УДК 517.926

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. А. Чечель

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We propose a method for finding periodic solutions of linear differential systems with degeneracies in the case where the zero eigen values of the matrix at the derivatives are simple. We also consider solution of boundary-value problems for such systems.

Предложен метод нахождения периодических решений линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями, в которых нулевые собственные числа матрицы при производной являются простыми. Рассмотрен вопрос решения краевых задач для таких систем.

1. Вступ. Питання про періодичні розв'язки лінійних диференціальних систем з виродженою матрицею при похідній розглядалося в роботах [1–4]. Для його вирішення застосовувались методи зниження порядку вихідної системи та зведення її до нормальної форми. При цьому вимагалося виконання різних умов, таких як сталість рангу матриці при похідній [2], зведення системи до центральної канонічної форми [4] та ін. Проблеми розробки конструктивних методів аналізу лінійних й слабколінійних крайових задач для широкого класу систем диференціальних рівнянь досліджувались у [5–8]. У роботі [9] отримано критерії розв'язності й структуру розв'язку лінійних нетерових задач для різних класів систем функціонально-диференціальних рівнянь. У статті [10] було сформульовано критерій існування розв'язків вироджених неоднорідних нетерових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у припущенні, що вироджена система диференціальних рівнянь зводиться до центральної канонічної форми. У роботах [11] і в даній умова звідності виродженої системи до центральної канонічної форми не є необхідною.

2. Періодичні розв'язки вироджених лінійних систем. Розглянемо лінійну систему

$$N(t)\frac{dV}{dt} = M(t)V + F(t), \tag{1}$$

де $\det N(t) \equiv 0$ $(\forall t \in R)$, причому $N(t)$ має r простих нулів $\lambda \equiv 0$ $(\forall t \in R)$, $(n\times n)$-матриці $N(t)$, $M(t)$ та вектор $F(t)$ періодичні з періодом $T > 0$, тобто $N(t)$, $M(t)$, $F(t) \in C(R,T)$.

Згідно з [11], записуючи матрицю $N(t)$ у вигляді

$$N(t) = S(t)\mathrm{diag}\,\{N_1(t), \Theta\}S^{-1}(t), \tag{2}$$

де Θ — нульова $(r \times r)$-матриця, $N_1(t)$, $S(t)$ — невироджені $((n-r)\times(n-r))$, $(n\times n)$-матриці відповідно, що мають таку ж гладкість, як і $N(t)$, причому $N_1(t)$, $S(t) \in C(R,T)$, та вводячи заміну

$$V(t) = S(t)\left[(C(t), D(t))^{+}g(t) + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right], \tag{3}$$

де вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ такий, що $(C(t), D(t)) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$, $(C(t), D(t))^+$ — псевдообернена [12, с. 34] до $(C(t), D(t))$ матриця, $D(t)$ — $(r \times r)$-матриця, $C(t)$ — $(r \times (n-r))$-матриця, $g(t)$, $F_{n-r}(t)$ — n- та $(n-r)$-вимірні вектори відповідно, де

$$\begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} = S^{-1}(t)M(t)S(t) - \operatorname{diag}\{N_1(t), \Theta\}S^{-1}(t)\,\frac{dS(t)}{dt}, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} F_{n-r}(t) \\ -g(t) \end{bmatrix} = S^{-1}(t)\,F(t), \tag{5}$$

$C(t)$, $D(t)$, $g(t)$, $F_{n-r}(t) \in C(R,T)$, у випадку, коли $\det D(t) \neq 0 \ \forall t \in R$, приходимо до системи

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1(t)\,x_1 + f_1(t), \tag{6}$$

де $f_1(t)$, $A_1(t) \in C(R,T)$, $((n-r) \times (n-r))$-матриця $A_1(t) = A(t) - B(t)D(t)^{-1}(t)C(t)$, $f_1(t) = N_1^{-1}(t)F_{n-r}(t) + (A(t), B(t))(C(t), D(t))^+g(t) - [C^*(t)\Gamma^{-1}(t)g(t)]'$.

Згідно з [11] правильними є такі твердження.

