УДК 517.9

ПОБУДОВА ГРАНИЦЬ ЗОН НЕСТІЙКОСТІ КВАЗІПЕРІОДИЧНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА З ТРИГОНОМЕТРИЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

О. М. Денисенко

МП „Дисит"НАН України
Україна, 03164, Київ, вул. Генерала Наумова, 15

І. О. Парасюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

This paper is concerned with one-dimensional stationary quasiperiodic Schrödinger equation with a finite order trigonometric potential. Diagram technique is applied to construct the boundaries of instability zones as convergent series in a small parameter. Sizes of instability zones have been estimated.

Рассматривается одномерное стационарное квазипериодическое уравнение Шредингера, в котором потенциал является действительным тригонометрическим многочленом конечного порядка. С помощью диаграммной техники построены границы зон неустойчивости в виде сходящихся разложений по малому параметру и оценены размеры этих зон.

1. Вступ. Розглянемо одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера з квазіперіодичним потенціалом

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2} + \varepsilon\, u(\omega t)\psi = E\psi, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

в якому $u(\varphi)$ є дійсною гладкою функцією на торі $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\,\mathbb{Z}^d$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ — вектор частот, E — дійсний параметр (енергія), ε — малий параметр.

У періодичному випадку ($d = 1$) рівняння (1) називають також рівнянням Хілла. Відомо, що при фіксованому ε вісь енергії E рівняння Хілла розбивається на замкнені проміжки нестійкості (зони нестійкості або параметричного резонансу) та відкриті інтервали стійкості, причому границя зони нестійкості характеризується наявністю у рівнянні принаймні одного нетривіального періодичного розв'язку з періодом $2\pi/\omega$ або $4\pi/\omega$ і одного необмеженого розв'язку. Таким чином, границі зон нестійкості можна визначати як прості власні числа оператора $-\dfrac{d^2}{dt^2} + \varepsilon\, u(\omega t)$ на просторі $4\pi/\omega$-періодичних функцій. Спираючись на цей факт, у роботі [1] за допомогою діаграмної техніки [2] було побудовано границі зон нестійкості для рівняння типу Мат'є — рівняння вигляду (1), в якому $u(\varphi)$ є тригонометричним поліномом порядку p, та доведено, що ширина k-ї зони при $\varepsilon \to 0$ є величиною порядку $O(\varepsilon^r)$, де $r = -\left[-\dfrac{k}{p}\right]$ (k-та зона при $\varepsilon \to 0$ стягується в точку $E_k = k\omega/2$).

У перших роботах, присвячених дослідженню аналогічних питань для квазіперіодичного рівняння (1), застосовувались асимптотичні методи типу методу усереднення (див., наприклад, [3, 4]). Такі методи дозволяють виділяти на осі енергії проміжки параметричного резонансу, де рівняння має додатний показник Ляпунова, однак при цьому не розв'язують питання існування країв зон нестійкості.

Розв'язання цього питання стало можливим лише з використанням методів КАМ-теорії [5 – 8]. З роботи Ю. О. Митропольського та А. М. Самойленка [6] розпочалося застосування основного методу КАМ-теорії — методу прискореної збіжності — до проблеми звідності лінійних квазіперіодичних систем. Згодом у роботах [9 – 11] розроблену в [6] техніку було ефективно використано при дослідженні рівняння (1). Зокрема, у роботі [11] показано, що зони нестійкості рівняння (1) з дійсною аналітичною функцією $u(\varphi)$ на торі $\mathbb{T}^d$ можна покрити інтервалами, занумерованими цілочисловими векторами решітки $\mathbb{Z}^d$, так, щоб поза об'єднанням цих інтервалів рівняння мало пару лінійно незалежних квазіперіодичних розв'язків у вигляді так званих блохівських функцій; було також одержано „майже експоненціальну" оцінку швидкості спадання довжин зазначених інтервалів, а отже, і зон нестійкості, при $\|k\| \to \infty$. При цьому, однак, поза увагою залишилося питання про те, наскільки точно границі кожного з таких інтервалів відтворюють границі зони нестійкості, яку він покриває. Проте уже в роботі [12] для рівняння (1) з $\varepsilon = 1$ було побудовано як точні границі зон нестійкості, так і розв'язки, які їм відповідають, а також показано, що розмір зони нестійкості, яка відповідає вектору $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, при достатньо великих значеннях енергії E оцінюється згори величиною порядку $O(\exp\{-\beta\|k\|\})$, $\beta > 0$, де $\|k\| := \sum_{j=1}^{d} |k_j|$. Нещодавно, у роботі [13], також з використанням методів КАМ-теорії, було встановлено важливий результат про аналітичну залежність від малого параметра границь зон нестійкості та відповідних їм розв'язків рівняння (1) з аналітичним потенціалом.

