых T -полей. В многосвязной области S существуют гармонические функции $u(x, y)$, принимающие на контурах L_j различные постоянные значения ν_j . Любая такая функция может быть представлена в виде $u = \sum_{j=0}^N \nu_j h_{1j}$. Здесь $\{h_{1j}(x, y)\}_1^N$ – гармонические функции, удовлетворяющие краевым задачам (12), а $h_{10} = 1 - \sum_{j=1}^N h_{1j}$. Определим в (20) скалярные потенциалы u_i как решения следующих краевых задач:

$$\Delta u_i = 0, \quad u_i|_{L_0} = 0, \quad u_i|_{L_j} = c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где постоянные c_{ij} вычисляются в соответствии с процессом преобразования системы $\{\nabla h_{1j}\}_1^N$ в ортонормированную систему $\{\nabla u_i\}_1^N$ методом ортогонализации Пильберта – Шмидта.

Функции переменных z, t в (17), (18) должны удовлетворять соответственно системам уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{\parallel} g_i + \kappa_i^2 b_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} D a_i + \frac{\partial b_i}{\partial z} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B b_i + \frac{\partial a_i}{\partial z} = g_i, \quad \frac{\partial}{\partial z} D_{\parallel} g_i - \kappa_i^2 D a_i = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_i + \gamma_i^2 e_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} B h_i + \frac{\partial e_i}{\partial z} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D e_i + \frac{\partial h_i}{\partial z} = f_i, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel} f_i - \gamma_i^2 B h_i = 0.$$

Нуль-модовое поле существует в волноводе, если и только если

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel} f_0 = 0, \quad (23)$$

что эквивалентно условию $B_{\parallel} f_0(z, t) \equiv \text{const}$. Функции v_i, w_i T -поля должны удовлетворять системе

$$\frac{\partial}{\partial t} D v_i + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} B w_i + \frac{\partial v_i}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

Предположим, что для блоков D, B индукционных операторов (5) существуют линейные преобразования $\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_H$ такие, что

$$\mathcal{L}_E D = D_E \frac{d}{dz}, \quad \mathcal{L}_H B = B_H \frac{d}{dz}. \quad (25)$$

Это несколько обобщает класс индукционных операторов из [1, 3], представимых в виде $D = D_0 + D_1 \frac{d}{dz}, B = B_0 + B_1 \frac{d}{dz}$, где D_0, B_0 — обратимые операторы. Достаточно положить $\mathcal{L}_E = \frac{d}{dz} D_0^{-1}, D_E = I + \mathcal{L}_E D_1$ и $\mathcal{L}_H = \frac{d}{dz} B_0^{-1}, B_H = I + \mathcal{L}_H B_1$. Здесь в качестве D_0, B_0 обычно выбирают операторы умножения на функции проницаемостей $\varepsilon(z, t), \mu(z, t)$, а преобразования D_1, B_1 учитывают дисперсию среды в виде интегральных операторов с разностными ядрами [1, 3].

Исключив из системы (21) функции a_i, b_i с помощью (25), получим для E -поля уравнение относительно функции $g_i(z, t)$:

$$D_E \frac{\partial}{\partial t} B \frac{\partial}{\partial t} D_{\parallel} g_i + \left(\kappa_i^2 D_E - \mathcal{L}_E \frac{\partial}{\partial z} D_{\parallel} \right) g_i = 0.$$

Аналогично для H -поля получим уравнение относительно функции f_i :

$$B_H \frac{\partial}{\partial t} D \frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_i + \left(\gamma_i^2 B_H - \mathcal{L}_H \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel} \right) f_i = 0.$$

Система (24) для T -поля в случае стационарной среды сводится с учетом (25) к уравнению относительно $w_i(z, t)$:

$$D_E B \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_i - \mathcal{L}_E \frac{\partial}{\partial z} w_i = 0.$$

Теоремы существования и единственности модовых полей для различных классов индукционных операторов приведены в [1, 3].

