УДК 517 . 928

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГОЛОВНОГО ОПЕРАТОРА

О. І. Кочерга

Ніжин. ун-т
Україна, 16602, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

The asymptotic character of a Cauchy problem for a singularly perturbed linear system of differential equations with a degenerate matrix at the derivatives in the case where the limit matrix bundle is regular and has multiple „finite" and „infinite" elementary divisors is proved. Conditions under which the constructed formal solutions are asymptotic expansions of the corresponding exact solutions have been found.

Доказан асимптотический характер решения задачи Коши для сингулярно возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных в случае, когда предельный пучок матриц регулярен и имеет кратные „конечный" и „бесконечный" элементарные делители. Установлены условия, при выполнении которых построенные формальные решения являются асимптотическими разложениями соответствующих точных решений.

Розглянемо задачу Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\, x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

де $t \in [0,T]$, $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку, $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $\varepsilon > 0$ — малий дійсний параметр, $h \in \mathbb{N}$, $\det B(t) \equiv 0$ на $[0,T]$.

В роботах [1 – 4] побудовано формальний розв'язок задачі Коші (1), (2) у випадку, коли гранична в'язка матриць $\mathcal{L}(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B(t)$ є регулярною і має кратні „скінченний" та „нескінченний" елементарні дільники. Показано, що розв'язок будується у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t (\lambda_0 + \lambda_i(t,\varepsilon))dt\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{q-1} v_j(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \frac{dt}{\xi_j(t,\varepsilon)}\right) + w(t,\varepsilon), \tag{3}$$

де $u_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,p}$, , $v_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q-1}$, $w(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,p}$, $\xi_j(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,q-1}$, — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненями

$$u_i(t,\varepsilon) = \mu^{-(p-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{4}$$

$$v_j(t,\varepsilon) = \nu^{-(q-2)} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k^{(j)}(t), \quad \xi_j(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \xi_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1,q-1}, \tag{5}$$

$$w(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(t). \tag{6}$$

Тут $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}, \quad \nu = \sqrt[q-1]{\varepsilon}$.

Доведемо, що формальний розв'язок (3) при виконанні певних умов є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі Коші (1), (2) у розумінні [5].

Для цього „обірвемо" розв'язок (3) на m-му кроці і знайдемо m-те наближення точного розв'язку:

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} u_m^{(i)}(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-1} v_m^{(j)}(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t,\varepsilon)}\right) + w_m(t,\varepsilon), \tag{7}$$

де

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \mu^{-(p-1)} \sum_{k=0}^{m} \mu^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1,p},$$

$$v_m^{(j)}(t,\nu) = \nu^{-(q-2)} \sum_{k=0}^{m} \nu^k v_k^{(j)}(t), \quad \xi_m^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{m} \nu^k \xi_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1,q-1}, \tag{8}$$

$$w_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k w_k(t).$$

Справджується така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення на даному відрізку $[0,T]$:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \qquad f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f_k(t); \tag{9}$$

2) матриці $A_k(t), k = 0, 1, \ldots, B(t)$ та вектор-функції $f_k(t), k = 0, 1, \ldots,$ є нескінченно диференційовними на $[0, T]$;

3) матрична в'язка $\mathcal{L}(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна на $[0, T]$ і має один „скінченний" елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратності p та один „нескінченний" елементарний дільник кратності $q = n - p$;

4) $L_{01} = -(\Gamma_1 \varphi, \psi) = -(A_1 \varphi, \psi) \neq 0 \quad \forall\, t \in [0, T]$,

$$M_{11} = \left(A_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \tag{10}$$

де $\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)$ — елементи нуль-просторів матриць $A_0(t) - \lambda_0(t)B(t)$ та $B(t)$ відповідно, $\psi(t), \tilde{\psi}(t)$ — елементи нуль-просторів відповідних спряжених матриць $(A_0(t) - \lambda_0(t)B(t))^*$ та $B^*(t)$;

