УДК 517.9

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of $C^1(0,+\infty)$-solutions of systems of the linear differential-functional equations $x'(t) = Ax(t) + Bx(qt) + Cx'(qt)$ in a neighborhood of the singular point $t = 0$.

Встановлено нові властивості $C^1(0,+\infty)$-розв'язків систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь $x'(t) = Ax(t) + Bx(qt) + Cx'(qt)$ в околі особливої точки $t = 0$.

В данной работе рассматривается система линейных дифференциально-функциональных уравнений

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(qt) + Cx'(qt), \tag{1}$$

где A, B, C — комплексные $(n \times n)$-матрицы, $0 < q < 1$, $t \in (0,+\infty)$. Скалярный случай этого уравнения в окрестности особой точки $t = 0$ исследован в [1]. Случай седловой точки изучался в [2].

Для исследования поведения решений системы (1) в окрестности нуля выполним замену переменных

$$x(t) = z\left(\frac{1}{t}\right), \quad x(qt) = z\left(\frac{1}{qt}\right), \quad \frac{d}{dt}x(t) = z'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right),$$

$$x'(qt) = z'\left(\frac{1}{qt}\right)\left(-\frac{1}{q^2t^2}\right), \quad t = \frac{1}{q\tau}.$$

В результате получим уравнение

$$Cz'(\tau) = \frac{1}{\tau^2}(Bz(\tau) + Az(q\tau)) + q^2 z'(q\tau), \tag{2}$$

решение которого сводится к решению уравнения

$$q^{-1}Cz(\tau) = z(q\tau) - e^{-A(1-q^{-1}\tau^{-1})}(z(1) - q^{-1}Cz(q^{-1}))+$$
$$+ e^{Aq^{-1}\tau^{-1}} \int\limits_1^{q\tau} e^{-As^{-1}}(B + q^{-1}AC)\frac{1}{s^2}z(q^{-1}s)ds.$$

Обозначая

$$f(\tau) \overset{\text{df}}{=} -e^{-A(1-q^{-1}\tau^{-1})}(z(1) - q^{-1}Cz(q^{-1}))+$$
$$+ e^{Aq^{-1}\tau^{-1}} \int\limits_{1}^{q\tau} e^{-As^{-1}}(B + q^{-1}AC)\frac{1}{s^2}z(q^{-1}s)ds, \tag{3}$$

получаем уравнение

$$q^{-1}Cz(\tau) = z(q\tau) + f(\tau). \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A, B, C — комплексные $(n\times n)$-матрицы;* $0 < q < 1$; $\lambda_k(C), k = \overline{1,n}$, *— собственные значения матрицы C. Тогда:*

1) если $|\lambda_k(C)| \neq q$, $k = \overline{1,n}$, и существует $|\lambda_{k_1}(C)| < q$, то ограниченное в окрестности нуля решение уравнения (1) имеет правосторонний предел в нуле;

2) при $|\lambda_k(C)| > q$, $k = \overline{1,n}$, все решения уравнения (1) имеют правосторонний предел в нуле.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $x(t)$, а значит, и $z(\tau)$ ограничены на отрезках $(0,1]$, $[q^{-1}, +\infty)$ соответственно. Тогда легко показать, что интеграл в (3) сходится абсолютно при $\tau \to +\infty$, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{\tau\to+\infty} f(\tau) \overset{\text{df}}{=} M$. Без ограничения общности считаем, что матрица C имеет жорданову нормальную форму. Рассмотрим некоторую подсистему системы уравнений (4)

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{k_1}(C)}{q} & \frac{1}{q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_{k_1}(C)}{q} & \frac{1}{q} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda_{k_1}(C)}{q} & \frac{1}{q} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\lambda_{k_1}(C)}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{k_1}(\tau) \\ z_{k_1+1}(\tau) \\ \vdots \\ z_{k_1+m-1}(\tau) \\ z_{k_1+m}(\tau) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_{k_1}(q\tau) \\ z_{k_1+1}(q\tau) \\ \vdots \\ z_{k_1+m-1}(q\tau) \\ z_{k_1+m}(q\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{k_1}(\tau) \\ f_{k_1+1}(\tau) \\ \vdots \\ f_{k_1+m-1}(\tau) \\ f_{k_1+m}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Для $(k_1 + m)$-й координаты вектора $z(\tau)$ получим уравнение

$$\frac{\lambda_{k_1}(C)}{q} z_{k_1+m}(\tau) = z_{k_1+m}(q\tau) + f_{k_1+m}(\tau).$$