4. Разложение поля по модовому базису. Рассмотрим пространство $L_2^3(S)$ трехмерных вектор-функций от переменных x, y , компоненты которых квадратично суммируемы в многосвязной плоской области $S \subset R^2$. На основании леммы 2 в $L_2^3(S) = L_2^2(S) \oplus L_2(S)$ можно выделить ортогональные базисы

$$\{\nabla \varphi_k, [\nabla \psi_k, \mathbf{z}], \mathbf{z} \varphi_k\}_1^\infty \cup \{\nabla u_k\}_1^N, \quad (26)$$

$$\mathbf{z} \psi_0 \cup \{[\mathbf{z}, \nabla \varphi_k], \nabla \psi_k, \mathbf{z} \psi_k\}_1^N \cup \{[\mathbf{z}, \nabla u_k], \mathbf{z} \psi_{0k}\}_1^N. \quad (27)$$

Рассмотрим гладкие решения неоднородной задачи (1) – (5). При каждом (z, t) разложим $\mathcal{E}$ в ряд Фурье по базису (26) в пространстве $L_2^3(S)$, $\mathcal{H}$ — по базису (27), сохранив для коэффициентов Фурье обозначения соответствующих функций от z, t в модовых полях (17) – (20):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k \nabla_{\perp} \varphi_k \\ g_k \varphi_k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e_k [\nabla \psi_k, \mathbf{z}]_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} v_k \nabla_{\perp} u_k \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H} &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} b_k [\mathbf{z}, \nabla \varphi_k]_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} h_k \nabla_{\perp} \psi_k \\ f_k \psi_k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} w_k [\mathbf{z}, \nabla u_k]_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{z} f_0 \psi_0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_k(z, t) &= \frac{1}{\varkappa_k^2} (\mathbf{E}, \nabla \varphi_k)_{L_2^3}, & b_k(z, t) &= \frac{1}{\varkappa_k^2} (\mathbf{H}, [\mathbf{z}, \nabla \varphi_k])_{L_2^3}, \\ e_k(z, t) &= \frac{1}{\gamma_k} (\mathbf{E}, [\nabla \psi_k, \mathbf{z}])_{L_2^3}, & h_k(z, t) &= \frac{1}{\gamma_k} (\mathbf{H}, \nabla \psi_k)_{L_2^3}, \\ v_k(z, t) &= (\mathbf{E}, \nabla u_k)_{L_2^3}, & w_k(z, t) &= (\mathbf{H}, [\mathbf{z}, \nabla u_k])_{L_2^3}, \\ g_k(z, t) &= (E_z, \varphi_k)_{L_2}, & f_k(z, t) &= (H_z, \psi_k)_{L_2}, & f_0(z, t) &= (H_z, \psi_0)_{L_2}. \end{aligned}$$

(Символ „ $\perp$ ” означает вложение вектора из $R^2 \oplus 0 \subset R^3$ в R^2 .)

Заметим, что векторы напряженностей $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ электрического и магнитного полей являются однозначными функциями, а значит, в разложении компоненты H_z по базису $\{\psi_0, \psi_{01}, \dots, \psi_{0N}\} \cup \{\psi_k\}_1^\infty$ коэффициенты Фурье при многозначных функциях $\{\psi_{0i}\}_1^N$ положим равными нулю: $(H_z, \psi_{0i}) = 0, i = 1, \dots, N$.

Выведем эволюционные уравнения, связывающие коэффициенты Фурье. Предварительно для функций сторонних источников ρ и $\mathcal{I} = \mathbf{J} + \mathbf{z}J_z$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} j_k &= (J_z, \varphi_k)_{L_2}, & \rho_k &= (\rho, \varphi_k)_{L_2}, & j_k^E &= \frac{1}{\varkappa_k^2} (\mathbf{J}, \nabla \varphi_k)_{L_2^3}, \\ j_k^H &= \frac{1}{\gamma_k^2} (\mathbf{J}, [\nabla \psi_k, \mathbf{z}])_{L_2^3}, & j_k^T &= (\mathbf{J}, \nabla u_k)_{L_2^3}. \end{aligned}$$