Теорема 1. *Нехай періодична система (1) є такою, що матриця $N(t) \in C(R,T)$ має r простих власних чисел $\lambda_i \equiv 0$, $i = \overline{1,r}$, а $\operatorname{rank}(C(t), D(t)) \equiv r$, де $C(t)$, $D(t) \in C(R,T)$. Тоді при умові, що $\det D(t) \neq 0 \ \forall t \in R$, лінійна періодична система диференціальних рівнянь з виродженням (1) порядку n зводиться до періодичної системи (6) диференціальних рівнянь без виродження порядку $n-r$.*

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то вироджена лінійна система (1) має $(n-r)$-параметричну множину лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$V(t) = Q(t)c + \overline{V}(t), \tag{7}$$

де

$$Q(t) = S(t)\begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix}\Omega_{t_0}^{t}(A_1), \tag{8}$$

$$\overline{V}(t) = S(t)\left[(C(t), D(t))^+g(t) + \begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix}\Omega_{t_0}^{t}(A_1)\int\limits_{t_0}^{t}\left[\Omega_{t_0}^{\tau}(A_1)\right]^{-1} f_1(\tau)d\tau\right], \tag{9}$$

c — довільний $(n-r)$-вимірний сталий вектор, $t_0 \in R$, $\Omega_{t_0}^{t}(A_1)$ — матрицант відповідного до (6) однорідного рівняння.

Відповідь на задачу про існування періодичних розв'язків системи (1) дає наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми 2, а також*

$$\left[I_{n-r} - (Q(T) - Q(0))(Q(T) - Q(0))^{+}\right](\overline{V}(0) - \overline{V}(T)) = 0, \tag{10}$$

то вироджена лінійна система (1) має єдиний T-періодичний розв'язок.

Доведення. Нехай $V(t)$ — розв'язок системи (1). Для виконання співвідношення $V(t+ +T) = V(t)$, $(t+T)$, $t \in R$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$V(T) = V(0). \tag{11}$$

За теоремою 2 розв'язок $V(t)$ має вигляд (7). Підставляючи його в (11), маємо

$$(Q(T) - Q(0))c = \overline{V}(0) - \overline{V}(T). \tag{12}$$

Домножимо (12) на спряжену до $Q(T) - Q(0)$ матрицю зліва:

$$(Q(T) - Q(0))^{*}(Q(T) - Q(0))c = (Q(T) - Q(0))^{*}(\overline{V}(0) - \overline{V}(T)), \tag{13}$$

звідки однозначно виражається вектор c :

$$c = (Q(T) - Q(0))^{+}(\overline{V}(0) - \overline{V}(T)), \tag{14}$$

де $(Q(T) - Q(0))^{+}$ — псевдообернена до $(Q(T) - Q(0))$ матриця.

Але потрібно врахувати, що рівняння (10) є еквівалентним рівнянню (9) тільки, якщо виконується умова

$$\left[I_{n-r} - (Q(T) - Q(0))(Q(T) - Q(0))^{+}\right](\overline{V}(0) - \overline{V}(T)) = 0. \tag{15}$$

Отже, при виконанні умови (15) шуканий вектор c існує і є єдиним. При цьому T-періодичний розв'язок системи (1) має вигляд

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = Q(t)(Q(T) - Q(0))^{+}(\overline{V}(0) - \overline{V}(T)) + \overline{V}(t).$$

Теорему доведено.

3. Лінійні крайові задачі. Критерій розв'язності. Розглянемо задачу про необхідні та достатні умови розв'язності та структуру множини розв'язків з простору n-вимірних неперервно диференційовних вектор-функцій $V(t) \in C[a,b]$ лінійної неоднорідної крайової задачі вигляду

$$N(t)\dot{V} = M(t)V + F(t), \quad t \in [a,b], \tag{16}$$

$$lV = \alpha, \quad \alpha \in R^{n}, \tag{17}$$

де $V(t)$, $F(t)$ – n-вимірні вектори, $N(t)$, $M(t)$ – $(n \times n)$-вимірні матриці, $\det N(t) = 0$ $(\forall t \in [a,b])$, $N(t)$, $M(t) \in C[a,b]$, l — лінійний функціонал такий, що $l : C[a,b] \to R^{n}$. В залежності від конкретного вигляду функціонала отримаємо різні крайові задачі.

