УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ НЕЧЕТКИХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ТАКАГИ – СУГЕНО

В. С. Денисенко, А. А. Мартынюк, В. И. Слынько

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3

We study Lyapunov stability of impulsive Takagi – Sugeno fuzzy systems. Using the direct Lyapunov method we find sufficient conditions for stability of such systems. We show that these conditions can be expressed in terms of a system of matrix inequalities. As an example, we consider impulsive fussy control in a two species „predator-prey" model.

Проведено аналіз стійкості за Ляпуновим нечітких імпульсних систем Такагі – Сугено. На основі прямого методу Ляпунова встановлено достатні умови стійкості для таких систем. Показано, що ці умови виражаються системою лінійних матричних нерівностей. Як приклад розглянуто імпульсне нечітке керування у двовидовій моделі „хижак-жертва".

1. Введение. Нечеткие модели Такаги – Сугено (Т-С) — это нелинейные системы, которые описываются множеством правил „если-то", которые, в свою очередь, являются локально линейными представлениями нелинейной системы. Главное преимущество нечетких моделей Т-С заключается в том, что антецедент нечетких правил задается аналитической функцией и выбор такой функции зависит от ее практического применения. Такие модели могут аппроксимировать широкий класс сложных или нелинейных систем, точное моделирование которых затруднительно. Гладкое агрегирование правил, являющихся многомерным разбиением пространства состояний, и взвешенная сумма линейных моделей позволяют представить полную динамику системы. Поэтому важным является изучение устойчивости таких нечетких систем. Устойчивость однородной нечеткой системы в дискретном и непрерывном случае рассмотрена в работах [1, 2], где достаточные условия устойчивости определяются линейными матричными уравнениями Ляпунова. Нечеткие системы Т-С с импульсным управлением рассмотрены в работе [3], где проблема устойчивости таких систем решается на основе принципа сравнения для дифференциальных уравнений.

В настоящей работе анализ устойчивости нечетких импульсных систем Т-С проводится на основе прямого метода Ляпунова посредством подходящего выбора функции Ляпунова. Достаточные условия устойчивости состояния равновесия для таких систем получены в виде линейных матричных неравенств.

2. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Будем рассматривать нечеткую динамическую модель Т-С, которая описывается следующими нечеткими правилами:

$$R^i,\ i=\overline{1,r}\colon \text{если}\ \ z_1(t)\in M_{i1},\ \ldots,\ z_n(t)\in M_{in}, \text{то}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = A_i x(t), \quad t \neq \tau_k, \\ &x(t+0) = B_i x(t), \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ &x(t_0+0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $z(t) = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор посылочных переменных, связанный с состояниями и входами системы , $x(t+0)$ — значение справа $x(t)$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — структурные матрицы системы, $M_{ij}(\cdot)$ — функции принадлежности нечетких множеств M_{ij} и r — число нечетких правил. Предполагается, что матрицы B_i невырождены, $\tau_{k+1} - \tau_k = \theta > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\operatorname{card}(z) = \operatorname{card}(x) = n$.

Полная динамика нечеткой системы Т-С с импульсным управлением описывается так:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) A_i x(t), \quad t \neq \tau_k, \\ &x(t+0) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) B_i x(t), \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ &x(t_0+0) = x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mu_i(z) = \dfrac{\omega_i(z)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(z)}$ и $\omega_i(z) = \prod_{j=1}^{n} M_{ij}(z_j)$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z) = 1$ и $\mu_i(z) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Далее без потери общности полагаем $z = x$.

Прежде чем перейти к основным результатам, сделаем некоторые предположения относительно нечеткой системы Т-С (2).

Предположение 1. *Существуют $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что функции $\mu_i(x)$ для системы (2) удовлетворяют неравенству $\|D^+\mu_i(x)\| \leq \gamma \|x\|^{-1+\varepsilon}$.*

В этом предположении $D^+\mu_i(x)$ обозначает правую верхнюю производную Дини функции $\mu_i(x)$, т. е. $D^+\mu_i(x) = \limsup\{\, \mu_i(x(t+\Delta)) - \mu_i(x(t))/\Delta : \Delta \to 0^+ \,\}$.

Заметим, что предположение 1 обеспечивает существование и единственность решений системы (2).

