УДК 517.98

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ ВОЛЬТЕРРИ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

О. В. Вятчанінов, М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова 2, корп. 6
e-mail: gorodnii@yandex.ru

We obtain a criterion for solutions of a linear discrete Volterra system with operator coefficients to be bounded or pth power summable.

Получен критерий ограниченности или суммируемости со степенью p решений линейной дискретной системы Вольтерра с операторными коэффициентами.

1. Формулювання основного результату. Нехай B — комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\overline{0}$; $\mathcal{L}(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із B в B; I — одиничний, O — нульовий оператори в B. Покладемо

$$l_\infty(B) := \left\{ x = \{x_n : n \geq 0\} \subset B \| \|x\|_\infty := \sup_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty \right\},$$

а також при $p \in [1, \infty)$

$$l_p(B) := \left\{ x = \{x_n : n \geq 0\} \subset B \| \|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Зазначимо, що для кожного $p \in [1; \infty]$ $l_p(B)$ — комплексний банахів простір з покоординатним додаванням елементів та множенням на комплексне число і нормою $\|\cdot\|_p$.

Нехай $\{V_n : n \geq 1\}$ — така послідовність операторів з $\mathcal{L}(B)$, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|V_n\| < \infty. \tag{1}$$

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема. *Наведені нижче твердження є еквівалентними:*
i_1) для деякого $p \in [1; \infty]$ дискретна система Вольтерри

$$x_0 = y_0,\ x_n = V_n x_0 + V_{n-1} x_1 + \ldots + V_1 x_{n-1} + y_n,\ n \geq 1, \tag{2}$$

має для довільного $y = \{y_n : n \geq 0\} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $x = \{x_n : n \geq 0\}$ у просторі $l_p(B)$;

i_2) для кожного $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le 1$, оператор $V(z) := I - \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n z^n$ є неперервно оборотним;

i_3) для кожного $p \in [1;\infty]$ дискретна система Вольтерри (2) має єдиний розв'язок x у просторі $l_p(B)$ для довільного $y \in l_p(B)$.

Для випадку обмежених числових послідовностей (тобто $p = \infty$, $B = \mathbb{C}$) аналогічний результат отримано в роботі [1]. Про застосування дискретної системи Вольтерри див. [2].

2. Допоміжні твердження. У подальшому будемо використовувати наведені нижче леми.

Нехай $\{E_n : n \ge 0\}$ — така послідовність операторів з $\mathcal{L}(B)$, що

$$C_E := \sum_{n=0}^{\infty} \|E_n\| < \infty. \tag{3}$$

Лема 1. *Якщо для кожного $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le 1$, оператор $E(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n z^n$ є неперервно оборотним, то існує така послідовність операторів $\{G_n : n \ge 0\} \subset \mathcal{L}(B)$, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|G_n\| < \infty$ і $(E(z))^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} G_n z^n$ для кожного $z \in \mathbb{C}, |z| \le 1$.*

Лема 1 є безпосереднім наслідком теореми 3 з роботи [3] і узагальнює теорему Вінера про абсолютно збіжні ряди Фур'є.

Лема 2. *Нехай $p \in [1;\infty]$, $x \in l_p(B)$,*

$$Wx := \left\{ \sum_{k=0}^{n} E_{n-k} x_k \ : \ n \ge 0 \right\}. \tag{4}$$

Тоді $Wx \in l_p(B)$, $\|Wx\|_p \le C_E \|x\|_p$.

Для доведення леми 2 досить застосувати твердження задачі 598 [4, с. 252] до числових послідовностей $\{\|E_n\| : n \ge 0\}$ та $\{\|x_n\| : n \ge 0\}$.

Нехай $p \in [1;\infty)$, $\mathcal{T} : l_p(B) \to l_p(B)$ — лінійний обмежений оператор, який визначається за правилом

$$\mathcal{T}x = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & \dots & T_{0n} & \dots \\ T_{10} & T_{11} & \dots & T_{1n} & \dots \\ T_{20} & T_{21} & \dots & T_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix}, x \in l_p(B), \tag{5}$$

де $\{T_{ij} \ : \ i,j \ge 0\}$ — фіксований набір операторів з $\mathcal{L}(B)$. Для довільного $k \in \mathbb{Z}$ покладемо

$$d_{\mathcal{T}}(k) := \sup_{i,j \in \mathbb{Z},\ i-j=k} \|T_{ij}\|. \tag{6}$$

Лема 3. *Якщо* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_{\mathcal{T}}(k) < \infty$, *оператор* $\mathcal{T}$ *є неперервно оборотним і оператор* $\mathcal{T}^{-1}$ *зображується в аналогічному до (5) матричному вигляді, то*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{\mathcal{T}^{-1}}(k) < \infty.$$

Лема 3 є окремим випадком наслідку 1 роботи [5].

Внаслідок леми 2 для кожного $p \in [1;\infty]$ за допомогою (4) коректно визначено лінійний обмежений оператор $W : l_p(B) \to l_p(B)$.

Лема 4. *Якщо для деякого* $q \in [1;\infty]$ *оператор* $W : l_q(B) \to l_q(B)$ *є неперервно оборотним, то він неперервно оборотний в усіх просторах* $l_p(B),\ p \in [1;\infty]$.