Мета даної статті полягає в тому, щоб обґрунтувати можливість неформального розповсюдження підходу і результатів роботи [1] на випадок рівняння (1) з квазіперіодичним потенціалом у вигляді тригонометричного полінома p-го порядку вигляду

$$u(\varphi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d, \|l\| \le p} U^{(l)} e^{i(l,\varphi)}, \qquad (l,\varphi) := \sum_{j=1}^{d} l_j \varphi_j.$$

Зокрема, ми покажемо, що границі зон нестійкості на площині параметрів (E, ε) за аналогією з періодичним випадком визначаються збіжними розвиненнями за малим параметром власних чисел оператора Шредінгера, заданого на класі квазіперіодичних функцій з вектором частот $\frac{\omega}{2}$, а також, як і в [1], оцінимо розмір цих зон за допомогою діаграмної техніки [2].

Далі припускаємо, що для всіх $l \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ вектор частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$ задовольняє діофантову умову

$$|(l,\omega)| \ge K \|l\|^{-\tau} \tag{2}$$

з деякими сталими $K > 0, \tau > d - 1$.

Зафіксуємо вектор $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ та позначимо $\mu_k = \frac{1}{2}(k,\omega)$.

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай потенціал $u(\omega t)$ в рівнянні (1) є дійсним тригонометричним многочленом порядку p, а вектор частот ω задовольняє умову (2). Тоді існують досить мале*

$\varepsilon_1 > 0$ і дійсні аналітичні в крузі $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ функції $\lambda^-(\varepsilon)$ та $\lambda^+(\varepsilon)$ такі, що $\lambda^-(\varepsilon) \le \lambda^+(\varepsilon)$, коли $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, $\lambda^-(0) = \lambda^+(0) = \mu_k^2$, і

A) якщо $\lambda^-(\varepsilon) < \lambda^+(\varepsilon)$, то відрізок $J(\mu_k, \varepsilon) := \{E \in [\lambda^-(\varepsilon), \lambda^+(\varepsilon)]\}$ є зоною нестійкості рівняння (1), причому для всіх $E \in (\lambda^-(\varepsilon), \lambda^+(\varepsilon))$ рівняння (1) — експоненціально дихотомічне, а для $E = \lambda^\pm(\varepsilon)$, тобто на краях відрізка $J(\mu_k, \varepsilon)$, рівняння (1) має два лінійно незалежних розв'язки вигляду $\psi_1^\pm\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right)$, $\psi_2^\pm\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right) + t\psi_1^\pm\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right)$, де функції $\psi_1^\pm(\varphi, \varepsilon)$, $\psi_2^\pm(\varphi, \varepsilon)$ є аналітичними щодо $\varphi \in \mathbb{T}^d$ та $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$; при цьому довжина відрізка $J(\mu_k, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ оцінюється величиною порядку $O(|\varepsilon|^r)$, де $r = -\left[-\frac{\|k\|}{p}\right]$;

B) якщо $\lambda^-(\varepsilon) = \lambda^+(\varepsilon)$, тобто інтервал вироджується у точку, то для $E = \lambda^-(\varepsilon) = \lambda^+(\varepsilon)$ рівняння (1) має два лінійно незалежних розв'язки $\psi_1\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right)$, $\psi_2\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right)$, де функції $\psi_1(\varphi, \varepsilon)$, $\psi_2(\varphi, \varepsilon)$ є аналітичними щодо $\varphi \in \mathbb{T}^d$ та $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.

Зазначимо, що для випадку, коли $u(\omega t) = \sum_{j=1}^{d} c_j \cos(\omega_j t)$, $\sum_{j=1}^{d} c_j^2 = 1$, у роботах [13, 14] одержано оцінки довжини відрізка $J(\mu_k, \varepsilon)$, подібні до оцінок у теоремі 1 при $p = 1$.

2. Доведення основного результату. Поклавши $y_1 = \psi$, $y_2 = \psi'$, перейдемо від рівняння (1) до системи

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon u(\varphi) - E & 0 \end{pmatrix} y, \quad \varphi' = \omega, \quad y = (y_1, y_2). \tag{3}$$

Доведення теореми 1 спирається на результати робіт [13, 14]. Так, з одного боку, використовуючи результати [12], можемо встановити існування таких гладких в деякому околі нуля функцій $\tilde{\lambda}^-(\varepsilon)$ та $\tilde{\lambda}^+(\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}^-(0) = \tilde{\lambda}^+(0) = \mu_k^2$, що: 1) $\tilde{\lambda}^-(\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}^+(\varepsilon)$ — власні числа оператора $-\frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon\, u(\omega t)$ на просторі квазіперіодичних функцій з базисом частот $\frac{\omega}{2}$; 2) для всіх $E \in \left(\tilde{\lambda}^-(\varepsilon), \tilde{\lambda}^+(\varepsilon)\right)$ рівняння (1) є експоненціально дихотомічним.