5) власне значення $\lambda_0(t)$ в'язки $\mathcal{L}(t, \varepsilon)$ є відмінним від нуля і вектор x_0 задовольняє співвідношення $(A_m(0)x_0 + f_m(0), \tilde{\psi}) = 0,\ m = 0, 1, \ldots$;

6) $\operatorname{Re} \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,

$$\operatorname{Re} \xi_m^{(j)}(t, \varepsilon) \leq 0, \quad j = \overline{1, q-1}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{11}$$

Тоді існує такий точний розв'язок $x(t, \varepsilon)$ задачі (1), (2), що має місце оцінка

$$\| x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon) \| \leq c \varepsilon^{\alpha - 2 - h}, \tag{12}$$

де $\alpha = \min \left[\dfrac{m+2}{p} - 1,\ \dfrac{m+1}{q-1} - 1 \right]$, c — деяка стала, що не залежить від ε.

Доведення. Підставивши m-те наближення (7) у ліву частину рівняння (1), отримаємо

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx_m(t, \varepsilon)}{dt} - A(t, \varepsilon) x_m(t, \varepsilon) - f(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} \Bigg[\varepsilon^h B(t) \left(u_m^{(i)}(t, \varepsilon) \right)' +$$

$$+ \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) B(t) u_m^{(i)}(t, \varepsilon) - A(t, \varepsilon) u_m^{(i)}(t, \varepsilon) \Bigg] \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) dt \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-1} \left[\varepsilon^h B(t) \left(v_m^{(j)}(t, \varepsilon) \right)' + \frac{B(t) v_m^{(j)}(t, \varepsilon)}{\xi_m^{(j)}(t, \varepsilon)} - A(t, \varepsilon) v_m^{(j)}(t, \varepsilon) \right] \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t, \varepsilon)} \right) +$$

$$+ \varepsilon^h B(t) (w_m(t, \varepsilon))' - A(t, \varepsilon) w_m(t, \varepsilon) - f(t, \varepsilon). \tag{13}$$

Із способу отримання коефіцієнтів [1, 3] випливає, що вираз у перших квадратних дужках є величиною порядку $O\left(\mu^{m-p+2}\right)$, а в других — величиною порядку $O\left(\nu^{m-q+2}\right)$. Оскільки згідно з (10) $\xi_m^{(j)}(t, \varepsilon) \neq 0$ при $t \in [0, T]$ і досить малих ε, а коефіцієнти $\xi_k^{(j)}(t)$, $k = \overline{1, m}$, розвинення (8) є нескінченно диференційовними на даному відрізку, то

$\left|(\xi_m^{(j)}(t,\varepsilon))^{-1}\right| \le \varepsilon^{-1}c$, де c — деяка стала, що не залежить від параметра ε. На підставі цього рівняння (13) запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt} - A(t,\varepsilon)x_m(t,\varepsilon) - f(t,\varepsilon) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \mu^{m-p+2} a_i(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-1} \nu^{m-q+2} b_j(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t,\varepsilon)}\right) + \varepsilon^{m+1}d(t,\varepsilon), \qquad (14)$$

де $a_i(t,\varepsilon),\ b_j(t,\varepsilon), d(t,\varepsilon)$ — деякі вектор-функції, рівномірно обмежені на $[0,T]$.

Оскільки $\operatorname{Re}(1/z) = (\operatorname{Re} z)/|z|^2$, то згідно з умовою (11) $\operatorname{Re}(1/\xi_m^{(j)}(t,\varepsilon)) \le 0$, $j = \overline{1, q-1}$. Тоді

$$\left|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt\right)\right| \le 1, \quad \left|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \frac{dt}{\xi_m^{(j)}(t,\varepsilon)}\right)\right| \le 1.$$

Тому (14) набирає вигляду

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt} - A(t,\varepsilon)x_m(t,\varepsilon) - f(t,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{\frac{m+2}{p}-1}\sum_{i=1}^{p} a_i(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{m+1}{q-1}-1}\sum_{j=1}^{q-1} b_j(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}d(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha}a(t,\varepsilon), \qquad (15)$$

де $\alpha = \min\Big[\dfrac{m+2}{p} - 1, \dfrac{m+1}{q-1} - 1\Big]$, $a(t,\varepsilon)$ — деяка вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0,T]$.