Пусть $\mathcal{E}$ — пространство симметричных $(n \times n)$-матриц со скалярным произведением $(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ и соответствующей нормой $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$, где $\operatorname{tr}(\cdot)$ обозначает след соответствующей матрицы. Пусть $K \subset \mathcal{E}$ — конус положительно полуопределенных симметричных матриц, $\mathfrak{F}_i \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейные операторы, $\mathfrak{F}_i X = A_i^T X + X A_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Определение 1 [4]. *Функция $V(t, x)$ принадлежит классу V_0, если справедливы следующие утверждения:*

1) $V(t, x)$ непрерывна на $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, $Y_k = \{\, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : \tau_{k-1} < t < \tau_k \,\}$, и локально липшицева по x для всех Y_k;

2) для всех $k = 1, 2, \ldots$ и любой точки $(t_0, x_0) \in \widetilde{Y}_k$, $\widetilde{Y}_k = \{\, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : t = \tau_k \,\}$, существуют конечные пределы

$$V(\tau_k - 0, x) = \lim_{(t,y)\to(\tau_k, x)} V(t, y),$$

$$V(\tau_k + 0, x) = \lim_{(t,y)\to(\tau_k,x)} V(t, y)$$

и верно соотношение $V(\tau_k - 0, x) = V(\tau_k, x)$.

Определение 2 [5]. *Функция* $\varphi(r)$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}$ $(\varphi \in \mathcal{K})$, *если она непрерывна, строго возрастает на* $0 < r < r_1$, *где* $0 \le r < \infty$, *и* $\varphi(0) = 0$.

В настоящей работе рассматривается устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $x = 0$ системы (2).

Рассмотрим сначала следующую импульсную систему:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \ne \tau_k, \\ &x(t + 0) = g_k(x), \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ &x(t_0 + 0) = x_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $f(t, x)$, $g_k(x)$ — липшицевы функции и $\tau_{k+1} - \tau_k = \theta > 0$.

Далее сформулируем некоторую модификацию теоремы из [4].

Теорема 1. *Пусть для системы (3) существует функция* $V(t, x) \in V_0$ *такая, что выполняются следующие условия:*

1) $0 \le V(t, x) \le c(\|x\|)$, *где* $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$;

2) $\Delta V\big|_{(3)} = V(t + 0, x(t + 0)) - V(t, x) \le 0$ *для* $t = \tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

3) $\dfrac{dV}{dt}\Big|_{(3)} \le -b(\|x\|)$ *для* $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$;

4) $V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \ge a(\|x(\tau_k + 0)\|)$, *где* a, b, $c \in \mathcal{K}$.

Тогда состояние равновесия системы (3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова $V(t, x) \in V_0$. Далее рассмотрим последовательность чисел $\left\{ V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right\}_{k=0}^{\infty}$. Очевидно, что это невозрастающая последовательность. Пусть $t_0 = 0$, тогда, учитывая условия 1 и 4 теоремы 1, получаем

$$a(\|x(\tau_k + 0)\|) \le V(0 + 0, x(0 + 0)) \le c(\|x_0\|),$$

где $x(0+0) = x_0$. Сначала покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ влечет $\|x(\tau_k + 0)\| < \varepsilon e^{-L\theta}$, где $L > 0$ — константа Липшица для функции $f(t, x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Предположим обратное. Тогда существует $N > 0$ такое, что $\|x(\tau_N + +0)\| \ge \varepsilon e^{-L\theta}$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = c^{-1}\Big(\dfrac{a(\varepsilon e^{-L\theta})}{2}\Big)$. Тогда

$$a(\varepsilon e^{-L\theta}) \le a(\|x(\tau_N + 0)\|) \le c(\|x_0\|) < c\left(c^{-1}\Big(\frac{a(\varepsilon e^{-L\theta})}{2}\Big)\right) = \frac{a(\varepsilon e^{-L\theta})}{2}.$$

Это противоречие доказывает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ и из $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ следует $\|x(\tau_k + 0)\| < \varepsilon e^{-L\theta} < \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$.

Далее покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ влечет $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Рассмотрим систему $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ для $t \neq \tau_k$. Решение $x(t)$ этой системы находится по формуле

$$x(t) = x(\tau_k + 0) + \int\limits_{\tau_k}^{t} f(s, x(s))ds, \qquad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\|x(t)\| \leq \|x(\tau_k + 0)\| + \int\limits_{\tau_k}^{t} \|f(s, x(s))\|ds \leq \|x(\tau_k + 0)\| + \int\limits_{\tau_k}^{t} L\|x(s)\|ds.$$

Использовав лемму Гронуолла – Беллмана и неравенство $\|x(\tau_k + 0)\| < e^{-L\theta}\varepsilon < \varepsilon$, преобразуем эти оценки к виду

$$\|x(t)\| \leq \|x(\tau_k + 0)\|e^{L(t-\tau_k)} \leq e^{L\theta}\|x(\tau_k + 0)\| < e^{L\theta}e^{-L\theta}\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad \|x(t)\| < \varepsilon,$$

как только $\|x_0\| < \delta(\varepsilon) = c^{-1}\Big(\dfrac{a(\varepsilon e^{-L\theta})}{2}\Big)$.