З іншого боку, з результатів [13] випливає така теорема.

Теорема 2. *Нехай u є дійсною аналітичною функцією на торі $\mathbb{T}^d$, а вектор частот ω задовольняє умову (2). Тоді для деякого досить малого $\varepsilon_1 > 0$ існують такі дійсні аналітичні у крузі $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ функції $\lambda^-(\varepsilon)$ та $\lambda^+(\varepsilon)$, що $\lambda^-(\varepsilon) \le \lambda^+(\varepsilon)$, коли $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, $\lambda^-(0) = \lambda^+(0) = \mu_k^2$, і при $E = \lambda^\pm(\varepsilon)$ перетворення $y \mapsto R^\pm\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right) y$, де $R^\pm(\varphi, \varepsilon)$ — невироджена аналітична щодо $\varphi \in \mathbb{T}^d$ та $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ матриця, зводить систему (3) до системи зі сталою нільпотентною матрицею A_0, причому $A_0 = 0$ тоді і лише тоді, коли $\lambda^-(\varepsilon) = \lambda^+(\varepsilon)$.*

Будемо визначати границі зони нестійкості у вигляді розвинень за малим параметром власних чисел оператора Шредінгера, заданого на просторі квазіперіодичних функцій з базисом частот $\frac{\omega}{2}$. Якщо буде показано, що коефіцієнти формальних розкладів власних чисел знаходяться однозначно, то на підставі теореми 2 ці розклади збігатимуться як з розкладами за малим параметром ε аналітичних функцій $\lambda^-(\varepsilon)$, $\lambda^+(\varepsilon)$ з теореми 2, так і з розвиненнями у ряд Тейлора згаданих вище функцій $\tilde{\lambda}^-(\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}^+(\varepsilon)$, які визначають границі зон нестійкості. Звідси випливатиме, що $\tilde{\lambda}^-(\varepsilon) = \lambda^-(\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}^+(\varepsilon) = \lambda^+(\varepsilon)$.

Оператор Шредінгера рівняння (1) з квазіперіодичним поліноміальним потенціалом подамо у вигляді

$$\Lambda + \varepsilon A = -\frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon u_1 \left(\frac{\omega}{2} t\right). \tag{4}$$

Тут $u_1 \left(\frac{\omega}{2} t\right) = \sum\limits_{\|l\| \le 2p} U_1^{(l)} e^{i\left(l, \frac{\omega}{2}\right)t}$, де $U_1^{(2l)} = U^{(l)}$, $\|l\| \le p$, причому якщо хоча б одна компонента вектора l є непарною, то $U_1^{(l)} = 0$, $\|l\| \le 2p$. Власні числа незбуреного оператора Λ позначимо через λ_l. Кожне з них двократне: базис власного простору числа $\lambda_l = \frac{1}{4}(l, \omega)^2$ має вигляд e_l, e_{-l}, де $e_l = e^{\frac{1}{2} i (l, \omega)}$. Цей власний простір позначимо через V_l. При цьому будемо ототожнювати простори V_l та V_{-l}. Тоді простір інтегровних із квадратом функцій на торі $\mathbb{T}^d$ можна подати у вигляді ортогональної суми $\oplus V_h$, де підсумовування ведеться за всіма такими d-вимірними цілочисловими векторами h, що або $h = 0$, або перша ненульова компонента вектора h є додатною.

Тепер будемо досліджувати збурення кратного власного числа $\lambda_k = \mu_k^2 = \frac{1}{4}(k, \omega)^2$ і відповідного двовимірного підпростору V_k.

Шукатимемо збурений двовимірний інваріантний простір у вигляді графіка відображення $B^0 + \varepsilon B^1 + \varepsilon^2 B^2 + \ldots$. Умову інваріантності графіка запишемо у вигляді операторного рівняння

$$(\Lambda + \varepsilon A)\left(B^0 + \varepsilon B^1 + \ldots\right) = \left(B^0 + \varepsilon B^1 + \ldots\right)(\lambda_k I + \varepsilon a_1 + \ldots), \tag{5}$$

де $B^n : V_k \to \oplus V_h$ та $a_n : V_k \to V_k$, $n \ge 1$, — невідомі оператори, I — тотожне перетворення у V_k, $B^0 : V_k \to \oplus V_h$ — оператор вкладення. Будемо розв'язувати операторне рівняння (5), прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях ε. Так, зібравши коефіцієнти при ε^n в обох частинах (5), отримаємо

$$B^n \lambda_k - \Lambda B^n = A B^{n-1} - B^{n-1} a_1 - \ldots - B^1 a_{n-1} - B^0 a_n.$$