Если $\lambda_{k_1}(C) = 0$, то

$$z_{k_1+m}(\tau) = -f_{k_1+m}(q^{-1}\tau) \to -M_{k_1+m}, \quad \tau \to +\infty.$$

Если $0 < |\lambda_{k_1}(C)| < q$, то

$$z_{k_1+m}(\tau) = \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)}\, z_{k_1+m}(q\tau) + \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)}\, f_{k_1+m}(\tau) = r_{k_1}\, z_{k_1+m}(q\tau) + f_{\text{н},k_1+m}(\tau),$$

где

$$r_{k_1} = \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)}, \quad f_{\text{н},k_1+m}(\tau) = \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)} f_{k_1+m}(\tau).$$

Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} z_{k_1+m}(q^{-j}\tau) &= r_{k_1}^{j+1} z_{k_1+m}(q\tau) + r_{k_1}^{j} f_{\text{н},k_1+m}(\tau) + r_{k_1}^{j-1} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-1}\tau) + \ldots \\ &\ldots + r_{k_1} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j+1}\tau) + f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j}\tau) = \\ &= r_{k_1}^{j+1}(z_{k_1+m}(q\tau) + r_{k_1}^{-1} f_{\text{н},k_1+m}(\tau) + r_{k_1}^{-2} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-1}\tau) + \ldots \\ &\ldots + r_{k_1}^{-j} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j+1}\tau) + r_{k_1}^{-j-1} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j}\tau)), \quad j \in N. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} g_{k_1+m}(j,\tau) &\overset{\text{df}}{=} z_{k_1+m}(q\tau) + r_{k_1}^{-1} f_{\text{н},k_1+m}(\tau) + r_{k_1}^{-2} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-1}\tau) + \ldots \\ &\ldots + r_{k_1}^{-j} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j+1}\tau) + r_{k_1}^{-j-1} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j}\tau), \quad j \in N, \quad \tau \geq 1. \end{aligned}$$

Поскольку $|r_{k_1}^{-1}| = \dfrac{|\lambda_{k_1}(C)|}{q} < 1$, можно показать, что

$$\begin{aligned} &r_{k_1}^{-1} f_{\text{н},k_1+m}(\tau) + r_{k_1}^{-2} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-1}\tau) + \ldots + r_{k_1}^{-j} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j+1}\tau) + \\ &\quad + r_{k_1}^{-j-1} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j}\tau) \underset{j\to+\infty,\tau\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{r_{k_1}^{-1}}{1 - r_{k_1}^{-1}}\, \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)}\, M_{k_1+m} = \\ &\quad = \frac{r_{k_1}^{-1}}{1 - r_{k_1}^{-1}}\, M_{\text{н},k_1+m}, \end{aligned}$$

где $M_{\text{н},k_1+m} = \dfrac{q}{\lambda_{k_1}(C)}\, M_{k_1+m}$.

Действительно, так как

$$\left| r_{k_1}^{-1} f_{\text{н},k_1+m}(\tau) + r_{k_1}^{-2} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-1}\tau) + \ldots + r_{k_1}^{-j} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j+1}\tau) + \right.$$

$$\left. + r_{k_1}^{-j-1} f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j}\tau) - \frac{r_{k_1}^{-1}}{1 - r_{k_1}^{-1}} M_{\text{н},k_1+m} \right| =$$

$$= \left| r_{k_1}^{-1}(f_{\text{н},k_1+m}(\tau) - M_{\text{н},k_1+m}) + r_{k_1}^{-2}(f_{\text{н},k_1+m}(q^{-1}\tau) - M_{\text{н},k_1+m}) + \ldots \right.$$