Таким образом, объединяя полученные результаты, делаем вывод, что система (3) устойчива. Дальше докажем, что существует $\rho_0 > 0$ и $\|x_0\| < \rho_0$ влечет $\|x(\tau_k + 0)\| \to 0$, как только $k \to \infty$ и $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Очевидно, что последовательность $\left\{ V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена снизу нулем, поэтому существует предел $\lim_{k\to\infty} V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) = \alpha \geq 0$ и верны оценки

$$\begin{aligned} V(\tau_{k+1} + 0, x(\tau_{k+1} + 0)) = {} & V(\tau_{k+1} + 0, x(\tau_{k+1} + 0)) - \\ & - V(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1})) + V(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1})) \leq \\ & \leq V(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1})) = V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) + \\ & + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{dV}{dt} ds \leq V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) - \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} b(\|x(s)\|)ds. \end{aligned}$$

Далее предположим, что $\left\{ \|x(\tau_k + 0))\| \right\}_{k=0}^{\infty} \nrightarrow 0$ при $k \to \infty$. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\left\{ \|x(\tau_{n_k} + 0))\| \right\}_{n_k}$, где $n > 0$, $k > 0$ – натуральные числа и

$$\lim_{n_k\to\infty} \|x(\tau_{n_k})\| = \beta > 0.$$

Пусть $\tau_{n_k} \leq s < \tau_{n_{k+1}}$, тогда, используя условия теоремы 1, получаем оценки

$$V(\tau_{n_k} + 0, x(\tau_{n_k} + 0)) \leq V(s, x(s)) \leq c(\|x(s)\|) \quad \text{и} \quad c(\|x(s)\|) \geq a(\|x(\tau_{n_k} + 0))\|).$$

Поскольку $b,\ c \in \mathcal{K}$, то

$$b(\|x(s)\|) \geq b(c^{-1}(a(\|x(\tau_{n_k}+0)\|))) \geq \eta > 0.$$

При этом для подпоследовательности справедлива оценка

$$V(\tau_{n_{k+1}}+0, x(\tau_{n_{k+1}}+0)) = V(\tau_{n_k}+0, x(\tau_{n_k}+0)) - \int\limits_{\tau_{n_k}}^{\tau_{n_{k+1}}} b(\|x(s)\|)ds \leq$$

$$\leq V(\tau_{n_k}+0, x(\tau_{n_k}+0)) - \eta(\tau_{n_{k+1}} - \tau_{n_k}), \quad \eta > 0.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{l} V(\tau_{n_{k+1}}+0, x(\tau_{n_{k+1}}+0)) \leq \sum_{k=1}^{l} \big(V(\tau_{n_k}+0, x(\tau_{n_k}+0)) - \eta(\tau_{n_{k+1}} - \tau_{n_k}) \big),$$

$$V(\tau_{n_{l+1}}+0, x(\tau_{n_{l+1}}+0)) \leq V(\tau_{n_1}+0, x(\tau_{n_1}+0)) - \eta\theta n_l.$$

Таким образом, $V(\tau_{n_{l+1}}+0, x(\tau_{n_{l+1}}+0)) \to -\infty$ при $n_l \to \infty$.

Это противоречие доказывает, что $\left\{ \|x(\tau_k+0))\| \right\}_{k=0}^{\infty} \to 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, если $t \to \infty$, то $k \to \infty$, поэтому получаем $0 \leq \|x(t)\| \leq e^{L\theta}\|x(\tau_k+0)\| \to 0$. Таким образом, доказано, что $\|x_0\| < \rho_0$ влечет $\left\{ \|x(\tau_k+0))\| \right\}_{k=0}^{\infty} \to 0$ при $k \to \infty$ и $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому состояние равновесия системы (3) асимптотически устойчиво, что и завершает доказательство теоремы 1.

3. Основные результаты. В этом пункте для анализа асимптотической устойчивости нечеткой импульсной системы Т-С использована подходящая функция Ляпунова. Сформулированы несколько теорем, доказательство которых при определенных предположениях проводится на основе прямого метода Ляпунова. Показано, что условия устойчивости выражаются системой линейных матричных неравенств.

