НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 3 • № 2 • 2000

УДК 517 . 927 . 6

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ В ІМПУЛЬСНИХ УМОВАХ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

А. Ю. Лучка, Ю. О. Захарійченко

Ін-т математики НАН України,
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

An equivalence between impulsive systems of differential equations with restrictions and parameters in impulse conditions and integral equations is established.

Встановлюється еквівалентність імпульсних систем диференціальних рівнянь з обмеженнями та параметрами в імпульсних умовах інтегральним рівнянням.

В сучасній науці та її застосуваннях математичними моделями багатьох задач природознавства і техніки є різноманітні класи диференціальних рівнянь та їх систем. За останні десятиліття спостерігається зростання інтересу до вивчення теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Цим рівнянням та їх системам присвячено низку робіт, наприклад [1 – 3], в яких детально аналізуються подібності і відмінності в задачах теорії звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Серед вказаних систем зустрічаються такі, про розв'язки яких відома додаткова інформація.

В даній роботі розглядається імпульсна система диференціальних рівнянь з додатковими обмеженнями, які містять параметри:

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = F(t, x), \tag{1}$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \lambda_i, \quad i = \overline{1, l}, \tag{2}$$

$$\Phi_s(x) = \alpha_s, \quad s = \overline{0, l}, \tag{3}$$

де $A(t)$ — неперервна при $t \in I$, $I = [0, T]$, матриця розміру $m \times m$, $F : I \times R^m \to R^m$, S_i — сталі матриці розміру $m \times m$, $\Phi_s(x) = \{\Phi_1^s(x), \Phi_2^s(x), \dots, \Phi_m^s(x)\}$, де $\Phi_j^s(x), j = \overline{1, m}, s = \overline{0, l}$, — лінійні неперервні функціонали, $\alpha_s \in R^m$, $s = \overline{0, l}$ і $t_i \in (0, T)$ — фіксовані моменти імпульсного впливу.

Ставиться задача: знайти вектор-функцію $x(t)$ і параметри $\lambda_i \in R^m$ такі, щоб задовольнялась система диференціальних рівнянь (1) при $t \in I \setminus \{t_i\}$, справджувались імпульсні умови (2) та обмеження (3).

Задачу (1) – (3) можна звести до інтегрального рівняння. Для цього зобразимо диференційовну при $t \in I \setminus \{t_i\}$ вектор-функцію $x(t)$ у вигляді

$$x(t) = z(t) + u(t), \tag{4}$$

в якому вектор-функція $z(t)$ задовольняє однорідні імпульсні умови і неоднорідні обмеження, а вектор-функція $u(t)$, яку називатимемо керуванням, — лише однорідні обмеження, тобто

$$z(t_i+0) = S_i z(t_i-0), \quad i=\overline{1,l}, \quad \Phi_s(z) = \alpha_s, \quad \Phi_s(u) = 0, \quad s = \overline{0,l}. \tag{5}$$

Тоді, поклавши

$$\lambda_i = u(t_i+0) - S_i u(t_i-0), \quad i=\overline{1,l}, \tag{6}$$

переконаємось, що вектор-функція $x(t)$ буде задовольняти імпульсні умови (2) і обмеження (3).

Підставляючи співвідношення (4) у рівняння (1), отримуємо

$$\frac{dz}{dt} + A(t)z + A(t)u + \frac{du}{dt} = F(t, z+u). \tag{7}$$

Будемо вважати, що керування має вигляд

$$u(t) = B(t)\mu, \tag{8}$$

в якому $\mu \in R^p, p = ml$ — деякий параметр, $B(t)$ — задана неперервно диференційовна при $t \in I \setminus \{t_i\}$ матриця, що задовольняє умову

$$\Phi_s(B(\cdot)) = 0, \quad s=\overline{0,l}, \tag{9}$$

така, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(B(t_i+0) - S_i B(t_i-0))\mu = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{10}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Підставляючи тепер (8) у (7) і вводячи позначення