При підстановці m-го наближеного розв'язку (7) у початкову умову (2) матимемо

$$\sum_{i=1}^{p} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{q-1} v_m^{(j)}(0,\varepsilon) + w_m(0,\varepsilon) = x_0.$$

Оцінимо різницю

$$x_m(0,\varepsilon) - x_0 = \varepsilon^{\frac{m+2}{p}-1}\sum_{i=1}^{p} c_i(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{m+1}{q-1}-1}\sum_{j=1}^{q-1} k_j(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}r(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha}b(\varepsilon), \qquad (16)$$

де $b(\varepsilon)$ — деякий вираз, обмежений при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Отже, m-те наближення (7) задовольняє (1) та початкову умову (2) з точністю $O(\varepsilon^\alpha)$.

Нехай $x(t,\varepsilon)$ — точний розв'язок задачі (1), (2). Позначимо $y_m(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)$. Тоді, враховуючи (15) і (16), отримуємо

$$\begin{aligned} &\varepsilon^h B(t)\frac{dy_m(t,\varepsilon)}{dt} - A(t,\varepsilon)y_m(t,\varepsilon) = \varepsilon^\alpha a(t,\varepsilon), \\ &y_m(0,\varepsilon) = \varepsilon^\alpha b(\varepsilon). \end{aligned} \tag{17}$$

Введемо до розгляду матриці $Q(t,\varepsilon)$ та $P(t,\varepsilon)$ розмірності $n\times n$. Матрицю $Q(t,\varepsilon)$ складемо з вектор-стовпців $\tilde u_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,p}, \tilde v_m^{(j)}(t,\varepsilon),\ j=\overline{1,q-1}$, та $\tilde\varphi(t)$ — власного вектора матриці $B(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню:

$$Q(t,\varepsilon) = \left[\tilde u_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\tilde u_m^{(p)}(t,\varepsilon);\ \tilde v_m^{(l)}(t,\varepsilon),\ldots,\tilde v_m^{(q-1)}(t,\varepsilon),\ \tilde\varphi(t)\right] = \left[U_m(t,\varepsilon),\ \tilde\varphi(t)\right].$$

Матрицю $P(t,\varepsilon)$ складемо з вектор-стовпців, які утворюють жорданові ланцюжки матриці A_0^* відносно B^* та B^* відносно A^* відповідно:

$$P(t,\varepsilon) = \left[\psi_1(t),\ldots,\psi_p(t),\tilde\psi_q(t),\tilde\psi_{q-1}(t),\ldots,\tilde\psi_2(t),\tilde\psi_1(t)\right]^* = \left[V_m(t,\varepsilon),\tilde\psi(t)\right]^*,$$

де

$$\psi_k(t) = (H^*B^*)^{k-1}\psi(t),\ k=\overline{1,p},\quad \tilde\psi_i(t) = (G^*A_0^*)^{i-1}\tilde\psi(t),\ i=\overline{1,q},$$

$H(t)$, $G(t)$ — напівобернені матриці до матриць $A_0(t)-\lambda_0(t)B(t)$ та $B(t)$ відповідно. Через $\tilde u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$ та $\tilde v_m^{(j)}(t,\varepsilon)$ тут позначено n-вимірні вектори, які визначаються при побудові лінійно незалежних асимптотичних розв'язків однорідної системи, яка відповідає системі (1), згідно з теоремами 3.3, 3.7 із [6]. Відповідні формули, які ми будемо використовувати, наведено в § 3.2, 3.3 роботи [6].

Оскільки кожен з вектор-стовпців матриць $P(t,\varepsilon)$ та $Q(t,\varepsilon)$ є лінійною комбінацією базисних векторів, неважко переконатись, що ці матриці є неособливими при досить малих значеннях параметра ε, відмінних від нуля.