Теорема 2. *Пусть предположение 1 выполняется, тогда состояние равновесия $x = 0$ нечеткой импульсной системы (2) асимптотически устойчиво, если система линейных матричных неравенств*

$$\frac{1}{2}(B_j^T X B_i + B_i^T X B_j) - X + (A_j^T X + X A_j)\theta < 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r, \tag{4}$$

$$A_i^T A_j^T X + X A_j A_i + A_j^T X A_i + A_i^T X A_j \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r, \tag{5}$$

совместна в классе положительно определенных матриц.

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова из класса V_0, $V(t, x) = x^T P(t, x) x$, где

$$P(t,x) = \begin{cases} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)} X - \int\limits_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)} ds Q, & t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \\ X, & t = \tau_{k+1}+0, \end{cases}$$

Q и X — симметричные положительно определенные $(n \times n)$-матрицы. Ниже будет показано, что $P(t,x) \overset{K}{>} 0$ в некоторой окрестности состояния равновесия, а сейчас рассмотрим производную по времени функции $V(t,x)$ в силу системы (2). Если $t \neq \tau_k$, то получаем

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)} = x^T \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i^T P(t,x) + P(t,x)A_i)x + x^T \frac{dP(t,x)}{dt} x =$$

$$= x^T \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\mathfrak{F}_i P(t,x)x + x^T \frac{dP(t,x)}{dt} x,$$

где

$$\frac{dP(t,x)}{dt} = e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)}\left(-\sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i(t-\tau_k) - \sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\right)X-$$

$$-\int_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)}\left(-\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i + \sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i\right)dsQ - Q =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\left(e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)}X - \int_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)}dsQ\right) - e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i X(t-\tau_k) - \int_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)}\sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i dsQ - Q =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i P(t) - e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)}\sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i X(t-\tau_k)-$$

$$-\int_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)}\sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i dsQ - Q.$$

Таким образом, для производной $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(2)}$ имеем следующие оценки:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)} = x^T \sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i P(t,x)x - x^T \sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i P(t,x)x - x^T Qx-$$

$$-x^T\left[e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)}\sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i X(t-\tau_k)\right]x-$$

$$- x^T \left[\int\limits_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)} \sum_{i=1}^{r} D^+\mu_i(x)\frac{dx}{dt}\mathfrak{F}_i ds Q \right] x \leq$$

$$\leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + \theta e^{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\|\mathfrak{F}_i\|\theta} \sum_{i=1}^{r} \|D^+\mu_i(x)\| \, \|\mathfrak{F}_i\| \, \|X\| \left\| \frac{dx}{dt} \right\| \|x\|^2 +$$

$$+ \theta e^{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\|\mathfrak{F}_i\|\theta} \sum_{i=1}^{r} \|D^+\mu_i(x)\| \, \|\mathfrak{F}_i\| \, \|Q\| \left\| \frac{dx}{dt} \right\| \|x\|^2.$$

Здесь $\lambda_{\min}(\cdot) > 0$ — минимальное собственное значение соответствующей матрицы. Обозначим $a = \max\limits_{i=\overline{1,r}} \|A_i\|$, тогда с учетом того, что $\|\mathfrak{F}_i X\| \leq \|A_i^T X + X A_i\| \leq 2\|A_i\| \, \|X\|$, получаем $\|\mathfrak{F}_i\| \leq 2\|A_i\| \leq 2a$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Также очевидно, что

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\| \leq \sum_{i=1}^{r} \mu_j(x)\|A_j\| \, \|x\| \leq a\|x\|.$$

Следовательно, для производной по времени от $V(t, x)$ справедливы оценки

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)} \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2a^2\theta e^{2a\theta} \sum_{i=1}^{r} \|D^+\mu_i(x)\| \, \|X\| \, \|x\|^3 +$$

$$+ 2a^2\theta e^{2a\theta} \sum_{i=1}^{r} \|D^+\mu_i(x)\| \, \|Q\| \, \|x\|^3 \leq$$

$$\leq \Big(-\lambda_{\min}(Q) + 2a^2 r\theta\gamma e^{2a\theta} \big(\|X\| + \|Q\| \big) \|x\|^{\varepsilon} \Big) \|x\|^2.$$

Поэтому $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(2)} < 0$ для всех x из шара $\|x\| < R$, где

$$R = \left(\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2a^2 r\theta\gamma e^{2a\theta}\big(\|X\| + \|Q\| \big)} \right)^{1/\varepsilon}.$$