Доведення. Внаслідок (4), (6)

$$d_W(k) = \begin{cases} 0, & k \le -1, \\ \|E_k\|, & k \ge 0. \end{cases}$$

Тому згідно з (3) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_W(k) < \infty$. Також із леми 2 випливає, що коли $W : l_\infty(B) \to l_\infty(B)$, то для кожного $p \in [1;\infty)$ W залишає інваріантною множину $l_p(B)$. Отже, лема 3 випливає із наслідку 3 статті [5].

Лему 3 доведено.

Доведення теореми. $\mathrm{i}_2) \Rightarrow \mathrm{i}_1)$. З (1), твердження $\mathrm{i}_2)$ та леми 1 випливає, що існує такий набір операторів $\{F_n : n \ge 0\} \subset \mathcal{L}(B)$, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|F_n\| < \infty$ і

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \le 1 \ : (V(z))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

При цьому $V(z)(V(z))^{-1} = (V(z))^{-1}V(z) = I$ для кожного $z \in \mathbb{C}, |z| \le 1$, а отже, з урахуванням властивостей операторнозначних степеневих рядів, $F_0 = I$ і для кожного $n \ge 1$

$$F_n = V_1F_{n-1} + V_2F_{n-2} + \ldots + V_nF_0 = F_{n-1}V_1 + F_{n-2}V_2 + \ldots + F_0V_n. \tag{7}$$

Зафіксуємо $p \in [1;\infty)$. Нехай оператори $\mathcal{V}, \mathcal{F}$ діють із $l_p(B)$ в $l_p(B)$ таким чином:

$$\mathcal{V}x = \begin{pmatrix} I & O & O & O & \ldots \\ -V_1 & I & O & O & \ldots \\ -V_2 & -V_1 & I & O & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathcal{F}x = \begin{pmatrix} F_0 & O & O & O & \ldots \\ F_1 & F_0 & O & O & \ldots \\ F_2 & F_1 & F_0 & O & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in l_p(B). \tag{9}$$

Коректність визначення цих операторів та їх лінійність і неперервність випливають з леми 2. При цьому система Вольтерри (2) записується у вигляді $\mathcal{V}x = y$, а отже, для виконання твердження $\mathrm{i}_1)$ досить переконатися, що оператор $\mathcal{V}$ є неперервно оборотним. Останнє випливає з того, що з урахуванням (7) $\mathcal{V}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{V} = J$, де J — одиничний оператор в $l_p(B)$.

$\mathrm{i}_1) \Rightarrow \mathrm{i}_2)$. Внаслідок леми 4 твердження $\mathrm{i}_1)$ виконується для фіксованого $p \in [1;\infty)$. Покладемо

$$F_0 := I,\ F_n := V_1F_{n-1} + V_2F_{n-2} + \ldots + V_nF_0,\ n \geq 1. \tag{10}$$

Безпосередньо перевіряється, що елементу $y = (y_0, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) \in l_p(B)$ відповідає єдиний розв'язок системи Вольтерри (2), який зображується у вигляді

$$x = (F_0y_0, F_1y_0, \ldots, F_ny_0, \ldots) \in l_p(B). \tag{11}$$

Звідси випливає, що послідовність $\{\|F_ny_0\| : n \geq 0\}$ є обмеженою в B для кожного $y_0 \in \in B$, а отже, за принципом рівномірної обмеженості послідовність $\{\|F_n\| : n \geq 0\}$ також є обмеженою. Тому для кожного $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, коректно визначена операторнозначна функція $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_nz^n$. Також внаслідок (9)–(11) довільній фінітній послідовності $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) \in l_p(B)$ відповідає єдиний розв'язок системи (2), який зображується у вигляді $x = \mathcal{F}y$, де оператор $\mathcal{F}$ визначається співвідношенням (9) за допомогою операторів $F_n,\ n \geq 0$, з (10). Отже, $\mathcal{F}$ переводить фінітні послідовності у послідовності з $l_p(B)$.

Із твердження $\mathrm{i}_1)$ і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що визначений за допомогою співвідношення (8) оператор $\mathcal{V}$ є неперервно оборотним. Також для кожної фінітної послідовності y виконується рівність $\mathcal{V}\mathcal{F}y = y$, звідки $\mathcal{F}y = \mathcal{V}^{-1}y$. Оскільки фінітні послідовності утворюють скрізь щільний лінійний многовид в $l_p(B)$, то $\mathcal{F}$ продовжується за неперервністю на $l_p(B)$ і $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{F}$. Застосувавши до оператора $\mathcal{V}$ лему 3, робимо висновок, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|F_n\| < \infty$, а отже, виконуються рівності (7), функція $F(z)$ є коректно визначеною при $|z| \leq 1$ і $F(z) = (V(z))^{-1}$ для кожного $z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1$.

$\mathrm{i}_1) \Leftrightarrow \mathrm{i}_3)$ згідно з лемою 4.

Теорему доведено.

1. *Городній М. Ф.* Про обмежені розв'язки нелінійної системи Вольтерри // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 149– 155.
2. *Колмановский В. Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 4. — С. 42–50.
3. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings // Ann. Math. — 1942. — **43**, № 3. — P. 409–418.
4. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Мир, 1979. — 384 с.
5. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. — 1997. — **38**, № 1. — С. 14–28.

Одержано 31.10.2006