

УДК 517.9:519.46

ПРО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ  $u_{00} = u \Delta u$

**А.Ф. Баранник**

Пед. ун-т,  
Польща, Слупськ

**І.І. Юрик**

Укр. ун-т харч. технологій,  
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 68  
e-mail: nonlin@apmat.freenet.kiev.ua

*New extended classes of exact solutions of the multidimensional nonlinear acoustic equation  $u_{00} = u \Delta u$  are obtained.*

*Побудовані широкі класи точних розв'язків багатовимірного нелінійного рівняння акустики  $u_{00} = u \Delta u$ .*

Багато рівнянь нелінійної акустики, теорії нелінійних хвиль є рівняннями вигляду

$$u_{00} = c(\vec{x}, u, u_1) \Delta u, \quad (1)$$

де  $u = u(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_0, \underbrace{x_1, \dots, x_n}_x) \in R_{1,n}$ ,  $c(\vec{x}, u, u_1)$  — довільна диференційовна функція,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2},$$

$u_1$  — сукупність всіх можливих похідних першого порядку. Групові властивості рівняння (1) вивчалися в [1].

Якщо  $c(\vec{x}, u, u_1) = u$ , то рівняння (1) набуває вигляду

$$u_{00} = u \Delta u. \quad (2)$$

Олвер і Розенау [2] побудували розв'язки одновимірного рівняння акустики (2), які не можна отримати з допомогою методу С. Лі. В роботі [3] досліджувалась умовна симетрія рівняння (2). Під умовною симетрією рівняння розуміють симетрію деякої підмножини розв'язків даного рівняння. В [1, 3] було знайдено 12 типів нееквівалентних операторів умовної симетрії рівняння (2), з допомогою яких були побудовані широкі класи точних розв'язків даного рівняння. Відзначимо, що анзаци, які відповідають операторам умовної симетрії, в багатьох випадках редукують вихідне нелінійне рівняння до лінійного.

В даній роботі, виходячи з міркувань, відмінних від концепції умовної симетрії, побудовано більш широкі класи точних розв'язків рівняння (2), ніж в [1, 3]. При побудові цих

розв'язків суттєво використовувались розв'язки з відокремленими змінними [4]. Слід зауважити, що побудувати розв'язки з відокремленими змінними в багатьох випадках значно простіше, ніж знайти оператори умовної симетрії.

1. Розв'язки рівняння (2) шукаємо у вигляді  $u = a(x_0)b(x)$ , де функції  $a(x_0)$  і  $b(x)$  відмінні від констант. Підставляючи в рівняння (2), отримуємо  $a''b = a^2b\Delta b$ . Тут  $a''$  означає другу похідну функції  $a(x_0)$  по змінній  $x_0$ . З останньої рівності випливає, що функції  $a''$  і  $a^2$  лінійно залежні, тобто  $a'' = \alpha a^2$  для певного  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Знаходимо також, що  $\Delta b = \alpha$ . Якщо  $\alpha = 0$ , то  $a = \mu x_0 + \nu$  і розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$u = (\mu x_0 + \nu)b(x), \quad (3)$$

де  $\Delta b = 0$ .

Якщо  $\alpha \neq 0$ , то поклавши  $a_1 = \frac{\alpha}{6}a$ ,  $b_1 = \frac{6}{\alpha}b$ , отримаємо  $a_1'' = 6a_1^2$ ,  $\Delta b_1 = 6$ . Отже, у випадку  $\alpha \neq 0$  розв'язки рівняння (2) мають вигляд

$$u = \left[ \frac{3}{k}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n) \right] \wp(x_0), \quad (4)$$

$$u = \left[ \frac{3}{2}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n) \right] x_0^{-2}, \quad (5)$$

де  $1 \leq k \leq n$ ,  $\wp(x_0)$  — функція Вейерштрасса з інваріантами  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = C_1$ ,  $\Delta G_\alpha = 0$ .

2. Узагальненням розв'язку (3) є розв'язок

$$u = (\mu x_0 + \nu)b(x) + b_1(x), \quad (6)$$

де  $\Delta b = 0$ ,  $\Delta b_1 = 0$ .

Розв'язок (4) є частинним випадком більш загального розв'язку

$$u = \varphi(x)\wp(x_0) + G(x_0, x),$$

де

$$\varphi(x) = \frac{3}{k}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n).$$

Підставляючи його в рівняння (2), знаходимо

$$v_{00} = \varphi(x)\wp(x_0)\Delta v + 6\wp(x_0)v + v\Delta v. \quad (7)$$

Якщо функція  $v$  залежить тільки від  $x_0$ , то  $v_{00} = 6\wp(x_0)v$ , і маємо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = \left[ \frac{3}{k}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n) \right] \wp(x_0) + f(x_0), \quad (8)$$

де  $f(x_0)$  є функцією Ламе [5].