Виконаємо в системі (17) заміну $y_m(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)z_m(t,\varepsilon)$ і помножимо її зліва на матрицю $P(t,\varepsilon)$. Тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} &\varepsilon^h PB\frac{dQ}{dt}z_m + \varepsilon^h PBQ\frac{dz_m}{dt} - PAQz_m = \varepsilon^\alpha Pa(t,\varepsilon), \\ &Q(0,\varepsilon)z_m(0,\varepsilon) = \varepsilon^\alpha b(\varepsilon). \end{aligned} \tag{18}$$

Оскільки матриця $Q^{-1}(t,\varepsilon)$ має полюс по ε порядку $\max\left(\dfrac{p-1}{p},\ \dfrac{q-1}{q-1}\right) = 1$, введемо заміну $Q^{-1}(0,\varepsilon)b(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}\tilde b(\varepsilon)$. Крім того, позначимо $Pa(t,\varepsilon) = \tilde a(t,\varepsilon)$. В результаті одержимо

$$\begin{aligned} &\varepsilon^h PBQ\frac{dz_m}{dt} = (PL(t,\varepsilon)Q)z_m + \varepsilon^\alpha\tilde a(t,\varepsilon), \\ &z_m(0,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha-1}\tilde b(\varepsilon). \end{aligned} \tag{19}$$

Дослідимо коефіцієнти першого рівняння цієї системи:

$$PBQ = \left(V_m, \tilde{\psi}\right)^* B\left(U_m, \tilde{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} V_m^* \\ \tilde{\psi}^* \end{pmatrix} (BU_m, B\tilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} V_m^* BU_m & V_m^* B\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* BU_m & \tilde{\psi}^* B\tilde{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що $B\tilde{\varphi} = 0, B^*\tilde{\psi} = 0$, отримуємо

$$PBQ = \begin{pmatrix} V_m^* BU_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю $V_m^* BU_m$. Вона має розмірність $(n-1) \times (n-1)$. Згідно зі структурою матриць $V_m^*(t,\varepsilon), U_m(t,\varepsilon)$ матимемо

$V_m * B\, U_m =$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \left(B\tilde{u}_m^{(1)}, \psi_1\right) & \dots & \left(B\tilde{u}_m^{(p)}, \psi_1\right) & \left(B\tilde{v}_m^{(1)}, \psi_1\right) & \dots & \left(B\tilde{v}_m^{(q-1)}, \psi_1\right) \\ \dots & (I) & \dots & \dots & (II) & \dots \\ \left(B\tilde{u}_m^{(1)}, \psi_p\right) & \dots & \left(B\tilde{u}_m^{(p)}, \psi_p\right) & \left(B\tilde{v}_m^{(1)}, \psi_p\right) & \dots & \left(B\tilde{v}_m^{(q-1)}, \psi_p\right) \\ \hline \left(B\tilde{u}_m^{(1)}, \tilde{\psi}_q\right) & \dots & \left(B\tilde{u}_m^{(p)}, \tilde{\psi}_q\right) & \left(B\tilde{v}_m^{(1)}, \tilde{\psi}_q\right) & \dots & \left(B\tilde{v}_m^{(q-1)}, \tilde{\psi}_q\right) \\ \dots & (III) & \dots & \dots & (IV) & \dots \\ \left(B\tilde{u}_m^{(1)}, \tilde{\psi}_2\right) & \dots & \left(B\tilde{u}_m^{(p)}, \tilde{\psi}_2\right) & \left(B\tilde{v}_m^{(1)}, \tilde{\psi}_2\right) & \dots & \left(B\tilde{v}_m^{(q-1)}, \tilde{\psi}_2\right) \end{array}\right).$$

Враховуючи формули з § 3.2, 3.3 [6], елементи I блоку цієї матриці запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \mu^{p-1}\left(\lambda_1^{(1)}\right)^{p-1} + O(\mu^p) & \mu^{p-1}\left(\lambda_1^{(2)}\right)^{p-1} + O(\mu^p) & \dots & \mu^{p-1}\left(\lambda_1^{(p)}\right)^{p-1} + O(\mu^p) \\ \mu^{p-2}\left(\lambda_1^{(1)}\right)^{p-2} + O(\mu^{p-1}) & \mu^{p-2}\left(\lambda_1^{(2)}\right)^{p-2} + O(\mu^p) & \dots & \mu^{p-2}\left(\lambda_1^{(p)}\right)^{p-2} + O(\mu^{p-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + O(\mu) & 1 + O(\mu) & \dots & 1 + O(\mu) \end{pmatrix}.$$