Рассмотрим разность $\Delta V\big|_{(2)} = V(t+0, x(t+0)) - V(t, x)$:

$$\Delta V\big|_{(2)} = x^T(t+0)P(t+0)x(t+0) - x^T(t)P(t)x(t) = x^T(t+0)Xx(t+0) -$$

$$- x^T \left(e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x(k\theta))\mathfrak{F}_i\theta} X - \int\limits_{(k-1)\theta}^{k\theta} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x(k\theta))\mathfrak{F}_i(k\theta - s)} ds Q \right) x =$$

$$= x^T \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_j(x)\mu_i(x) B_j^T X B_i x - x^T e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x(k\theta))\mathfrak{F}_i\theta} X x + x^T \int\limits_{0}^{\theta} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\mathfrak{F}_i y} dy Q x,$$

где $y = k\theta - s$.

Далее покажем, что выполняется неравенство

$$e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta}X \overset{K}{\geq} \Big(I-\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta\Big)X. \tag{6}$$

Для этого выберем произвольный элемент $\Phi \in K^* = K$ и рассмотрим разложение в ряд Маклорена по степеням $h \geq 0$ скалярной функции

$$\psi_\Phi(h) = \operatorname{tr}\Bigg(\Phi\Big(e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta h}X - X + \sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta hX\Big)\Bigg),$$

ограничившись членами второго порядка:

$$\psi_\Phi(h) = \psi_\Phi(0) + \psi'_\Phi(0)h + \frac{\psi''_\Phi(\xi)h^2}{2!}, \quad \xi \in (0,h).$$

Пусть $h = 1$, тогда с учетом того, что $\psi_\Phi(0) = \psi'_\Phi(0) = 0$, получаем $\psi_\Phi(1) = \dfrac{\psi''_\Phi(\xi)}{2}$, где

$$\psi''_\Phi(\xi) = \operatorname{tr}\Bigg(\Phi\bigg(\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta\Big)^2 e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta\xi}X\bigg)\Bigg).$$

Из неравенства (5) и положительности оператора $e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\theta\xi}$ следует оценка $\psi''_\Phi(\xi) \geq 0$. Таким образом, $\psi_\Phi(1) \geq 0$ при всех $\Phi \in K^*$. Поэтому неравенство (6) выполняется.

Рассмотрим функцию

$$f_x(\theta) = x^T \int\limits_0^\theta e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i y}\,dyQx.$$

Согласно теореме Лагранжа $f_x(\theta) = f'_x(\zeta)\theta = x^T\theta e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i\zeta}Qx$, $\zeta \in (0,\theta)$, и справедливы следующие оценки:

$$\|f_x(\theta)\| \leq \|x\|^2 e^{\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\|\mathfrak{F}_i\|\theta}\|Q\|\theta \leq \theta e^{2a\theta}\|Q\|\|x\|^2. \tag{7}$$

Учитывая неравенства (4), (6) и (7), для разности ΔV получаем

$$\Delta V\big|_{(2)} \leq -x^T\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_j(x)\mu_i(x)Q_{ji}x + \theta e^{2a\theta}\|Q\|\|x\|^2 \leq$$

$$\leq -\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_j(x)\mu_i(x)\lambda_{\min}(Q_{ji})\|x\|^2 + \theta e^{2a\theta}\|Q\|\,\|x\|^2 \leq \big(-\lambda^* + \theta e^{2a\theta}\|Q\|\big)\|x\|^2,$$

где Q_{ji} — положительно определенные матрицы, $\lambda^* = \min\limits_{i,j=\overline{1,r}} \lambda_{\min}(Q_{ji})$. Очевидно, что $\Delta V\big|_{(2)} \le 0$ при $\|Q\| \le \dfrac{\lambda^*}{\theta}\, e^{-2a\theta}$ $\Big($можно выбрать, например, $Q = \dfrac{\lambda^*}{2\sqrt{n}\theta}\, e^{-2a\theta} I\Big)$.

Далее покажем, что $P(t,x) \overset{K}{>} 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^n$, т. е. $V(t,x)$ — положительно определенная функция. В самом деле, так как $V(t,x)$ — убывающая функция, при $\|x\| < R$ получаем оценки

$$
\begin{aligned}
x^T P(t,x)x &\ge x^T(\tau_{k+1})P(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1}))x(\tau_{k+1}) \ge \\
&\ge x^T(\tau_{k+1}+0)P(\tau_{k+1}+0, x(\tau_{k+1}+0))x(\tau_k+0) \ge \\
&\ge \lambda_{\min}(X)\|x(\tau_{k+1}+0)\|^2 > 0.
\end{aligned}
$$

Этим показано, что $V(t,x) \overset{K}{>} 0$, $\dfrac{dV}{dt}\bigg|_{(2)} < 0$ и $\Delta V\big|_{(2)} \le 0$ для всех $\|x\| < R$.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполняются. Поэтому состояние равновесия $x = 0$ импульсной нечеткой системы (2) асимптотически устойчиво.