Позначивши ортопроектор на простір V_j через Pr_j, визначимо блоки $\mathrm{Pr}_j A \,\mathrm{Pr}_h =:$ $=: A_{hj} : V_h \to V_j$, $\mathrm{Pr}_h B^s =: B_h^s : V_k \to V_h$ і, прирівнявши відповідно V_k- та V_m-компоненти, знайдемо

$$a_n = \sum_{h \ne k} A_{hk} B_h^{n-1} - \sum_{s=1}^{n-1} B_k^s a_{n-s},$$

$$(\lambda_k - \lambda_m) B_m^n = \sum_{h \ne k} A_{hm} B_h^{n-1} - B_m^{n-1} a_1 - \ldots - B_m^1 a_{n-1} + A_{km} B_k^{n-1}.$$

Тут матриці операторів B_k^s, $s = 0, \ldots, n-1$, з урахуванням дійсності потенціала $u(\omega t)$ мають вигляд $\begin{pmatrix} b_{1,s} & b_{2,s} \\ b_{2,s}^* & b_{1,s}^* \end{pmatrix}$, де $b_{1,s}, b_{2,s}$ — довільні комплексні числа.

Таким чином, оператори a_n та B_m^n, $m \ne k$, залежать від того, як вибрано оператори $B_k^1, \ldots, B_k^{n-1}$, тобто $a_n = a_n\left(B_k^1, \ldots, B_k^{n-1}\right)$, $B_m^n = B_m^n\left(B_k^1, \ldots, B_k^{n-1}\right)$, $m \ne k$.

Покладемо

$$\Lambda(\lambda_k, \varepsilon) = \lambda_k \cdot I + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots .$$

Це розвинення є формальним. Однак, якщо ми покажемо, що коефіцієнти розвинень за степенями ε „власних значень” формального оператора $\Lambda(\lambda_k, \varepsilon)$ не залежать від $B_k^1, B_k^2, \ldots$, то з урахуванням теореми 2 можна буде стверджувати, що зазначені розвинення є збіжними рядами Тейлора функцій $\lambda^-(\varepsilon)$, $\lambda^+(\varepsilon)$.

Подамо B_m^n у вигляді $B_m^n = \bar{B}_m^n + \tilde{B}_m^n$, де $\bar{B}_m^n = B_m^n(0, \ldots, 0)$. Аналогічно $a_n = \bar{a}_n + \tilde{a}_n$, де $\bar{a}_n = a_n(0, \ldots, 0)$. Наприклад,

$$a_1 = \bar{a}_1 = A_{kk}, \quad \tilde{a}_1 = 0, \quad B_m^1 = \bar{B}_m^1 = \frac{A_{km}}{(\lambda_k - \lambda_m)}, \quad \tilde{B}_m^1 = 0;$$

$$\bar{a}_2 = \sum_{h \neq k} A_{hk} \bar{B}_h^1, \quad \tilde{a}_2 = \left[\bar{a}_1, B_k^1\right], \quad \bar{B}_m^2 = \sum_{h \neq k} \frac{A_{hm} B_h^1}{\lambda_k - \lambda_m} - \frac{\bar{B}_m^1 a_1}{\lambda_k - \lambda_m}, \quad \tilde{B}_m^2 = B_m^1 B_k^1;$$

$$\bar{a}_3 = \sum_{j \neq k, h \neq k} \frac{A_{hk} A_{jh} \bar{B}_j^1}{\lambda_k - \lambda_h} - \sum_{h \neq k} \frac{A_{hk} \bar{B}_h^1 a_1}{\lambda_k - \lambda_h}, \quad \tilde{a}_3 = \left[\bar{a}_2, B_k^1\right] - B_k^1\left[\bar{a}_1, B_k^1\right] + \left[\bar{a}_1, B_k^2\right],$$

$$\bar{B}_m^3 = \sum_{h \neq k} \frac{A_{hm} \bar{B}_h^2}{\lambda_k - \lambda_m} - \frac{\bar{B}_m^1 \bar{a}_2}{\lambda_k - \lambda_m} - \frac{B_m^2 \bar{a}_1}{\lambda_k - \lambda_m}, \quad \tilde{B}_m^3 = \bar{B}_m^2 B_k^1 + \bar{B}_m^1 B_k^2, \ldots .$$

Тут $[\cdot, \cdot]$ — комутатор.

Методом математичної індукції доведемо таке твердження.