$$\ldots + r_{k_1}^{-j}(f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j+1}\tau) - M_{\text{н},k_1+m}) + r_{k_1}^{-j-1}(f_{\text{н},k_1+m}(q^{-j}\tau) - M_{\text{н},k_1+m}) -$$

$$\left. - \frac{r_{k_1}^{-j-2}}{1 - r_{k_1}^{-1}} M_{\text{н},k_1+m} \right| \leq \frac{|r_{k_1}^{-1}|}{1 - |r_{k_1}^{-1}|} \sup_{s \geq \tau} |f_{\text{н},k_1+m}(s) - M_{\text{н},k_1+m}| + \left| \frac{r_{k_1}^{-j-2}}{1 - r_{k_1}^{-1}} M_{\text{н},k_1+m} \right|,$$

и $\lim\limits_{\tau \to +\infty} f_{\text{н},k_1+m}(\tau) = M_{\text{н},k_1+m}$, то последняя сумма в неравенстве стремится к нулю при $\tau \to +\infty$, $j \to +\infty$. Из изложенного следует, что существование $\lim\limits_{\substack{j \to +\infty \\ \tau \to +\infty}} g_{k_1+m}(j, \tau)$ влечет за собой существование $\lim\limits_{\tau \to +\infty} z_{k_1+m}(\tau)$.

Предположим, что $\lim\limits_{\substack{j \to +\infty \\ \tau \to +\infty}} g_{k_1+m}(j, \tau)$ не существует. Из этого следует, в частности, что нуль не является пределом функции $g_{k_1+m}(j, \tau)$ при $j \to +\infty$, $\tau \to +\infty$, т. е. существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность точек (j_l, τ_l) такая, что $j_l \to +\infty$, $\tau_l \to +\infty$ при $l \to +\infty$, для которых выполняется неравенство

$$\left| g_{k_1+m}(j_l, \tau_l) \right| \geq \varepsilon.$$

Тогда в силу (5) получим

$$\left| z_{k_1+m}(q^{-j_l}\tau_l) \right| = \left| r_{k_1}^{j_l+1} \right| \left| g_{k_1+m}(j_l, \tau_l) \right| \geq \left| r_{k_1}^{j_l+1} \right| \varepsilon \to +\infty, \quad l \to +\infty,$$

что противоречит ограниченности $z_{k_1+m}(\tau)$ на полуоси $[1, +\infty)$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{j \to +\infty \\ \tau \to +\infty}} g_{k_1+m}(j, \tau)$, а значит, и $\lim\limits_{\tau \to +\infty} z_{k_1+m}(\tau)$ существуют.

Запишем уравнение для $(k_1 + m - 1)$-й координаты вектора $z(\tau)$

$$z_{k_1+m-1}(\tau) = \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)} z_{k_1+m-1}(q\tau) - \frac{1}{\lambda_{k_1}(C)} z_{k_1+m}(\tau) + \frac{q}{\lambda_{k_1}(C)} f_{k_1+m-1}(\tau) =$$

$$= r_{k_1} \, z_{k_1+m-1}(q\tau) + h_{k_1+m-1}(\tau),$$

где функция $h_{k_1+m-1}(\tau) = -\dfrac{1}{\lambda_{k_1}(C)} z_{k_1+m}(\tau) + \dfrac{q}{\lambda_{k_1}(C)} f_{k_1+m-1}(\tau)$ имеет предел при $\tau \to$ $\to +\infty$. С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, устанавливаем существование $\lim\limits_{\tau \to +\infty} z_{k_1+m-1}(\tau)$. Доказательство существования пределов при $\tau \to +\infty$ у координат $z_{k_1+m-2}(\tau), \ldots, z_{k_1}(\tau)$ полностью совпадает с изложенным для координаты $z_{k_1+m-1}(\tau)$.