Якщо функція  $v$  залежить від  $x_0$  і  $x$ , то розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді  $v = a(x_0)b(x)$ , де  $a(x_0)$  і  $b(x)$  відмінні від констант. Підставляючи його в рівняння (7), отримуємо

$$a''b = a(x_0)\wp(x_0)\varphi\Delta b + 6a(x_0)\wp(x_0)b + a^2(x_0)b\Delta b. \quad (9)$$

Рівність (9) означає, що функції  $a''$ ,  $a\varphi$  і  $a^2$  лінійно залежні. Якщо припускати, що функції  $a\varphi$  і  $a^2$  лінійно залежні, то  $a^2 = \alpha a\varphi$ ,  $\alpha \in R$ , або  $a = \alpha\varphi$ , і шуканий розв'язок можна зобразити у вигляді  $u = \varphi(x_0)d(x)$ , тобто ми знаходимося в умовах п. 1. Тому можна вважати, що функції  $a\varphi$  і  $a^2$  лінійно незалежні і, отже,

$$a'' = \alpha a^2 + \beta a\varphi. \quad (10)$$

Підставляючи (10) в (9), знаходимо

$$(\alpha b - b\Delta b)a^2 + (\beta b - \varphi\Delta b - 6b)a\varphi = 0.$$

Оскільки  $a^2$  і  $a\varphi$  лінійно незалежні, то

$$\alpha b - b\Delta b = 0, \quad \beta b - \varphi\Delta b - 6b = 0. \quad (11)$$

З системи (11) випливає

$$\Delta b = \alpha, \quad \alpha\varphi = (\beta - 6)b.$$

Якщо  $\alpha = 0$ , то  $\beta = 6$  і маємо такий точний розв'язок рівняння (2):

$$u = \left[ \frac{3}{k}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n) \right] \varphi(x_0) + \Phi_\alpha(x_1, \dots, x_n)f(x_0), \quad (12)$$

де  $1 \leq k \leq n$ ,  $\Delta G_\alpha = 0$ ,  $\Delta \Phi_\alpha = 0$ ,  $f'' = 6\varphi f$  є функцією Ламе.

Якщо  $\alpha \neq 0$ , то можна вважати, що  $\alpha = 1$ . Тому  $\varphi = (\beta - 6)b$ , звідки  $\Delta\varphi = (\beta - 6)\Delta b$ , тобто  $\beta = 12$ . Це означає, що  $b = \frac{1}{6}\varphi$  і ми знаходимося в умовах п. 1.

Узагальненням розв'язку (5) є розв'язок

$$u = \left[ \frac{3}{k}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n) \right] x_0^{-2} + \Phi_\alpha(x_1, \dots, x_n)x_0^{-3}, \quad (13)$$

де  $1 \leq k \leq n$ ,  $\Delta G_\alpha = 0$ ,  $\Delta \Phi_\alpha = 0$ .

3. Розглянемо більш складний випадок, а саме, розв'язок рівняння (2) будемо шукати у вигляді

$$u = a(x_0)b(x) + c(x_0)d(x). \quad (14)$$

Якщо функції  $a(x_0)$  і  $c(x_0)$  лінійно залежні, то  $c(x_0) = \alpha a(x_0)$ ,  $\alpha \in R$ , і тому  $u = a(x_0)b_1(x)$ , де  $b_1(x) = b(x) + \alpha d(x)$ , а цей випадок розглядався в п. 1. Отже, можна вважати, що функції  $a(x_0)$  і  $c(x_0)$  лінійно незалежні. З цієї ж причини функції  $b(x)$  і  $d(x)$  також лінійно незалежні. Підставляючи (14) в рівняння (2), знаходимо

$$a''b + c''d = a^2(b\Delta b) + ac(b\Delta b) + ac(d\Delta b) + c^2(d\Delta d). \quad (15)$$

Рівність (15) означає, що функції  $a^2$ ,  $ac$ ,  $c^2$ ,  $a''$ ,  $c''$  лінійно залежні. Неважко показати, що з лінійної незалежності функцій  $a$  і  $c$  випливає лінійна незалежність функцій  $a^2$ ,  $ac$  і  $c^2$ . Дійсно, якщо функції  $a^2$ ,  $ac$  і  $c^2$  лінійно залежні, то  $\alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = 0$  для певних дійсних чисел  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , які одночасно не дорівнюють нулю. Припустимо, що  $\alpha = 0$ , тоді  $\beta ac + \gamma c^2 = 0$ , тобто  $c(\beta a + \gamma c) = 0$ . Звідси випливає, що  $\beta a + \gamma c = 0$  і функції  $a$  і  $c$