Згідно з [13], подаючи матрицю $N(t)$ у вигляді

$$N(t) = S(t)\mathrm{diag}\,\{N_1(t), \Theta\}\, S^{-1}(t),$$

де $N_1(t)$, $S(t)$ — невироджені $((n-r)\times(n-r))$-, $(n\times n)$-матриці відповідно, що мають таку ж гладкість, як $N(t)$, Θ — нульова $(r\times r)$-матриця, та вводячи заміну

$$V(t) = S(t)\left[(C(t), D(t))^{+}g(t) + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right],$$

де вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ такий, що $(C(t), D(t))\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$, $D(t)$ — $(r\times r)$-матриця, $C(t)$ — $(r\times(n-r))$-матриця, $g(t)$, $F_{n-r}(t)$ — $(r\times 1)$- та $((n-r)\times 1)$-стовпці відповідно, причому

$$\begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix} = S^{-1}(t)M(t)S(t) - \mathrm{diag}\,\{N_1(t), \Theta\}S^{-1}(t)\,\frac{dS(t)}{dt},$$

$$\begin{bmatrix} F_{n-r}(t) \\ -g(t) \end{bmatrix} = S^{-1}(t)\,F(t)$$

при умові, що $\mathrm{rank}\,(C(t), D(t)) = r$ і $\det D(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$, загальний розв'язок системи (16) записуємо у вигляді

$$V(t) = Q(t)c + \overline{V}(t), \tag{18}$$

де

$$Q(t) = S(t)\begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix}\Omega_{t_0}^{t}(A_1),$$

$$\overline{V}(t) = S(t)\left[(C(t), D(t))^{+}g(t) + \begin{pmatrix} I_{n-r} \\ -D^{-1}(t)C(t) \end{pmatrix}\Omega_{t_0}^{t}(A_1)\int\limits_{t_0}^{t}\left[\Omega_{t_0}^{\tau}(A_1)\right]^{-1} f_1(\tau)d\tau\right],$$

c — довільний $(n-r)$-вимірний сталий вектор, $t_0 \in [a,b]$, $\Omega_{t_0}^{t}(A_1)$ — матрицант.

Але для того щоб розв'язок (18) системи (16) був розв'язком крайової задачі (16), (17), необхідним є виконання крайової умови (17).

Тому, підставивши (18) в (17), отримаємо алгебраїчну відносно $c \in R^{n-r}$ систему

$$Rc + l\overline{V} = \alpha,$$

де $(n\times(n-r))$-матриця $R = lQ$.

Використавши теорему 3.9 [9, с. 92], визначимо умови розв'язності крайової задачі (16), (17) та значення константи $c \in R^{n-r}$, при якому розв'язок (18) диференціальної системи (16) є розв'язком крайової задачі, що розглядається.

Для цього побудуємо ортопроектори $P_R = I_{n-r} - R^{+}R$ та $P_{R^*} = I_n - RR^{+}$ матриць R та спряженої до неї R^* відповідно, де псевдообернена матриця $R^{+} = (R^*R + I_{n-r})^{-1}R^*$.

Відповідь на поставлену задачу дає наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо система (16) є такою, що вироджена матриця $N(t)$ має r простих власних чисел $\lambda_i \equiv 0$, $i = \overline{1,r}$, $\operatorname{rank}(C(t), D(t)) = r$ і $\det D(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$, то крайова задача (16), (17) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли вектор $\overline{V} \in C[a,b]$ задовольняє умову*

$$P_{R_r^*}[\alpha - l\overline{V}] = 0$$

і при цьому задача має єдиний розв'язок

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = Q(t)R^+(t)[\alpha - l\overline{V}] + \overline{V}(t).$$

1. *Еременко В. А.* О некоторых свойствах периодических матриц // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 1. — С. 19 – 36.
2. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 2. — С. 168 – 174.
3. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн. — 1975.— **27**, № 1. — С. 137 – 140.
4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
5. *Зубов В. М.* К теории существования решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1970. — **7**, № 4. — С. 632 – 633.
6. *Тауфер И.* Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1981. — 142 с.
7. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964. — 368 с.
8. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. — 352 с.
9. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
10. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 303 – 312.
11. *Чечель А. А.* Розв'язування лінійних систем диференціальних рівнянь з виродженнями // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 273 – 278.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Одержано 10.10.08,
після доопрацювання — 04.03.11