Рассмотрим подсистему системы уравнений (4), соответствующую собственному значению $|\lambda_{k_2}(C)| > q$ и его клетке Жордана в матрице C (ее размер снова обозначим числом $m + 1$). Обозначая

$$\frac{q}{\lambda_{k_2}(C)} \overset{\text{df}}{=} r_{k_2}, \qquad \frac{q}{\lambda_{k_2}(C)} f_{k_2+m}(\tau) \overset{\text{df}}{=} f_{\text{н},k_1+m}(\tau),$$

для $(k_2 + m)$-й координаты вектора $z(\tau)$ получаем равенство

$$z_{k_2+m}(q^{-j}\tau) = r_{k_2}^{j+1} z_{k_2+m}(q\tau) + r_{k_2}^{j} f_{\text{н},k_2+m}(\tau) + r_{k_2}^{j-1} f_{\text{н},k_2+m}(q^{-1}\tau) + \ldots$$
$$\ldots + r_{k_2} f_{\text{н},k_2+m}(q^{-j+1}\tau) + f_{\text{н},k_2+m}(q^{-j}\tau).$$

Исходя из условия $|r_{k_2}| < 1$ и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} f_{\text{н},k_2+m}(\tau) = M_{\text{н},k_2+m}$, оценим разность

$$\Bigg| r_{k_2}^{j+1} z_{k_2+m}(q\tau) + r_{k_2}^{j} f_{\text{н},k_2+m}(\tau) + r_{k_2}^{j-1} f_{\text{н},k_2+m}(q^{-1}\tau) + \ldots$$
$$\ldots + r_{k_2} f_{\text{н},k_2+m}(q^{-j+1}\tau) + f_{\text{н},k_2+m}(q^{-j}\tau) - \frac{1}{1-r_{k_2}} M_{\text{н},k_2+m} \Bigg| =$$
$$= \Bigg| r_{k_2}^{j+1} z_{k_2+m}(q\tau) + r_{k_2}^{j}\left(f_{\text{н},k_2+m}(\tau) - M_{\text{н},k_2+m}\right) +$$
$$+ r_{k_2}^{j-1}(f_{\text{н},k_2+m}(q^{-1}\tau) - M_{\text{н},k_2+m}) + \ldots + r_{k_2}(f_{\text{н},k_2+m}(q^{-j+1}\tau) - M_{\text{н},k_2+m}) +$$
$$+ f_{\text{н},k_2+m}(q^{-j}\tau) - M_{\text{н},k_2+m} - \frac{r_{k_2}^{j+1}}{1-r_{k_2}} M_{\text{н},k_2+m} \Bigg| \le$$
$$\le |r_{k_2}|^{j+1} \sup_{s\ge 1} |z_{k_2+m}(qs)| + \frac{1}{1-|r_{k_2}|} \sup_{s\ge\tau} |f_{\text{н},k_2+m}(s) - M_{\text{н},k_2+m}| + \left| \frac{r_{k_2}^{j+1}}{1-r_{k_2}} M_{\text{н},k_2+m} \right|.$$

Поскольку по предположению вектор $z(\tau)$ ограничен на отрезке $[q, +\infty)$, последняя сумма в неравенстве стремится к нулю при $j \to +\infty$, $\tau \to +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{\substack{j\to+\infty\\ \tau\to+\infty}} z_{k_2+m}(g^{-j}\tau) = \frac{1}{1-r_{k_2}} M_{\text{н},k_2+m} = \lim_{\tau\to+\infty} z_{k_2+m}(\tau).$$

Запишем уравнение для $(k_2 + m - 1)$-й координаты вектора $z(\tau)$

$$z_{k_2+m-1}(\tau) = \frac{q}{\lambda_{k_2}(C)} z_{k_2+m-1}(q\tau) - \frac{1}{\lambda_{k_2}(C)} z_{k_2+m}(\tau) + \frac{q}{\lambda_{k_2}(C)} f_{k_2+m-1}(\tau) =$$
$$= r_{k_2} z_{k_2+m-1}(q\tau) + h_{k_2+m-1}(\tau),$$