Лема 1. *Для* $n \geq 3$

$$\bar{B}_m^n = \sum_{h \neq k} \frac{A_{hm} \bar{B}_h^{n-1}}{\lambda_k - \lambda_m} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\bar{B}_m^s \bar{a}_{n-s}}{\lambda_k - \lambda_m}, \tag{6}$$

$$\tilde{B}_m^n = \sum_{s=1}^{n-1} \bar{B}_m^s B_k^{n-s}, \tag{7}$$

$$\bar{a}_n = \sum_{h \neq k} A_{hk} \bar{B}_h^{n-1}, \quad \tilde{a}_n = \sum_{s=1}^{n-1} \left[\bar{a}_s, B_k^{n-s}\right] - \sum_{s=1}^{n-2} B_k^s \tilde{a}_{n-s}. \tag{8}$$

Доведення. Прирівнюючи коефіцієнти при ε^{n+1} у рівнянні (5), отримуємо

$$B^{n+1} \lambda_k - \Lambda B^{n+1} = A B^n - B^n a_1 - \ldots - B^1 a_n - B^0 a_{n+1}. \tag{9}$$

Тоді, прирівнюючи V_m-компоненти при $m \neq k$, знаходимо

$$(\lambda_k - \lambda_m) B_m^{n+1} = \sum_{h \neq k} A_{hm} B_h^n - B_m^n a_1 - \ldots - B_m^1 a_n + A_{km} B_k^n.$$

Одразу отримуємо $\bar{B}_m^{n+1} = \sum\limits_{h\neq k} \dfrac{A_{hm}\bar{B}_h^n}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\bar{B}_m^s \bar{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m}$. Далі знаходимо $\tilde{B}_m^{n+1}$:

$$\tilde{B}_m^{n+1} = \sum_{h\neq k} \frac{A_{hm}\tilde{B}_h^n}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\bar{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=2}^{n} \frac{\tilde{B}_m^s \bar{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=2}^{n-1} \frac{\tilde{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} + \bar{B}_m^1 B_k^n =$$

$$= \sum_{h\neq k} \frac{A_{hm}\sum\limits_{s=1}^{n-1}\bar{B}_h^s B_k^{n-s}}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\bar{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=2}^{n} \frac{\tilde{B}_m^s \bar{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=2}^{n-1} \frac{\tilde{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} + \bar{B}_m^1 B_k^n =$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} \left(\bar{B}_m^{s+1} + \sum_{q=1}^{s} \frac{\bar{B}_m^q \bar{a}_{s+1-q}}{\lambda_k-\lambda_m} \right) B_k^{n-s} - \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\bar{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} - \sum_{s=2}^{n} \frac{\tilde{B}_m^s \bar{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} -$$

$$- \sum_{s=2}^{n-1} \frac{\tilde{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}}{\lambda_k-\lambda_m} + \bar{B}_m^1 B_k^n = \sum_{s=1}^{n} \bar{B}_m^s B_k^{n+1-s} + \frac{1}{\lambda_k-\lambda_m}\Sigma,$$

де

$$\Sigma = \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{s} \bar{B}_m^q \bar{a}_{s+1-q} B_k^{n-s} - \sum_{s=1}^{n-1} \bar{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s} - \sum_{s=2}^{n} \tilde{B}_m^s \bar{a}_{n+1-s} - \sum_{s=2}^{n-1} \tilde{B}_m^s \tilde{a}_{n+1-s}.$$

Неважко переконатись, що $\Sigma = 0$. Таким чином,

$$\tilde{B}_m^{n+1} = \sum_{s=1}^{n} \bar{B}_m^s B_k^{n+1-s} + \frac{1}{\lambda_k-\lambda_m}\Sigma = \sum_{s=1}^{n} \bar{B}_m^s B_k^{n+1-s},$$

а отже, ми отримали (7) для $\tilde{B}_m^{n+1}$.

Далі, прирівнюючи V_k-компоненти у рівності (9), знаходимо

$$a_{n+1} = \sum_{h\neq k} A_{hk} B_h^n - \sum_{s=1}^{n} B_k^s a_{n+1-s}.$$

Тому $\bar{a}_{n+1} = \sum\limits_{h \neq k} A_{hk} \bar{B}_h^n$. Визначимо тепер $\tilde{a}_{n+1}$:

$$\tilde{a}_{n+1} = \sum_{h \neq k} A_{hk} \tilde{B}_h^n + A_{kk} B_k^n - \sum_{s=1}^{n} B_k^s \bar{a}_{n+1-s} - \sum_{s=1}^{n} B_k^s \tilde{a}_{n+1-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{h \neq k} A_{hk} \bar{B}_h^s B_k^{n-s} + A_{kk} B_k^n - \sum_{s=1}^{n-1} B_k^s \tilde{a}_{n+1-s} = \sum_{s=2}^{n} \bar{a}_s B_k^{n+1-s} + \bar{a}_1 B_k^n -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} B_k^s \bar{a}_{n+1-s} - \sum_{s=1}^{n-1} B_k^s \tilde{a}_{n+1-s} = \sum_{s=1}^{n} \left[\bar{a}_s, B_k^{n+1-s} \right] - \sum_{s=1}^{n-1} B_k^s \tilde{a}_{n+1-s}$$

і ми отримали (8) для $\bar{a}_{n+1}$ та $\tilde{a}_{n+1}$.