Введем теперь следующее предположение.

Предположение 2. *Существуют постоянные $R_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что функции $\mu_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, удовлетворяют неравенству*

$$
\|D^+\mu_i(x)\| \le \begin{cases} \gamma_1\|x\|^{-1+\varepsilon} & \textit{при} \quad \|x\| \le R_0, \\ \gamma_2\|x\|^{-1-\varepsilon} & \textit{при} \quad \|x\| \ge R_0. \end{cases}
$$

Учитывая предположение 2, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть предположение 2 выполняется и постоянные γ_1, γ_2, R_0 такие, что*

$$
\gamma_1\gamma_2 < \frac{\lambda^2_{\min}(Q)}{4a^4r^2\theta^2e^{4a\theta}(\,\|X\| + \|Q\|\,)^2}
$$

и

$$
\left(\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2a^2r\theta\gamma_2e^{2a\theta}(\,\|X\| + \|Q\|\,)}\right)^{-1/\varepsilon} < R_0 < \left(\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2a^2r\theta\gamma_1e^{2a\theta}(\,\|X\| + \|Q\|\,)}\right)^{1/\varepsilon},
$$

где $a = \max\limits_{i=\overline{1,r}} \|A_i\|$, Q — симметричная положительно определенная $(n \times n)$-матрица и X — общая симметричная положительно определенная матрица, такая, что неравенства (4), (5) выполняются. Тогда состояние равновесия $x = 0$ нечеткой импульсной системы (2) глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Выберем функцию Ляпунова из класса V_0, $V(t,x) = x^T P(t,x)x$, где

$$
P(t,x) = \begin{cases} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-\tau_k)}X - \displaystyle\int\limits_{\tau_k}^{t} e^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\mathfrak{F}_i(t-s)}\,dsQ, & t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \\ X, & t = \tau_{k+1} + 0, \end{cases}
$$

Q и X — симметричные положительно определенные $(n \times n)$-матрицы. Рассмотрим производную по времени функции $V(t,x)$ в силу системы (2). Если $t \neq \tau_k$, то возможны два случая:

1) если $\|x\| \leq R_0$, то, как и при доказательстве теоремы 2, получаем

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)} \leq \Big(-\lambda_{\min}(Q) + 2a^2 r\theta e^{2a\theta}\gamma_1\big(\|X\| + \|Q\|\big)\|x\|^{\varepsilon}\Big)\|x\|^2,$$

откуда $\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)} < 0$ по условию теоремы 3;

2) если $\|x\| \geq R_0$, то аналогично имеем

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)} \leq \Big(-\lambda_{\min}(Q) + 2a^2 r\theta e^{2a\theta}\gamma_2\big(\|X\| + \|Q\|\big)\|x\|^{-\varepsilon}\Big)\|x\|^2$$

и $\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)} < 0$ по условию теоремы 3. Таким образом, $\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)} < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Как и при доказательстве теоремы 2, можно показать (с учетом условия теоремы 3), что $\Delta V\big|_{(2)} = V(t+0, x(t+0)) - V(t,x) \leq 0$ и $P(t,x) \overset{K}{>} 0$. Поэтому согласно теореме 1 состояние равновесия $x = 0$ системы (2) глобально асимптотически устойчиво.

4. Импульсное нечеткое управление в двухвидовой модели „хищник-жертва". Рассмотрим двухвидовое экологическое сообщество „хищник-жертва", эволюция которого описывается классическими уравнениями модели Лотки – Вольтерра с внутривидовой конкуренцией

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 - \gamma N_1^2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -mN_2 + s\beta N_1 N_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $N_1(t)$ — биомасса жертв, $N_2(t)$ — биомасса хищников; α и m — коэффициенты естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно; γ — коэффициент внутривидовой конкуренции; β — коэффициент биомассы жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени; s — коэффициент расходуемой хищником энергии на воспроизводство.