Спроектируем левые и правые части первого из векторных равенств (1) на элементы базиса (26), второго векторного уравнения — на элементы базиса (27), скалярные равенства (2) — на базисные функции $\{\psi_k\}_1^\infty, \{\psi_0, \psi_{01}, \dots, \psi_{0N}\} \cup \{\psi_k\}_1^\infty$ соответственно. После несложных преобразований с учетом граничных условий (3) и надлежащей гладкости решений получим следующие системы уравнений относительно коэффициентов Фурье [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{\parallel} g_k + \varkappa_k^2 b_k = -j_k, \quad \frac{\partial}{\partial t} D a_k + \frac{\partial b_k}{\partial z} = -j_k^E, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B b_k + \frac{\partial a_k}{\partial z} &= g_k, & \frac{\partial}{\partial z} D_{\parallel} g_k - \varkappa_k^2 D a_k &= \rho_k, & k &= 1, 2, \dots, \\ \frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_k + \gamma_k^2 e_k &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} B h_k + \frac{\partial e_k}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D e_k + \frac{\partial h_k}{\partial z} = f_k - j_k^H, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel} f_k - \gamma_k^2 B h_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel} f_0 = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D v_k + \frac{\partial w_k}{\partial z} = -j_k^T, \quad \frac{\partial}{\partial t} B w_k + \frac{v_k}{\partial z} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

В случае отсутствия сторонних источников ($\mathcal{I} = 0$, $\rho = 0$) системы (29) – (32) становятся однородными и совпадают соответственно с уравнениями в (21) – (24) для одноименных функций модовых полей (17) – (20). Следовательно, слагаемые разложения являются модовыми. Разложение (28) произвольного гладкого решения $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ однородной системы Максвелла по базисам (26), (27) соответственно есть разложение поля по модовому базису (17) – (20):

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{H}_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_E^k \\ \mathcal{H}_E^k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_H^k \\ \mathcal{H}_H^k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} \mathcal{E}_T^k \\ \mathcal{H}_T^k \end{pmatrix}.$$

При фиксированных значениях переменных z, t ряд сходится в норме пространства $L_2^3(S) = L_2^3(S) \oplus L_2^3(S)$.

В общем случае, когда $\mathcal{I} \neq 0$, $\rho \neq 0$, решение неоднородной системы (29), (30), (32) представляется в виде суммы решения однородной системы (21), (22), (24) и специального решения неоднородной системы с нулевыми начальными условиями. Таким образом, поле в волноводе с неоднородной нестационарной средой (4), (5) раскладывается в ряд по системе модовых состояний, где каждая k -я мода является суммой модового поля соответствующего типа и некоторого вынужденного состояния такой же модовой структуры.

Аналогичные вопросы для волновода с односвязным поперечным сечением рассмотрены ранее в [1 – 3, 6]. Автор выражает благодарность А.Г. Руткасу за внимание к статье.

1. Попова Е. В., Руткас А. Г. Модовые разложения полей в волноводе с неоднородной средой // Праці УНДІРТ. — 1997. — № 2. (10). — С. 54 – 59.
2. Руткас А. Г. Модовые поля в волноводе со слоистой диспергирующей средой. — Харьков, 1987. — 34 с. — (Препринт / АН УССР Ин-т радиоэлектроники; № 360).
3. Попова Е. В. Существование и единственность базисных решений электродинамической системы // Вестн. Харьков. ун-та. — 1999. — № 445. — С. 167 – 178.
4. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1960. — 59. — С. 5 – 36.
5. Вейль Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984. — 511 с.
6. Попова Е. В. Разложение поля в волноводе с неоднородной нестационарной средой по системе модовых состояний. — Харьков, 1996. — 29 с. — Деп. в ГНТБ Украины, № 1955-Ук96.
7. Третьяков О. А. Эволюционные волноводные уравнения // Радиотехника и электроника. — 1989. — 34, № 5. — С. 917 – 926.

Получено 06.01.99