Елементи четвертого блоку матимуть вигляд

$$\begin{pmatrix} \nu^{q-1}\left(\xi_1^{(1)}\right)^{q-1} + O(\nu^q) & \nu^{q-1}\left(\xi_1^{(2)}\right)^{q-1} + O(\nu^q) & \dots & \nu^{q-1}\left(\xi_1^{(q-1)}\right)^{q-1} + O(\nu^q) \\ \nu^{q-2}\left(\xi_1^{(1)}\right)^{q-2} + O(\nu^{q-1}) & \nu^{q-2}\left(\xi_1^{(2)}\right)^{q-2} + O(\nu^{q-1}) & \dots & \nu^{q-2}\left(\xi_1^{(q-1)}\right)^{q-2} + O(\nu^{q-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu\xi_1^{(1)} + O(\nu^2) & \nu\xi_1^{(2)} + O(\nu^2) & \dots & \nu\xi_1^{(q-1)} + O(\nu^2) \end{pmatrix}.$$

Елементи другого і третього блоків матимуть порядок $O(\nu^q)$ та $O(\mu^p)$ відповідно.

За умовою $\mathrm{rank}B(t) = n-1$ матриці $P(t,\varepsilon), Q(t,\varepsilon)$ є неособливими при всіх $t \in [0,T]$ і досить малих $\varepsilon \neq 0$. Отже, при $\varepsilon > 0$ $\mathrm{rank}PBQ = n-1$, тому $\det V_m^* BU_m \neq 0$ при $\varepsilon > 0$. Але з проведеного аналізу елементів цієї матриці випливає, що обернена до неї матриця має полюс порядку $\sigma = \max\left(\dfrac{p-1}{p}, \dfrac{q-1}{q-1}\right) = 1$ у точці $\varepsilon = 0$, що буде враховано далі.

Оскільки матрицю PLQ можна подати в такому ж блочному вигляді, що й матрицю PBQ :

$$PLQ = \left(V_m, \tilde{\psi}\right)^* L\left(U_m, \tilde{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} V_m^* \\ \tilde{\psi}^* \end{pmatrix} (LU_m, L\tilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} V_m^* LU_m & V_m^* L\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* LU_m & \tilde{\psi}^* L\tilde{\varphi} \end{pmatrix},$$

то перше рівняння системи (19) набере вигляду

$$\varepsilon^h \begin{bmatrix} V_m^* BU_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dz_m}{dt} = \begin{bmatrix} V_m^* LU_m & V_m^* L\tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi}^* LU_m & \tilde{\psi}^* L\tilde{\varphi} \end{bmatrix} z_m + \varepsilon^\alpha \tilde{a}(t, \varepsilon), \tag{20}$$

де

$$\tilde{\psi}^* L\tilde{\varphi} = \left(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = \left(\left(A(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) - \varepsilon^h \left(B(t)\tilde{\varphi}', \tilde{\psi}\right)\right) = \left(A(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = \varepsilon(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + O(\varepsilon^2).$$

Внаслідок того, що $(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$, $\left(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0$ при досить малих $\varepsilon > 0$, а в точці $\varepsilon = 0$ функція $\left(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)^{-1}$ матиме полюс порядку 1.

Помноживши рівність (20) зліва на матрицю $\operatorname{diag}\left\{(V_m^* BU_m)^{-1}; \left(\tilde{\psi}^* L\tilde{\varphi}\right)^{-1}\right\}$, одержимо

$$\varepsilon^h \begin{bmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dz_m}{dt} = \begin{bmatrix} (V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* LU_m & (V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* L\tilde{\varphi} \\ \left(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)^{-1} \tilde{\psi}^* LU_m & 1 \end{bmatrix} z_m + \varepsilon^{\alpha-1} s(t, \varepsilon),$$

де $s(t,\varepsilon)$ — деяка n-вимірна вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0, T]$ при досить малих ε.