Предположим, что экологической системой можно управлять посредством регулирования численности видов в некоторые фиксированные моменты времени (импульсное управление). При этом регулирование может сводится либо к изъятию видов, либо к их запуску в экосистему. При этих предположениях к уравнениям эволюции системы необходимо добавить уравнения управляющих воздействий

$$\Delta N_1 = u_1(N_1, N_2),$$

$$\Delta N_2 = u_2(N_1, N_2), \quad t = k\theta,$$

где $u_1,\ u_2$ — функции обратной связи, θ — период управляющих воздействий.

При этих предположениях уравнения эволюции замкнутой регулируемой экосистемы примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 - \gamma N_1^2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -mN_2 + s\beta N_1 N_2, \quad t \neq k\theta, \\ \Delta N_1 &= u_1(N_1, N_2), \\ \Delta N_2 &= u_2(N_1, N_2), \quad t = k\theta. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (8) имеют, кроме тривиального состояния равновесия, нетривиальное положительное асимптотически устойчивое состояние равновесия

$$N_1^* = \frac{m}{s\beta}, \quad N_2^* = \frac{s\alpha\beta - m\gamma}{s\beta^2}.$$

Нечеткие управления будем строить согласно правилам:

если $N_i << N_i^*$, то $u_i(N_1, N_2) = \psi_i(N_i^* - N_i), \quad \psi_i > 0, \qquad i = 1, 2;$

если $N_i >> N_i^*$, то $u_i(N_1, N_2) = \chi_i(N_i^* - N_i), \quad \chi_i \in (0, 1),\ i = 1, 2.$

Формализовать нечеткое отношения $x >> y$ („x намного больше y”), $x, y \in \mathbb{R}$, можно с помощью функции принадлежности

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 1/(x-y)^2}, & \text{если } \ x > y, \\ 0, & \text{если } \ x \leq y. \end{cases}$$

Определим переменные возмущенного движения $x_1(t) = N_1(t) - N_1^*$, $x_2(t) = N_2(t) - N_2^*$. Тогда нечеткая модель Т-С эволюции экосистемы описывается такими нечеткими правилами:

R^1: если $N_1 << N_1^*$ и $N_2 << N_2^*$, то

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t), \quad t \neq k\theta, \\ x(t+0) &= B_1 x, \quad t = k\theta, \\ x(t_0 + 0) &= x_0; \end{aligned}$$

R^2: если $N_1 << N_1^*$ и $N_2 >> N_2^*$, то

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad t \neq k\theta,$$

$$x(t+0) = B_2 x, \quad t = k\theta,$$

$$x(t_0+0) = x_0;$$

R^3: если $N_1 >> N_1^*$ и $N_2 >> N_2^*$, то

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad t \neq k\theta,$$

$$x(t+0) = B_3 x, \quad t = k\theta,$$

$$x(t_0+0) = x_0;$$

R^4: если $N_1 >> N_1^*$ и $N_2 << N_2^*$, то

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad t \neq k\theta,$$

$$x(t+0) = B_4 x, \quad t = k\theta,$$

$$x(t_0+0) = x_0.$$

Очевидно, что предположение 1 для функции принадлежности $\omega(x, y)$ выполняется. Тогда вопрос об устойчивости нетривиального состояния равновесия экологической системы сводится, согласно теореме 2, к проверке совместности системы линейных матричных неравенств

$$B_i^T X B_i - X + (A^T X + XA)\theta < 0, \qquad i = \overline{1,4},$$

$$\frac{1}{2}(B_i^T X B_j + B_j^T X B_i) - X + (A^T X + XA)\theta < 0, \quad i < j = \overline{1,4}, \tag{10}$$

$$(A^T)^2 X + 2A^T X A + XA^2 \geq 0$$

в классе положительно определенных матриц. При этом матрицы A, B_1, B_2, B_3 и B_4 имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{m\gamma}{s\beta} & -\dfrac{m}{s} \\ \dfrac{\alpha\beta s - m\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