є лінійно залежними всупереч умові. Отже,  $\alpha \neq 0$ , а тому можна вважати, що  $\alpha = 1$ . Оскільки

$$a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)c^2 = 0,$$

то  $\gamma - \frac{\beta^2}{4} = -\delta^2 < 0$ . Внаслідок цього

$$a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}c - \delta c\right)\left(a + \frac{\beta}{2}c + \delta c\right) = 0.$$

З останньої рівності отримуємо  $a + \left(\frac{\beta}{2} - \delta\right)c = 0$  або  $a + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)c = 0$ . Це означає, що  $a$  і  $c$  є лінійно залежними і ми знову приходимо до суперечності.

Припустимо, що лінійно незалежними є також функції  $a^2$ ,  $ac$ ,  $c^2$  і  $a''$ . Тоді

$$c'' = \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 + \delta a'' \quad (16)$$

для певних  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ . Підставляючи (16) в (15), знаходимо коефіцієнт при  $a''$ . Він дорівнює  $b + \delta d = 0$ , тобто  $b$  і  $d$  є лінійно залежними, що суперечить припущенню. Одержана суперечність доводить, що система функцій  $a^2$ ,  $ac$ ,  $c^2$  і  $a''$  лінійно залежна. З тієї ж причини і система функцій  $a^2$ ,  $ac$ ,  $c^2$  і  $c''$  лінійно незалежна.

Нехай

$$a'' = \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2, \quad c'' = \alpha_1 a^2 + \beta_1 ac + \gamma_1 c^2, \quad (17)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in R$ . Підставляючи (17) в (15) і враховуючи лінійну незалежність функцій  $a^2$ ,  $ac$  і  $c^2$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha b + \alpha_1 d &= b\Delta b, \\ \gamma b + \gamma_1 d &= d\Delta d, \\ \beta b + \beta_1 d &= b\Delta d + d\Delta b. \end{aligned} \quad (18)$$

Помноживши обидві частини першого рівняння системи (18) на  $d^2$ , другого рівняння — на  $b^2$ , а третього — на  $bd$ , знайдемо

$$\beta b^2 d + \beta_1 b d^2 = \gamma b^3 + \gamma_1 b^2 d + \alpha b d^2 + \alpha_1 d^3. \quad (19)$$

З лінійної незалежності функцій  $b$  і  $d$  випливає лінійна незалежність функцій  $b^2 d$ ,  $b d^2$ ,  $b^3$  і  $d^3$ . Тому з рівності (19) отримуємо  $\beta = \gamma_1$ ,  $\beta_1 = \alpha$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ . Отже,

$$a'' = \alpha a^2 + \beta ac, \quad c'' = \alpha ac + \beta c^2. \quad (20)$$

В системі (20)  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ . Позначимо  $c_1 = \beta c$ ,  $d_1 = \frac{1}{\beta} d$ , тоді

$$a'' = \alpha a^2 + a c_1, \quad c_1'' = \alpha a c_1 + c_1^2, \quad \Delta d_1 = 1.$$

Це означає, що в системі (20) можна вважати  $\beta = 1$ . При такому значенні  $\beta$  система (20) має наступний розв'язок [5]:

$$a'' = a^2(x_0) \left( \int \frac{dx_0}{a^2(x_0)} + \alpha \right), \quad c(x_0) = a(x_0) \int \frac{dx_0}{a^2(x_0)}.$$

В результаті отримуємо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = a(x_0)b(x) + d(x)a(x_0) \int \frac{dx_0}{a^2(x_0)}, \quad (21)$$

де

$$b(x) = \frac{\alpha}{2k}(x_1^2 + \dots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \dots, x_n),$$

$$d(x) = \frac{1}{2l}(x_1^2 + \dots + x_l^2) + \Phi_\alpha(x_1, \dots, x_n),$$

$1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n, \Delta G_\alpha = 0, \Delta \Phi_\alpha = 0$ , а функція  $a(x_0)$  є розв'язком рівняння

$$a'' = a^2(x_0) \left( \int \frac{dx_0}{a^2(x_0)} + \alpha \right).$$

1. *Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 400 p.
2. *Olver P., Rosenau Ph.* The construction of special solutions to partial differential equations //Phys. Lett. A. – 1986. – 114, № 3. – P. 107 – 112.
3. *Фушчич В.И., Серов Н.И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики //Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17 – 21.
4. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

Одержано 05.04.98