Лема 2. *Оператори* $\Lambda(\lambda_k, \varepsilon)$ *та* $\bar{\Lambda}(\lambda_k, \varepsilon) := \lambda_k \cdot I + \varepsilon \bar{a}_1 + \varepsilon^2 \bar{a}_2 + \ldots$ *є формально подібними, тобто існує такий формальний оператор* $S = I + \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \ldots$, *де* $s_j : V_k \to V_k$, *що справджується формальна рівність* $\Lambda = S^{-1} \bar{\Lambda} S$.

Доведення. Якщо покласти $s_j = B_k^j$, $j \in \mathbb{N}$, то, врахувавши співвідношення (8), легко переконатись, що $S\Lambda = \bar{\Lambda} S$.

Таким чином, з леми 2 випливає, що власні значення оператора $\Lambda(\lambda_k, \varepsilon)$ визначаються однозначно, а отже, збігаються з власними значеннями оператора $\bar{\Lambda}(\lambda_k, \varepsilon)$.

Далі, аналогічно [1], встановимо явний вигляд та деякі властивості коефіцієнтів $\bar{a}_j$, $j \in \mathbb{N}$, у розкладі оператора $\bar{\Lambda}(\lambda_k, \varepsilon)$.

Означення 1. *Сагайдаком, який відповідає (4), називається орієнтований граф, вершини якого відповідають* V_h *(вони позначаються* h*); ребро від* h *до* j *проводиться, якщо оператор* A_{hj} *ненульовий.*

Означення 2. *Хронологічним добутком шляху* $\gamma = (h \to j \to \ldots \to m \to n)$ *за стрілками сагайдака називається добуток операторів, що відповідають стрілкам у встановленому стрілками порядку:* $\Pi_\gamma(A) = (A_{mn} \ldots A_{hj}) : V_h \to V_n$.

Лема 3. *Матриця оператора* $A_{hj} : V_h \to V_j$ *у вибраному базисі має вигляд*

$$A_{hj} = \begin{pmatrix} U_1^{(j-h)} & U_1^{(j+h)} \\ U_1^{(-j-h)} & U_1^{(h-j)} \end{pmatrix}.$$

Доведення випливає з того, що $\Pr_j[A \cdot e_h] = U_1^{(j-h)} e_j + U_1^{(-j-h)} e_{-j}$, $\Pr_j[A \cdot e_{-h}] = U_1^{(j+h)} e_j + U_1^{(-j+h)} e_{-j}$.

Означення 3. *Стрілку сагайдака* $h \to j$ *назвемо далекою, якщо* $\|h + j\| > 2p$, *де* $2p$ *— порядок многочлена* u_1.

З леми 3 випливає така лема.

Лема 4. *Якщо стрілка $h \to j$ далека, то матриця оператора A_{hj} є діагональною.*

Лема 5. *Нехай петля з n стрілок починається і закінчується в точці k. Тоді якщо довжина кожної стрілки не перевищує $2p$ та $np < \|k\|$, то всі стрілки петлі є далекими.*

Доведення. Нехай до петлі входить близька стрілка $h \to j$, тобто $\|h+j\| \le 2p$. Замінимо стрілку $h \to j$ стрілкою $h \to -j$, а всі наступні за вершиною j вершини та стрілки замінимо на симетричні відносно початку координат. Зрозуміло, що довжина стрілки $h \to -j$ не перевищує $2p$. Оскільки ми отримали шлях з k до $-k$, що складається з n стрілок, довжина кожної з яких не перевищує $2p$, то $2np \ge 2\|k\|$, що суперечить умові леми.

Лема 6. *Нехай для $l = 1, \ldots, n$ оператор a є скалярним. Тоді $a_{n+1} = \bar{a}_{n+1} = \sum\limits_{h \ne k} A_{hk} \bar{B}_h^n$.*

Доведення. Застосуємо лему 1. Оскільки скалярний оператор комутує з будь-яким оператором, то $\tilde{a}_l = 0, l = 1, \ldots, n$, що і доводить лему.

Тепер розглянемо правильно складені дужкові символи.