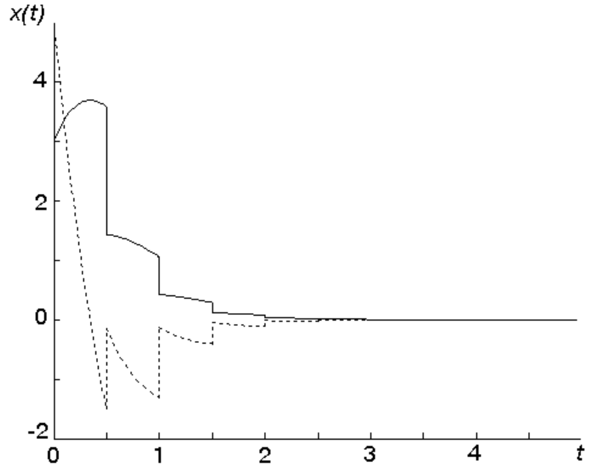

Рис. 1

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1-\psi_1 & 0 \\ 0 & 1-\psi_2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1-\psi_1 & 0 \\ 0 & 1-\chi_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1-\chi_1 & 0 \\ 0 & 1-\chi_2 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 1-\chi_1 & 0 \\ 0 & 1-\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем анализ устойчивости полученной нечеткой модели Т-С эволюции экосистемы с параметрами $\alpha = 6$, $\gamma = 0,3$, $\beta = 0,5$, $m = 1,2$, $s = 0,4$, $\theta = 0,5$ и такими параметрами нечеткого управления: $\psi_1 = 0,9$, $\psi_2 = 0,5$, $\chi_1 = 0,99$, $\chi_2 = 0,6$.

Нетрудно проверить с помощью MATLAB LMI toolbox, что система (10) совместна в классе положительно определенных матриц и матрица

$$X = \begin{pmatrix} 0,868 & 0,0102 \\ 0,0102 & 2,975 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет неравенству (10). Поэтому согласно теореме 2 состояние равновесия экологической системы асимптотически устойчиво, что и показано на рис. 1 (штриховая кривая — зависимость $x_1(t)$, сплошная — зависимость $x_2(t)$).

Далее изменим параметры нечеткого управления: $\psi_1 = 6$, $\psi_2 = 4$, $\chi_1 = 0,6$, $\chi_2 = 0,2$. В этом случае система (10) несовместна в классе положительно определенных матриц и с помощью компьютерного моделирования (рис. 2, обозначения те же, что и на рис. 1) убеждаемся, что состояние равновесия экосистемы неустойчиво.

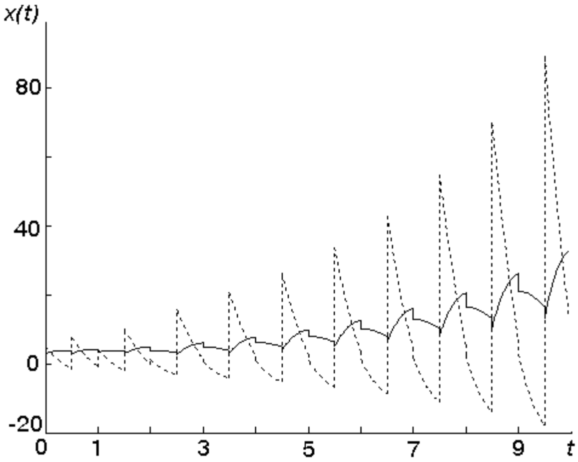

Рис. 2

5. Выводы. В настоящей статье проведен анализ устойчивости импульсной нечеткой системы Т-С. Получены достаточные условия асимптотической и глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия для таких систем. Показано, что эти условия позволяют свести задачу об устойчивости нечеткой импульсной системы (2) к вопросу о совместности некоторой системы линейных матричных неравенств. Также отмечено, что при различных предположениях относительно функций принадлежности можно получить различные типы устойчивости нечеткой системы. Приведен численный пример, решение которого выполнено с помощью пакета прикладных програм MATLAB.

1. *Tanaka K., Sugeno M.* Stability analysis and design of fuzzy control systems // Fuzzy Sets and Syst. — 1992. — № 45. — P. 135–156.
2. *Tanaka K.* Advanced fuzzy control. — Japan: Kyoritsu Publ., 1994. — 223 p.
3. *Xiaohong Zhang, Dong Li, Yang Dan.* Impulsive control of T-S fuzzy systems // Fuzzy Systems and Knowledge Discovery: Fourth Int. Conf. — Japan, 2007. — P. 321–325.
4. *Simeonov P.S., Bainov D.D.* Stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect // J. Math. Anal. and Appl. — 1986. — **117**, № 1. — P. 247–263.
5. *Hahn W.* Stability of motion. — Berlin etc.: Springer, 1967. — 448 p.
6. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern. — 1985. — № 15. — P. 116–132.
7. *Benrejeb M., Gasmi M., Borne P.* New stability conditions for TS fuzzy continuous nonlinear models // Nonlinear Dynam. and Syst. Theory. — 2005. — **5**, № 4. — P. 369–379.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища шк., 1987. — 286 с.
9. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. — 2004. — № 4. — С. 42–48.
10. *Martynyuk A. A.* Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's function. – London: Cambridge Sci. Publ., 2007. — 322 p.

Получено 25.03.08