Подамо вектори $z_m(t,\varepsilon)$ і $s(t,\varepsilon)$ у вигляді

$$z_m(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left[z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\right], \quad s(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left[s_1(t,\varepsilon), s_2(t,\varepsilon)\right], \tag{21}$$

де $z_1(t,\varepsilon)$, $s_1(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірні вектори, координатами яких є перші $n-1$ координат векторів $z_m(t,\varepsilon)$ та $s(t,\varepsilon)$ відповідно, а $z_2(t,\varepsilon)$, $s_2(t,\varepsilon)$ — n-ті координати цих векторів. Тоді систему (20) можна записати у вигляді двох окремих рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon^h \frac{dz_1}{dt} &= \left[(V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* LU_m\right] z_1 + (V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* L\tilde{\varphi} z_2 + \varepsilon^{\alpha-1} s_1, \\ 0 &= \left(L\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)^{-1} \tilde{\psi}^* LU_m z_1 + z_2 + \varepsilon^{\alpha-1} s_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Відповідно до алгоритму, за яким визначаються коефіцієнти розвинень $\tilde{u}_m^{(i)}(t,\varepsilon)$ та $\tilde{v}_m^{(j)}(t,\varepsilon)$, описаному в § 3.2 [6], матимемо

$$L\tilde{u}_m^{(i)}(t) = \lambda_m^{(i)}(t) B\tilde{u}_m^{(i)}(t) + O(\mu^{m+1}), \quad i = \overline{1,p},$$

$$L\tilde{v}_m^{(j)}(t) = \frac{1}{\xi_m^{(j)}(t)} B\tilde{v}_m^{(j)}(t) + O(\nu^m), \quad j = \overline{1,q-1},$$

звідки $LU_m = BU_m\Lambda_m + \varepsilon^\delta C_1(t,\varepsilon)$, де

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(p)}(t,\varepsilon),\frac{1}{\xi_m^{(1)}(t)},\frac{1}{\xi_m^{(2)}(t)},\ldots,\frac{1}{\xi_m^{(q-1)}(t)}\right\},$$

$\delta = \min\Bigl(\dfrac{m+1}{p},\dfrac{m}{q-1}\Bigr)$, $C_1(t,\varepsilon)$ — матриця розмірності $n\times(n-1)$, рівномірно обмежена на $[0,T]$. Отже,

$$(V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* LU_m = (V_m^* BU_m)^{-1}\Bigl[V_m^* BU_m\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^\delta V_m^* C_1(t,\varepsilon)\Bigr] =$$

$$= \Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^\delta\,(V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* C_1(t,\varepsilon) = \Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\delta-1}C_2(t,\varepsilon),$$

де $C_2(t,\varepsilon)$ — рівномірно обмежена на $[0,T]$ $(n\times(n-1))$-матриця. Аналогічно

$$\tilde\psi^* LU_m = \tilde\psi^*\Bigl[BU_m\Lambda_m + \varepsilon^\delta C_1(t,\varepsilon)\Bigr] = \tilde\psi^* BU_m\Lambda_m + \varepsilon^\delta\tilde\psi^* C_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^\delta\tilde\psi^* C_1(t,\varepsilon),$$

оскільки вектор-рядок $\tilde\psi^* BU_m$ є нульовим.

Тоді система (22) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
\varepsilon^h\frac{dz_1}{dt} &= \Bigl[\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\delta-1}C_2(t,\varepsilon)\Bigr]z_1 + (V_m^* BU_m)^{-1} V_m^* L\varphi z_2 + \varepsilon^{\alpha-1}s_1(t,\varepsilon),\\
0 &= \varepsilon^\delta\left(L\varphi,\tilde\psi\right)^{-1}\tilde\psi^* C_1(t,\varepsilon)z_1 + z_2 + \varepsilon^{\alpha-1}s_2(t,\varepsilon).
\end{aligned}\tag{23}$$

З останнього алгебраїчного рівняння визначимо $z_2(t,\varepsilon)$:

$$z_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon^{\alpha-1}s_2(t,\varepsilon) - \varepsilon^{\delta-1}C(t,\varepsilon)z_1,$$

де $C(t,\varepsilon)$ — вектор-рядок, елементи якого рівномірно обмежені на $[0,T]$.