$$C(t) = A(t)B(t) + \frac{dB(t)}{dt}, \tag{11}$$

отримуємо

$$\frac{dz(t)}{dt} + A(t)z(t) + C(t)\mu = F(t, z(t) + B(t)\mu). \tag{12}$$

Нехай

$$y(t) = M(t)z(t) + N(t)\mu + F(t, z(t) + B(t)\mu), \tag{13}$$

де

$$M(t) = D(t) - A(t), \quad N(t) = U(t) - C(t), \tag{14}$$

$D(t), U(t)$ — деякі задані неперервні матриці розмірності $m \times m$ і $m \times p$ відповідно.

Тоді імпульсна система з керуванням (12), (5), до якої звелась задача (1) – (3), з урахуванням (13), (14) набере вигляду

$$\frac{dz(t)}{dt} + D(t)z(t) + U(t)\mu = y(t), \tag{15}$$

$$z(t_i+0)=S_iz(t_i-0), \quad i=\overline{1,l}, \tag{16}$$

$$\Phi_s(z)=\alpha_s, \quad s=\overline{0,l}. \tag{17}$$

Припустимо, що матриці $D(t)$ і $U(t)$ підібрані таким чином, що однорідна задача (15) – (17) має лише тривіальний розв'язок $(z(t)\equiv 0, \mu=0)$. Тоді, як встановлено в [4], існують матриці $G(t,\tau)$ і $\Gamma(\tau)$ розмірності $m\times m$ і $p\times m$ відповідно, які визначаються однозначно, такі, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (15) – (17) зображається формулами

$$z(t)=h(t)+\int\limits_0^T G(t,\tau)y(\tau)d\tau, \tag{18}$$

$$\mu=\sigma+\int\limits_0^T \Gamma(\tau)y(\tau)d\tau, \tag{19}$$

де вектор-функція $h(t)$ і вектор σ — розв'язок задачі

$$\frac{dh(t)}{dt}+D(t)h(t)+U(t)\sigma=0, h(t_i+0)=S_ih(t_i-0), \Phi_s(z)=\alpha_s, \;\; i=\overline{1,l}, s=\overline{0,l}. \tag{20}$$

Матриці $G(t,\tau)$ і $\Gamma(\tau)$ задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)+D(t)G(t,\tau)+U(t)\Gamma(\tau)=\delta(t-\tau), \tag{21}$$

де $\delta(t-\tau)$ — функція Дірака, і справджуються співвідношення

$$G(t_i+0,\tau)=S_iG(t_i-0,\tau), \quad \Phi_s(G(\cdot,\tau))=0, \quad i=\overline{1,l}, \quad s=\overline{0,l}. \tag{22}$$

Підставивши (19) у (8), для керування отримаємо зображення

$$u(t)=r(t)+\int\limits_0^T R(t,\tau)y(\tau)d\tau, \tag{23}$$

а підставивши (18), (23) у (4), для вектор-функції $x(t)$ будемо мати формулу

$$x(t)=k(t)+\int\limits_0^T K(t,\tau)y(\tau)d\tau, \tag{24}$$

в яких

$$\begin{aligned} &r(t)=B(t)\sigma, k(t)=h(t)+r(t), R(t,\tau)=B(t)\Gamma(\tau),\\ &K(t,\tau)=G(t,\tau)+R(t,\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Якщо тепер підставити (18), (19) у (13), то, виконавши нескладні перетворення, з урахуванням формули (24) для визначення вектор-функції $y(t)$ одержуємо інтегральне рівняння

$$y(t)=p(t)+\int\limits_0^T L(t,\tau)y(\tau)d\tau+F\left(t,k(t)+\int\limits_0^T K(t,\tau)y(\tau)d\tau\right), \tag{26}$$

де

$$p(t) = M(t)h(t) + N(t)\sigma, \quad L(t,\tau) = M(t)G(t,\tau) + N(t)\Gamma(\tau). \tag{27}$$

Отже, питання розв'язності задачі (1) – (3) звелось до аналогічного питання для інтегрального рівняння (26).