Означення 4. *Число букв та відкритих дужок, що входять до дужкового символа, назвемо його довжиною.*

Означення 5. *Заповненням дужкового символа будемо називати результат підстановки в нього замість букв ненульових вершин сагайдака, що відповідає $\Lambda + \varepsilon A$.*

Означення 6. *Петлею заповнення довжини l називається петля $k \to j_1 \to \ldots \ldots \to j_l \to k$, де $j_1, \ldots, j_l$ — вершини заповнення або вершина k (на місці відкритих дужок).*

Означення 7. *Діаграма заповнення утворюється з петлі заповнення та пунктирної стрілки. Пунктирна стрілка веде до кожного k, що відповідає відкритій дужці, від вершини, яка передує закритій дужці, що відповідає цій відкритій.*

Означення 8. *Заповнення називається допустимим, якщо його петля складається зі стрілок сагайдака. Заповнення називається m-допустимим, якщо його шлях веде з k до m за стрілками сагайдака.*

Означення 9. *Шлях заповнення $\delta(J)$, що відповідає заповненню J, утворюється з петлі заповнення шляхом відкидання правої вершини k разом зі стрілкою, що веде до цієї вершини.*

Означення 10. *Знаменником заповнення q_J називається добуток множників вигляду $\lambda_k - \lambda_h$ (по одному для кожної суцільної стрілки діаграми заповнення, що веде до вершини $h \ne k$) й вигляду $\lambda_k - \lambda_j$ (по одному для кожної пунктирної стрілки діаграми заповнення, що веде до вершини $h \ne k$).*

Як і в періодичному випадку [1], має місце наступна лема.

Лема 7. *В операторному рівнянні (5) $\bar{a}_n = \sum\limits_{|J|=n-1} \dfrac{\Pi_{\gamma(J)}(A)}{q_J(\Lambda)}$ (сума береться за всіма допустимими заповненнями дужкових символів довжини $n-1$), $\bar{B}_m^n = \sum\limits_{|J|=n} \dfrac{\Pi_{\delta(J)}(A)}{q_J(\Lambda)}$ (сума береться за всіма m-допустимими заповненнями дужкових символів довжини n).*

Лема 8. *Матриці операторів $\bar{a}_n$, $n \ge 1$, мають однакові дійсні діагональні елементи.*

Доведення. Якщо у вираз для $\bar{a}_n$ входить доданок, що відповідає петлі $k \to j_1 \to \ldots \ldots \to j_{n-1} \to k$, то $\bar{a}_n$ також містить доданок, що відповідає петлі $k \to j_{n-1} \to \ldots \ldots \to j_1 \to k$. Тому матриця оператора $\bar{a}_n$ складається з сум матриць вигляду $C + C'$,

де $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2^* & c_1^* \end{pmatrix}$, а матриця C' одержується з матриці C перестановкою діагональних елементів, тобто $C' = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2 \\ c_2^* & c_1 \end{pmatrix}$. Дійсно, $A_{j_{n-1}k} \dots A_{j_1 j_2} A_{kj_1} + A_{j_1 k} A_{j_2 j_1} \dots A_{kj_{n-1}} = = A_{j_{n-1}k} \dots A_{j_1 j_2} A_{kj_1} + A'_{kj_1} A'_{j_1 j_2} \dots A'_{j_{n-1}k} = A_{j_{n-1}k} \dots A_{j_1 j_2} A_{kj_1} + \left(A_{j_{n-1}k} \dots A_{j_1 j_2} A_{kj_1}\right)'$.
Лему доведено.

Враховуючи лему 2, для визначення поправки до двократного власного числа $\lambda_k = \mu_k^2 = \dfrac{1}{4}(k,\omega)^2$ необхідно знайти розвинення власних чисел $\lambda^{\pm}(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon\eta_1^{\pm} + +\varepsilon^2\eta_2^{\pm} + \dots$ оператора $\bar{\Lambda}(\lambda_k, \varepsilon)$. Коефіцієнти розвинень власного числа та відповідного власного вектора $\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \dots$ визначимо з тотожності

$$(\lambda_k \cdot I + \varepsilon\bar{a}_1 + \dots)(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \dots) = (\lambda_k + \varepsilon\eta_1 + \dots)(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \dots), \tag{10}$$

прирівнявши члени при відповідних степенях ε.

Лема 9. *Для всіх* j, $1 \le j \le r-1$, *де* $r = -[-\|k\|/p]$, *матриці операторів* $\bar{a}_j$ *є скалярними.*

Доведення. За лемою 7 оператор $\bar{a}_n$ виражається сумою за всіма допустимими заповненнями, що відповідають петлі з k у k. Довжина кожної стрілки не перевищує $2p$. За лемою 5, якщо $np < \|k\|$, то всі стрілки петлі є далекими, а тому матриці всіх операторів, що входять до хронологічних добутків у виразі для $\bar{a}_n$, є діагональними. Таким чином, на підставі леми 8 оператор $\bar{a}_n$ буде скалярним для $n < \|k\|/p$.