где функция $h_{k_2+m-1}(\tau) = -\dfrac{1}{\lambda_{k_2}(C)} z_{k_2+m}(\tau) + \dfrac{q}{\lambda_{k_2}(C)} f_{k_2+m-1}(\tau)$ имеет предел при $\tau \to \to +\infty$. С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, устанавливаем существование $\lim\limits_{\tau\to+\infty} z_{k_1+m-1}(\tau)$. Доказательство существования пределов при $\tau \to +\infty$ у координат $z_{k_2+m-2}(\tau), \ldots, z_{k_2}(\tau)$ полностью совпадает с изложенным для координаты $z_{k_2+m-1}(\tau)$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем второе утверждение теоремы. Поскольку матрица C невырождена, из уравнения (2) непосредственно следует

$$|z'(\tau)| \le |C^{-1}B|\frac{1}{\tau^2}|z(\tau)| + |C^{-1}A|\frac{1}{\tau^2}|z(q\tau)| + q^2|C^{-1}||z'(q\tau)|,$$

где $|G| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |g_{i,j}|$, $|\vec{\nu}| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{1\le i\le n}|\nu|$. Интегрируя последнее неравенство на отрезке $[1,t]$, находим

$$\int\limits_1^t \left|z'(\tau)d\tau\right| \le \left|C^{-1}B\right| \int\limits_1^t \frac{|z(\tau)|}{\tau^2}d\tau + \left|C^{-1}A\right| \int\limits_1^t \frac{|z(q\tau)|}{\tau^2}d\tau + q|C^{-1}| \int\limits_q^{qt} \left|z'(\tau)\right| d\tau \le$$

$$\le \left|C^{-1}B\right| \int\limits_1^t \frac{|z(\tau)|}{\tau^2}d\tau + \left|C^{-1}A\right| \int\limits_1^t \frac{|z(q\tau)|}{\tau^2}d\tau +$$

$$+ q\left|C^{-1}\right| \int\limits_q^1 \left|z'(\tau)\right| d\tau + q\left|C^{-1}\right| \int\limits_1^{qt} \left|z'(\tau)\right| |d\tau|. \qquad (6)$$

Обозначим $\int_1^u |z'(\tau)|\,|d\tau| \stackrel{\mathrm{df}}{=} s(u)$, $u > 0$. Тогда при $\tau > 0$ имеем $|z(\tau)| \le s(\tau) + |z(1)|$. Если $1 \le t \le q^{-1}$, то

$$s(qt) = \int\limits_1^{qt} |z'(\tau)||d\tau| \le \int\limits_q^{qt} |z'(\tau)|d\tau + \int\limits_{qt}^1 |z'(\tau)|d\tau = \int\limits_q^1 |z'(\tau)|d\tau \stackrel{\mathrm{df}}{=} N \le N + s(t).$$

При $t \ge q^{-1}$ находим $s(qt) = \int_1^{qt} |z'(\tau)|d\tau \le \int_1^t |z'(\tau)|d\tau = s(t) \le s(t) + N$. Таким образом, при $t \ge 1$ имеем $s(qt) \le s(t) + N$.

Из (6) следует

$$s(t) \le |C^{-1}B| \int\limits_1^t \frac{|z(1)| + s(\tau)}{\tau^2}d\tau + |C^{-1}A| \int\limits_1^t \frac{|z(1)| + N + s(\tau)}{\tau^2}d\tau + q|C^{-1}|N +$$

$$+ q|C^{-1}|(N + s(t)) \le K + (|C^{-1}B| + |C^{-1}A|) \int\limits_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2}d\tau + q|C^{-1}|s(t),$$

где

$$K = \left[|C^{-1}B|\,|z(1)| + |C^{-1}A|\,(|z(1)| + N)\right] \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\tau^2}d\tau + 2q|C^{-1}|N.$$

Без ограничения общности можно считать, что матрица C^{-1} имеет жорданову нормальную форму, у которой над главной диагональю стоят не единицы, а достаточно малые числа $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось неравенство $q|C^{-1}| < 1$. Тогда последнее неравенство для $s(t)$ можно представить в виде

$$s(t) \le (1-q|C^{-1}|)^{-1}K + (1-q|C^{-1}|)^{-1}(|C^{-1}B| + |C^{-1}A|)\int\limits_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2}d\tau = F + M\int\limits_1^t \frac{s(\tau)}{\tau^2}d\tau,$$

где $F = (1-q|C^{-1}|)^{-1}K$, $M = (1-q|C^{-1}|)^{-1}(|C^{-1}B| + |C^{-1}A|)$. Отсюда и из леммы Гронуолла – Беллмана следует $s(t) \le Fe^{M\int_1^t \frac{1}{s^2}ds} \le Fe^{M\int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2}ds}$, т. е.

$$\int\limits_1^{+\infty} |z'(\tau)||d\tau| = \int\limits_0^1 |x'(t)|dt \le Fe^{M\int_1^{+\infty}\frac{1}{s^2}ds}.$$

Теорема доказана.