Лема. *Для будь-якої диференційовної вектор-функції $v(t)$, яка задовольняє умову (5), і довільного вектора $\gamma \in R^p$ справедливі співвідношення*

$$v(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}v(\tau) + D(\tau)v(\tau) + U(\tau)\gamma\right\}d\tau, \tag{28}$$

$$\gamma = \sigma + \int\limits_0^T \Gamma(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}v(\tau) + D(\tau)v(\tau) + U(\tau)\gamma\right\}d\tau. \tag{29}$$

Справді, в задачі (15) – (17) покладемо

$$y(t) = \frac{d}{dt}v(t) + D(t)v(t) + U(t)\gamma. \tag{30}$$

Тоді з урахуванням умови (5) і позначень $w(t) = z(t) - v(t)$, $\rho = \mu - \gamma$ вказана задача набере вигляду

$$\frac{dw(t)}{dt} + D(t)w(t) + U(t)\rho = 0, \tag{31}$$

$$w(t_i + 0) = S_i w(t_i - 0), \quad i = \overline{1,l}, \quad \Phi_s(w) = 0, \quad s = \overline{0,l}. \tag{32}$$

За припущенням, задача (31), (32) має тільки тривіальний розв'язок $w(t) \equiv 0$, $\rho = 0$. Отже, якщо в задачі (15) – (17) вектор-функція $y(t)$ має вигляд (30), то

$$v(t) \equiv z(t), \quad \gamma = \mu. \tag{33}$$

Оскільки єдиний розв'язок задачі (15) – (17) виражається формулами (18), (19), то, підставивши у них вираз (30) і врахувавши співвідношення (33), отримаємо формули (28), (29).

Теорема. *Якщо $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (26), то вектор-функція*

$$x^*(t) = k(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau)y^*(\tau)d\tau \tag{34}$$

і вектори

$$\lambda_i^* = (B(t_i + 0) - S_i B(t_i - 0))\mu^*, \quad i = \overline{1,l}, \tag{35}$$

де

$$\mu^* = \sigma + \int\limits_0^T \Gamma(\tau)y^*(\tau)d\tau, \tag{36}$$

є розв'язком задачі (1) – (3).

Якщо вектор-функція $x^*(t)$ і вектори $\lambda_i^*, i = \overline{1,l}$, — розв'язок задачі (1) – (3), то вектор-функція

$$y^*(t) = \frac{dz^*(t)}{dt} + D(t)z^*(t) + U(t)\mu^*, \tag{37}$$

в якій

$$z^*(t) = x^*(t) - u^*(t), \tag{38}$$

$$u^*(t) = B(t)\mu^*, \tag{39}$$

а невідомий параметр μ^* визначається з системи лінійних алгебраїчних рівнянь (35), є розв'язком інтегрального рівняння (26).

Доведення. Нехай $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (26). Покажемо, що вектор-функція $x^*(t)$ і вектори $\lambda_i^*, i = \overline{1,l}$, які обчислюються за формулами (34), (35), є розв'язком задачі (1) – (3).

Спочатку встановимо справедливість співвідношень

$$\frac{dk(t)}{dt} + A(t)k(t) = -p(t), \frac{\partial}{\partial t}K(t,\tau) + A(t)K(t,\tau) = \delta(t-\tau) - L(t,\tau). \tag{40}$$