Взявши до уваги дійсність потенціала $u(\omega t)$ та лему 8, позначимо через $\begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} \\ a_{j,2}^* & a_{j,1} \end{pmatrix}$, $a_{j,1} \in \mathbb{R}$, матрицю оператора $\bar{a}_j$.

Лема 10. *Справджуються рівності* $\eta_j = \eta_j^+ = \eta_j^- = a_{j,1}$, $1 \le j \le r-1$, *де* $r = = -[-\|k\|/p]$, *і якщо* $a_{r,2} \ne 0$, *то* $\eta_r^+ = a_{r,1} + |a_{r,2}|$, $\eta_r^- = a_{r,1} - |a_{r,2}|$.

Доведення. За лемою 9 оператор $\bar{a}_j$ буде скалярним, якщо $1 \le j \le r-1$, а отже, $\eta_j = = \eta_j^+ = \eta_j^- = a_{j,1}$, $1 \le j \le r-1$. Нехай $a_{r,2} \ne 0$. Тоді $\eta_r^{\pm}$ визначаються з характеристичного рівняння $\det \begin{pmatrix} a_{r,1} - \eta_r & a_{r,2} \\ a_{r,2}^* & a_{r,1} - \eta_r \end{pmatrix} = 0$. Таким чином, $\eta_r^+ = a_{r,1} + |a_{r,2}|$, $\eta_r^- = a_{r,1} - |a_{r,2}|$.

З доведеної леми випливає: якщо $a_{r,2} \ne 0$, то на r-му кроці ми спостерігаємо розщеплення кратного власного числа. Тоді з урахуванням рівностей $\eta_j^+ = \eta_j^-$, $1 \le j \le r-1$, матимемо $|\lambda^+(\varepsilon) - \lambda^-(\varepsilon)| \le c|\varepsilon|^r$, де $c > 0$ — деяка стала.

3. Висновки. В даній роботі підхід Арнольда [1] побудови формальних розкладів власних чисел оператора типу Мат'є та опису коефіцієнтів цих розкладів з використанням діаграмної техніки [2] розповсюджено на випадок рівняння (1) з квазіперіодичним потенціалом у вигляді тригонометричного многочлена скінченного порядку. Встановлено, що коефіцієнти зазначених формальних розкладів визначаються однозначно. Це факт, разом з властивістю аналітичності за малим параметром власних чисел оператора Шредінгера з аналітичним квазіперіодичним потенціалом, яку встановлено у [13], дозволяє показати збіжність формальних розкладів власних чисел та побудувати оператор, який визначає власні числа, а отже, і зони нестійкості для рівняння (1). Перевагою такого підходу у порівнянні з КАМ-методами, які теж використовуються для побудови резонансних зон, є більш проста реалізація, що важливо при практичному застосуванні.

1. *Арнольд В. И.* Замечания о теории возмущений для задач типа Матье // Успехи мат. наук. — 1983. — **38**, вып. 4. — С. 189 – 203.
2. *Киселев А. А.* Диаграммная техника в общей теории возмущений и в адиабатической теории молекулярных спектров // Вопросы квантовой теории атомов и молекул. — 1978. — Вып. 1. — С. 108 – 143.
3. *Фомин В. Н.* О динамической неустойчивости линейных систем с почти периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1968. — **178**, № 1. — С. 43 – 46.
4. *Красинский Г. А.* Параметрический резонанс в канонических системах линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Там же. — **180**, № 3. — С. 526 – 529.
5. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. — 1963. — **18**, вып. 5. — С. 13 – 40.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости // Укр. мат. журн. — 1965. — **17**, № 6. — С. 42 – 59.
7. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. — 1967. — **169**. — P. 136 – 176.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1969. — 248 с.
9. *Белоколос Е. Д.* Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Оценки размеров лакун в спектре // Теор. и мат. физика. — 1975. — **25**, № 3. — С. 344 – 357.
10. *Белоколос Е. Д.* Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Зависимость энергии от квазиимпульса // Там же. — 1976. — **26**, № 1. — С. 35 – 41.
11. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом // Функцион. анализ и его прил. — 1975. — **9**, № 4. — С. 8 – 21.
12. *Moser J., Pöschel J.* An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials// Comment. math. helv. — 1984. — **59**. — P. 39 – 85.
13. *Puig J., Simó C.* Analytic families of reducible linear quasi-periodic differential equations // Ergod. Theory and Dynam. Systems. — 2006. — **26**, № 2.— P. 481 – 524.
14. *Broer H. W., Puig J., Simó C.* Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill – Schrödinger equation // Communs Math. Phys. — 2003.— **241**, № 2-3. — P. 467 – 503.

Одержано 21.09.2006