Підставивши вираз для $z_2(t,\varepsilon)$ у перше рівняння системи (23) і взявши до уваги, що матриця $(V_m^* BU_m)^{-1}$ має полюс порядку 1 в точці $\varepsilon = 0$, одержимо диференціальне рівняння відносно змінної $z_1(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^h\frac{dz_1}{dt} = \Bigl[\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\delta-1}C_2(t,\varepsilon) - \varepsilon^{\delta-2}C_3(t,\varepsilon)\Bigr]z_1 + \varepsilon^{\alpha-1}s_1(t,\varepsilon) - \varepsilon^{\alpha-2}\tilde s_2(t,\varepsilon),$$

де $C_3(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця $(n-1)$-го порядку, рівномірно обмежена на $[0,T]$, $\tilde s_2(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірний вектор-стовпець з рівномірно обмеженими елементами на цьому відрізку. В результаті цих перетворень система (19) набирає вигляду

$$\begin{aligned}
\varepsilon^h\frac{dz_1}{dt} &= \Bigl[\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\delta-2}C_4(t,\varepsilon)\Bigr]z_1 + \varepsilon^{\alpha-2}d(t,\varepsilon),\\
z_2(t,\varepsilon) &= -\,\varepsilon^{\alpha-1}s_2(t,\varepsilon) - \varepsilon^{\delta-1}C(t,\varepsilon)z_1,\\
z_1(0,\varepsilon) &= \varepsilon^{\alpha-1}\tilde b_1(\varepsilon),\\
z_2(0,\varepsilon) &= \varepsilon^{\alpha-1}\tilde b_2(\varepsilon),
\end{aligned}\tag{24}$$

де $C_4(t,\varepsilon) = \varepsilon C_2(t,\varepsilon) - C_3(t,\varepsilon)$, $d(t,\varepsilon)$ — рівномірно обмежений $(n-1)$-вимірний вектор.

Розглянемо перше з рівнянь системи (23). Введемо заміну $z_1 = Wu$, де

$$W = \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)$$

— матриця, що є розв'язком рівняння

$$\varepsilon^h \frac{dW}{dt} = \Lambda_m(t,\varepsilon)W. \tag{25}$$

В результаті одержимо

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon^{\delta-2-h}W^{-1}C_4Wu(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\alpha-2-h}W^{-1}d(t,\varepsilon).$$

Перейшовши до інтегрального рівняння і врахувавши заміну $z_1 = Wu$ та початкову умову, матимемо

$$z_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-2-h}W\int\limits_0^t W^{-1}C_4z_1(t,\varepsilon)dt + \varepsilon^{\alpha-2-h}W\int\limits_0^t W^{-1}d(t,\varepsilon)dt + \varepsilon^{\alpha-1}\tilde{b}_1(\varepsilon). \tag{26}$$

Використовуючи метод послідовних наближень, як і в [6], можна показати, що це рівняння має єдиний розв'язок. Перейшовши в ньому до оцінок за нормою, дістанемо

$$\|z_1(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^{\delta-2-h}\int\limits_0^t \left\|W(t,\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon)C_4(\tau,\varepsilon)\right\| \, \|z_1\|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon^{\alpha-2-h}\int\limits_0^t \left\|W(t,\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon)d(\tau,\varepsilon)\right\| d\tau + \varepsilon^{\alpha-1}\left\|\tilde{b}_1(\varepsilon)\right\|. \tag{27}$$

Оскільки

$$W(t,\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m dt\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\tau^0 \Lambda_m d\tau\right) = \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_\tau^t \Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right),$$