Справді, на основі формул (25), (14), (11), (20) і (27) маємо

$$\frac{dk(t)}{dt} + A(t)k(t) = \frac{dh(t)}{dt} + A(t)h(t) + \frac{dr(t)}{dt} + A(t)r(t) =$$

$$= \frac{dh(t)}{dt} + D(t)h(t) - M(t)h(t) + \left(\frac{dB(t)}{dt} + A(t)B(t)\right)\sigma =$$

$$= -U(t)\sigma - M(t)h(t) + C(t)\sigma = -M(t)h(t) - N(t)\sigma = -p(t).$$

Використовуючи співвідношення (25), (14), (21), (11) і (27), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,\tau) + A(t)K(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau) + A(t)G(t,\tau) + \frac{\partial}{\partial t}R(t,\tau) + A(t)R(t,\tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau) + D(t)G(t,\tau) - M(t)G(t,\tau) + \left(\frac{dB(t)}{dt} + A(t)B(t)\right)\Gamma(\tau) =$$

$$= \delta(t-\tau) - U(t)\Gamma(\tau) - M(t)G(t,\tau) + C(t)\Gamma(\tau) = \delta(t-\tau) - M(t)G(t,\tau) -$$

$$- N(t)\Gamma(\tau) = \delta(t-\tau) - L(t,\tau).$$

Таким чином, враховуючи формули (1), (34), (40) і (26), маємо

$$\frac{dx^*(t)}{dt} + A(t)x^*(t) - F(t, x^*(t)) = \frac{dk(t)}{dt} + A(t)k(t) +$$

$$+\int\limits_0^T \left\{\frac{\partial}{\partial t}K(t,\tau)+A(t)K(t,\tau)\right\} y^*(\tau)d\tau - F\left(t, k(t)+\int\limits_0^T K(t,\tau)y^*(\tau)d\tau\right) =$$

$$= -p(t)+\int\limits_0^T \{\delta(t-\tau)-L(t,\tau)\}y^*(\tau)d\tau - F\left(t, k(t)+\int\limits_0^T K(t,\tau)y^*(\tau)d\tau\right) =$$

$$= y^*(t)-p(t)-\int\limits_0^T L(t,\tau)y^*(\tau)d\tau - F\left(t, k(t)+\int\limits_0^T K(t,\tau)y^*(\tau)d\tau\right) = 0.$$

Далі, на підставі формул (34), (25), (20), (22), (36) і (35) легко переконатись, що вектор-функція $x^*(t)$ і вектори $\lambda_i^*, i=\overline{1,l}$, задовольняють імпульсні умови (2). Дійсно,

$$x^*(t_i+0)-S_i x^*(t_i-0) = k(t_i+0)-S_i k(t_i-0)+$$

$$+\int\limits_0^T \{K(t_i+0,\tau)-S_i K(t_i-0,\tau)\}y^*(\tau)d\tau = h(t_i+0)-S_i h(t_i-0)+$$

$$+r(t_i+0)-S_i r(t_i-0)+\int\limits_0^T \{G(t_i+0,\tau)-S_i G(t_i-0,\tau)\}y^*(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^T \{R(t_i+0,\tau)-S_i R(t_i-0,\tau)\}y^*(\tau)d\tau = (B(t_i+0)-S_i B(t_i-0))\Bigg\{\sigma +$$

$$+\int\limits_0^T \Gamma(\tau)y^*(\tau)d\tau\Bigg\} = (B(t_i+0)-S_i B(t_i-0))\mu^* = \lambda_i^*, i=\overline{1,l}.$$

На підставі формул (34), (25), (20), (22) і (9) маємо

$$\Phi_s(x^*) = \Phi_s(k)+\int\limits_0^T \Phi_s(K(\cdot,\tau))y^*(\tau)d\tau = \Phi_s(h)+\Phi_s(r)+$$

$$+\int\limits_0^T \Phi_s(G(\cdot,\tau))y^*(\tau)d\tau + \int\limits_0^T \Phi_s(R(\cdot,\tau))y^*(\tau)d\tau = \alpha_s +$$

$$+\Phi_s(B(\cdot))\left\{\sigma+\int\limits_0^T \Gamma(\tau)y^*(\tau)d\tau\right\} = \alpha_s, s=\overline{0,l}.$$

Отже, ми показали, що вектор-функція $x^*(t)$ і вектори $\lambda_i^*, i = \overline{1,l}$, які виражаються формулами (34), (35), є розв'язком задачі (1) – (3).