Если $|\lambda_k(C)| < q, k = \overline{1,n}$, то можно показать, что любое ограниченное в окрестности нуля решение уравнения (1) представимо в виде $x(t) = D(t)x(0)$, где матрица $D(t)$ — фиксированный степенной ряд.

В случае переменных матриц имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — *комплексные* $(n \times n)$*-матрицы, непрерывные в окрестности нуля;* $0 < q < 1$; $\lambda_k(C(0))$, $k = \overline{1,n}$, — *собственные значения матрицы* $C(0)$. *Тогда:*

1) если $|\lambda_k(C(0))| \ne q$, $k = \overline{1,n}$, *и существуют* $|\lambda_{k_1}(C(0))| < q$; $C(t) \in C^1[0,\delta]$ *и* $\int_0^\delta |C'(s)|ds$, *то ограниченное в окрестности нуля решение уравнения (1) имеет правосторонний предел в нуле;*

2) при $|\lambda_k(C(0))| > q$, $k = \overline{1,n}$, *все решения уравнения (1) имеют правосторонний предел в нуле.*

Для простоты записи без ограничения общности считаем, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$, а $C(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,q^{-1}]$. Тогда для доказательства первого утверждения теоремы достаточно записать уравнение (2) с переменными матрицами в виде

$$\begin{aligned} C(0)q^{-1}z(\tau) = z(q\tau) - \left(C\left(\frac{1}{q\tau} - C(0)\right)\right)q^{-1}z(\tau) - \\ - e^{-A(0)\left(1-\frac{1}{q\tau}-C(0)\right)}(z(1) - C(1)q^{-1}z(q^{-1})) - \\ - e^{A(0)\frac{1}{q\tau}}\int\limits_1^{q\tau} e^{A(0)\frac{1}{s}}\left(\left(A(0) - A\left(\frac{1}{s}\right)\right)\frac{1}{s^2}z(s) - \right. \\ \left. - \left(A(0)C\left(\frac{1}{s}\right)q^{-1} + B\left(\frac{1}{s}\right) - C'\left(\frac{1}{s}\right)q^{-1}\right)\frac{1}{s^2}z(q^{-1}s)\right)ds \end{aligned}$$

и применить рассуждения из доказательства первого пункта теоремы 1.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно записать неравенство, следующее из уравнения (2),

$$|z'(\tau)| \leq \sup_{s\geq t_0}\left|C^{-1}\left(\frac{1}{qs}\right)B\left(\frac{1}{qs}\right)\right| \frac{1}{\tau^2}|z(\tau)| + \sup_{s\geq t_0}\left|C^{-1}\left(\frac{1}{qs}\right)A\left(\frac{1}{qs}\right)\right| \frac{1}{\tau^2}|z(q\tau)| +$$

$$+ q^2\left(|C^{-1}(0)| + \sup_{s\geq t_0}\left|C^{-1}\left(\frac{1}{qs}\right) - C^{-1}(0)\right|\right)|z'(q\tau)|, \quad \tau \geq t_0,$$

в котором без ограничения общности можно считать, что $q|C^{-1}(0)| < 0$, при достаточно большом $t_0 \;:\; q\left(|C^{-1}(0)| + \sup_{s\geq t_0}\left|C^{-1}\left(\frac{1}{qs}\right) - C^{-1}(0)\right|\right) < 1$ проинтегрировать его на отрезке $[t_0, t]$ и применить в дальнейшем те же рассуждения, что и для постоянных матриц.

1. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627 – 1645.

2. *Бельский Д. В.* Об ограниченных на R^+ решениях линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом и их свойствах // Докл. АН Украины. — 2005. — № 8. — С. 10 – 14.

Получено 26.11.07