то при виконанні умови (11) $\left\|W(t,\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon)\right\| \le 1$ при $0 \le \tau \le t$. Крім того, матриця $C_4(t,\varepsilon)$, вектор $d(t,\varepsilon)$ і вектор $\tilde{b}_1(\varepsilon)$ рівномірно обмежені на відрізку $[0,T]$. Тому

$$\left\|W(t,\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon)C_4(\tau,\varepsilon)\right\| \le c_1, \quad \left\|W(t,\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon)d(\tau,\varepsilon)\right\| \le c_2, \quad \left\|\tilde{b}_1(\varepsilon)\right\| \le c_3,$$

де $c_i,\ i = \overline{1,3},$ — деякі сталі числа, що не залежать від ε. В результаті з нерівності (27) одержимо

$$\|z_1(t,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{\delta-2-h}\int\limits_0^t \|z_1(\tau,\varepsilon)\|\,d\tau + c_2T\varepsilon^{\alpha-2-h} + \varepsilon^{\alpha-1}c_3. \tag{28}$$

Оскільки $c_2T\varepsilon^{\alpha-2-h} + \varepsilon^{\alpha-1}c_3 = \varepsilon^{\alpha-2-h}\left(c_2T + \varepsilon^{h+1}\right) < c_4\varepsilon^{\alpha-2-h}$, де $c_4 = c_2T + \varepsilon^{h+1}$, то нерівність (28) запишеться у вигляді

$$\|z_1(t,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{\delta-2-h}\int\limits_0^t \|z_1(\tau,\varepsilon)\|\,d\tau + \varepsilon^{\alpha-2-h}c_4,$$

звідки, згідно з лемою Гронуолла – Беллмана [7]

$$\|z_1(t,\varepsilon)\| \le c_4\varepsilon^{\alpha-2-h}\exp\left(c_1T\varepsilon^{\delta-2-h}\right) = c_5\varepsilon^{\alpha-2-h}, \tag{29}$$

де $c_5 = c_4\exp\left(c_1T\varepsilon^{\delta-2-h}\right)$.

З другого рівняння системи (24) дістанемо відповідну оцінку для $z_2(t,\varepsilon)$. Взявши до уваги (25), отримаємо

$$\|z_2(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^{\alpha-1}\|s_2(t,\varepsilon)\| + \varepsilon^{\delta-1}\|C(t,\varepsilon)\|\,\|z_1(t,\varepsilon)\| \le c_6\varepsilon^{\alpha-1} + c_5c_7\varepsilon^{\alpha+\delta-3-h} =$$

$$= \varepsilon^{\alpha-2-h}\left(c_6\varepsilon^{h+1} + c_5c_7\varepsilon^{\delta-1}\right) = c_8\varepsilon^{\alpha-2-h}, \tag{30}$$

де сталі c_6, c_7 обмежують за нормою функцію $s_2(t,\varepsilon)$ та вектор-рядок $c(t,\varepsilon)$, а $c_8 = c_6\varepsilon^{h+1} + c_5c_7\varepsilon^{\delta-1}$.

Врахувавши (29), (30) і повернувшись до заміни (21), одержимо оцінку $\|z_m(t,\varepsilon)\| \le c_9\varepsilon^{\alpha-2-h}$. Оскільки множення на матрицю $Q(t,\varepsilon)$ не змінює оцінки, то для $y_m(t,\varepsilon)$, а отже, і для різниці $x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)$ матимемо таку оцінку:

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{\alpha-2-h},$$

де $c = c_9c_{10}$, а стала c_{10} обмежує за нормою матрицю $Q(t,\varepsilon)$.

Теорему доведено.

1. *Кочерга О. І., Яковець В. П.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 19 – 29.
2. *Кочерга О. І.* Розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи // Там же. — № 3. — С. 314 – 324.
3. *Кочерга О. І.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1126 – 1128.

4. *Kocherga O. I., Yakovets V. P.* The Cauchy problem for the degenerate singularly perturbed linear system in case of the multiple spectrum of the limit bundle of matrixes // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 2. — P. 226 – 233.

5. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 364 с.

6. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.

7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Одержано 19.01.2007