Нехай вектор-функція $x^*(t)$ і вектори $\lambda_i^*, i = \overline{1,l}$, — розв'язок задачі (1) – (3). Покажемо, що вектор-функція $y^*(t)$, яка визначається формулою (37), є розв'язком інтегрального рівняння (26).

Встановимо справедливість співвідношень

$$p(t) + \int\limits_0^T L(t,\tau) y^*(\tau) d\tau = M(t) x^*(t) - M(t) u^*(t) + N(t)\mu^*, \tag{41}$$

$$k(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau) y^*(\tau) d\tau = x^*(t). \tag{42}$$

Справді, враховуючи лему і співвідношення (37), (25), (27), (38) і (39), отримуємо

$$p(t) + \int\limits_0^T L(t,\tau) y^*(\tau) d\tau = p(t) + \int\limits_0^T L(t,\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} z^*(\tau) + D(\tau) z^*(\tau) + U(\tau)\mu^* \right\} d\tau =$$

$$= M(t) \left\{ h(t) + \int\limits_0^T G(t,\tau) \left[\frac{d}{d\tau} z^*(\tau) + D(\tau) z^*(\tau) + U(\tau)\mu^* \right] d\tau \right\} +$$

$$+ N(t) \left\{ \sigma + \int\limits_0^T \Gamma(\tau) \left[\frac{d}{d\tau} z^*(\tau) + D(\tau) z^*(\tau) + U(\tau)\mu^* \right] d\tau \right\} = M(t) z^*(t) +$$

$$+ N(t)\mu^* = M(t) x^*(t) - M(t) u^*(t) + N(t)\mu^*,$$

$$k(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau) y^*(\tau) d\tau = h(t) + \int\limits_0^T G(t,\tau) \left\{ \frac{d}{d\tau} z^*(\tau) + D(\tau) z^*(\tau) + U(\tau)\mu^* \right\} d\tau +$$

$$+ B(t) \left\{ \sigma + \int\limits_0^T \Gamma(\tau) \left[\frac{d}{d\tau} z^*(\tau) + D(\tau) z^*(\tau) + U(\tau)\mu^* \right] d\tau \right\} = z^*(t) + u^*(t) = x^*(t).$$

На основі формул (26), (37), (41), (42), (38), (14), (39), (11) і (1) маємо

$$y^*(t) - p(t) - \int\limits_0^T L(t,\tau) y^*(\tau) d\tau - F\left(t, k(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau) y^*(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \frac{dz^*(t)}{dt} + D(t) z^*(t) + U(t)\mu^* - M(t) x^*(t) + M(t) u^*(t) - N(t)\mu^* -$$

$$-F(t, x^*(t)) = \frac{dx^*(t)}{dt} + D(t)x^*(t) - M(t)x^*(t) - \frac{du^*(t)}{dt} - D(t)u^*(t) +$$

$$+M(t)u^*(t) + U(t)\mu^* - N(t)\mu^* - F(t, x^*(t)) = \frac{dx^*(t)}{dt} + A(t)x^*(t) -$$

$$-\frac{du^*(t)}{dt} - A(t)u^*(t) + C(t)\mu^* - F(t, x^*(t)) = \frac{dx^*(t)}{dt} + A(t)x^*(t) -$$

$$-F(t, x^*(t)) - \left(\frac{dB(t)}{dt} + A(t)B(t)\right)\mu^* + C(t)\mu^* = 0.$$

Таким чином, ми показали, що вектор-функція $y^*(t)$, яка визначається формулою (37), є розв'язком інтегрального рівняння (26).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 312 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 10.10.99